מתמטיקה דיסקרטית

מתוך הרצאות ותרגולים - בדידה

תוכן עניינים

קומבינטוריקה

כללי מניה בסיסיים

- **<u>עקרון הסכום:</u>**

אם A,B קבוצות סופיות וזרות, אז $|A\cup B| = |A| + |B|$.

הוכחה: תהי $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ ותהי $B = \{b_1, b_2, .., b_m\}$.

מכיוון שהקבוצות A,B **זרות**, אז $A\cup B = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m\}$ ***וכל*** האיברים האלה שונים.

לכן $|A\cup B| = m + n = |A| + |B|$.■

❖ מילת מפתח בשאלות - "**או**".

- **<u>עקרון המכפלה:</u>**

אם A,B קבוצות סופיות וזרות אז $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

הוכחה: תהי $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ ותהי $B = \{b_1, b_2, .., b_m\}$.

לכן, $A\cdot B = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_m), (a_2, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_2, b_m), ..., (a_n, b_1), (a_n, b_2), ..., (a_n, b_m)\}$,

וכל האיברים האלה שונים.

מכאן $|A\cdot B| = n\cdot m = |A|\cdot|B|$.■

❖ מילת מפתח בשאלות - "**וגם**".

תזכורת: המכפלה הקרטזית AxB הינה קבוצת כל הזוגות הסדורים (a,b) כך ש- $a\in A,\ b\in B$.

<u>שאלות בסיסיות:</u>

1. בספריה יש 6 ספרים שונים באנגלית, 5 ספרים שונים בצרפתית, ו-10 ספרים שונים בעברית.

א. בכמה דרכים ניתן לבחור ספר אחד בשפה כלשהי?

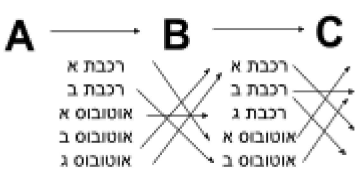
$6 + 5 + 10 = 21$, קבוצת הספרים באנגלית **זרה** לקבוצת הספרים בצרפתית ובעברית.

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור 3 ספרים, אחד בכל שפה?

$6\cdot 5\cdot 10 = 300$, קבוצות הספרים **סופיות וזרות**,

אנו מחפשים שלשות ספר בעברית x ספר בצרפתית x ספר באנגלית.

2. יש אפשרות של 3 אוטובוסים שונים או 2 רכבות שונות כדי להגיע מ-A ל-B ו-2 אוטובוסים שונים או 3 רכבות שונות כדי להגיע מ-B ל-C.



א. כמה סה"כ דרכים יש כדי להגיע מ-A ל-C?

מ-A ל-B יש 5 אפשרויות **וגם** מ-B ל-C יש 5 אפשרויות,

לכן, 5x5=25.

ב. כמה סה"כ דרכים יש כדי להגיע מ-A ל-C כאשר מותר להשתמש **או** רק באוטובוס **או** רק ברכבת?

מ-A ל-B יש 3 אפשרויות להגיע באוטובוס **וגם** מ-B ל-C יש 2 אפשרויות להגיע באוטובוס ולכן $3\cdot 2$.

או מ-A ל-B יש 2 אפשרויות להגיע ברכבת **וגם** מ-B ל-C יש 3 אפשרויות להגיע ברכבת ולכן $2\cdot 3$.

מאחר ומצויין לנו בשאלה 2 אפשרויות הגיע עם מילת המפתח **או**, נעזר בעקרון הסכום כדי להפריד את המקרים בעבור הגעה באוטובוס בלבד **או** בעבור רכבת בלבד, ונעזר בעקרון המכפלה כדי "לקשר" את ההגעה בעבור כל אופציה בין A ל-C ולכן $2\cdot 3\ +\ 3\cdot 2\ =\ 12$.

- **עקרון הסכום המורחב:**

תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות סופיות וזרות זו לזו ומתקיים:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = |A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n| .$$

בעבור קבוצות שלא בהכרח זרות מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n| .$$

הערה: נרצה להשתמש בעקרון זה כאשר נרצה לחלק את הבעיה למקרים זרים או מקרים משותפים.
כאשר נרצה לדעת כמות חיתוכים נשתמש בבינום של ניוטון $\binom{n}{k}$.

- **עקרון המכפלה המורחב:**

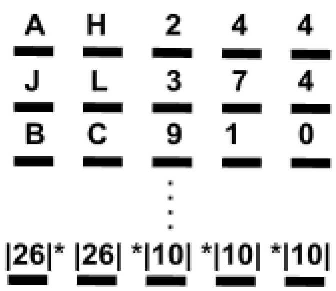
תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות סופיות ומתקיים:

$$|A_1 \ x \ A_2 \ x \ ..... \ x \ A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i| .$$

הערה: נרצה להשתמש בעקרון זה כאשר נרצה לחלק את הבעיה לשלבים שונים.

שאלה בסיסית:

סיסמת משתמש במחשב מסוים בנויה מחמישה תווים, הכוללים 2 אותיות באנגלית **ו**אחר-כך 3 ספרות. כמה סיסמאות **שונות** יש?
נסמן ב- A_i את קבוצת התווים שאפשר להציב במקום ה-i בסיסמה,
עבור i = 1,2,3,4,5. ניתן לזהות כל סיסמה עם חמישייה סדורה $(a_1, a_2, ..., a_5)$
כאשר $a_i \in A_i$ לכל $1 \le i \le n$.
בנוסף, $|\{0,1,2,....,9\}| = 10$, $|\{A,B,C,....,Z\}| = 26$.
מכאן מספר הסיסמאות האפשריות הוא כמספר החמישיות הסדורות השונות:
$|A_1 \ x \ A_2 \ x \ .... \ x \ A_5| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot .... \cdot |A_5| = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.



בעיות מנייה בסיסיות

<u>חשיבות ואי-חשיבות הבחירה:</u>

- **בחירה כאשר הסדר חשוב:** כלומר יש משמעות לאופן הסידור של כל פרמוטציה למשל:
  בחירת האותיות $abc \neq acb$, יש משמעות לסדר הבחירה.
- **בחירה כאשר הסדר אינו חשוב:** אין משמעות לצורת הסידור, למשל:
  $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{a, c, b\} = ..$, בסופו של דבר הם אותו הקבוצה.
- **בחירה כאשר מותר חזרות:** מותר לי לחזור על אותו האיבר שוב ושוב.. למשל:
  $aaa,\ acc,\ aba,\ bbc, bbb...$ וכן הלאה...
- **בחירה כאשר אסור חזרות:** דני חילק 3 פירות שונים ל-3 חברים, לא ייתכן ש-2 חבריו קיבלו את אותו הפרי כי קיים פרי אחד מכל סוג, זו דוגמה למקרה בו אסור חזרות.

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n-1+k}{n-1}$

- <u>**הסדר חשוב ומותר חזרות**</u> n^k :
  מהו מספר הדרכים למלא טופס טוטו (16 משחקים בסימונים x,1,2)?
  בכל אחת מ-16 השורות (משחקים) ניתן למלא 1 מתוך 3 האפשרויות.
  אנו צריכים 16 פעמים לבחור 1 מתוך 3 אפשרויות:
  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 ..... \cdot 3 = 3^{16}$, 16 פעמים הכפלה ב- אופציות שונות, n=3, k=16.

- <u>**הסדר חשוב ואסור חזרות**</u> $\frac{n!}{(n-k)!}$:
  1. 11 שחקני קבוצת הכדורגל רוצים להסתדר לצילום קבוצתי.
     בכמה אופנים הם יכולים להסתדר בשורה אחת לפני הצלם?
     $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 11 = 11!$, כיוון שכל סידור שלהם הוא תמורה של 11 שחקני הקבוצה.

  2. ישנם חמישה אנשים ושלושה כסאות. נרצה לדעת כמה אפשרויות יש להושיב אותם בשלושת הכסאות.
     לכסא הראשון יש 5 אפשרויות, לכסא השני נותר 4 אפשרויות ולכסא השלישי נותר 3 אפשרויות.
     כלומר $3 \cdot 4 \cdot 5$ אנחנו עצרנו כאשר לא היה לנו עוד כסאות להושיב בהם את 2 האנשים הנותרים,
     אז אנחנו נחלק במספר האנשים הנותרים כלומר הסידור הוא: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$ כמו בנוסחה.

  3. כמה מילים בנות 4 אותיות ניתן לבנות מאותיות הא"ב האנגלי (26 אותיות), כשאסור שבמילה אחת תופיע אותה אות יותר מפעם אחת?
     לאות הראשונה יש 26 אפשרויות לשניה יש 25, לשלישית יש 24 ולרביעית יש 23 אפשרויות.
     כלומר:
     $$\frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358,800\ words$$

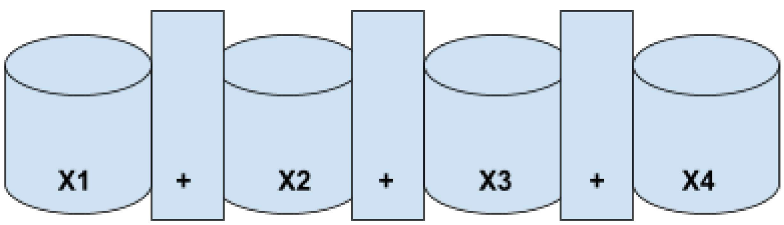
- <u>**בחירה ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב**</u> $\binom{n}{k}$:

1. בכמה דרכים אפשר למלא טופס לוטו?
בטופס לוטו יש לבחור k=6 מספרים שונים כלשהם מתוך המספרים $n = \{1, 2, 3, ..., 45\}$.
מספר הבחירות האפשריות הוא לכן: $\binom{45}{6} = \frac{45!}{6!\cdot(45-6)!} = \frac{45!}{6!\cdot 39!} = \frac{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 8,145,060$.

2. מהו מספר האפשרויות השונות לבחירת ועד בן 3 אנשים מתוך 30 אנשים כאשר אין הבדלי תפקידים בין חברי הוועד? (כל איש בוועד ממלא תפקיד אחד בלבד).
מספר הכפילויות הוא בדיוק כמספר הסידורים האפשריים ל- k=3 שבחרנו,
לכן נחלק ב-!3 כלומר, $\binom{30}{3} = \frac{30!}{3!\cdot(30-3)!}$.

- <u>**בחירה כשמותר חזרות כשהסדר אינו חשוב**</u> $\binom{n-1+k}{n-1}$:

1. נתבונן במשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$.
עבור כמה אפשרויות נוכל לקבל את הסכום 100?
למשל $100 = 100 + 0 + 0 + 0$, או $100 = 30 + 20 + 30 + 20$ וכו'...
ניתן להסתכל על ארבעת הנעלמים כ-תאים ועל סימן החיבור כ-מחיצה המפרידה בין תא לתא:
אנו רוצים לחלק יותר מדי ערכים לפחות תאים, נחשב את n+k-1 ונבחר מתוכם 3 ולכן: $\binom{100+4-1}{3-1}$
.



2. בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים **זהים** ל-n דליים **שונים**?
נגדיר n-1 מחיצות ונכנה אותם 1, וכל הכדורים נכנה 0.
סה"כ צריך את כל המחרוזות באורך k + n-1 ולכן: $\binom{n-1+k}{n} = \binom{n-1+k}{k-1}$.

המקדמים הבינומיים

<u>מולטינום:</u>

הוא וריאציה של הבינום $\binom{n}{k}$.

נתונים n_1 איברים **זהים** מסוג 1, נתונים n_2 איברים **זהים** מסוג 2 ונתונים n_3 איברים **זהים** מסוג 3.

אזי מספר הסידורים שלהם בשורה הוא: $\binom{n_1+n_2+n_3}{n_1,n_2,n_3}$,

כאשר $\binom{n}{k_1,k_2,k_3} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!}$, ניתן להרחיב ליותר מ-3 קבוצות כמובן.

<u>שאלות בסיסיות:</u>

1. נתונים 5 כדורים כחולים, 7 אדומים ו-20 שחורים - בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה?
$\binom{32}{5,7,20} = \frac{32!}{5!\cdot 7!\cdot 20!} = \frac{(5+7+20)!}{5!\cdot 7!\cdot 20!}$.

2. כמה מילים ניתן להרכיב ע"י שינוי סדר האותיות של המילה:
א. Mississippi.
ב. Mississippi, **וגם** אסור 2 "i" צמודות.
(אורך המילה - 11 תווים)

א.	מספר פעמים		ב.	מספר פעמים	
M	1	$\binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}$	M	1	נסדר את כל שאר האותיות חוץ מה-i-ים במילה באורך 7 ⇐ $\binom{7}{1,4,2}$. לכל מילה כזו, נוכל להכניס את 4 ה-"i"-ים רק ברווחים שבין התווים. כך שבכל רווח כזה מותר להכניס רק "i" אחד. 
i	4		i	4	
s	4		s	4	אזי יש 8 מקומות שניתן להכניס אליהם 4 תווי "i" , כלומר $\binom{8}{4}$.
p	2		p	2	ולפי עקרון המכפלה $\binom{7}{1,4,2}\cdot\binom{8}{4}$.

3. IMMUNOELECTROPHORESIS
א. בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות של המילה IMMUNOELECTROPHORESIS?
ב. כמה מתוכן לא מכילות את הרצף HOPE?
ג. כמה מתוכן לא מכילות אף אחד מהרצפים HOPE,SOUTH,TIM?

פתרון סעיף א':

תו	מספר פעמים	תו	מספר פעמים	א.
I	2	C	1	$\frac{21!}{2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!} =$ $\binom{21}{2,2,3,2,2}$
M	2	T	1	
U	1	R	2	
N	1	P	1	
O	3	H	1	
E	3	S	2	
L	1			

פתרון סעיף ב': כדי להפטר מהרצף HOPE אנו כסמן את המילה כ-"תו" אחד כלומר 21-4+1
נשתמש בכלל המשלים, ניקח את הסה"כ ונוריד מהם את המקרים הרעים שלנו: $\frac{21!}{2!\cdot2!\cdot3!\cdot3!\cdot2!\cdot2!} - \frac{(21-4+1)!}{2!^6}$

פתרון סעיף ג': גם כאן נעזר בכלל המשלים והכלה והדחה,

- יחידונים:
  $|HOPE| = \frac{(21-4+1)!}{2!^6}$
  $|SOUTH| = \frac{(21-5+1)!}{2!^4\cdot3!}$
  $|TIM| = \frac{(21-3+1)!}{2!^2\cdot3!^2}$

- חיתוכי זוגות:
  $|HOPE \cap SOUTH| =$ פה יכול להיות לנו מילה "דביקה" כלומר SOUTHOPE, או כל אחד בנפרד.
  לכן, בעבור SOUTHOPE יתקיים $\frac{(21-8+1)!}{2!^4}$
  עבור כל אחד בנפרד זה לא יכול להתקיים כי קיים לנו רק H אחד במחסן המילים ולא ייתכן שנשתמש באות הזאת פעמיים אחד בעבור SOUTH ואחד בעבור HOPE.
  $|HOPE \cap TIM| = \frac{(21-4+1-3+1)!}{2!^4}$
  $|SOUTH \cap TIM| =$ גם כאן לא יכול להיות חיתוך של שניהם מאחר ו T קיימת רק פעם אחת.

- חיתוכי שלשות:
  $|HOPE \cap TIM \cap SOUTH| = \emptyset$

פתרון סופי:

$$\frac{21!}{2!\cdot2!\cdot3!\cdot3!\cdot2!\cdot2!} - \left(\frac{(21-4+1)!}{2!^6} + \frac{(21-5+1)!}{2!^4\cdot3!} + \frac{(21-3+1)!}{2!^2\cdot3!^2} - \frac{(21-8+1)!}{2!^4} - \frac{(21-4+1-3+1)!}{2!^4} - \emptyset + \emptyset \right)$$

$$\frac{21!}{2!\cdot2!\cdot3!\cdot3!\cdot2!\cdot2!} - \left(\frac{(18)!}{2!^6} + \frac{(17)!}{2!^4\cdot3!} + \frac{(19)!}{2!^2\cdot3!^2} - \frac{(14)!}{2!^4} - \frac{(16)!}{2!^4} - \emptyset + \emptyset \right)$$

<u>הבינום של ניוטון:</u>

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$, אז $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$

בעזרת נוסחה זו ניתן לייצג כל משוואת כפל במעלה שנבחר.

בדומה יש לנו נוסחה עבור פיתוח של סכום של יותר מ-2 מחוברים: $(a+b+c)^n=\sum\binom{n}{x_1,x_2,x_3}\cdot a^{x_1}\cdot b^{x_2}\cdot c^{x_3}$

- כאשר נרצה לבדוק את המקדם של $x^2\cdot y^3$ בביטוי $(x+2y)^5$ נבצע: $\binom{5}{2,3}\cdot(x^2)\cdot(2y)^3 = \frac{5!}{4!}\cdot 8=40x^2\cdot y^3$
  כאשר החזקה היא n וה-k היא החזקות המרכיבות את n.

<u>שאלות:</u>

1. מצאו את המקדם של a בפיתוח של $(a^2+\frac{1}{a})^5$.

   לפי נוסחת הבינום: $(a^2+\frac{1}{a})^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}\cdot(a^2)^k\cdot(\frac{1}{a})^{5-k}$.

   נמצא ראשית את ה-k עבורו החזקה של a היא 1 מכיוון שביקשו ממנו מקדם ל- a^1 (הכי קל זה בניסוי ותהיה):

   בעזרת: $\binom{n}{k}\cdot(a^2)^k\cdot(\frac{1}{a})^{5-k}$ **.**

   k=0 $\frac{1}{a^5}=(\frac{1}{a})^5\cdot a^{2\cdot 0}\cdot\binom{5}{0}$ ⇐ ��

   k=1 $5\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{a^2}{a^4}\cdot\binom{5}{1}=(\frac{1}{a})^4\cdot a^{2\cdot 1}\cdot\binom{5}{1}$ ⇐ ��

   k=2 ⇐ $10\cdot\frac{a^4}{a^3}=\frac{a^4}{a^3}\cdot\binom{5}{2}=(\frac{1}{a})^3\cdot a^{2\cdot 2}\cdot\binom{5}{2}$ ⇐ ☑

   ונקבל $10\cdot a^1=\frac{5!}{2!\cdot 3!}$ כאשר 10 הוא המקדם הדרוש.

2. מהו המקדם של x^8 בפיתוח של $(3x^2-2x+7)^6$.

   נבדוק מתי נקבל בחזקה 8 (הבדיקה דיי נאיבית):

   $(3x^2-2x+7)^6=\sum_{*\text{מקרא}}\binom{6}{a,b,c}\cdot(3x^2)^a\cdot(2x)^b\cdot(7)^c$, (מקרא = כל האפשרויות ל- $a,b,c\in\mathbb{N}$ כך ש- $a+b+c=6$).

   a=0 כדי לקבל את החזקה 8 צריך b=2, וזה לא טוב לנו. ⇐ ��

   a=1 $(3x^2)^1\cdot(-2x)^b$..... ⇐ צריך ש-b יהיה 6 ועברנו את המכסה. ⇐ ��

   a=2, $(3x^2)^2\cdot(-2x)^4\cdot 7^0$, פה זה אכן מסתדר, סכום החזקות הוא 6, נבחר $a=2,b=4,c=0$ ⇐ ☑

   אבל! צריך לבדוק אם יש עוד אפשרויות...

   a=3 $(3x^2)^3\cdot(-2x)^2\cdot(7)^1$, c=1 כדי להשלים ל-6, b=2 כדי שנקבל x^8

   אז גם האפשרויות של $a=3,b=2,c=1$ טובה ⇐ ☑

   a=4 $(3x^2)^4\cdot(-2x)^0\cdot(7)^2$, c ישלים לנו ל-6 עם a, וגם b יהיה חייב להיות אפס.

   צריך גם צריך את: $a=4,\ b=0,\ c=2$ ⇐ ☑

   a=5 $(3x^2)^5$ נותן חזקה 10, לכן זה כבר לא טוב! �� **.**

   לסיכום, נחשב את המקדמים של המקרים הטובים שלנו 2,3,4:

   2 ⇒ $\binom{6}{2,4,0}\cdot(3x^2)^2\cdot(-2x)^4\cdot(7)^0=\frac{6!}{2!\cdot 4!\cdot 0!}\cdot 9x^4\cdot 16x^4\cdot 1=2160\cdot x^8$

   3 ⇒ $\binom{6}{3,2,1}\cdot(3x^2)^3\cdot(-2x)^2\cdot(7)^1=\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 0!}\cdot 27x^6\cdot 4x^2\cdot 7=45,360\cdot x^8$

   4 ⇒ $\binom{6}{4,0,2}\cdot(3x^2)^4\cdot(-2x)^0\cdot(7)^2=\frac{6!}{4!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot 81x^8\cdot 49=59,535\cdot x^8$

   סכימה סופית של תוצאות המקדמים:

   $2160\cdot x^8+45,360\cdot x^8+59,535\cdot x^8=107,055\cdot x^8$ ⇐ **זה המקדם הדרוש**

3. מהו המקדם של x^{10} בפיתוח של $(x^4+3x^2+7)^5$?

נסמן ב-a את מספר הפעמים שבחרנו x^4 , ב-b את מספר הפעמים שבחרנו $3x^2$ וב-c את מספר הפעמים שבחרנו 7.

$(x^4+3x^2+7)^5 = \sum_{*\text{מקרא}} \binom{5}{a,b,c} \cdot (x^4)^a \cdot (3x^2)^b \cdot (7)^c$, (* מקרא = כל האפשרויות ל- $a,b,c \in \mathbb{N}$ כך ש- $a+b+c=5$).

a=0 $\Leftarrow (x^4)^0 \cdot (3x^2)^5 \cdot (7)^0$, a=0 b=5 c=0 $\Leftarrow$ ☑

a=1 $\Leftarrow (x^4)^1 \cdot (3x^2)^3 \cdot (7)^1$, a=1 b=3 c=1 $\Leftarrow$ ☑

a=2 $\Leftarrow (x^4)^2 \cdot (3x^2)^1 \cdot (7)^2$, a=2 b=1 c=2 $\Leftarrow$ ☑

a=3 $\Leftarrow (x^4)^3 \cdot ....$, נפסל מכיוון שכבר מכאן חרגנו מ-12 ⇍ �� .

לסיכום, נחשב את המקדמים של המקרים הטובים שלנו 0,1,2:

0 $\Rightarrow \binom{5}{0,5,0} \cdot (x^4)^0 \cdot (3x^2)^5 \cdot (7)^0 = \frac{5!}{0!\cdot 5!\cdot 0!} \cdot 1 \cdot 243x^{10} \cdot 1 = 243 \cdot x^{10}$

1 $\Rightarrow \binom{5}{1,3,1} \cdot (x^4)^1 \cdot (3x^2)^3 \cdot (7)^1 = \frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!} \cdot x^4 \cdot 27x^6 \cdot 7 = 3780 \cdot x^{10}$

2 $\Rightarrow \binom{5}{2,1,2} \cdot (x^4)^2 \cdot (3x^2)^1 \cdot (7)^2 = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} \cdot x^8 \cdot (3x^2) \cdot 49 = 4410 \cdot x^{10}$

סכימה סופית של תוצאות המקדמים:

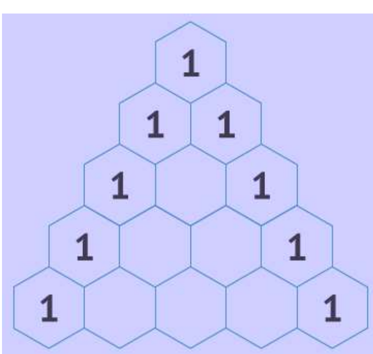
זה המקדם הדרוש $\Leftarrow 243 \cdot x^{10} + 3780 \cdot x^{10} + 4410 \cdot x^{10} = 8433 \cdot x^{10}$

<u>**סד"פ מקדם בינומי :**</u>

1. תחילה נציג את הפיתוח בעזרת נוסחת הבינום של ניוטון.
2. נגדיר חזקה מקסימלית שאסור לעבור אותה בעזרת חישוב סכום חזקות.
3. נתחיל לבחון מקרים בעבור a=0, וכו'... כך שתמיד סכום החזקות של כל הפרמטרים הוא שווה לחזקה של הפיתוח ולא לשום סכום אחר...
4. ברגע שהגענו לפסילה ראשונה שקל לראות בעין שלא ניתן למצוא עוד מקדמים נאסוף את כל המקרים הטובים שלנו, נציב כל אחד מהם בבינום של ניוטון ואז נסכום אותם ביחד ונקבל את המקדם הדרוש לתרגיל.

<u>משולש פסקל:</u>

הוא בעצם אוסף המקדמים של הבינום, נוכל לחשב כל שורה של המשולש כ- $\binom{n = \text{מספר השורה}}{k = \text{רץ מ-1 ועד } n}$



משולש פסקל:

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1
7: 1 7 21 35 35 21 7 1
8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13: 1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
15: 1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

זהויות קומבינטוריות

הוכחות אלגבריות וקומבינטוריות:

שנתבקש להוכיח זהות בצורה קומבינטורית ואלגברית יהיו 2 צדדים למשוואה.
הוכחה אלגברית היא הוכחה שמשתמשים בשיטות אלגבריות כדי להגיע לזהות.
הוכחה קומבינטורית היא מתן סיפור לבעיה ולפתרון של הבעיה.

<u>שאלות:</u>

1. הזהות הקלאסית, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

<u>הוכחה אלגברית:</u> $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$.■

2.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u> 2^n הינו הגודל של קבוצת החזקה של קבוצה בגודל n.
נניח $A=\{1,...,n\}$, ומצד שני, את קבוצת החזקה ניתן לסווג לפי הגודל של כל קבוצה.

תתי קבוצות בגודל 0	**תתי קבוצות בגודל 1**	**.....**	**תתי קבוצות בגודל n**
$\varnothing$	$\{1\},\{2\},...\{n\}$		A
פה יש $\binom{n}{0}$	פה יש $\binom{n}{1}$		פה יש $\binom{n}{n}=1$

ולכל סוג, של תתי קבוצות בגודל i יש בו $\binom{n}{i}$ תתי קבוצות.
לכן דרך נוספת לספור את מס' האיברים בקבוצת החזקה היא ע"י $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$.■

3. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\binom{2n}{n}$.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u> אגף ימין = מספר תתי הקבוצות בגודל n מתוך 2n איברים $\{1,2,...,2n\}$.
אגף שמאל = $\binom{n}{i}$ =מספר האפשרויות לבחור תת קבוצה בגודל i מתוך $\{1,....,n\}$,
$\binom{n}{n-i}$ = מספר האפשרויות לבחור תת קבוצה בגודל n-i מתוך $\{n+1,n+2,....,2n\}$.
לפי עקרון המכפלה $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ = מספר תתי הקבוצות בגודל n כאשר i איברים נבחרים מתוך $\{1,....,n\}$,
ולפי עקרון הסכום, נקבל את הסכום הדרוש. ■

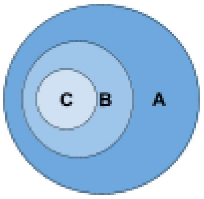
4. $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\cdot\binom{n-m}{k-m}$.

<u>הוכחה אלגברית:</u> נפשט את 2 האגפים:

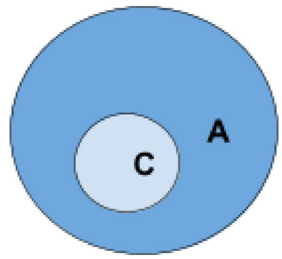
אגף ימין = $\binom{n}{m}\cdot\binom{n-m}{k-m}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!\cdot((n-m)-(k-m))!}=\frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(k-m)!\cdot(n-m-k+m)!}=\frac{n!}{m!\cdot(k-m)!\cdot(n-k)!}$

אגף שמאל = $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{m}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!}=\frac{n!}{m!\cdot(k-m)!\cdot(n-k)!}$.■

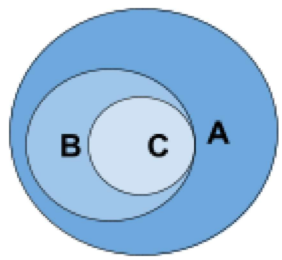
<u>הוכחה קומבינטורית:</u> נתבונן ב- $\binom{k}{m}\cdot\binom{n}{k}$ ונחשוב מה התהליך או האובייקט הקומבינטורי שמתואר פה? נחשוב על קבוצה A בגודל $|A| = n$, נבחר ראשית תת קבוצה $|B| = k$ ואז נבחר מתוך B תת קבוצה $|C| = m$ אז מספר האפשרויות לבחור מתוך קבוצה בגודל n, תת קבוצה בגודל k ולאחר מכן לבחור מתוך הקבוצה בגודל k, עוד פעם תת קבוצה בגודל m הינו: $\binom{k}{m}\cdot\binom{n}{k}$.



נתבונן עכשיו ב- $\binom{n-m}{k-m}\cdot\binom{n}{m}$,



שלב ראשון - פה יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות.



שלב שני - נבחר את הקבוצה B\C מתוך הקבוצה A\C

נשים לב ש- $|A\backslash C| \;=\; n-m\,,\; |B\backslash C| \;=\; k-m$.

פה יש $\binom{n-m}{k-m}$ אפשרויות, למרות שהחלפנו את הסדר, תיארנו את אותה הבחירה בדיוק.■

מספרי קטלן

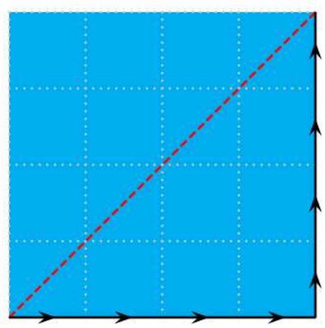
הגדרה: סדרה באורך 2n שיש בה n אפסים ו-n אחדות תקרא מאוזנת
אם בכל תחילית (= תת מחרוזת הכוללת את תחילת המילה)מתקיים שמספר האפסים גדול או שווה למספר האחדות.

מספרי קטלן הם מספרים אשר מתארים פתרון לבעיות מורכבות, נציג בעיה ונמצא את נוסחת הנסיגה.
לאחר מכן נראה שנוסחת הנסיגה תקפה לעוד בעיה נוספת.
זוהי דוגמא קלאסית לשימוש בפונקציה חח"ע ועל כדי לחשב גודל של אובייקט קומבינטורי.
תזכורת- קבוצות סופיות A,B וקיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא חח"ע ועל, אזי $|A| = |B|$.

__דוגמה:__ קיימת מילה בינארית באורך 2n המורכבת מ- $\{(,)\}$ כאשר הסוגריים מסודרים בסדר חוקי (מאוזנת) יש לנו n סוגריים מכל סוג למשל מילה בינארית באורך 3 היא:

$$\{\,()\;()\;()\,,\;(())\;()\,,\;()\;(())\,,\;((()))\,,\;(()\;())\,\} \;=\; 5$$

סדרת קטלן היא סדרה מוכרת: 1,1,2,5,14,42,132 ...
נוסחת קטלן: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ (הוכח בהרצאה).



שאלה:
במערכת בחירות זכו שני המועמדים ב-n קולות כל אחד.
בכמה אופנים ניתן לספור את 2n הקולות כך שמועמד אחד יוביל (או שיהיה תיקו) במשך כל תהליך המנייה?

פתרון: נסמן את המועמדים A ו-B. נבחר את המועמד המוביל ב-2 דרכים,
נניח מעתה ש-A הוא המוביל.
נסמן כל קול שהוענק למתמודד A ב-0 וכל קול שהוענק למתמודד B ב-1.
אם כן, יש התאמה חח"ע ועל בין ספירות הקולות כך שמועמד A מוביל (או ליתר דיוק, בשום שלב אינו מפגר אחרי מועמד B) לבין סדרות של n אפסים ו-n אחדות כך שבכל תחילית של הסדרה מספר האפסים גדול או שווה למספר האחדים.
מספר הסדרות הנ"ל הוא מספר קטלן $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
סה"כ הפתרון הוא אם כן, $\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$.

שאלה: נתונות 2 מחסניות $S_1,\ S_2$.
מכניסים ומוציאים מ- S_1 סה"כ n איברים ורושמים סדרה של כניסה \ יציאה .
מכניסים ומוציאים מ- S_2 סה"כ m איברים ורושמים סדרה של כניסה \ יציאה .
בכמה דרכים ניתן לאחד בין 2 הרשימות של 2 המחסניות?

פתרון: ראשית, לכל מחסנית בנפרד יש C_n אפשרויות לרשימה.
ל- S_1 יש C_n רשימות אפשריות כל אחת באורך 2n.
ל- S_1 יש C_m רשימות אפשריות כל אחת באורך 2m.
כעת יש לנו 2 רשימות שנרצה לאחד לרשימה אחת.
כדי לאחד, נרצה לבחור את המקומות לתווים של הרשימה הראשונה ואז נכניס לשם לפי הסדר את התווים של הרשימה הראשונה $\binom{2n+2m}{2n}$ אפשרויות ובמקומות הפנויים נכניס לפי הסדר את הרשימה השניה.
לסיכום : $\binom{2n+2m}{2n} \cdot C_n \cdot C_m$.

עקרון ההכלה וההדחה

מסקנה הנובעת מעקרון הסכום המורחב:

מסקנה: לכל שתי קבוצות סופיות A,B מתקיים $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

הוכחה: הקבוצות $A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cap B$ זרות זו לזו ואיחודן הוא $A \cup B$.

על פי עקרון הסכום המורחב נקבל: $|A \cup B| = |\ (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)\ | = \ |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B|$.

על פי הגדרה: אם A,B קבוצות סופיות ו- $A \subseteq B$ אז $|B \backslash A| = |B| - |A|$ ומתקיים:

$$|A \backslash B| = |A \backslash (A \cap B)| = |A| - |A \cap B|$$

$$|B \backslash A| = |B \backslash (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|$$

כי $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$. לכן,

$|A \cup B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B| = |A| - |A \cap B| + \ |B| - |A \cap B| \ + \ |A \cap B| = \ |A| \ + \ |B| \ - \ |A \cap B|$.■

דוגמה: בכיתה מסוימת לומדים 15 תלמידים אלגברה, 12 לומדים מתמטיקה בדידה ו-9 תלמידים לומדים את 2 הקורסים. כמה תלמידים לומדים **לפחות** את אחד משני הקורסים? (זאת אומרת אלה שלא לומדים את שניהם).

פתרון: תהיינה קבוצה A קבוצת התלמידים שלומדים אלגברה, ו-B קבוצת התלמידים שלומדים בדידה.

אם כן, $|A| = 15,\ \ |B| = 12$. קבוצת התלמידים שלומדים את 2 הקורסים היא $|A \cap B| = 9$.

קבוצת התלמידים שלומדים את אחד משני הקורסים **לפחות** היא $A \cup B$, ועל פי הטענה גודלה הוא:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \ 15 \ + \ 12 \ - \ 9 \ = \ 18$.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

דוגמה: $|A| = |B| = |C| = 10$, $|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 1$.

ובאופן כללי: תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות **סופיות** אזי:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - ....(-1)^{n-1} \cdot \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

נשים לב, שאם **לכל** בחירה של k קבוצות מתוך n הקבוצות, הגודל של החיתוך **זהה** אזי ניתן לחשב כך:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot (k \text{ גודל החיתוך של קבוצות})$$

ה- $\binom{n}{k}$ כאן כמספר האפשרויות לבחור k קבוצות מתוך ה-n קבוצות.

$$\left|B_1 \cup B_2 \cup .... \cup B_n\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1 < ... < i_k} \left|B_{i_1} \cap ... \cap B_{i_k}\right|$$

עקרון המשלים:

נשתמש בעיקרון המשלים כאשר רוצים שנפתור בעיה המצריכה מאיתנו לסדר או לפזר עצמים / ערכים ולאחר מכן לפתור את הבעיה המשלימה.

לדוגמה:

בכמה דרכים שונות ניתן לקבל את הסכום 18 מ-4 הטלות קובייה?

נסמן ונגדיר X_i כאשר $1 \le X_i \le 6$, $1 \le i \le 4$, כלומר אנו רוצים לחשב: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 18$.

אם מפני שבכל קובייה יש לפחות את הערך מספר 1, אז נגדיר:

$Y_i = X_i - 1$ ומכאן אנו רוצים לחשב: $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = (18 - 1 - 1 - 1 - 1) = 14$.

נעזר בכלל ההכלה וההדחה לפיו נגדיר שבתא ה-A_i ישנה חריגה, כלומר נחסיר 6 מהסה"כ ונקבל:

$A_i = \binom{(18-1)-6}{3}$ כאשר בסך הכל = $\binom{17}{3} = \binom{14+3}{3}$.

$$\binom{17}{3} - \binom{4}{1}\cdot\binom{11}{3} + \binom{4}{2}\cdot\binom{5}{3} - \emptyset = 80$$

אי סדר מלא:

נתחיל בדוגמה לפיה יש לנו 5 תאים: _ _ _ _ _ , כאשר בכל תא יש מספר אשר לא שווה למיקום שלו.

לדוגמה:

4 3 5 1 2 ⇐ זה אי סדר מלא.

5 1 3 4 2 ⇐ זה אי סדר חלקי מפני שהמספרים 3,5 נמצאים במקומם (זה נקרא נקודות שבת).

$$n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e} \Leftarrow \text{זה אי סדר מלא}$$

שאלה: בכמה דרכים ניתן לסדר את $\{1,2,3,4\}$ כך ששום מספר לא יהיה במקומו?

פתרון: נשתמש בהכלה והדחה, נגדיר ונסמן:

S = סה"כ הפרמוטציות האפשריות $5!$.

A_i = קבוצת האפשרויות כך שהמספר במקום ה-i נמצא במקומו.

$\left|A_i \cap A_j\right|$, $i \ne j$ = קבוצת החיתוכים האפשריים.

$$5! \;-\; \left(\binom{4}{1}\cdot 3! - \binom{4}{2}\cdot 2! + \binom{4}{3}\cdot 1! - \emptyset \right)$$

$\binom{4}{1}\cdot 3!$ ⇐ בחירת איבר 1 אשר יהיה במקומו ולשאר המספרים יהיה !3 אופציות סידור.

$\binom{4}{2}\cdot 2!$ ⇐ חיתוך זוגות ולשאר המספרים יהיה !2 אופציות סידור וכו'...

שאלות בהכלה והדחה:

1. בכמה דרכים ניתן לחלק 20 סוכריות **שונות** ל-5 ילדים כך ש:
א. אין הגבלות.
ב. הילד הראשון והשני יקבלו **בדיוק** סוכרייה אחת.
ג.הילד הראשון והשני יקבלו **לפחות** סוכרייה אחת.

פתרון:
א. 5^{20} (עבור כל סוכריה נבחר 1 מבין 5 הילדים).
ב. $\binom{20}{1}\binom{19}{1}\cdot 3^{18}$.
ג. סה"כ האפשרויות פחות האפשרויות בהן לפחות אחד מ-2 הילדים הראשונים לא יקבל.
נגדיר : A_1 = מספר האפשרויות שילד הראשון לא קיבל סוכרייה.
A_2 = מספר האפשרויות שילד השני לא קיבל סוכרייה.
נרצה לחשב את $(A_1 \cup A_2)$ - הסה"כ.
נשים לב, ש- $A_1 \cap A_2$ לא ריק! לכן כדי לחשב את גודל האיחוד לא מספיק לחבר את הסכומים אלא:
$$|A \cap B| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$|A_1 \cap A_2|$ ⇐ מספר האפשרויות שבהם גם הראשון וגם השני לא קיבלו אפילו סוכרייה אחת.
ולכן, סה"כ - $|A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$
$$5^{20} - 4^{20} - 4^{20} + 3^{20}$$

2. לראובן 8 חברים. בכל ערב הוא מזמין בדיוק 4 חברים לארוחת ערב. ראובן הבטיח שכל חבר יוזמן **לפחות** פעם אחת. בכמה דרכים יכול ראובן להזמין את חבריו לארוחות ערב במשך שבעה ימים רצופים ועדיין לקיים את הבטחתו?

פתרון: נגדיר A_i= מספר האפשרויות להזמין חברים כך שהחבר ה-i לא מוזמן כלל.
עבור $1 \le i \le 8$. הפתרון שנרצה הוא המשלים של $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8$
זאת אומרת, את $U - (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8)$ || U ⇐ זה הסה"כ בלי הגבלות.
נחשב את U.
$U = \binom{8}{4}^7$ ⇐ במשך 7 ערבים, ראובן צריך לבחור 4 חברים מתוך ה-8 שלו.
כעת נמלא את הטבלה הבאה:

חיתוך של k קבוצות	גודל החיתוך	כמה כאלה יש?
חיתוך של קבוצה אחת, k=1	$\lvert A_i \rvert = \binom{7}{4}^7$ צריך 7 פעמים לבחור 4 מתוך כל החברים **חוץ** מהחבר ה-i.	$\binom{8}{1} = 8$
חיתוך של 2 קבוצות, k=2	$\lvert A_i \cap A_j \rvert = \binom{6}{4}^7$ 7 פעמים לבחור מתוך כל החברים למעט החבר ה-i והחבר ה-j.	$\binom{8}{2}$
חיתוך של 3 קבוצות, k=3	$\lvert A_i \cap A_j \cap A_k \rvert = \binom{5}{4}^7$	$\binom{8}{3}$
חיתוך של 4 קבוצות k=4	$\lvert A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r \rvert = \binom{4}{4}^7$	$\binom{8}{4}$
לכל $5 \le k$	אי אפשר לבחור k=4 חברים מתוך n=3 .	$\binom{8}{k}$

כעת נרכז את הנתונים, כאשר k זוגי זה **במינוס**, כאשר k אי-זוגי זה **בפלוס**.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8| = 8 \cdot \binom{7}{4}^7 - \binom{8}{2}\cdot\binom{6}{4}^7 + \binom{8}{3}\cdot\binom{5}{4}^7 - \binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}^7 + \emptyset$$

כזכור אנחנו רוצים את הסה"כ **פחות** הפתרון הזה אז:

$$\binom{8}{4}^7 - \left(8 \cdot \binom{7}{4}^7 - \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4}^7 + \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4}^7 - \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}^7 + \emptyset \right)$$

3. תהי X קבוצת כל המילים באורך 10 המורכבות מהאותיות של הקבוצה $\sum = \{a,b,c\}$.

א. מהו $|X|$? - 3^{10}.

ב. כמה מילים יש ב-X שבהן כל אות מופיעה **לפחות** פעם אחת? -

$$3^{10} - \left(\binom{3}{1}(3-1)^{10} - \binom{3}{2}(3-2)^{10} + 0 \right) = 3^{10} - (3 \cdot 2^{10} - 3)$$

בכל פעם אני אבחר אות שלא תופיע כלל ואז 2 אותיות שלא יופיעו וכו' בעזרת $\binom{3}{1}, \binom{3}{2}...$

ובעבור כל אות שאני מוריד אני גם מחסיר n-1 כלומר $3^{10}, 2^{10}, 1^{10}$.

ג. כמה מילים יש ב-X שבהן האות a מופיעה **לכל היותר** פעם אחת, **וגם** האות b מופיעה **לכל היותר** פעם אחת? - $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1} + 10 + 10 + 1 = 111$

ד. כמה מילים יש ב-X שבהן כל אות מופיעה לפחות פעמיים?

$$3^{10} - \left(\binom{3}{1} \cdot 2^{10} + \binom{3}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot 2^9 \right) + \binom{3}{2} \cdot 111 = 40,950$$

סה"כ פחות כל המקרים שאות אחת לא מופיעה בכלל או כל המקרים שאות מופיעה פעם אחת בלבד ועוד המקרה בו 2 אותיות נספרו פעם אחת בלבד כל אחת או לא הופיעו כלל.

4. המילה AMALGAMATE.

תו	מופעים	תו	מופעים
A	4	G	1
M	2	T	1
L	1	E	1

א. בכמה דרכים ניתן לסדר את אותיות מילה זו? $\binom{10}{4,2} = \frac{10!}{4! \cdot 2!}$

ב. בכמה מתוכן T מופיעה אחרי האות G (לא בהכרח צמודה אליה)? $\frac{\binom{10}{4,2}}{2}$

- מאחר ו-2 האותיות מופיעות פעם אחת כל אחת, בכל פרמוטציה פעם T יהיה לפני G וכן להפך כאותו מספר פרמוטציות, לכן נחלק ל- כדי להוריד את המקרה בו T מופיע לפני G.

ג. בכמה מתוך הדרכים בסעיף א' יש M המופיעה אחרי A (לא בהכרח צמודה אליה)?

$$\binom{10}{4,2} - \frac{\binom{10}{4,2}}{\binom{6}{2}}$$

5. מה מספר הסידורים **ללא חזרות** של MATHEMATICS **שאינן** מכילות את תתי-הסדרות CAT,MAT,THE?
פתרון: נשים לב שפה אין סימטריה.

תו	מופעים	תו	מופעים
M	2	A	2
T	2	H	1
E	1	I	1
C	1	S	1

סה"כ 11 תווים, 3 מתוכם חוזרים פעמיים.
נגדיר: $A_1 =$ הרצף MAT מופיע.
$A_2 =$ הרצף CAT מופיע.
$A_3 =$ הרצף THE מופיע.
סה"כ פרמוטציות $\binom{11}{2,2,2} = \frac{11!}{2!^3}$.
$|A_1| =$ לכאורה: $(11-3+1)!$, נתייחס אל MAT כ-"תו" אחד.
אבל ספרנו פעמיים את המקרים שבהם MAT מופיע פעמיים (מאחר וכל אות במילה מופיעה פעמיים).
לכן, נפחית את המקרים האלה: $(11-3+1-3+1)!$ ואז נחלק ב-!2 כי יש 2 "תווים" זהים (MAT ו-MAT).
ונקבל: $|A_1| = (11-3+1)! - \frac{(11-3+1-3+1)!}{2!} = 9! - \frac{7!}{2!}$.
$|A_2| =$ נתייחס אל CAT כ-"תו" אחד - $(11-3+1)!$.
$\frac{(11-3+1)!}{2!} = \frac{9!}{2!} \Leftarrow$!2 זה בגלל שנותרו לנו מהסה"כ עוד 2 תווים זהים (M).
$|A_3| =$ נתייחס אל THE כ-"תו" אחד - $(11-3+1)!$.
$\frac{(11-3+1)!}{2!\cdot 2!} = \frac{9!}{2!\cdot 2!} \Leftarrow$ זה בגלל שנותרו לנו מהסה"כ עוד 2 תווים זהים (M) וגם 2 תווים זהים (A).
$|A_1 \cap A_2| =$ מופיע גם MAT וגם CAT.
נתייחס אל CAT כ-"תו" אחד וגם אל MAT כ-"תו" אחד כלומר - $(11-3+1-3+1)! = 7!$.
$|A_1 \cap A_3| =$ מופיע גם MAT וגם THE **אבל** נשים לב כי ייתכן גם מחובר MATHE הבנוי משניהם (דביק).
נתייחס אל MAT כ-"תו" אחד **וגם** אל THE כ-"תו" אחד **או** אל MATHE כ-"תו" אחד.
אני מזכיר כי אנחנו אוספים את כל המקרים "הרעים" שלנו ולכן נחבר את המקרה הדביק אליהם.
כלומר - $(11-3+1-3+1)! + (11-5+1)! = 7! + 7!$.
אבל נפחית את המקרים כאשר מופיע גם MAT וגם THE וגם עוד פעם MAT (קורה כשיש MATHE ו-MAT).
כלומר - $(11-3+1-5+1)! = 5!$.
ולכן - $7!+7!-5!$.
$|A_2 \cap A_3| =$ מופיע גם CAT וגם THE **אבל** נשים לב כי גם כאן ייתכן מחובר CATHE (דביק).
נתייחס אל CAT כ-"תו" אחד **וגם** אל THE כ-"תו" אחד **או** אל CATHE כ-"תו" אחד.
בעבור CAT או THE $\frac{(11-3+1-3+1)!}{2!} = \frac{7!}{2}$ זאת מכיוון שנשאר לנו 2 תווים זהים (M).
בעבור CATHE $\frac{(11-5+1)!}{2!} = \frac{7!}{2}$ גם פה נשאר לנו 2 תווים זהים (M).
ולכן, $\frac{7!}{2} + \frac{7!}{2} = 2\cdot\frac{7!}{2} = 7!$.
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$ מופיע גם CAT גם THE וגם MAT.
מקרה א' MAT, CATHE כלומר $(11-3+1-5+1)! = 5!$
מקרה ב' CAT, MATHE כלומר $(11-3+1-5+1)! = 5!$.
נחבר את 2 המקרים ונקבל $5! + 5!$.
לסיום:

$$\binom{11}{2,2,2} - \left(9! - \frac{7!}{2!} + \frac{9!}{2!} + \frac{9!}{2!\cdot 2!} - 7! - (7!+7!-5!) - 7! + 5! + 5! \right)$$

עקרון שובך היונים

בכל חלוקה של n+1 יונים ל-n שובכים קיים תא שבו לפחות יש 2 יונים.

<u>במילים אחרות:</u> אין פונקציה חח"ע מקבוצה A, בגודל n+1 לקבוצה B, בגודל n.

הוכחה: נניח בשלילה שאין תא שיש בו 2 יונים לפחות מכאן שבכל התאים יש לכל היותר יונה אחת.
נספור את היונים n תאים x יונה 1 בכל תא = n.
אבל- יש n+1 יונים, סתירה.

עקרון שובך היונים המורחב: בכל חלוקה של $k \cdot n+1$ יונים ל-n תאים, קיים תא שבו לפחות k+1 יונים.

שאלות:

1. צלף מתאמן ביריות ופוגע ב-5 נקודות בלוח מטרה שמידותיו הן 2x2.
הוכיחו כי קיימת 2 פגיעות על לוח המטרה שהמרחק ביניהן הוא $\sqrt{2}$ מטר לכל היותר.
פתרון: נחלק את הלוח ל-4 חלקים כך:
לכל ריבוע קטן מתקיים שאורך האלכסון הינו $\sqrt{2}$.
מכאן שלכל 2 נקודות על הריבוע הקטן המרחק ביניהן הוא לכל היותר $\sqrt{2}$.
נגדיר את 4 הריבועים הקטנים להיות שובכים ונגדיר את 5 הפגיעות להיות יונים.
מכאן שלפי עקרון שובך היונים יש שובך ובו 2 יונים.
אז, 2 היונים הללו הן נקודות שהמרחק ביניהן לא גדול מ- $\sqrt{2}$.

■

2. הוכיחו שקיימים $a \neq b,\ a,b \in \mathbb{N}^+$ כך ש- $57|(2^a - 2^b)$
הוכחה: נוכיח טענה חזקה יותר, נתמקד רק בקבוצה $A = \{1, 2, 3, ..., 58\}$
נגדיר 57 שובכים:
לכל $0 \le i \le 56$ לשובך ה-i נכנסים מספרים x, כך ש- $x \equiv i(mod\ 57)$
והיונים שלנו יהיו $Y = (2^1, 2^2, ..., 2^{58}\}$
לפי עקרון שובך היונים , יש 2 מספרים שונים ששארית החלוקה שלהם ב-57 היא שווה.
זאת אומרת: $2^a \equiv 2^b(mod\ 57)$, אז ההפרש ביניהם מתחלק ב-57 : $2^a - 2^b \equiv 0(mod\ 57)$,

■

משפט ארדוש סקרש

הגדרה: בהינתן סדרה של מספרים (עם משמעות לסדר) $s = (a_1, a_2, ..., a_n)$
ובהינתן r אינדקסים שונים: $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n$ הסדרה $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir})$ היא **תת סדרה** של S.

הגדרה: סדרה שבה כל 2 מספרים עוקבים מקיימים $a_{i+1} > a_i$ הינה סדרה מונוטונית עולה.
סדרה שבה כל 2 מספרים עוקבים מקיימים $a_{i+1} > a_i$ הינה סדרה מונוטונית יורדת.

למה: (טענת עזר):

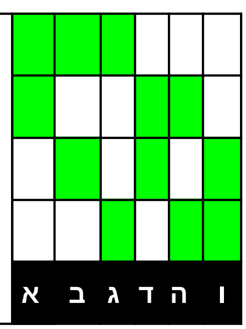
1. אם $u_i = u_j$ עבור 2 אינדקסים **שונים** $1 \le i < j \le n^2 + 1$ כלשהם, אז $a_i > a_j$.
2. אם $d_i = d_j$ עבור 2 אינדקסים **שונים** $1 \le i < j \le n^2 + 1$ כלשהם, אז $a_i < a_j$.

מסקנה מהלמה- אין 2 אינדקסים i ,j שעבורם גם $u_i = u_j$ **וגם** $d_i = d_j$.
כלומר, לפי הלמה: $u_i = u_j \Leftarrow a_i > a_j$, $d_i = d_j \Leftarrow a_i < a_j$ **וזאת סתירה!**

שאלות:

1. נתונה טבלה 4x19 .
א. הוכיחו כי בכל צביעה של משבצות הטבלה ב-3 צבעים שונים, בכל עמודה קיים צבע המופיע יותר מפעם אחת.
ב. הוכיחו כי בכל צביעה של משבצות הטבלה ב-3 צבעים שונים, קיים מלבן שכל פינותיו צבועות באותו הצבע.

פתרון:
א. נתבונן בעמודה אחת, נגדיר 3 הצבעים זה היונים ו4 התאים זה השובכים.
מכאן, שעל פי עקרון שובך היונים, יש 2 משבצות עם אותו הצבע.
ב. נשים לב ש- 3x6+1=18+1=19 כך ש-3 זה מספר הצבעים.
נגדיר לכל עמודה - הצבע החזק = הצבע שמופיע 2 פעמים בעמודה.
יש 19 עמודות ו-3 צבעים, (19 עמודות = שובכים, 3 צבעים = יונים)
מכאן שיש 6+1=7 עמודות ש"הצבע החזק" שלהן זהה. (על פי עקרון שובך היונים המורחב).
בה"כ נקרא לצבע המדובר "ירוק".
כעת, יש $\binom{4}{2} = 6$ אפשרויות של זוגות של משבצות בכל עמודה:



וראינו שיש 7 עמודות שהצבע החזק שלהן הוא ירוק.
אז 7 העמודות = היונים.
6 אפשרויות = השובכים.
מכאן שיש 2 עמודות שהצבע החזק שלהן ירוק ושהמיקום של 2 המשבצות הירוקות שבהן זהה.

פתרון נוסחאות נסיגה

פונקציות יוצרות

דוגמה 1:
נתונות שתי קבוצות: $A = \{2,4,6,8\},\ B = \{1,3,7\}$.
לכמה זוגות $(a,b) \in A\ x\ B$ מתקיים ש:
א. $a + b = 7$?
ב. $a + b = 9$?
תשובה: נעבור על הזוגות האפשריים:
א. (צריך סכום של 7) ← $(2,?),\ (4,3),\ (6,1),\ (8,?)$ ← מצאנו 2 זוגות כאלה.
ב. (צריך סכום של 9) ← $(2,7),\ (8,1),\ (6,3),\ (4,?)$ ← מצאנו 3 זוגות כאלה.

דוגמה 2:
א. מהו המקדם של x^7 בפיתוח של הביטוי: $(x^2+x^4+x^6+x^8)(x^1+x^3+x^7)$?
ב. מהו המקדם של x^9 בפיתוח של הביטוי: $(x^2+x^4+x^6+x^8)(x^1+x^3+x^7)$?

נשים לב - דוגמה 1 שקולה בדיוק לדוגמה 2!

בפונקציה יוצרת, מתחבאת סדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ **במקדמים** של החזקות של x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

<u>מתכון לבניית פונקציות יוצרות:</u>
נתונה המשוואה: $u_1 + u_2 + ... + u_r = n$
ונתונות הגבלות:

$$u_1 \in A = \{a_1, a_2, ...\} \subseteq \mathbb{N}$$
$$u_2 \in B = \{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{N}$$
$$.$$
$$.$$
$$u_r \in R = \{r_1, r_2, ...\} \subseteq \mathbb{N}$$

ושואלים כמה פתרונות יש למשוואה תחת ההגבלות הנתונות?
אזי נבנה את הפונקציה היוצרת כך:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = (x^{a_1} + x^{a_2} + ...) \cdot (x^{b_1} + x^{b_2} + ...) \cdot ... \cdot (x^{r_1} + x^{r_2} + ...)$$

(לכל משתנה יש את "הסוגריים" שלו, כך שהאפשרויות לערכי המשתנה נמצאים בחזרות של ה-אים, למשל לסוגריים הראשונים נשים בחזקות של a את האפשרויות ל- u_1).

איך "משתמשים" בפונקציה יוצרת?
בהינתן n_0 ספציפי שעליו שואלים, נחפש את **המקדם** של x^{n_0} והוא יהיה **בדיוק** a_{n_0} הדרוש לנו.

נוסחאות שימושיות:

1. **סכום סדרה הנדסית:**

עבור סדרה הנדסית עם: q ו- a_0 כל שלכל $1 \leq n \;\leftarrow$ $a_n = a_0 \cdot q^n$, מתקיים שסכום האיברים עד ל- a_n הוא:

$$S_n = \frac{a_0 - a \cdot q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0 - a_{n+1}}{1-q}$$

וכאשר $a_0 = 1$ מתקיים:

$$Sn = \frac{1-a_{n+1}}{1-q}$$

במקרה שלנו, q=x ולכן עבור הסדרה $1 + x + x^2 .... + x^n$:

$$\boxed{S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

2. **סכום טור אינסופית:**

מתקיים,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

3. נזכר במצב $\binom{n-1+k}{k-1}$ (עם חזרות ובלי חשיבות לסדר):

מצד אחד: מספר הדרכים לחלק n כדורים זהים ל-k תאים הוא $\binom{n-1+k}{k-1}$

מצד שני: נבנה פונקציה יוצרת לבעיה הזו: $(x^0 + x^1 + x^2 + ...)^k = (\frac{1}{1-x})^k$.

ונקבל את הזהות הבאה,

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{k-1} \cdot x^n}$$

4. חלוקת n כדורים **שונים** ל-k תאים.

נקבל שלכל n, הפתרון הוא k^n $(a_n = k^n)$.

"נכניס" את k^n לתוך המבנה של פונקציה יוצרת:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot x^n =$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (k \cdot x)^n = \frac{1}{1-kx}}$$

שאלות בסיסיות:

1. מצאו ביטוי סגור עבור הפונקציה היוצרת $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ כאשר a_n הוא מספר הפתרונות למשוואה $(t, s, u \in \mathbb{N})$, $t + s + u \ = \ n$ המקיימים u זוגי.

פתרון:

$$(x^0 + x^1 + x^2 + ...) \cdot (x^0 + x^1 + x^2 + ...) \cdot (x^0 + x^2 + x^4 + x^6 ...)$$

נשתמש בנוסחת הטור האינסופי ונקבל:

$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2}$, כאשר x^2 הוא ה-q של הסדרה הזו.

2. היעזרו בפונקציה היוצרת שמצאתם בשאלה 1 $\left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right)$ כדי לענות:

כמה פתרונות יש למשוואה $t + s + u = 7$ כאשר u זוגי?

פתרון: ניקח את הפונקציה וננסה לפצל ל-2 חלקים (במקום 3) ואז נחשב את המקדם x^7.

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

כפי שראינו מנוסחה 3, $\left(\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{k-1} \cdot x^n \right)$:

$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot x^n \Rightarrow$ נקרא לו מקרה A

כפי שראינו בשאלה 1, נייצג את u כך:

$\frac{1}{1-x^2} = (x^0 + x^2 + x^4 + x^6 ...) \Rightarrow$ נקרא לו מקרה B

כלומר,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot x^n \right) \cdot (x^0 + x^2 + x^4 + x^6 ...) = A \cdot B$$

כדי לקבל את x^7:

מה שניקח מ-B		מה שניקח מ-A	
חזקות	**המקדם**	**חזקות**	**המקדם**
x^0	$1 \cdot$	x^7	$\binom{7+1}{1} \ = \ 8 \ \cdot$ +
x^2	$1 \cdot$	x^5	$\binom{5+1}{1} \ = \ 6 \ \cdot$ +
x^4	$1 \cdot$	x^3	$\binom{3+1}{1} \ = \ 4 \ \cdot$ +
x^6	$1 \cdot$	x^1	$\binom{1+1}{1} \ = \ 2 \ \cdot$ +
		סה"כ:	$8 + 6 + 4 + 2 = 20x^7$ $a_7 = 20$

3. חשבו את a_{22} בסדרה הנוצרת על ידי $F(x) = \frac{6-10x}{1-7x+12x^2}$.

פתרון: ראשית, נרצה שבמכנה, החזקה הגדולה ביותר של x תיהיה 1.

נחשב פירוק של המכנה: $\frac{6-10x}{1-7x+12x^2} = \frac{6-10x}{(1-3x)(1-4x)}$ (כמו פירוק טרינום רק שנחפש משהו מהצורה (?-1)(...)).

כעת, נחפש 2 מספרים ממשים a,b בעזרת שברים חלקיים: $\frac{6-10x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{a}{1-3x} + \frac{b}{1-4x} \backslash \cdot (1-3x)(1-4x)$

ונקבל: $6-10x = a(1-4x) + b(1-3x)$

נחשב לפי המקדמים:

- המקדם של x^0: $6 = a+b \Rightarrow a = 6-b$
- המקדם של x^1:

$$-10 = -4a-3b \Rightarrow -10 = -4\cdot(6-b)-3b \Rightarrow -10 = -24+4b-3b \Rightarrow -10+24 = b \Rightarrow b = 14$$

נציב את b=14 ואת a=-8 שמצאנו: $\frac{6-10x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{a}{1-3x} + \frac{b}{1-4x} = \frac{-8}{1-3x} + \frac{14}{1-4x} = (-8)\cdot\frac{1}{1-3x} + (14)\cdot\frac{1}{1-4x} =$

כעת קל לנו לראות שהגענו לטור המוכר של נוסחה 4: $= (-8)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + (14)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$

כעת, ניתן למצוא בקלות את a_{22} (המקדם של x^{22}).

נציב ב-2 הסיגמאות n=22:

$$a_{22}\cdot x^{22} = (-8)\cdot(3x)^{22} + (14)\cdot(4x)^{22} = (-8)\cdot 3^{22}\cdot x^{22} + (14)\cdot 4^{22}\cdot x^{22} = (-8)\cdot 3^{22}\cdot x^{22} + (14)\cdot 4^{22}\cdot x^{22}$$

$$= (\ -8\cdot 3^{22} + 14\cdot 4^{22}\ )\cdot x^{22} \Rightarrow a_{22} = \ -8\cdot 3^{22} + 14\cdot 4^{22}$$

4. מצאו ביטוי סגור עבור הפונקציה היוצרת $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ כאשר a_n הוא מספר הפתרונות למשוואה $t+s+u = n$, $(t,s,u\in\mathbb{N})$ המקיימים $u\neq s$.

פתרון: נשתמש בשיטת המשלים.

ניקח את הסה"כ פחות הפתרונות שהם u=s.

- הסך הכל פתרונות ללא הגבלות הוא פשוט:

$$(x^0+x^1+x^2+...)\cdot(x^0+x^1+x^2+...)\cdot(x^0+x^1+x^2+...) = (x^0+x^1+x^2+...)^3 = (\frac{1}{1-x})^3 = \frac{1}{(1-x)^3}$$

- כאשר u=s נקבל את המשוואה $t+s+u = n \Rightarrow t+u+u = n \Rightarrow t+2u = n$

מאחר והתקבל 2u , נגדיר משתנה חדש r שחייב להיות זוגי מאחר והחזקות של u,s התחברו ביחד לסדרת החזקות הזוגיים.

$$(x^0+x^1+x^2+...)\cdot(x^0+x^2+x^4+x^6...) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

כעת ניקח את הסה"כ ונחסיר את המקרים בהם u=s ונקבל:

$$\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)}$$

5. מצאו פונקציה יוצרת למספר הפתרונות של המשוואה $t+s+u = n\ ,\ (t,s,u\in\mathbb{N})$
כך שמתקיים ש- $u>s>t$.

פתרון 1:

יש בדיוק 1 מ-!3 האפשרויות לסדרם בשורה שהיא שלשה שמסודרת לפי הגודל,
אז מספיק לוודא שאין בכלל מספרים זהים ואז לחלק ב-!3.

<u>נגדיר:</u>

$A_1 =$ {פתרונות שבהם s=t}

$A_2 =$ {פתרונות שבהם s=u}

$A_3 =$ {פתרונות שבהם u=t}

הפתרון הדרוש: הסה"כ פחות האיחוד של A_1, A_2, A_3 ← (נשתמש בהכלה והדחה לטובת הפתרון).

נחשב את :

- הסה"כ : $\frac{1}{(1-x)^3} = (x^0+x^1+x^2+...)^3 = (x^0+x^1+x^2+...)\cdot(x^0+x^1+x^2+...)\cdot(x^0+x^1+x^2+...)$
- יחידונים: $\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x}$ ⇐ כמו בשאלה הקודמת כאשר לדוגמה (s=t)
- חיתוכי זוגות: $\frac{1}{1-x^3} = (x^0+x^3+x^6+....)$ ⇐ כל המספרים זהים (s=t=u) אז ← 3u=n.
- חיתוכי שלשות: $\frac{1}{1-x^3}$ ⇐ מאחר והשוויון טרנזיטיבי כלומר $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ הכוונה s=t וגם s=u אז u=t כלומר s=t=u שזה בדיוק כמו שעשינו בחיתוכי הזוגות.

אז הפתרון:

$$\frac{1}{3!}\cdot\left(\ \frac{1}{1-x^3} - \left(3\cdot\left(\frac{1}{(1-x)\cdot(1-x^2)}\right) - 3\cdot\left(\frac{1}{1-x^3}\right) + \left(\frac{1}{1-x^3}\right)\right)\right)$$

פתרון 2:

נסמן, $q=s-t\ ,\ r = u-s$

ואז, $s=t+q \Rightarrow u=t+q+r$.

עלינו למצוא את הפונקציה היוצרת למספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים של המשוואה $3t+2q+r=n$
כאשר q,r>0 כלומר:

$$(x^0+x^3+x^6+....)\cdot(x^2+x^4+x^6+...)\cdot(x^1+x^2+....) = \frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{x}{1-x}$$

6. נתון מאגר בלתי מוגבל של חרוזים ב-r צבעים.
יהי $a_r(n)$ מספר המערכים השונים של n חרוזים כך שחלקם מסודרים לאורך מוט והשאר פזורים בערמה.
א. ודאו כי הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{a_r(n)\}_{n=0}^{\infty}$ היא $\frac{1}{(1-x)^r} \cdot \frac{1}{1-rx}$.
ב. מצאו את $a_2(n)$.

פתרון סעיף א': יש לנו r צבעים שונים של חרוזים ורוצים חלוקה של n חרוזים, חלקם בשורה וחלקם בערמה.
נגדיר k = מספר החרוזים בשורה , מספר החרוזים שלא בשורה הוא n-k = שזה מספר החרוזים בערמה.

- k חרוזים **לשורה** יש r^k אפשרויות (לכל אינדקס מהשורה יש r אפשרויות של צבעים שונים).
- n-k חרוזים **לערימה** זה כמו לחלק כדורים **זהים** ל-r תאים **שונים**, לכן: $\binom{(n-k)-1+r}{r-1}$.

סה"כ יש $r^k \cdot \binom{(n-k)-1+r}{r-1}$ אפשרויות.

כעת צריך לעבור על כל k האפשרויות $0 \le k \le n$ אזי נחבר את כל המקרים הללו: $a_r(n) = \sum_{k=0}^{n} r^k \cdot \binom{n-k+r-1}{r-1}$.

כעת נפצל את מה שקיבלנו ל-2 סיגמאות: $a_r(n) = \left(\sum_{k=0}^{n} r^k\right) \cdot \left(\sum_{(n-k)=0}^{n} \binom{(n-k)+r-1}{r-1}\right)$.

נכפיל ב- x^n כדי לקבל פונקציה יוצרת: $F(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_r(n) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} r^k\right) \cdot \left(\sum_{(n-k)=0}^{n} \binom{(n-k)+r-1}{r-1}\right) \right) \cdot x^n$.

נפצל את x^n ל- $x^k \cdot x^{n-k}$ ונכניס כל גורם לחלק אחר (נקבל הכפלה בין 2 פונקציות יוצרות) וגם נריץ את הסיגמאות עד אינסוף כדי שיהיה מתאים לכל n נתון ללא הגבלה:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cdot x^k\right) \cdot \left(\sum_{(n-k)=0}^{\infty} \binom{(n-k)+r-1}{r-1} \cdot x^{n-k}\right) =$$

תזכורת, k= חרוזים לשורה, n-k= חרוזים לערימה.
נקרא ל n-k בשם e:

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (r \cdot x)^k\right) \cdot \left(\sum_{e=0}^{\infty} \binom{e+r-1}{r-1} \cdot x^e\right) =$$

כעת לפי הנוסחאות שלנו (נוסחה 4 ו-3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k \cdot x)^n = \frac{1}{1-kx} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (r \cdot x)^k = \frac{1}{1-rx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{k-1} \cdot x^n = \frac{1}{(1-x)^k} \Rightarrow \sum_{e=0}^{\infty} \binom{e+r-1}{r-1} \cdot x^e = \frac{1}{(1-x)^r}$$

ולכן נקבל:

$$\frac{1}{1-rx} \cdot \frac{1}{(1-x)^r}$$

■

פתרון סעיף ב': בהינתן פונקציה יוצרת, אנחנו רוצים למצוא נוסחה למקדמים של הפונקציה היוצרת וכך יהיה לנו האפשרות למצוא את $a_2(n)$ בקלות.

נמצא את הפונקציה היוצרת של $a_2(n)$, בסעיף א' הגענו לפתרון הבא: $\sum_{n=0}^{\infty} a_r(n) \cdot x^n = \frac{1}{1-rx} \cdot \frac{1}{(1-x)^r}$

לכן נציב r=2 ונקבל את הפונקציה היוצרת שלה: $\sum_{n=0}^{\infty} a_2(n) \cdot x^n = \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$.

נצטרך לעבור מכפל של סיגמאות לחיבור/חיסור של סיגמאות כדי למצוא את $a_2(n)$,

ולכן נשתמש בשברים חלקיים.

תזכורת- בשברים חלקיים, אם יש גורם שמופיע יותר מפעם אחת, צריך לקחת אותו בפני עצמו וגם בחזקת 2 או יותר...

$$\frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1-x)^2} \setminus \cdot (1-2x)(1-x)^2$$

$$1 = a(1-x)^2 + b(1-2x)(1-x) + c(1-2x)$$

$$1 = a(1-2x+x^2) + b(1-3x+2x^2) + c(1-2x)$$

כעת נבצע השוואת מקדמים:

- $x^0: \ 1 = a + b + c$
- $x^1: \ 0 = -2a - 3b - 2c$
- $x^2: \ 0 = a + 2b$

כעת נציב את הפתרונות: a=4, b=-2 , c=-1.

$$a_2(n) = \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{4}{1-2x} + \frac{-2}{1-x} + \frac{-1}{(1-x)^2} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot x^n =$$

$$= 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2^n \cdot x^n) - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n =$$

מאחר וכל הסיגמאות רצות על אותו הטווח נכניס את שלושתם לסיגמה אחת משותפת:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot 2^n - 2 - (n+1)) \cdot x^n$$

ולסיכום,

$$a_2(n) = 4 \cdot 2^n - 2 - (n+1)$$

<u>סדרות סכומים והפרשים:</u>

בהינתן פונקציה יוצרת: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, אם נכפיל אותה בטור האינסופי: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$
נקבל פונקציה יוצרת שבה המקדמים הם **סכום מצטבר** של המקדמים המקוריים:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 \quad + \quad a_0 + a_1 x \quad + \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad + \quad \ldots.. =$$

$$b_0 \quad + \quad b_1 \quad + \quad b_2 \quad + \quad \ldots\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

הפעולה ההפוכה, תתן לנו **סדרת הפרשים:**

$$(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 \quad + \quad (a_1 - a_0)x \quad + \quad (a_2 - a_1)x^2 \quad + \ldots\ldots$$

$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \cdot x^n \Rightarrow$ האיבר הראשון a_0 טיפה שונה..

שאלות בנושא סדרות סכומים והפרשים:

1. מצאו ביטוי סגור עבור הסכום: $a_n = \sum_{k=0}^{n} (k+2)^2$.

פתרון: נפתור שאלה זו על ידי טבלה:

נגדיר: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+2)^2 \right) \cdot x^n = A_n$.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_n
A_n	$(0+2)^2=4$	$2^2+3^2=13$	$13+4^2=29$	$29+5^2=54$	
$(1-x)A_n$	4	$13-4=9$	$29-13=16$	$54-29=25$	נתחיל פה ←
$(1-x)^2 A_n$	4	5	7	9	...11,13
$(1-x)^3 A_n$	4	1	2	2	..2,2,2,22
$(1-x)^4 A_n$	4	-3	1	0	0,0,0,0,0

קיבלנו ש: $(1-x)^4 A_n = 4 - 3x + x^2$

$$A_n = \frac{x^2-3x+4}{(1-x)^4} = \frac{x^2-3x+4}{1} \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^4}\right) = (x^2 - 3x + 4) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+4}{4-1} \cdot x^n =$$

$$= 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \cdot x^{n+2} - 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \cdot x^{n+1} + 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} \cdot x^n =$$

כדי לקבל את a_n , ניקח n מהראשון, n-1 מהשני ו- n-3 מהשלישי:

$$a_n = \binom{(n-2)+3}{3} - 3\binom{(n-1)+3}{3} + 4\binom{n+3}{3} = \binom{n+1}{3} - 3\binom{n+2}{3} + 4\binom{n+3}{3} =$$

וקיבלנו:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (k+2)^2 = \binom{n+1}{3} - 3\binom{n+2}{3} + 4\binom{n+3}{3}$$

2. מצאו ביטוי סגור עבור הסכום: $a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot (k+1)$.

פתרון: נציב את הביטוי בתוך המקדמים של פונקציה יוצרת A_n :

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot (k+1) \right) \cdot x^n$$

כדי "להיפטר" מהסיגמה הפנימית, נחשב את סדרת ההפרשים של הפונקציה היוצרת,
נציב את האיבר האחרון n בסיגמה הפנימית:

$$(1-x)A_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n \cdot (n+1)$$

נשים לב ש: $(n+1) = \binom{n+1}{1}$ וכך נקבל שמתחבא פה נוסחת הבינום השלילי:

$$(1-x)A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} (2x)^n = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

$$(1-x)A_n = \frac{1}{(1-2x)^2} \backslash : (1-x)$$

$$A_n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)^2}$$

כעת, נרצה לעבור לחיבור של סיגמאות (כדי שיהיה קל להוציא את המקדם a_n).
נשתמש בשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-2x)} = \frac{a}{(1-x)} + \frac{b}{(1-2x)} + \frac{c}{(1-2x)^2} \backslash \cdot (1-x)(1-2x)^2$$

$$1 = a(1-2x)^2 + b(1-x)(1-2x) + c(1-x)$$

נציב x=1:

$$1 = a$$

נציב $x = \frac{1}{2}$:

$$2 = c$$

נציב $x = \frac{1}{4}$:

$$-2 = b$$

נציב תוצאות:

$$A_n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)^2} = \frac{1}{(1-x)} + \frac{-2}{(1-2x)} + \frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} (2x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - 2^{n+1} + 2^{n+1}(n+1)\right) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + n \cdot 2^{n+1}\right) \cdot x^n$$

וקיבלנו:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot (k+1) = 1 + n \cdot 2^{n+1}$$

3. מצאו נוסחה סגורה לסכום הבא: $a_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 5^k$.

פתרון: נציב את הביטוי בתוך המקדמים של פונקציה יוצרת: $A_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} k \cdot 5^k)) \cdot x^n$

נחשב את סדרת ההפרשים (הכפלה ב- (x-1)) ונציב n אחרון :

$$(1-x)A_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 5^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (5x)^n$$

נגרום לביטוי להפוך לבינום השלילי בעזרת טריק מרושע נגרום ל-n להיות n+1-1 ואז נוכל להשתמש בבינום השלילי כי - $n+1 = \binom{n+1}{1} = \binom{n-1+2}{2-1}$:

$$(1-x)A_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-1) \cdot (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\binom{n-1+2}{2-1} - 1) \cdot (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot (5x)^n - (5x)^n$$

נפצל ל-2 סיגמאות:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot (5x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n$$

נפתר מהסיגמאות בעזרת הנוסחאות:

$$(1-x)A_n = \frac{1}{(1-5x)^2} - \frac{1}{(1-5x)} \setminus : (1-x)$$

$$A_n = \frac{1}{(1-x)(1-5x)^2} - \frac{1}{(1-x)(1-5x)}$$

$$A_n = \frac{a}{(1-x)} + \frac{b}{(1-5x)} + \frac{c}{(1-5x)^2} - (\frac{d}{(1-x)} + \frac{e}{(1-5x)}) = \frac{a-d}{(1-x)} + \frac{b-e}{(1-5x)} + \frac{c}{(1-5x)^2} \setminus \cdot (1-x)(1-5x)^2$$

$$1-(1-5x) = (a-d)(1-5x)^2 + (b-e)(1-x)(1-5x) + c(1-x) =$$

נסמן : $A = (a-d),\ B = (b-e)$

$$5x = A(1-5x)^2 + B(1-x)(1-5x) + c(1-x)$$

נציב $x = \frac{1}{5}$:

$$c = \frac{5}{4}$$

נציב $x = 1$:

$$A = \frac{5}{16}$$

נציב x=0:

$$B = -\frac{25}{16}$$

נציב תוצאות:

$$A_n = \frac{\frac{5}{16}}{(1-x)} + \frac{-\frac{25}{16}}{(1-5x)} + \frac{\frac{5}{4}}{(1-5x)^2} = \frac{5}{16}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{25}{26}\sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n + \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot (5x)^n =$$

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5}{16} - \frac{25}{16} \cdot 5^n + \frac{5}{4} \cdot (n+1) \cdot 5^n) \cdot x^n$$

ומכאן:

$$a_n = \frac{5}{16} - \frac{25}{16} \cdot 5^n + \frac{5}{4} \cdot (n+1) \cdot 5^n$$

<u>פונקציות יוצרות של חלוקות:</u>

הגדרה: חלוקה של מספר טבעי n זו סדרה $(a_1,...,a_k)$ של מספרים טבעיים כך ש: $a_1 \geq a_2 \geq .... \geq a_k \geq 1$, המקיימים: $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$.

משפט אוילר: לכל n, מספר החלוקות של n לחלקים שונים, שווה למספר החלוקות של n לחלקים שכולם אי-זוגיים.

דוגמה: n=6 חלוקות:

הוכחה: נגדיר,

$a_n =$ מספר החלוקות של n לחלקים **שונים**.

$b_n =$ מספר החלוקות של n לחלקים **אי-זוגיים**.

נרצה להראות ש: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$.

נחשב פונקציה יוצרת ל- a_n :

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3).....$$

כך שכל "סוגריים" הכוונה האם לקחת או לא לקחת את החזקה של x.

קיבלנו ש- A_n היא מכפלה אינסופית: $A_n = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$.

נחשב פונקציה יוצרת ל- b_n :

$$B_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = (1^{0\cdot 1} + x^{1\cdot 1} + x^{2\cdot 1} + ...)(1^{0\cdot 3} + x^{1\cdot 3} + x^{2\cdot 3} + ...)(1^{0\cdot 5} + x^{1\cdot 5} + x^{2\cdot 5} + ...)....$$

גם פה קיבלנו מכפלה אינסופית: $B_n = \prod_{i=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} x^{(2i+1)\cdot k})$.

נכתוב את B_n בצורה מקוצרת יותר:

$$B_n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot ......$$

כעת, נתבונן ב- A_n , לכל $1+x^i$ נשתמש בנוסחת סכום ונקבל:

$$1 + x^i = \frac{1-x^{2i}}{1-x^i}$$

ונשים לב שכל המונים מצטמצמים ונשאר רק הביטויים במכנה מהצורה $1-x^i$ כך ש-i אי זוגי וזהו בדיוק B_n :

$$A_n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot ...... = B_n$$ ■

שאלה: הוכיחו כי לכל n, מספר החלוקות של n למחוברים **שונים** שאינם מתחלקים ב-3, שווה למספר החלוקות של n למחוברים אי-זוגיים שאינם מתחלקים ב-3.

פתרון: נגדיר,

$a_n =$ מספר החלוקות של n למחוברים **שונים** שאינם מתחלקים ב-3.

$b_n =$ מספר החלוקות של n למחוברים **אי-זוגיים** שאינם מתחלקים ב-3.

נרצה להראות ש: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$.

נחשב פונקציה יוצרת ל- a_n:

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^7).(1+x^8)(1+x^{10})......$$

נחשב פונקציה יוצרת ל- b_n:

$$B_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = (1^{0\cdot 1} + x^{1\cdot 1} + x^{2\cdot 1} + ...)(1^{0\cdot 5} + x^{1\cdot 5} + x^{2\cdot 5} + ...)(1^{0\cdot 7} + x^{1\cdot 7} + x^{2\cdot 7} + ...) =$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \frac{1}{1-x^{11}} \cdot ....$$

כל המכנים $1 - x^i$ בהם i מתחלק ב-2, מצטמצמים.

נשארים במכנה רק הביטויים $1 - x^i$ כאשר i אי זוגי ולא מתחלק ב-3.

מכאן ש-

$$A_n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \frac{1}{1-x^{11}} \cdot .... = B_n$$

כנדרש.

■

$\overline{n=1}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \qquad \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k$$

נוסחאות נסיגה

נוסחה המגדירה סדרת איברים באופן רקורסיבי.
כל איבר מוגדר באמצעות r איברים קודמים בסדרה $r \in \mathbb{N}$.

מבנה כללי של נוסחת נסיגה:
$\alpha_r \cdot f(n-r)$ הם חלקים לא הומוגניים, האיברים הקודמים מוכפלים בסלאקרים.
$g(n)$ חלק שלא תלוי באיברים הקודמים של הסדרה.

$$f(n) = \alpha_1 \cdot f(n-1) + \alpha_2 \cdot f(n-2) + ... + \alpha_r \cdot f(n-r) \quad + \quad g(n)$$
$$f(0) = k_0$$
$$f(1) = k_1$$
.
.
$$f(r) = k_r$$

שאלות בסיסיות:

1. מכונת ממתקים מחזירה עודף במטבעות של 1,2,5 שקלים אם היא צריכה להחזיר עודף של n שקלים, בכמה דרכים היא יכולה להחזיר את העודף ? (יש חשיבות לסדר ההחזרה).

   פתרון: אנחנו בעצם מחפשים סדרות של מספרים מהקבוצה $\{5,2,1\}$.
   נתחיל מהמקרי בסיס:

   - **n=0:** ברור שיש רק דרך אחת והיא מילה ריקה, אז $f(0) = 1$.
   - **n=1:** אפשר רק על ידי שימוש במטבע '1' לכן $f(1) = 1$.
   - **n=2:** פה כבר יש כמה אפשרויות 1,1 או 2 ולכן $f(2) = 2$.
   - **n=3:** ניקח את כל האפשרויות לסדרה שהסכום שלה 2 ונוסיף מטבע של 1 בסוף.
     בנוסף אפשר גם לקחת את כל האפשרויות לסדרה שהסכום שלה 1 ולהוסיף מטבע של 2 בסוף.
     וקיבלנו : $f(3) = f(1) + f(2) = 3$.
   - **n=5:** נדלג רגע ל-5,
     ניקח את כל האפשרויות לסדרה בסכום 0 ונוסיף 5.
     ניקח את כל האפשרויות לסדרה בסכום 4 ונוסיף 1.
     ניקח את כל האפשרויות לסדרה בסכום 3 ונוסיף 2.
     $f(5) = f(0) + f(4) + f(3)$

   לסיכום, לכל $n \geq 5$:
   ניקח את האפשרויות לסדרה בסכום n-5 ונוסיף 5.
   ניקח את האפשרויות לסדרה בסכום n-1 ונוסיף 1.
   ניקח את האפשרויות לסדרה בסכום n-2 ונוסיף 2.

   קיבלנו, $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-5)$,
   ה-5 זה ה-r שלנו אז צריך 5 תנאי התחלה: $f(0) = f(1) = 1 \;,\; f(2) = 2 \;,\; f(3) = 3 \;,\; f(4) = f(3) + f(2) = 5$

2. מה מספר האפשרויות לסדר מחדש n אנשים בשורה כך שאף אחד לא נשאר במקומו?

פתרון: נתבונן באיש מספר 1, יש לו (n-1) אפשרויות של מקומות חדשים.
נניח שהוא עבר למקום ה-i, האיש שהיה קודם במקום ה-i יכול לעבור למקום 1,
ואז נותר לנו לסדר מחדש את כל שאר n-2 האנשים. נקבל במקרה הזה $a_{(n-2)}$.
מצד שני, יכול להיות שהאיש שהיה במקום ה-i לא עבר למקום ה-1 ואז צריך לסדר n-1 אנשים.
נקבל במקרה הזה $a_{(n-1)}$.
סה"כ, לכל i בין 2 ל-n כאשר i הוא המקום אליו האדם הראשון עבר, צריך לספור $a_{(n-1)} + a_{(n-2)}$.
ולכן, $a_n = (n-1)\cdot(a_{(n-1)} + a_{(n-2)})$.

3. מצאו נוסחת נסיגה למספר המילים הבינאריות באורך n שלא מופיע בהן הרצף '100'.

פתרון: נגדיר,
$b_n =$ מילים תקינות באורך n שמתחילות באפס.
$c_n =$ מילים תקינות באורך n שמתחילות ב-1.
ואזי: $a_n = b_n + c_n$.

- נחשב את b_n: לכל מילה תקנית ניתן להוסיף אפס בהתחלה ולקבל מילה תקנית.
מכאן ש- $b_n = a_{n-1}$.

- נחשב את c_n: כדי להוסיף '1' בהתחלה, צריך לוודא שאין '0 0' בהתחלה.
צריך לקחת מילה באורך n-1 ולוודא שאין לה '0 0' בהתחלה.
כמה מילים תקינות באורך n-1 לא מתחילות ברצף '0 0' ?
סה"כ המילים התקינות באורך $a_{n-1} = n-1$ פחות המילים שכן מתחילות ב-'0 0'. $= a_{n-3}$
(ניקח מילה תקינה באורך n-3 ונוסיף לה 2 אפסים בהתחלה).
לכן, $c_n = a_{n-1} - a_{n-3}$.

לסיכום: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$.

4. מצאו את מספר המילים מאורך n מן האותיות A,B,C שאינן מכילות אף אחד מן הרצפים BA ו-CA

פתרון:

- עבור מילה שמתחילה באות A הכל תקין, a_{n-1}.
- עבור מילה שמתחילה באות B, נגביל את המקרה בו מופיע האות A אחריו... אז ניקח את המקרה בו מתחיל ב-B וכל שאר הסידורים אחריו, ונוריד ממנו את האופציה בו A מופיע אחרי B כלומר: a_{n-1} או המקרה בו A מופיע אחרי B כלומר, a_{n-2} ומכאן $a_{n-1} - a_{n-2}$.
- עבור מילה שמתחילה באות C, נגביל את המקרה בו מופיע האות A אחריו, כלומר בדומה למקרה B נקבל: $a_{n-1} - a_{n-2}$.

ומכאן הפתרון הוא: $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_{n-2}$

כלומר,

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

<u>פתרון נוסחאות נסיגה בעזרת פונקציות יוצרות:</u>

שאלות:

1. מצאו נוסחה סגורה לנוסחת הנסיגה הבאה:
$f(0)=1\ ,\ f(n)=2\cdot f(n-1)+n+3$

פתרון: נגדיר פונקציה יוצרת לסדרה $f(n)$:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\cdot x^n=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\cdot x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot f(n-1)+n+3)\cdot x^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot f(n-1))\cdot x^n+(n+3)\cdot x^n=1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(f(n-1))\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^n=$$

פה נרצה שהחזקה של x תהיה שווה ל- (n-1) שנמצא בתוך ה- $f(?)$ אז "נוציא" x אחד מהסיגמה:

$$=1+2x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}f(n-1)\cdot x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^n$$

נפתח את הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty}f(n-1)\cdot x^{n-1}$:

$$=f(1-1)\cdot x^{1-1}+f(2-1)\cdot x^{2-1}+f(3-1)\cdot x^{3-1}+\ldots=$$

$$=f(0)\cdot x^0+f(1)\cdot x^1+f(2)\cdot x^2+f(3)\cdot x^3+\ldots=$$

וזה שווה בדיוק ל- $F(x)$ (כמו שהגדרנו אותו בהתחלה) ונמשיך,

$$=1+2x\cdot F(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^n$$

כעת נתמקד בביטוי $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^n$, נרצה שיתחיל ב n=0 כדי שיהיה אפשר להשתמש בנוסחאות שלנו. (אז נוסיף ונחסיר את המחובר ה-0):

$$(0+3)x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\cdot x^n$$

$$3+\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\cdot x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n-3$$

נמשיך את החישוב: $=1+2x\cdot F(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n-3\ =\ -2+2x\cdot F(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$

כעת נפצל את ה-3 מתוך ה-(n+3) ל- (n+2+1):

$$=\ -2+2x\cdot F(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2\cdot x^n$$

כעת נחזור לנקודת ההתחלה $F(x)$:

$$F(x) = -2 + 2x \cdot F(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1+2}{2-1} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot x^n$$

$$F(x) = -2 + 2x \cdot F(x) + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x}$$

$$F(x) - 2x \cdot F(x) = -2 + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x}$$

$$F(x)(1-2x) = -2 + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} \backslash : (1-2x)$$

$$F(x) = \frac{-2}{(1-2x)} + \frac{1}{(1-2x)(1-x)^2} + \frac{2}{(1-2x)(1-x)}$$

את $\frac{1}{(1-2x)(1-x)^2} + \frac{2}{(1-2x)(1-x)}$ נצטרך לפתוח בעזרת שברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1-2x)(1-x)^2} + \frac{2}{(1-2x)(1-x)} \cdot \frac{(1-x)}{(1-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} \backslash \cdot (1-2x)(1-x)^2$$

$$1 + 2 - 2x = A(1-2x)(1-x) + B(1-3x) + C(1-x)^2$$

נציב x=1 ונקבל B=-1, נציב x=0.5 ונקבל C=8, נציב x=0 ונקבל A=-4.

אז נציב את הפתרונות שקיבלנו:

$$F(x) = \frac{-2}{(1-2x)} + \frac{-4}{1-x} + \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{8}{1-2x}$$

$$F(x) = \frac{6}{(1-2x)} + \frac{-4}{1-x} + \frac{-1}{(1-x)^2}$$

נסגור אותם לסיגמאות לפי הנוסחאות שנלמדו:

$$F(x) = 6\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (6 \cdot 2^n - 4 - n - 1) \cdot x^n$$

ומכאן סוף סוף אחרי דרך מייגעת וארוכה קיבלנו את הפתרון:

$$f(n) = 6 \cdot 2^n - n - 5$$

מומלץ לעשות בדיקה.

2. מצאו נוסחה סגורה לנוסחת הנסיגה הבאה: $3 \cdot f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2),\ \ f(0) = 7,\ f(1) = 3$

פתרון: ראשית נרצה שהמקדם של $f(n)$ יהיה 1:

$$f(n) = \tfrac{2}{3} \cdot f(n-1) + \tfrac{1}{3} \cdot f(n-2)$$

כעת, נגדיר פונקציה יוצרת שבמקדמים שלה יש את הסדרה $f(n)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0) \cdot x^0 + f(1) \cdot x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \cdot x^n = 7 + 3x + \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{2}{3} \cdot f(n-1) + \tfrac{1}{3} \cdot f(n-2)) \cdot x^n =$$

$$= 7 + 3x + \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{2}{3} \cdot f(n-1) + \tfrac{1}{3} \cdot f(n-2)) \cdot x^n = 7 + 3x + \tfrac{2}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)\, x^n + \tfrac{1}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\, x^n =$$

$$= 7 + 3x + \tfrac{2}{3}x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)\, x^{n-1} + \tfrac{1}{3}x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\, x^{n-2} =$$

נציין ש- $\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)\, x^{n-1} = F(x) - f(0)$ וגם ש- $\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)\, x^{n-2} = F(x)$ ונשנה:

$$F(x) = 7 + 3x + \tfrac{2}{3}x \cdot (F(x) - f(0)) + \tfrac{1}{3}x^2 \cdot F(x)$$

נעביר את $F(x)$ לצד שמאל:

$$F(x) \cdot (1 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}x^2) = 7 + 3x - \tfrac{14}{3}x$$

$$F(x) = \frac{7 - \frac{5}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2} = \frac{7 - \frac{5}{3}x}{(1 - \frac{1}{3}x)(1-x)} =$$

נחשב שברים חלקיים:

$$F(x) = \frac{7 - \frac{5}{3}x}{(1 - \frac{1}{3}x)(1-x)} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{3}x)} + \frac{B}{1-x} \backslash \cdot (1 - \tfrac{1}{3}x)(1-x)$$

$$7 - \tfrac{5}{3}x = A(1-x) + B(1 - \tfrac{1}{3}x)$$

נציב x=1 ונקבל B=4 , נציב x=-3 ונקבל A=3.

ולכן,

$$F(x) = \frac{3}{(1 - \frac{1}{3}x)} + \frac{4}{1-x} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{3}x)^n + 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3 \cdot (-\tfrac{1}{3})^n + 4) \cdot x^n$$

ומכאן קיבלנו:

$$f(n) = 3 \cdot (-\tfrac{1}{3})^n + 4$$

מומלץ לעשות בדיקה.

<u>נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות:</u>

מה הכוונה בלינאריות הומוגניות?

נוסחה נקראת לינארית הומוגנית אם היא מהצורה:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + ... + c_j \cdot a_{n-j}$$

כאשר c הוא קבוע.

דוגמה: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, ברגע שנעביר אגפים נראה כי: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ ולכן זו משוואה הומוגנית כאשר ישנו קבוע c אשר מוכפל באיברים הכללים: $c \in \{1, 6\}$ ובנוסף ישנה פעולה חיבור בין איבר לאיבר.

- מספר תנאי ההתחלה הוא = למספר הצעדים אחורה.

איך פותרים נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית?

נפתור נוסחה זו בעזרת **שיטת הפולינום האופייני.**

<u>השלבים למציאת הפולינום האופייני:</u>

1. **הצבה:** $f(n) = x^n$, (במידה ו- $f_{(n-1)}$ אז x^{n-1}).
   למשל בדוגמה העליונה עבורה: $f_n = f_{(n-1)} + 6f_{(n-2)}$
   לאחר השלב הראשון נקבל: $x^n = x^{n-1} + 6x^{n-2}$.

2. **מחלקים בחזקה ההכי קטנה:**
   בדוגמה שלנו החזקה הכי קטנה היא n-2 ולכן אנו מקבלים לאחר העברת אגפים: $x^2 - x - 6 = 0$
   נחשב את התוצאה ומכאן מתקיים: $x_1 = 3,\ x_2 = -2$.

3. **נציב את הקבועים בפונקציה:** $f(n) = \alpha(3)^n + \beta(-2)^n$

4. **מציאות הקבועים** α, β : מוצאים את הקבועים בעזרת תנאי התחלה ומקבלים מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים. אחרי שמצאנו את הקבועים, נציב בנוסחה וזוהי הנוסחה המפורשת.

- **הערה:** אם ישנה משוואה ריבועית ויש רק פתרון אחד אז הפתרון הנ"ל חוזר על עצמו, אם יש פתרון שחוזר על עצמו אז צריך להכפיל אחד מהגורמים ב-n.
  לדוגמה: $x^2 - 2x + 1 = 0,\ x_1 = 1\ ,\ x_2 = 1$
  אז $f(n) = c_1(1)^n + c_2(1)^n \cdot n$ מפני שאחד מהפתרונות תלוי לינארית.

שאלות:

1. $f(0) = 3\ ,\ f(n) = 6f(n-1)$

פתרון: נציב $f(n) = \lambda^n$: $\lambda^n = 6\lambda^{n-1} \Rightarrow \lambda = 6$

השורש הוא $\lambda = 6$.

הפתרון הכללי הוא: $f(n) = c \cdot 6^n$

נציב תנאי התחלה: $f(0) = c \cdot 6^0 \Rightarrow 3 = c$

נציב את הקבוע שמצאנו בפתרון הכללי: $f(n) = 3 \cdot 6^n$ וזהו הפתרון הפרטי.

נבצע בדיקה:

$f(0) = 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 6^0 = 3$

$f(1) = 6 \cdot 3 = 18 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 6^1 = 18$

2. $f(1) = 3,\ f(0) = 7\ ,f(n) = \frac{2}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n-2)$

פתרון:

- נציב $f(n) = \lambda^n$: $\lambda^n = \frac{2}{3}\lambda^{n-1} + \frac{1}{3}\lambda^{n-2} \Rightarrow \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3} = 0$
- נחפש שורשים: (פה אפשר עם פירוק של טרינום): $(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{3}$
- נבנה פתרון כללי: $f(n) = c_1 1^n + c_2(-\frac{1}{3})^n$
- תנאי התחלה:

$$A:\ f(0) = c_1 + c_2 = 7$$
$$B:\ f(1) = c_1 + (-\tfrac{1}{3}c_2) = 3$$
$$A - B:\ \tfrac{4}{3}c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = 3$$
$$c_1 + 3 = 7 \Rightarrow c_1 = 4$$

$f(n) = 4 + 3 \cdot (-\frac{1}{3})^n$ זה הפתרון הפרטי.

נוסחאות נסיגה לינאריות לא הומוגניות:

הוראות:

$$f(n)=\alpha_1\cdot f(n-1)+\alpha_2\cdot f(n-2)+\ldots+\alpha_r\cdot f(n-r)\quad+\quad g(n)$$

נפצל את המשוואה ל-2 חלקים, חלק הומוגני וחלק לא הומוגני.

1. **נמצא פתרון כללי לחלק ההומוגני:** $h(n)=A\cdot\lambda_1{}^n+B\cdot\lambda_2{}^n+\ldots$
2. **ננחש פתרון לחלק הלא הומוגני.**
   לדוגמה אם $g(n)=3n$ ננחש $S(n)=c_1\cdot n+c_2$
   אם $g(n)=4\cdot 5^n$ ננחש $S(n)=c\cdot 5^n$
   נציב את Sn בתוך Fn:
   $$S(n)=\alpha_1\cdot S(n-1)+\alpha_2\cdot S(n-2)+\ldots+\alpha_r\cdot S(n-r)\quad+\quad g(n)$$
   נכנס איברים ונמצא את הקבוע של Sn.
3. **נחבר את** $f(n)=h(n)+s(n)$.
   נציב תנאי התחלה ונמצא את הקבוע של $h(n)$.
4. **בדיקה.**

שאלות:

1. $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(n)=f(n-1)+2f(n-2)+2\cdot 3^{n-2}$

פתרון:

- נמצא פתרון כללי לחלק ההומוגני:

$$h(n)=h(n-1)+2h(n-2)$$
$$\lambda^n=\lambda^{n-1}+2\lambda^{n-2}\backslash:\lambda^{n-2}$$
$$\lambda^2-\lambda-2=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$
$$\lambda_1=2,\lambda_2=\ -1$$

אז הפתרון הכללי של החלק ההומוגני הוא: $h(n)=A\cdot 2^n+B\cdot(-1)^n$

- ננחש פתרון לחלק הלא הומוגני - $g(n)=2\cdot 3^{n-2}$.

$$g(n)=2\cdot\frac{3^n}{3^3}=\frac{2}{9}\cdot 3^n$$

אזי $S(n)=c\cdot 3^n$

נציב $f(n)=s(n)$:

$$S(n)=S(n-1)+2S(n-2)+2\cdot 3^{n-2}$$
$$c\cdot 3^n=c\cdot 3^{n-1}+2\cdot c\cdot 3^{n-2}+2\cdot 3^{n-2}\backslash:3^{n-2}$$
$$c\cdot 3^2=c\cdot 3+2\cdot c+2$$
$$c=\frac{1}{2}$$
$$S(n)=\frac{1}{2}\cdot 3^n$$

- נחבר את Sn+Hn:

$$f(n)=A\cdot 2^n+B\cdot(-1)^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$I:\ f(0)=1=A+B+\frac{1}{2}$$
$$II:f(1)=2=A\cdot 2+B\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 3$$
$$I+II:\ A=\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{6}$$

לסיכום:

$$f(n)=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{6}\cdot(-1)^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n$$

.2

$$f(n)=\begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ f(n-1)+2f(n-2)+2\cdot 3^{n-2} & n\geq 2 \end{cases}$$

$$g(n)=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{6}\cdot(-1)^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n$$

טענה: לכל n מתקיים $f(n) = g(n)$.

הוכחה: באינדוקציה על n.

- בסיס:

$$g(0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1=f(0)$$
$$g(1)=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 3=2=f(2)$$

- הנחת האינדוקציה (שלמה):

לכל $n\geq n_0$ נניח שמתקיים $f(n_0)=g(n_0)$

כלומר,

$$f(n_0-1)+2f(n_0-2)+2\cdot 3^{n_0-2}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n_0}+\frac{1}{6}\cdot(-1)^{n_0}+\frac{1}{2}\cdot 3^{n_0}$$

- צריך להוכיח: שגם ל-n, השוויון מתקיים: $f(n)=g(n)$.

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)+2\cdot 3^{n-2}$$
$$f(n)=\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}+\frac{1}{6}\cdot(-1)^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 2^{n-2}+\frac{1}{6}\cdot(-1)^{n-2}+\frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}\right)+2\cdot 3^{n-2}$$
$$f(n)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^n}{2}+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^n}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(-1)^n}{-1}+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{(-1)^n}{(-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3^n}{3}+\frac{2}{2}\cdot\frac{3^n}{3^2}+2\cdot\frac{3^n}{3^n}=$$
$$f(n)=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{6}\cdot(-1)^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$f(n)=g(n)$$

■

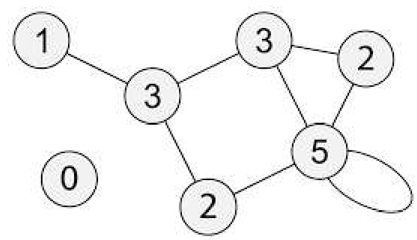
מבוא לתורת הגרפים

1. גרף הוא זוג $G=(V,E)$, כאשר V = קבוצת קודקודים, E = קבוצת זוגות של קודקודים.
כל זוג של קודקודים נקרא **צלע** או **קשת**.

2. בגרף **מכוון** E הינה קבוצת זוגות **סדורים** של קודקודים.

3. 2 קודקודים שמחוברים בצלע יקראו **שכנים** - סימון : $\Gamma(v)$ זו קבוצת השכנים של v.

4. מספר הצלעות שיוצאות מקודקוד מסוים הינו **הדרגה** של הקודקוד,
למשל:



- **משפט:** $\sum_{v\in V} d(v) = 2\cdot|E|$.

5. **מסלול** בגרף הינו רצף של קודקודים כך שלכל 2 קודקודים עוקבים ברצף, הצלע קיימת בגרף.
זאת אומרת, לכל $1\le i\le k-1$, $\{V_i , V_{i+1}\}\in E(G)$.

6. **קוטר -** הקוטר של גרף קשיר הוא המרחק הגדול ביותר בין שני צמתים בגרף, כלומר אורך המסלול הקצר ביותר בין שני הצמתים המרוחקים ביותר.

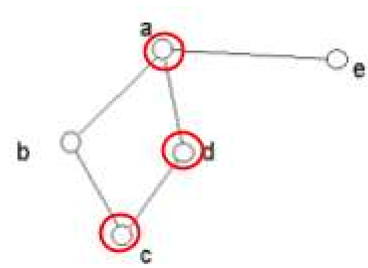
7. אם כל הקודקודים במסלול שונים זה מזה. נאמר **שהמסלול פשוט.**

8. **מעגל** בגרף הוא מסלול שבו הקודקוד הראשון והאחרון זהים.
- בגרף בעל $n\ge 3$ קודקודים ו- $m\ge n$ צלעות יש מעגל.

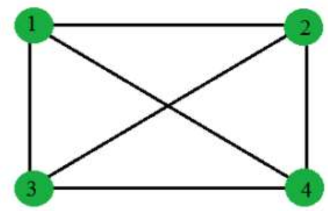
9. **מעגל פשוט** רק הקודקוד הראשון והאחרון זהים (כל השאר שונים זה מזה).
- יהי G גרף קשיר ותהי $e\in E$ אז הגרף $G\backslash\{e\}$ קשיר אם"ם הצלע e שייכת למעגל פשוט כלשהו ב-G
- אם לכל המעגלים הפשוטים ב-G אורך זוגי, אז גם לכל המעגלים הלא פשוטים אורך זוגי.

10. בהינתן קודקוד v_1 , קבוצת השכנים $\Gamma(v_1)$ הינה קבוצת כל הקודקודים המחוברים בצלע ל- v_1 .

למשל: $\Gamma(b)=\{a,d,c\}$



11. גרף **d-רגולרי** הינו גרף שבו כל הדרגות שוות d.



3 Regular

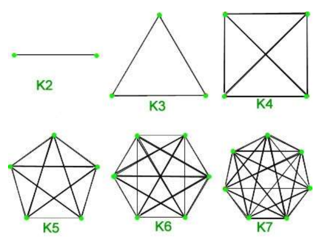
כל גרף שלם הינו (n-1)-רגולרי.

12. **עץ** הינו גרף קשיר ללא מעגלים.
- כל עץ עם $n \geq 2$ קודקודים מכיל עלה (=קודקוד מדרגה 1).
- מספר הצלעות בעץ בעל n קודקודים הינו n-1 .
  אם הוא יותר מ n-1 צלעות אז הוא לא עץ ובהכרח קיים מעגל בגרף.
- כל עץ הוא גרף דו-צדדי.

13. **יער** הינו גרף ללא מעגלים (לא בהכרח קשיר).

14. **מעגל אוילר** הינו מעגל שעובר על כל הצלעות של הגרף פעם אחת בדיוק.

15. **גרף שלם** מעל n קודקודים מסומן K_n,
הינו גרף עם n קודקודים שבו **כל** הצלעות
האפשרויות הם קיימות.

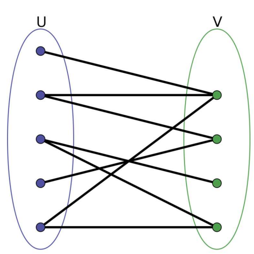


- בגרף K_n קיימות $\binom{n}{2}$ צלעות.
- **נקרא גם קליקה**

16. **גרף קשיר**, הינו גרף בו קיים מסלול בין כל 2 קודקודים.
- בגרף קשיר לא מכוון עם n קודקודים יש לפחות n-1 צלעות.

17. **רכיבי קשירות**- כאשר גרף **אינו** קשיר ניתן לחלק אותו למחלקות שונות של תתי-גרפים קשירים.

18. **תת גרף** - בהינתן גרף $G=(V,E)$ נגדיר תת גרף $G' \subseteq G,\ G'=(V',E')$ כך שמתקיים:
$V' \subseteq V,\ E' \subseteq E$ ובנוסף לכל צלע $e \subseteq V',\ e \subseteq E'$.



19. **גרף דו צדדי** - $G=(V_1 \cup V_2, E)$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
כך שלכל הצלעות ב-E יש קודקוד אחד ב- V_1 וקודקוד
אחד ב- V_2 .

במילים אחרות ניתן לחלק את קודקודי
הגרף ל-2 כך שכל הצלעות **חוצות** את 2 הקבוצות.

- גרף הוא דו-צדדי אמ"מ **כל** המעגלים בו בעלי אורך זוגי.

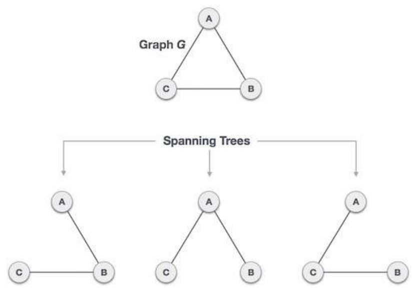
20. **גרף דו-צדדי מלא/שלם** - גרף דו צדדי בו נמצאות כל הקשתות האפשריות.
סימון: $K_{n,m}$ כאשר n קודקודים בצד אחד ו-m קודקודים בצד שני.
- בגרף דו צדדי שלם $K_{n,m}$ מספר הצלעות הוא $n \cdot m$.

21. **קבוצה בלתי תלויה** בגרף או **אנטי-קליקה**- הינה קבוצה של קודקודים שאין בתוכה צלעות.
(בדיוק ההפך מגרף שלם).
- הגרף הריק : $G=(V,E),\ V=\{v_1, v_2, ..., v_n\},\ E=\{\ \}$ הוא **כולו** קבוצה בלתי תלויה.

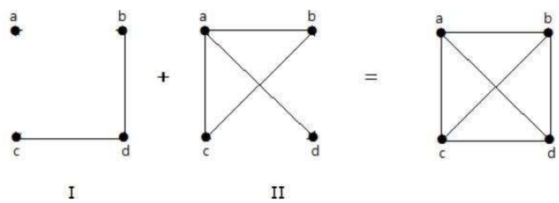
- בגרף דו-צדדי V_1, V_2 הינן קבוצות בלתי תלויות.

22. עץ פורש של G הינו **תת** גרף של גרף G אשר הינו עץ (כלומר לא מכיל מעגלים) ובנוסף מכיל את כל קודקודי G.

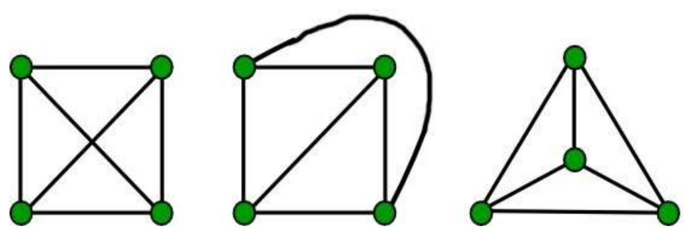
- גרף G הוא קשיר אם ורק אם יש ל-G עץ פורש.



23. גרף משלים - הגרף המשלים של G הוא הגרף $\overline{G} = (V, \overline{E})$ כאשר קבוצת הקודקודים של $\overline{G}$ זהה לזו של G ואילו שני קודקודים u,v יהיו שכנים ב-$\overline{G}$ אם ורק אם הם אינם שכנים ב-G.

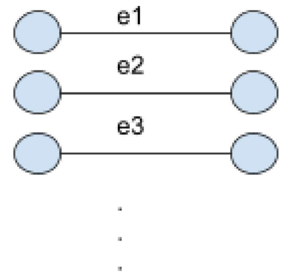


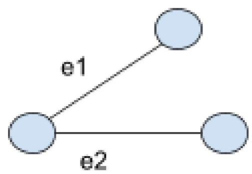
24. גרף מישורי, ניתן לצייר במישור כך שאין שתי צלעות נחתכות.



- לכל אזור שתחום מכל הכיוונים בצלעות נקרא **פאה.**
- נוסחת אוילר אומרת כי לכל גרף מישורי **קשיר** מתקיים: $f = e - n + 2$.
- אם $f \geq 2$ אזי יש בגרף מעגל.
- נוסחה לגרף לא קשיר בעל d רכיבי קשירות $f = e - n + 1 + d$.
- תנאי הכרחי (ולא מספיק) למישוריות. יהי גרף G קשיר ומישורי אזי $e \leq 3(n-2)$

25. זיווג $M \subseteq E(G)$ הינו אוסף של צלעות כך שלאף זוג מ-M אין קודקוד משותף.





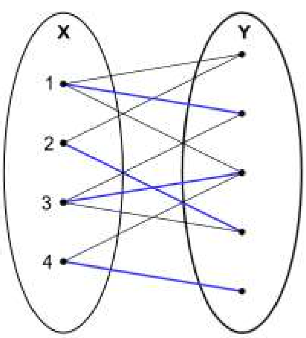
זה **לא** זיווג כי יש להם קודקוד משותף

- הגודל המקסימלי האפשרי של זיווג ב**גרף דו-צדדי** $G = (V_1 \cup V_2\ ,\ E)$ הוא $min(\left|V_1\right|, \left|V_2\right|)$.

26. זיווג M יקרא מושלם אם כל קודקודי הגרף משתתפים בו.

- הגודל של זיווג מושלם של גרף בעל n צלעות הוא $|M| = \frac{1}{2} \cdot n$.
- זיווג **מושלם** בגרף דו צדדי יכול להתקיים רק אם $\left|V_1\right| = \left|V_2\right|$.

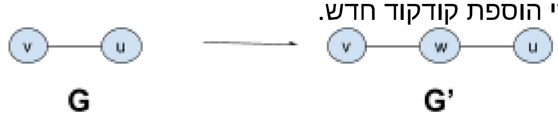
27. משפט Hall: בגרף דו-צדדי $G = (V_1 \cup V_2\ ,\ E)$ כך ש-$\left|V_1\right| = \left|V_2\right|$ יש זיווג מושלם אם"ם לכל קבוצה חלקית ל-V_1 , $S \subseteq V_1$ מתקיים $|S| \leq |\Gamma(S)|$.



הוא משפט שמגדיר תנאי הכרחי ומספיק לבחירת נציגים ייחודיים עבור משפחה של קבוצות.
נניח שיש לנו קבוצת נשים וקבוצת גברים וכל אישה מעוניינת בקבוצה חלקית כלשהי של הגברים. נשאלת השאלה, באילו תנאים ניתן לשדך לכל אישה גבר שהיא מעוניינת בו (באופן מונוגמי). ברור כי תנאי הכרחי הוא שמספר הגברים יהיה לפחות כמספר הנשים. ניתן להכליל דרישה זו לכל קבוצת נשים. כלומר, תנאי הכרחי הוא שכל k נשים תהיינה מעוניינות בלפחות k גברים. משפט הול טוען כי זהו גם תנאי מספיק.

- יהי G גרף דו-צדדי **d-רגולרי,** אזי יש ב-G זיווג מושלם.
- בגרף דו-צדדי d-רגולרי אפשר למצוא בדיוק d זיווגים מושלמים **זרים** שאיחודם שווה לכל צלעות הגרף, בעבור זיווגים מושלמים **לאו דווקא זרים** יש d!.

28. 'G יקרא **עידון** של G אם ניתן לקבל אותו מ-G ע"י ביצוע מספר כלשהו של החלפות של צלע של ב-2 צלעות, על-ידי הוספת קודקוד חדש.
כך:



- אם נתון שבגרף G יש תת גרף שהוא עידון של K_5 או $K_{3,3}$ אזי G **איננו** מישורי.(כל גרף הוא עידון של עצמו).