2. נראה ש מבחן χ^2 של פירסון ומבחן χ^2 של יחס הנראויות מתכנסים לאותו ערך כאשר $n \to \infty$

a. עפ"י משפט wilks אני יודע כי כאשר $n \to \infty$ מתקיים ש

$$-2\log\Lambda(X^n) \to \chi^2_d$$

b. נראה עבור X^n מהתפלגות מולטינומית מתקיים ש

$$Z_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \to N(0, 1-p_i)$$

<u>הוכחה:</u>

(עצמי)

עבור כל אפשרות בחירה B_i של הקטגוריה יש הסתברות p_i (שזה ה משתנה):

$$I_{i1}(\hat{X}_1 \in B_i), \dots, I_{in}(\hat{X}_n \in B_i)$$

מתקיים כי

$$E(\hat{X}_j \in B_i) = p_i$$

$$Var(\hat{X}_j \in B_i) = p_i(1-p_i)$$

(אלו הם משתנים המקריים ברנולי).

X_i הוא סכום הברנולי ה i:

$$\frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} I(\hat{X}_i \in B_j) - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$$

$$= \frac{E - n\mu}{\sqrt{n\,Var}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \sim N(0, 1-p_i)$$

$$E\, x_i x_j = E\left(\sum_{l=1}^{n} I(X_i \in B_l) \cdot \sum_{l=1}^{n} I(X_j \in B_l)\right)$$

:2 lem

$$= E\left(\sum_{l \neq m} \left(I(X_l \in B_l) I(X_j \in B_m)\right)\right)$$

$$= n(n-1) p_i p_j$$

$$E_{z_i z_j} = E\left(\frac{x_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \cdot \frac{x_j - np_j}{\sqrt{np_j}}\right)$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}} \left(E_{x_i x_j} - n^2 p_i p_j\right)$$

c (2.2) (:2)

$$E_{z_i \cdot z_j} = -\sqrt{p_j p_i}$$

$\blacksquare$

עיבוד וניתוח מידע - גיליון 3

(1) **משפט:** עבור $H_0 : \theta_0$, הפילוג של ערך-p הוא אחיד בקטע $[0,1]$.

השלמת ההוכחה מההרצאה:

נסמן: $p \triangleq$ p-value.

נרצה להוכיח כי לכל $\alpha_0 \in [0,1]$ מתקיים כי:

$$\circledast \quad F_p(\alpha_0) = \underset{\substack{\text{תחת השערה:} \\ H_0 = \theta_0}}{P_{\theta_0}}(p \le \alpha_0) = \frac{\alpha_0 - 0}{1 - 0} = \alpha_0$$

מפני שפונקציית ההתפלגות שלעיל היא פונקציית ההתפלגות של פילוג אחיד.

יהי $\alpha_0 \in [0,1]$ כלשהו, ונראה:

$$F_p(\alpha_0) = P_{\theta_0}(p \le \alpha_0) \underset{\substack{\text{מהגדרת p-value:} \\ p = \inf\{\alpha : x^n \in R_\alpha\}}}{=} P_{\theta_0}(\inf\{\alpha : x^n \in R_\alpha\} \le \alpha_0) =$$

הביטוי האחרון במשוואה שלעיל הוא ההסתברות שה-α הקטן ביותר כך שהמדידות שייכות לאזור הדחייה, הוא קטן או שווה ל-α_0.
כלומר, ביטוי זה שווה להסתברות שהמדידות שייכות לאזור דחייה המתאים ל-α_0 (זהו אזור הדח"י שבו $P_{\theta_0}(x^n \in R_{\alpha_0}) = \alpha_0$).
לכן:

$$P_{\theta_0}(\inf\{\alpha : x^n \in R_\alpha\} \le \alpha_0) = P_{\theta_0}(x^n \in R_{\alpha_0}) = \alpha_0$$

כלומר, קיבלנו:

$$F_p(\alpha_0) = \alpha_0$$

כנדרש לפי $\circledast$,
ולכן p-value מפולג באופן אחיד בקטע $[0,1]$, תחת השערה $H_0 = \theta_0$.

עיבוד וניתוח מידע - גיליון 3

3) א) קוביה בעלת 6 פאות מוטלת 60 פעמים.
להלן טבלת התוצאות:

פאה	כמות פעמים שהתקבלה
1	8
2	4
3	11
4	9
5	11
6	17

השערת האפס: $H_0: p=p_0$: הקוביה מאוזנת, ולכן: $p_0=\frac{1}{6}$ לכל הפאות.
השערה חלופית: $H_1: p\neq p_0$: כלומר, קיימת פאה שעבורה $p\neq\frac{1}{6}$, ולכן הקוביה לא מאוזנת.
(p - הסיכוי ליפול על הפאה המסוימת).

* מבחן ה-χ^2 של פירסון:

לפי השערת האפס: לכל $1\le i\le 6$ מתקיים: $\underline{E_i} = np_0 = 60\cdot\frac{1}{6} = \underline{10}$
(n - מספר ההטלות הכולל).

לכן, סטטיסטיקת המבחן היא:

$$\underline{T} = \sum_{i=1}^{6}\frac{(x_i-E_i)^2}{E_i} = \frac{1}{10}\left[(8-10)^2+(4-10)^2+(11-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(17-10)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[4+36+1+1+1+49\right] = \frac{1}{10}(92) = \underline{9.2}$$

נשווה את התוצאה ל-χ^2_d המתאים.
נשים לב כי: $\underline{d}=6-1=5$.
לפי טבלת χ^2_5: ערך של 11.07 מתאים למובהקות של 0.95.
ערך של 15.086 מתאים למובהקות של 0.99.

כלומר, סטטיסטיקת המבחן נמוכה הן מהערך הנדרש כדי לדחות את H_0 במובהקות של 0.99 והן מהערך הנדרש עבור 0.95.

לכן, <u>הקוביה נחשבת מאוזנת ב-0.99 לפי מבחן ה-χ^2 של פירסון</u>.

בנוסף, נשים לב כי לפי טבלת χ^2_5: ערך של 9.2 מתאים למובהקות של 0.90.
לכן, <u>ה-p-value הוא 0.1</u>.

* <u>מבחן χ^2 - log-likelihood</u>:

פונקצית ההסתברות עבור הטלת קוביה (התפלגות מולטינומית) היא:

$$P(x_1,\dots,x_6) = \frac{n!}{x_1!\cdots x_6!}p_1^{x_1}\cdots p_6^{x_6}$$

עבור השערת האפס: $\forall i: p_i = p_0 = \frac{1}{6}$
עבור ההשערה החלופית, נבחר בערכים הסבירים ביותר שהם הערכים האמפיריים:

$$(p_1,\dots,p_6) = \left(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n},\dots,\frac{x_6}{n}\right) = \left(\frac{8}{60},\frac{4}{60},\frac{11}{60},\frac{9}{60},\frac{11}{60},\frac{17}{60}\right)$$

לכן, סטטיסטיקת המבחן היא:

$$\Lambda(x^n) = \frac{\frac{60!}{8!\,4!\,11!\,9!\,11!\,17!}\left(\frac{1}{6}\right)^{60}}{\frac{60!}{8!\,4!\,11!\,9!\,11!\,17!}\left(\frac{8}{60}\right)^{8}\left(\frac{4}{60}\right)^{4}\left(\frac{11}{60}\right)^{11}\left(\frac{9}{60}\right)^{9}\left(\frac{11}{60}\right)^{11}\left(\frac{17}{60}\right)^{17}} = \frac{0.855\cdot10^{-6}}{95.86\cdot10^{-6}}$$

$$\Rightarrow \Lambda(x^n) = 8.92\cdot10^{-3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\lambda(x^n)} = -2\log(\Lambda(x^n)) = \underline{9.44}$$

המשך ←

עיבוד וניתוח מידע - גיליון 3

3) א) המשך. מצאנו כי לפי מבחן log-likelihood - χ^2:

$$\lambda(x^n) = 9.44$$

לפי ערכי ה-χ^2_5 בהם השתמשנו עבור מבחן ה-χ^2 של פירסון (בתחילת הסעיף) נקבל כי:

$$\lambda(x^n) < \underbrace{11.07}_{\text{שווי ל-}\alpha 0.05} , \underbrace{15.086}_{\text{שווי ל-}\alpha 0.01}$$

<u>לכן, כפי שהסברנו עבור המבחן הקודם, הקוביה נחשבת מאוזנת גם ב-$\alpha 0.05$ לפי מבחן ה-log-likelihood - χ^2.</u>

נחשב את ה-p-value:
אין ערך שמתאים בדיוק בטבלת ה-χ^2_5, לכן נחשב לפי ה-CDF:

$$p\text{-value} \underset{\text{לפי מה שלמדנו בהרצאה}}{=} 1 - F_5(\lambda(x^n)) = 1 - 0.91 = \underline{0.09}$$

נשים לב כי בהתאם להוכחה בשאלה 2,
תוצאות שני המבחנים דומות.

עיבוד וניתוח מידע - גיליון 3

3) ב) כעת הקוביה מוטלת 600 פעמים.
להלן טבלת התוצאות:

פאה	כמות פעמים שהתקבלה
1	80
2	40
3	110
4	90
5	110
6	170

השערות H_0, H_1 בהתאם (H_0 - הקוביה מאוזנת, H_1 - הקוביה לא מאוזנת).

א) **מבחן ה-χ^2 של פירסון:**
לכל $1 \le i \le 6$:

$$E_i = np_0 = 600 \cdot \frac{1}{6} = \underline{100}$$

סטטיסטיקת המבחן:

$$\underline{T} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(x_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{1}{100}\left[(80-100)^2 + (40-100)^2 + (110-100)^2 + (90-100)^2 + (110-100)^2 + (170-100)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{100}\left[400 + 3600 + 100 + 100 + 100 + 4900\right] = \frac{1}{100}(9200) = \underline{92}$$

כלומר, <u>קיבלנו סטטיסטיקת מבחן גבוהה פי 10 מאשר בסעיף הקודם.</u>

תוצאה זו גבוהה בהרבה מכל טבלת ה-χ^2_5,
ולכן במובהקות גבוהה מאוד (מעל 99.9%) יש לדחות את H_0,
כלומר הקוביה <u>לא מאוזנת</u> לפי מבחן ה-χ^2 של פירסון.

סה"כ ה-p-value שואף ל-0 לפי אותו החישוב מהסעיף הקודם.

ב) **מבחן ה-χ^2 Log-likelihood:**
באותו אופן ניתן לחשב כמו בסעיף הקודם ולקבל
כי סטטיסטיקת המבחן היא:

$$\Lambda(x^n) = \frac{\frac{600!}{80!\,40!\,110!\,90!\,110!\,170!}\left(\frac{1}{6}\right)^{600}}{\frac{600!}{80!\,40!\,110!\,90!\,110!\,170!}\left(\frac{80}{600}\right)^{80}\left(\frac{40}{600}\right)^{40}\left(\frac{110}{600}\right)^{110}\left(\frac{90}{600}\right)^{90}\left(\frac{110}{600}\right)^{110}\left(\frac{170}{600}\right)^{170}} =$$

$$= \frac{1.024 \cdot 10^{-27}}{3.197 \cdot 10^{-7}} = 3.2 \cdot 10^{-21} \Rightarrow \lambda(x^n) = -2\log(\Lambda(x^n)) = \underline{94.38}$$

כלומר <u>גם במבחן זה קיבלנו סטטיסטיקת מבחן גבוהה פי 10 מאשר בסעיף הקודם.</u>
שוב, תוצאה זו גבוהה בהרבה מכל טבלת ה-χ^2_5,
ולכן, <u>הקוביה לא מאוזנת גם לפי מבחן ה-χ^2 - log-likelihood.</u>

סה"כ ה-p-value שואף ל-0 גם עבור מבחן זה.

← נשים לב כי על אף שבשתיהן קיבלנו את אותן המדידות כמו בסעיף הקודם, בסעיף זה הגברנו את הניסוי שמספר גדול בהרבה (פי 10) של כמויות, ולכן הגיוני שהתוצאה שחורגות מהשערת האפס תידחה ותהיה ברמת מובהקות גבוהה בהרבה.

עיבוד וניתוח מידע - גיליון 3

4) א) $X_1,\dots,X_n \sim Poisson(\lambda)$
$\lambda_0>0$.

יש למצוא מבחן Wald המתאים לגודל α עבור:

$$H_0: \lambda=\lambda_0 \quad , \quad H_1: \lambda\neq\lambda_0$$

לפי מה שלמדנו בהרצאה, סטטיסטיקת מבחן Wald היא:

$$W = \frac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{\hat{se}}$$

כאשר $\hat{\lambda}$ משערך של λ, ו- se סטיית התקן.

בהתפלגות פואסון מתקיים כי: $\lambda = \mu$ (התוחלת).
לכן, משערך טוב (שהוא גם משערך סבירות מרבית במקרה הפואסוני, כפי שלמדנו בהרצאה) ל- λ הוא:
ממוצע הדגימות:

$$\hat{\lambda}=\bar{X}$$

לכן, סטיית התקן היא:

$$(\sigma(\hat{\lambda}))^2 = Var(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n}Var(X) = \frac{1}{n}\cdot\lambda$$

$Var(X)=\lambda$
כי השונות שווה ל- λ בהתפלגות פואסונית.

בשערוך plug-in:

$$(\hat{\sigma}(\hat{\lambda}))^2 = \frac{\hat{\lambda}}{n} \rightarrow \hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}$$

נציב ב- W ונקבל:

$$W = \frac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}} = \boxed{\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\lambda_0)}{\sqrt{\bar{X}}}}$$

לכן, מבחן Wald המתאים לגודל α הוא:
נדחה את H_0 אם:

$$|W| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

כאשר: W שהוגדר וחושב לעיל,
$z_{\frac{\alpha}{2}}$ מוגדר כך: $Z\sim N(0,1)$, $P(|Z|<z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$

נציין כי מבחן Wald מיועד למדגמים גדולים, אז מתקיים כי: $W\sim N(0,1)$.

ב) הקוד מצורף ב- ipython notebook של החלק הרטוב.

התוצאה של הרצת המבחן 1000 פעמים הייתה כי השגיאה מסוג 1 קרובה מאוד ל- α (0.052 לעומת 0.05 בהתאמה).

(נשים לב כי כאן שגיאה מסוג 1, מפני שיוצרים את המדגמים לפי הפרמטר λ_0 של H_0, ולכן כל דחייה של H_0 היא שגיאה מסוג 1).

לפי התוצאה, ניתן לראות כי מבחן Wald פועל טוב גם עבור מדגם קטן יחסית של 20 מדידות.

עיבוד וניתוח מידע - גיליון 3

(2) ב- 1000 הטלות קוביה בעלת 3 פאות התקבלו התוצאות:
$N_1 = 350$, $N_2 = 340$, $N_3 = 310$
נרצה לבחון האם הקוביה הוגנת.

א) **בעיית בדיקת השערות מתאימה:**

הטלת קוביה היא בעלת פילוג מולטינומי, כך שאם p_i הוא ההסתברות שתתקבל הפאה ה-i, ו- $0<p_i<1$, $\sum_i p_i = 1$,
אז:
פונקציית ההסתברות היא:

$$P(N_1, N_2, N_3) = \frac{(\sum_i N_i)!}{N_1!\,N_2!\,N_3!}(p_1)^{N_1}(p_2)^{N_2}(p_3)^{N_3}$$

לכן, כדי לבחון האם הקוביה הוגנת,
נשתמש בבעיית בדיקת השערות הבאה:

__השערת האפס:__ $H_0:\ \forall i:\ p_i = p_0 = \frac{1}{3}$

__השערה חלופית:__ $H_1:\ \exists i:\ p_i \neq p_0 = \frac{1}{3}$

ב) בהתאם לאמור בסעיף א', θ של מבחן יחס הסבירות
הוא הווקטור: $\theta = (p_1, p_2, p_3)$, ובפרט: $\theta_0 = (p_0, p_0, p_0)$.
לכן, פונקציית הסבירות $L(\theta)$ היא:

$$L(\theta) = P_\theta(N_1, N_2, N_3) = \frac{(\sum_i N_i)!}{N_1!\,N_2!\,N_3!}(p_1)^{N_1}(p_2)^{N_2}(p_3)^{N_3}$$

להלן יחס הסבירות (בהתאם לרישומו בהרצאה. והפוך מבחינת
מונה ומכנה מהמצוין בשאלה, כמובן שאין לכך השפעה שאינה סמנטית):

$$\underline{\Lambda(N_1, N_2, N_3)} = \frac{\sup_{\theta \in H_0} L(\theta)}{\sup_\theta L(\theta)} = \frac{L(\theta_0)}{L\left(\left(\frac{N_1}{\sum_i N_i}, \frac{N_2}{\sum_i N_i}, \frac{N_3}{\sum_i N_i}\right)\right)} =$$

ברור כי הסבירות הגבוהה ביותר
היא שהמדידות שנצפו תואמות בדיוק להסתברות
ליפול על כל פאה.

$$= \frac{\frac{1000!}{350!\,340!\,310!}\left(\frac{1}{3}\right)^{350}\left(\frac{1}{3}\right)^{340}\left(\frac{1}{3}\right)^{330}}{\frac{1000!}{350!\,340!\,310!}\left(\frac{350}{1000}\right)^{350}\left(\frac{340}{1000}\right)^{340}\left(\frac{310}{1000}\right)^{310}} = \underline{0.269}$$

כלומר, יחס הסבירות הוא:

$$\Lambda(N_1, N_2, N_3) = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})} = 0.269$$

ג) בהמשך לסעיף הקודם. מבחן יחס הסבירות עבור מקרה זה, הינו: לדחות את H_0 אם:

$$\Lambda(N_1,N_2,N_3) = \underline{0.269 \le c}$$

כעת נשתמש במשפט וילקס. לפיו

$$\lambda(N_1,N_2,N_3) = -2\log(\Lambda(N_1,N_2,N_3)) \longrightarrow \chi^2_d$$

ולכן נוכל להשתמש במבחן: דחיית H_0 אם:

$$\underline{-2\log(\Lambda(N_1,N_2,N_3)) = 2.63 \ge c_{\chi^2_d}}$$

ד) נשתמש ב"מבחן χ^2 לניראות מולטינומית" כמבחן נוסף המתאים לבעיה זו.
לפי מבחן זה:
נסמן: X_i: התפלגות בנפילה על הפאה ה-i.
P_i: הסיכוי ליפול על הפאה ה-i.
אז:

$$(X_1,X_2,X_3) \sim multi(n, P=(P_1,P_2,P_3))$$

ההשערות כמו קודם כמובן, כי זו אותה הבעיה:

$$H_0: P=(P_0,P_0,P_0), \quad H_1: P\neq(P_0,P_0,P_0)$$
$$P_0=\frac{1}{3}$$

נשים לב כי: $\underline{E_i} = nP_0 = 1000\cdot\frac{1}{3} = 333.3$
מכאן, סטטיסטי χ^2 של פירסון:

$$\underline{T} = \sum_{i=1}^{3}\frac{(X_i-E_i)^2}{E_i} = \frac{1}{333.3}\left[(350-333.3)^2+(340-333.3)^2+(310-333.3)^2\right] = \underline{2.6}$$

כלומר יש לדחות את H_0 אם:

$$\underline{T = 2.6 \ge c_{\chi^2_d}}$$

ה) נדרש כי המבחן יהיה בגודל $\alpha=0.05$.
נבחר את הסף c כך שהמבחן של סעיף ד' יהיה בגודל $\alpha=0.05$ (הסף זהה גם למבחן יחס הסבירות) באופן הבא:

c נקבע לפי χ^2_d המתאים, במקרה זה: $d = 3-1 = 2$
כלומר ההפרש בין מספר הקטגוריות (מספר הפאות במקרה זה) לבין מספר הפרמטרים של ההתפלגות (אחד במקרה זה).

כעת, יש למצוא בטבלת את ה-χ^2_2 הרצוי, כלומר שמתאים ל-$\alpha=0.05$. לפי טבלת χ^2_2, ערך זה הוא: 5.991.
כלומר, הסף c הוא: $\underline{c = 5.991}$.
לכן, לא נדחה את H_0 כי: $T = 2.6 < 5.991$.

ו) נחשב את ערך ה-p של המבחן בסעיף ג:

$$p\text{-value} = 1 - F_d(\lambda(N_1,N_2,N_3)) = 1 - F_2(2.63) = 1-0.73 = 0.27$$

נשים לב כי ה-p-value מאוד גדול, ולכן אין תמיכה לדחיית H_0.