בחינת סריג מתכתי כמקטב לינארי של גלים אלקטרומגנטיים וחקירת תכונות גלים אלקטרומגנטיים במעבר דרך גלבו

שם: נתיב מאור | ת"ז: 319002911 | דוא"ל: nativ.maor@campus.technion.ac.il
שם: דור חי שחם | ת"ז: 318258555 | דוא"ל: dor-hay.sha@campus.technion.ac.il

September 3, 2022

תקציר

בדוח זה נתאר מספר ניסויים שנערכו על גלים אלקטרומגנטיים שאורך הגל שלהם הוא בתחום המיקרו.
בניסוי הראשון, בחנו את השפעת סריג מתכתי שמוקם בין משדר וגלאי על עוצמת הגל הנמדדת בגלאי ובדקנו האם היא תואמת להשפעה הצפויה ממקטב לינארי. תחילה מדדנו את עוצמת הגל הנקלטת כתלות בזווית היחסית בין הגלאי והמשדר ללא סריג ביניהם. לאחר מכן מדדנו את עוצמת הגל הנקלטת כשסריג מוקם בין המשדר והגלאי כתלות בזווית היחסית בין הסריג למשדר ולגלאי שאלו מוקמו באותה זווית אחד ביחס לשני.
בניסוי השני, בחנו תכונות שונות של גלים לאחר מעבר בגלבו. תחילה מיקמנו את הגלבו בין המשדר לגלאי כאשר קיטוב השדה החשמלי לינארי וניצב ללוחות הגלבו ובדקנו את התלות של עוצמת הקרינה הנמדדת במרחק בין לוחות הגלבו. בעזרת מדידת העוצמה בזוויות שונות בדקנו האם הקיטוב לינארי. לאחר מכן, חזרנו על מדידת עוצמת הקרינה כתלות במרחק בין לוחות הגלבו כאשר קיטוב השדה החשמלי מקביל ללוחות הגלבו. בעזרת המדידות האחרונות מצאנו את הרוחב המינימלי עבורו העוצמה יורדת משמעותית וחישבנו ממנו את אורך הגל הנכנס לגלבו. בעזרת מיקום לוח פרספקס בין לוחות הגלבו במקומות שונים, זיהינו נקודות צומת ונקודת אקסטרימום בגל עומד המתפתח בתוך הגלבו ובעזרת המרחקים בינהם חישבנו את אורך הגל המתקדם בגלבו עבור מרחקים שונים בין לוחות הגלבו. כפונקציה של אורכי הגל בגלבו כתלות במרחק בין הלוחות חילצנו את אורך הגל של המשדר והשוונו לערך הצפוי לפי הרשום על המשדר. לבסוף, חקרנו את התופעה של צבירת פאזה, על ידי בחירת מרחקים בין לוחות הגלבו עבורם נצפה שיווצרו גלים בעלי קיטוב לינארי ומעגלי ובדיקת הקיטוב של הגלים שנוצרו בפועל על ידי מדידת עוצמת הקרינה בזוויות שונות של המשדר.

מבוא

בניסויים השונים השתמשנו במשדר המשדר גל אלקטרומגנטי מקוטב לינארית באורך גל $2.8cm$ שמגיע אל גלאי המחובר לוולטמטר שמקריאתו ניתן להסיק את עוצמת הגל הנקלטת בגלאי - שכן אנו מניחים ש $I \propto V$ - המתח הנמדד פרופורציוני לעוצמה הנקלטת בגלאי (כשI הוא עוצמת הגל הא"מ וV קריאת הוולטמטר המחובר לגלאי). הן המשדר והן הגלאי ניתנים לסיבוב סביב ציר השידור או הקליטה כך שתקבע ביניהם זווית יחסית. נוסחא המקשרת בין הזווית היחסית לעוצמה הנקלטת בגלאי עבור עוצמת שידור מסוימת:

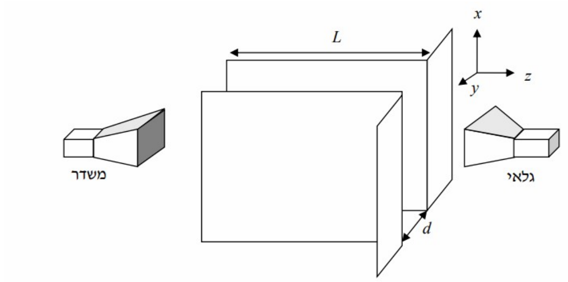
$$I = I_0 \cos^2(\theta_1) \tag{1}$$

כאשר I עוצמת הגל הא"מ הנמדדת ב$\frac{W}{m^2}$, θ_1 הזווית בין קיטוב הגל לקיטוב הגלאי במעלות וI_0 היא העוצמה הנמדדת ב$\theta_1 = 0^\circ$.
בין המשדר והגלאי מוקמו בכל ניסוי אלמנטים שונים (סריג, גלבו ופרספקס) המשפיעים על התקדמות הגל בדרכו בין המשדר והגלאי. בניסוי הראשון מוקם סריג מתכתי, אשר בחנו האם מתנהג כמקטב לינארי - כלומר מעביר גלים המקוטבים בכיוון ניצב לחריצי הסריג וחוסם גלים המקוטבים במקביל. על פי התאוריה צפוי שיתקיים הקשר הבא:

$$I = I_0 \cos^2(\theta_1) \cos^2(\theta_2) \tag{2}$$

כאשר I עוצמת הגל הא"מ הנמדדת ב$\frac{W}{m^2}$, θ_1 הזווית בין קיטוב הגל לניצב לסריג המקטב במעלות,θ_2 הזווית בין קיטוב הגלאי לניצב לסריג במעלות וI_0 היא העוצמה הנמדדת ב$\theta = 0^\circ$.

בניסוי השני מוקם בין המשדר לגלאי גלבו המורכב משני לוחות מתכתיים עם מרחק בר שינוי ביניהם כמתואר באיור הבא[3]:



איור 1: תרשים מערכת הניסוי עם גלבו.
נלקח מהתדריך.

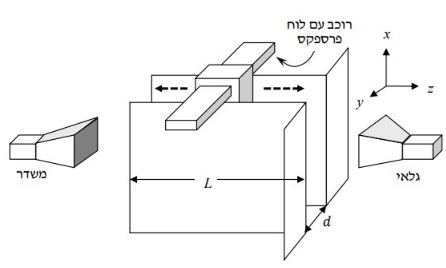
כאשר הגל המשודר מקוטב במקביל למישורי הלוחות, כלומר בכיוון $\hat{x}$ לפי התרשים, נוצר גל עומד בגלבו עם אורך גל λ_g המקיים:

$$\frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{3}$$

כאשר λ הוא אורך הגל הא"מ בm, λ_g הוא אורך הגל הגלבו בm וd הוא המרחק בין לוחות הגלבו בm.
בנוסף, משום שלוחות הגלבו מגדירים תנאי שפה, עבור גל מקוטב בכיוון $\hat{x}$ מתקיים:

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{2d} \tag{4}$$

כאשר $m = 1, 2, 3, \ldots$ הוא סדר ההתאבכות, θ_m היא זווית (מסדר m) בין ציר z לכיוון ההתקדמות של הגל הא"מ המקיימת את תנאי השפה, λ אורך הגל בm וd המרחק בין לוחות הגלבו בm.
בחלק מניסוי 2, כאשר הקיטוב הוא בכיוון $\hat{x}$, עקב החזרה של גלים שיש להם רכיב התקדמות גם בכיוון $\hat{y}$ מהלוחות, בזוויות התקדמות מסוימות נוצרת תמונה של גלים עומדים כלומר ניתן למצוא מישורים הניצבים לציר z כך שבמרכז הלוחות תתקבל אקסטרימה או צומת של הגל העומד. את האקסטרימה והצמתים אנו מזהים על ידי מיקום של פרספקס על הגלבו, והזזה שלו לאורך ציר הz. ההחזרה של קרינה מלוח הפרספקס תהיה מרבית במישור אקסטרימה ומינימלית במישור צומת. לשם כך המערכת סודרה כפי שמתואר באיור הבא:



איור 2: תרשים מערכת הניסוי עם גלבו ולוח הפרספקס.
נלקח מהתדריך.

בנוסף, כאשר משודר גל המקוטב גם בכיוון $\hat{x}$ וגם בכיוון $\hat{y}$ נוצר הפרש פאזה במעבר בגלבו. המרחק בין לוחות הגלבו[4] כפונקציה של הפרש הפאזה הוא:

$$d = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\Delta\phi}{\pi L\lambda} - \left(\frac{\Delta\phi}{2\pi L}\right)^2}} \tag{5}$$

כאשר d הוא המרחק בין לוחות הגלבו בm, $\Delta\phi$ הוא הפרש הפאזה (בין רכיב המקוטב בכיוון ה$\hat{x}$ לרכיב המוקטב בכיוון ה$\hat{y}$) של הגל הא"מ בrad, L אורך הגלבו בm וλ אורך הגל הא"מ בm.

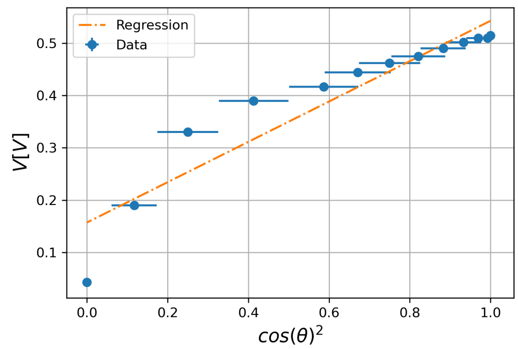
כאשר הפרש הפאזה הוא כפולה שלמה של 2π נקבל קיטוב לינארי וכאשר הפרש הפאזה הוא $\frac{\pi}{2}+m\pi$ כאשר $m \in \mathbb{Z}$ ויחס האמפליטודות של שדות הרכיבים המקוטבים ב$\hat{x},\hat{y}$ הוא 1 נקבל קיטוב מעגלי.

תוצאות הניסוי

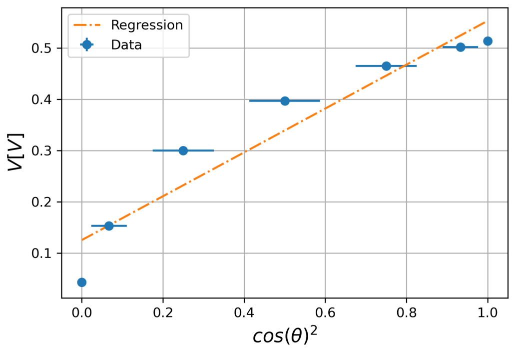
תחילה, על מנת לגרום לכך שהמשדר והגלאי יהיו אחד מול השני עם כמה שפחות הסחות לצדדים (כלומר ציר הפליטה והקליטה יהיה ציר z מוגדר ויחיד) הוצמדו השפופרות שלהם וסודרו כך שיחפפו אחת לשניה. לאחר מכן הורחקו המשדר והגלאי אחד מהשני לאורך ציר z למרחק של $L = 0.55m$ בין קצות השפופרות. הגלאי היה מחובר לוולטמטר כך שיתן אינדיקציה לעוצמה של הקרינה המתקבלת בו - לאורך הניסויים השונים נתייחס אל המתח המתקבל בוולטמטר כפרופורציונלי לעוצמת הקרינה $I \propto V$, V מתח המתקבל בוולטמטר ב$Volt$ וI עוצמת הקרינה ב$Watt/m^2$. הפעלנו תחילה את הגלאי כאשר המשדר כבוי, הרחקנו ממנו גופים אנושיים (על מנת להקטין השפעות של קרינה מהגוף) וראינו שנמדד על הגלאי מתח קבוע (לאורך זמן) של $0.014V$, כנראה עקב רעשים קונסיסטנטיים מהסביבה, את גודל זה הפחתנו מכל מדידות המתח שהתבצעו לאחר מכן. לאחר מכן הפעלנו את המשדר כדי לראות את קנה המידה של המתחים המתקבלים, עקב כך קבענו את הוולטמטר להיות ברגישות של $\pm 0.001V$. כעת נתאר את תוצאות שני הניסויים השונים בנפרד.

ניסוי 1 - בחינת סריג מתכתי כמקטב לינארי של גלים אלקטרומגנטיים

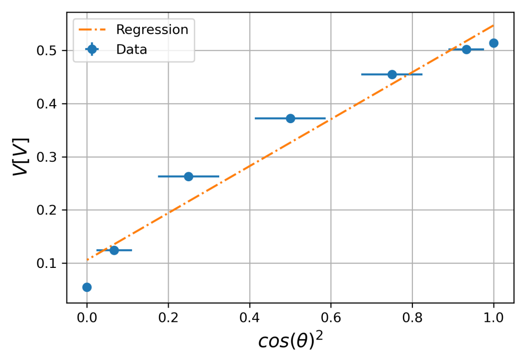
תחילה, קבענו את המרחק בין המשדר והגלאי להיות $L = 0.55m$ וביצענו מדידה של המתח על הגלאי ב$Volt$ כתלות בזווית θ. בניסוי זה, תחילה מדדנו את המתח על הגלאי V כתלות בזווית θ כשאין סריג בין המשדר והמקלט. כשθ הוגדרה להיות הזווית היחסית בין המשדר והגלאי. תוצאות מדידת המתח כתלות ב$\cos^2\theta$ מוצגות בגרפים הבאים, כשכל גרף מציג את התוצאות עבור זוויות ברבעון אחר (כל גרף ברבעון אחר כיוון ש $\cos^2\theta$ לא חד ערכית בתחום $[0, 2\pi]$, לכן נציג את התוצאות בנפרד עבור כל ענף של הפונקציה ההופכית).



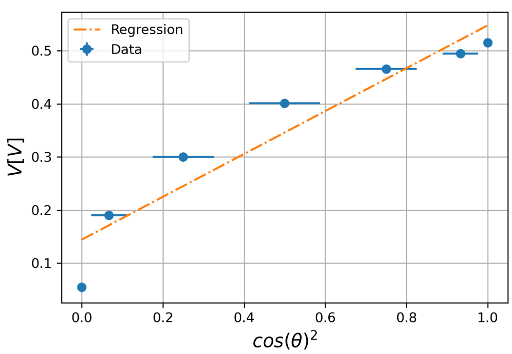
גרף 1: מתח הגלאי Vב כתלות ב$\cos^2\theta$ עבור $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.39 \pm 0.09)x + (0.16 \pm 0.06)$ עם
$R^2 = 0.881$



גרף 2: מתח הגלאי Vב כתלות ב$\cos^2\theta$ עבור $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.43 \pm 0.12)x + (0.13 \pm 0.07)$ עם
$R^2 = 0.914$



גרף 3: מתח הגלאי Vב כתלות ב$\cos^2\theta$ עבור $\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.44 \pm 0.08)x + (0.11 \pm 0.05)$ עם
$R^2 = 0.957$



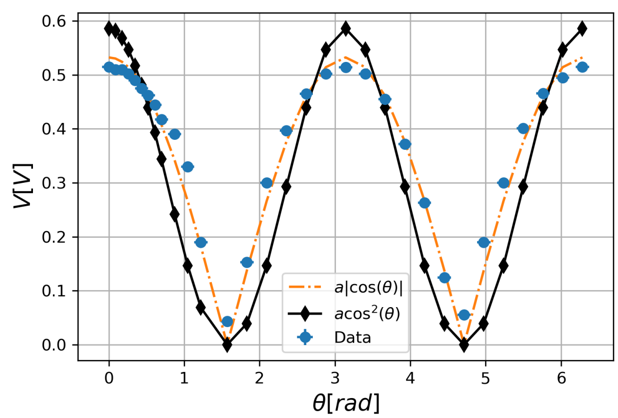
גרף 4: מתח הגלאי Vב כתלות ב$\cos^2\theta$ עבור $\frac{3}{2}\pi \le \theta \le 2\pi$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.40 \pm 0.11)x + (0.14 \pm 0.07)$ עם
$R^2 = 0.908$

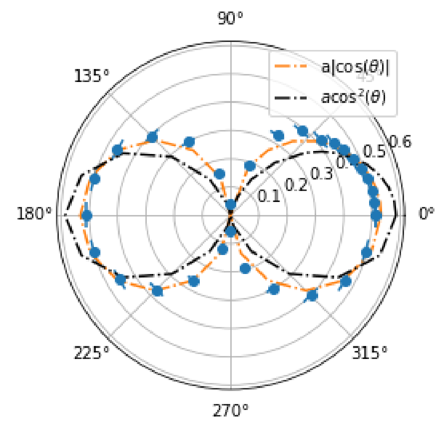
גרפים 1-4: מתח הגלאי Vב כתלות ב$\cos^2\theta$

הנקודות הכחולות מייצגות את המדידות עם קווי השגיאה שלהן. הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה הלינארית שבוצעה כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה.

לפי נוסחא 1 אמור להתקיים יחס ישר בין I ל$\cos^2\theta$ בעוד שלפי תוצאות הרגרסיות נראה שלא מתקיימת התאמה ליחס לינארי בין העוצמה ל$\cos^2\theta$ באף אחת מהן, הן ממבט איכותי מעצם כך שגרף הרגרסיה לא נופל בתחום קווי השגיאה והן לפי ערכי מדד R^2 שבכל התחומים קטנים מ 0.96.

נציג גם גרפים של עוצמת המתח כתלות בזווית :





גרפים 5-6: מתח בגלאי Vב כתלות בθ

בגרף 5 (השמאלי) ובגרף 6 (הימני) ניתן לראות בהצגה קרטזית ופולרית בהתאמה,המדידות מיוצגות בנקודות כחולות עם קווי שגיאה. בנוסף ניתן לראות פונקציות רגרסיה הבאות:

בכתום- התאמה של המדידות לפונקציה מהצורה $y = a \cdot |\cos(\theta)|$:

$$y = (0.532 \pm 0.012)\,|cos\,(\theta)|\,,\;\; R^2 = 0.995$$

ובשחור- התאמה של המדידות לפונקציה מהצורה $y = a \cdot \cos^2(\theta)$:

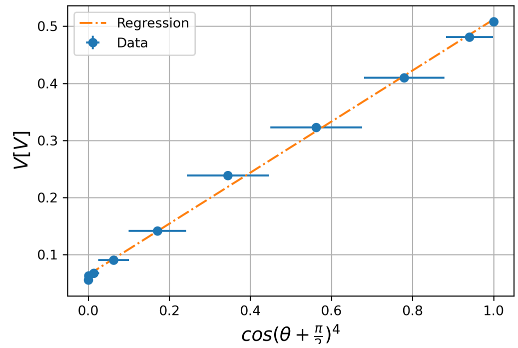
$$y = (0.59 \pm 0.05)\,cos^2\,(\theta)\,,\;\; R^2 = 0.950$$

כאשר השגיאות נלקחו מתנתוני הרגרסיה.

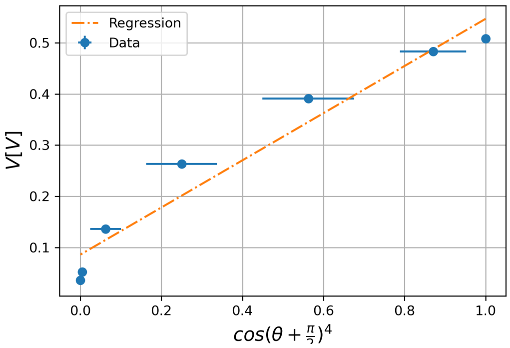
מגרפים אלה מסתמן שיכולה להיות התאמה טובה דווקא ליחס ישר בין I ל $|\cos\theta|$ שכן ההתאמה של הנתונים לרגרסיה לפונקציה מהצורה $f(\theta) = a \cdot |\cos\theta|$ היא טובה לפי מדד R^2 -מתקבל הערך $R^2 = 0.995$. זאת בעוד שההתאמה לפונקציה מהצורה $f(\theta) = a \cdot \cos^2\theta$ היא לא טובה ומתקבל הערך $R^2 = 0.950$. נוסף על כך ממבט איכותי ברור שההתאמה ל$|cos\theta|$ טובה בהרבה משל $cos^2\theta$.

כלומר, נראה שיש פער מהותי בין התיאוריה למתקבל מחלק זה של הניסוי. על פער זה נדון בהרחבה בדיון בתוצאות.

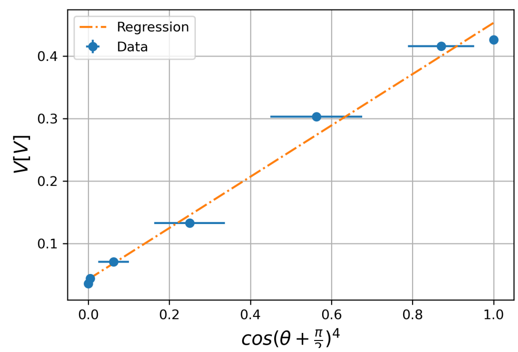
לאחר מכן, מיקמנו סריג שחריציו בכיוון ציר x בין המשדר והגלאי וביצענו שוב את מדידת עוצמת הקרינה כתלות בזווית[8] הפעם הזווית נמדדה כזווית בין קיטוב המשדר ל$\hat{x}$, כשעל מנת לשנות את הזווית ב$\Delta\theta$, סובבנו את שתי השפופרות ב$\Delta\theta$ כאשר פסי הסריג נותרו בכיוון $\hat{x}$. נציין במדידות סביב הזווית $\theta = \frac{3\pi}{2}$ התרחשה הסטה של הגלאי בסיבוב סביב ציר x, בעקבותה ניסינו להחזיר לזווית המקורית אך לצערנו ניתן לחוש בהבדל ממבט על המדידות כפי שמוצג בגרף 12. תוצאות המדידה מוצגות בגרפים הבאים, כשכל גרף מציג את התוצאות עבור זוויות ברבעון אחר:



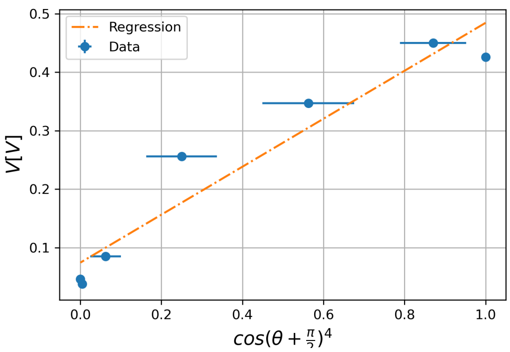
גרף 7: מתח הגלאי V כתלות ב$\cos^4(\theta + \frac{\pi}{2})$ עבור $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.447 \pm 0.014)x + (0.065 \pm 0.008)$
עם $R^2 = 0.997$



גרף 8: מתח הגלאי V כתלות ב$\cos^4(\theta + \frac{\pi}{2})$ עבור $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.46 \pm 0.09)x + (0.09 \pm 0.05)$ עם
$R^2 = 0.950$



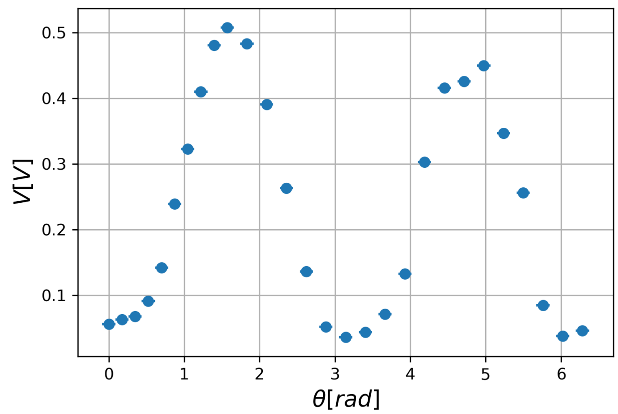
גרף 9: מתח הגלאי V כתלות ב$\cos^4(\theta + \frac{\pi}{2})$ עבור $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.41 \pm 0.04)x + (0.043 \pm 0.022)$
עם $R^2 = 0.988$

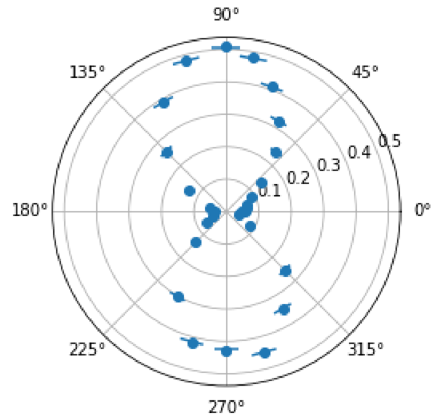


גרף 10: מתח הגלאי V כתלות ב$\cos^4(\theta + \frac{\pi}{2})$ עבור $\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi$
הרגרסיה הלינארית: $y = (0.41 \pm 0.10)x + (0.07 \pm 0.06)$ עם
$R^2 = 0.925$

גרפים 7-10: מתח הגלאי V כתלות ב$\cos^4\theta$
הנקודות הכחולות מייצגות את המדידות עם קווי השגיאה שלהן. הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה הלינארית שבוצעה כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה.

נציג גם גרפים של עוצמת המתח כתלות בזווית :





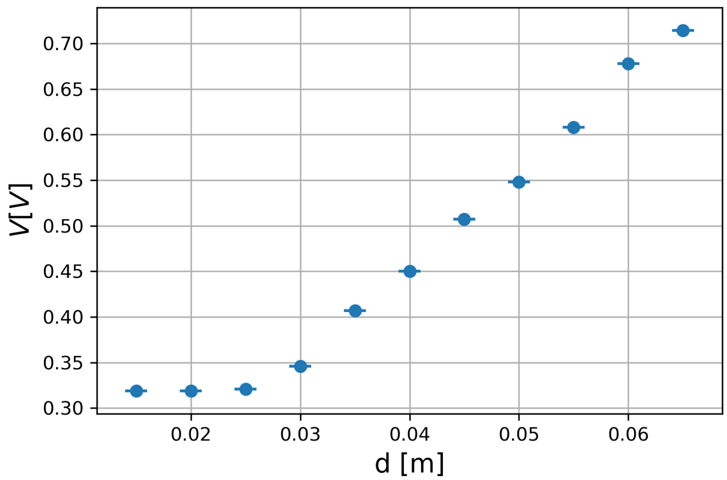
גרפים 11-12: מתח בגלאי בV כתלות בθ

בגרף 11 (השמאלי) ובגרף 12 (הימני) ניתן לראות בהצגה קרטזית ופולרית בהתאמה,המדידות מיוצגות בנקודות כחולות עם קווי.

לפי נוסחא 2 אמור להתקיים יחס ישר בין I ל $\cos^4(\theta+\frac{\pi}{2})$(כיוון ש θ בנוסחא מוגדרת ביחס לניצב לסריג ובמדידות ביחס לכיוון הסריג). התקבלה התאמה שונה בתחומים השונים המוצגים בגרפים השונים. התאמה טובה מאוד של המדידות לרגרסיה לינארית התקבלה במדידות המוצגות בגרף 7 עם התאמה של $R^2=0.997$ ותחומי שגיאה שמכילים את עקום הרגרסיה . התאמה טובה (אך פחות טובה משל גרף 7) התקבלה במדידות המוצגות בגרף 9, עם $R^2=0.988$ ותחומי שגיאה שמכילים את עקום הרגרסיה. בתחומים של גרפים 8 ו 10 התקבל מהרגרסיות $R^2<0.96$, כשעקום הרגרסיה חורג מתחומי השגיאה. גם על פער זה נדון בדיון בתוצאות.

ניסוי 2 - תכונות גלים אלקטרומגנטיים במעבר דרך גלבו

תחילה מיקמנו גלבו באורך $L = 0.15m$ בין הגלאי למשדר וקירבנו את המשדר לגלאי כך שהשפופרות שלהם קרובות ככל הניתן ללוחות הגלבו. כמו כן וידאנו שהמרכז השפופרות עובר במחצית גובה הגלבו. כיוונו את קיטוב המשדר להיות בניצב ללוח (ודאגנו לכך שהגלאי יהיה באותה זווית כמוהו) ומדדנו את המתח כתלות במפתח לוחות הגלבו d. את d מדדנו בעזרת סרגל עם הערכת שגיאת מדידה ברזולוצית המדידה של הסרגל - כ$1mm$, המרחק נמדד מקצה הלוחות הקרוב לגלאי (כך גם בשאר המדידות של d בניסוי). מהמתח הנמדד הסקנו את העוצמה ולהלן התוצאות בגרפים:

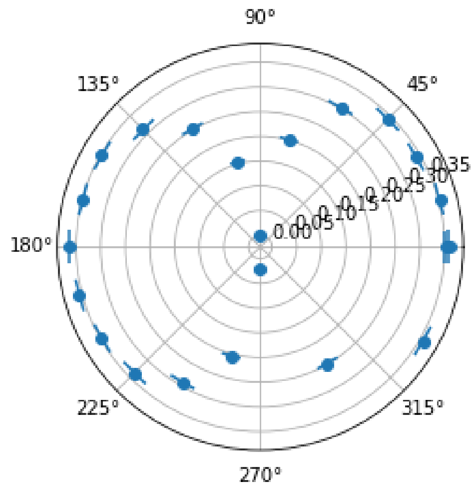


גרף 13: מתח הגלאי בV כתלות במרחק בין לוחות הגלבו בm עבור גל מקוטב בניצב ללוחות הגלבו

המדידות מסמונות בנקודות כחולות עם קווי שגיאה.

קיבלנו שהמתח עולה בצורה רציפה ביחס למפתח לוחות הגלבו. תוצאה זו מתכנסת עם התאוריה היות ואין אילוץ על קיטוב בציר y ציפינו שהגדלת המפתח תאפשר כניסה של יותר גלי מיקרו ולכן קריאת גלאי יותר חזקה וניתן לראות שזה מה שקרה על פי הגרף.

לאחר מכן, עבור מפתח קבוע $d = 0.04m$ מדדנו את העוצמה הנקלטת כתלות בזווית היחסית בין המשדר והגלאי. נציג את העוצמה הנקלטת כתלות בזווית בגרף פולארי:



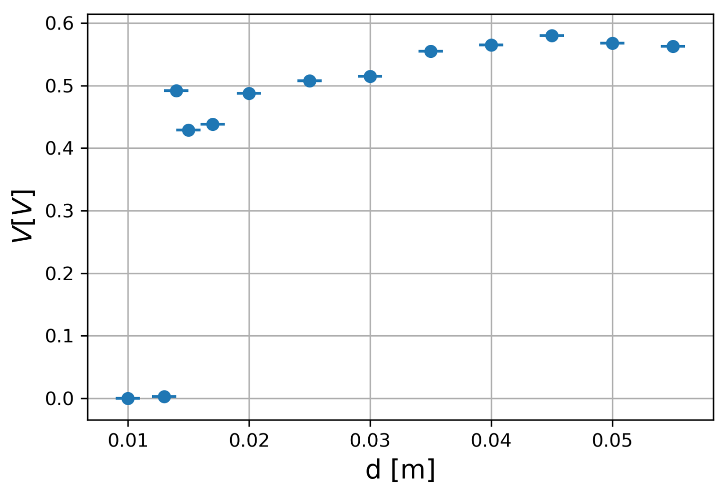
ניתן

גרף 14: מתח הגלאי בV כתלות בזווית היחסית בין המשדר לגלאי

בגרף פולרי זה המדידות מסמונות בנקודות כחולות עם קווי שגיאה.

לראות שהגרף תואם לגרף לינארי בהצגה הפולרית, שכן צורתו היא $\cos^2(\theta)$ מבחינה איכותית, וגרף לינארי בהצגה פולרית פרופורציוני ל$\cos^2(\theta)$.

לאחר מכך כיוונו את קיטוב המשדר להיות במקביל ללוח, בכיוון x ומדדנו את המתח כתלות במפתח לוחות הגלבו. להלן התוצאות בגרפים:



גרף 15: מתח הגלאי בV כתלות במרחק בין לוחות הגלבו בm עבור גל מקוטב בניצב ללוחות הגלבו

המדידות מסמונות בנקודות כחולות עם קווי שגיאה.

קיבלנו שהמתח עולה בצורה לא רציפה ביחס למפתח לוחות הגלבו. תוצאה זו מתכנסת עם התאוריה היות ויש אילוץ על קיטוב בציר x ציפינו שהגדלת המפתח תאפשר כניסה של יותר גלי מיקרו עבור גדלים ספציפים (בהתאם לסדרי ההתאבכות לפי נוסחא 4) ולכן ציפינו לפונקציה לא רציפה. בגרף זה ניתן לראות קפיצה בקריאת הגלאי בהתאם לתאוריה, כמו כן ניתן

לשים לב שהמפתח הקטן ביותר עבורו יש קריאה משמעותית של הגלאי הוא

$$d_{min} = 0.014 \pm 0.001m$$

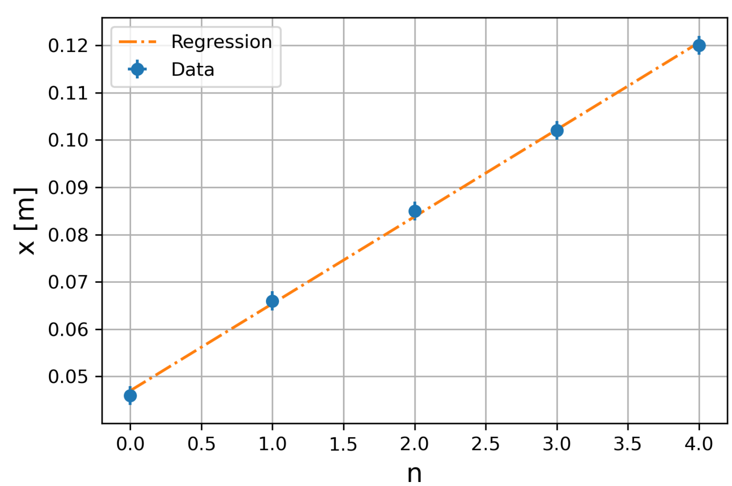
מגודל זה ניתן להסיק לפי נוסחא 4 ו$m = 1$ שאורך הגל הוא

$$\lambda = 2d_{min} = 0.028 \pm 0.002m$$

(לפי חישוב שגיאה 6 בנספח)

תוצאה זו מסדרת יפה עם ערך אורך הגל הרשום על המשדר $\lambda_{expected} = 0.028m$.

כעת, קבענו $d = 0.02m$ ומיקמנו רכיב לוח פרספקס דק התלוי על פס פרספקס שניתן להזזה לאורך הגלבו. הזזנו את הרכיב לאורך הגלבו ומצאנו מיקומים עבורם מתקבל אקסטרמום או צומת של עוצמה.
לשם מדידת מיקומי הנקודות, הוזז הפרספקס לאורך הגלבו ונלקחה מדידת המיקום (לפי מיקום קצה הפרספקס ביחס לקצה הגלבו הקרוב למשדר, כפי שמוצג בסרגל של הגלבו שלו רזולוציית מדידה של $1mm$), שעבורה הסטה של $1mm$ ימינה או שמאלה הגדילה את המתח על הגלאי כך שהערכת שגיאת המדידה נקבעה להיות $\pm 1mm$.
להלן גרף המציג את המרחקי הצמתים כתלות בסדר שלהם:



גרף 16: x מרחק הצמתים מתחילת הגלבו במטרים כתלות בn אינדקס הצומת (חסר יחידות)

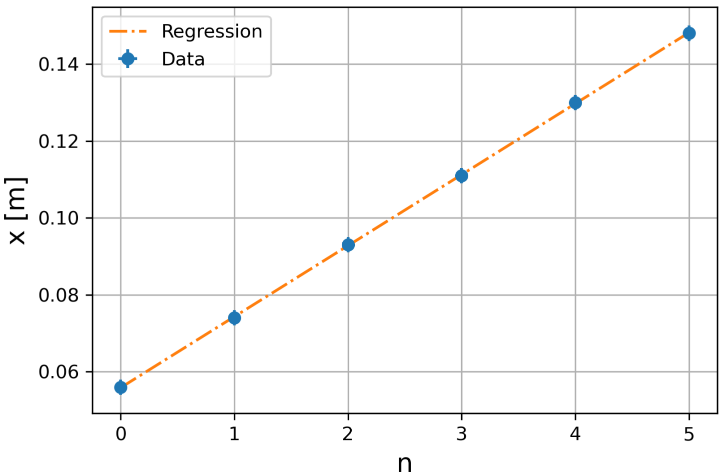
הנקודות הכחולות מייצגות את המדידות עם קווי השגיאה שלהן. הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה הליניארית המתאימה לנתונים:

$y = (0.0184 \pm 0.0007)x + (0.047 \pm 0.002)$

כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה וכמו כן מתקיים $R^2 = 0.999$.

שיפוע הגרף שהתקבל מהרגרסיה הוא המרחק בין שני צמתים סמוכים המשוקלל מכלל המדידות. לכן אורך הגל הוא פעמיים ערך זה ומכאן שאורך גל הגלבו הוא $\lambda_g = 0.037 \pm 0.001m$ (לפי חישוב 7 בנספח).

להלן גרף המציג את מרחקי האקסטרמות כתלות בסדר שלהם:



גרף 17: x מרחק הצמתים מתחילת הגלבו במטרים כתלות בn אינדקס הצומת (חסר יחידות)

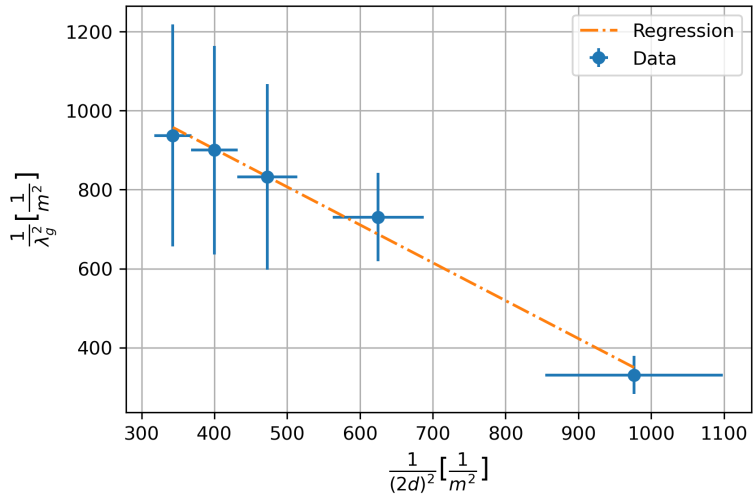
הנקודות הכחולות מייצגות את המדידות עם קווי השגיאה שלהן. הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה הלינארית המתאימה לנתונים: $y = (0.0184 \pm 0.0001)x + (0.0559 \pm 0.0004)$

כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה וכמו כן מתקיים $R^2 = 0.999$.

שיפוע הגרף שהתקבל מהרגרסיה הוא המרחק בין שני האקסטרמות סמוכות המשוקלל מכלל המדידות. לכן אורך הגל הוא פעמיים ערך זה ומכאן שאורך גל הגלבו הוא $\lambda_g = 0.0368 \pm 0.0002m$ (לפי חישוב 7 בנספח).

נשים לב שיש חפיפה בין תחומי הλ_g שקיבלנו עבור הצמתים והאקסטרימות.

לאחר מכן, שינינו את d , ועבור מספר d שונים ביצענו את אותן מדידות, עבור כל d חילצנו את λ_g באותו אופן כמו בחלק האחרון. להלן גרף המציג את התוצאות:



גרף 18: $\frac{1}{\lambda_g^2}$ ב $\frac{1}{m^2}$ כתלות ב $\frac{1}{(2d)^2}$ ב $\frac{1}{m^2}$

הנקודות הכחולות מייצגות את המדידות עם קווי השגיאה שלהן (השגיאות חושבו לפי חישובים 8 ו9 בהתאמה בנספח).

הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה הלינארית:

$y = (-0.96 \pm 0.12)x + (1.29 \pm 0.07)10^3$

כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה ומתקיים $R^2 = 0.988$.

לפי נוסחא 3 צריך להתקבל קשר לינארי בגרף הנ"ל עם שיפוע -1 ונקודת חיתוך עם ציר y שמקיימת $intercept = \frac{1}{\lambda^2}$. ניתן לראות שמתקיים קשר לינארי הן מבחינה איכותית משום שהרגרסיה בתחום השגיאה של כל הנקודות והן מבחינה כמותית היות ועל פי מדד R^2 קיבלנו 0.988 ושיפוע הגרף מכיל את -1 בתחום כמצופה מהתאוריה. מנקודת החיתוך נחלץ את אורך הגל:

$$\lambda = 0.0279 \pm 0.0008m$$

(השגיאה חושבה לפי חישוב 10 בנספח)

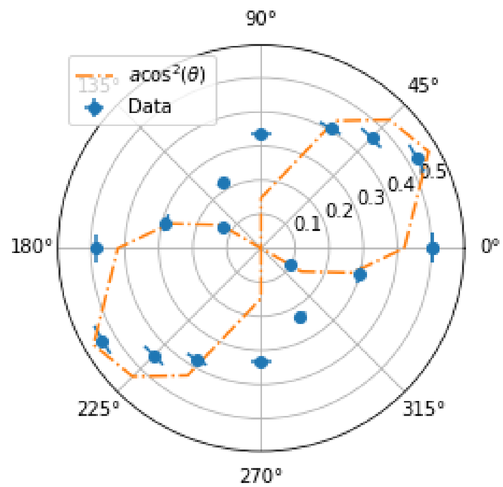
אורך הגל המופיע על הגלאי הוא $\lambda_{expected} = 0.028m$, ניתן לשים לב שהוא מוכל בתחום השגיאה של אורך הגל שהתקבל כצפוי מהתאוריה.

לבסוף, כדי לנסות ליצור קרינה מקוטבת לינארית ומעגלית ביציאה מהגלבו, כוון המשדר לזווית של 45 מעלות ביחס למישור לוחות הגלבו, כדי שרכיבי השדה החשמלי של הגל בכיוונים $\hat{x}$ ו$\hat{y}$ יהיו שווים בקירוב בכניסה לגלבו.

כדי ליצור קיטוב לינארי חישבנו בעזרת נוסחא 5 את המרחק המתאים בין הלוחות להפרש פאזה של כפולה שלמה של π. כדי למצוא את המרחק הנ"ל הצבנו בנוסחא $\Delta\phi = \pi, L = 0.15 \pm 0.01m, \lambda = 0.028m$, וקיבלנו שעבור $d_{linear} = 0.033 \pm 0.001m$ (השגיאה חושבה לפי חישוב 11 בנספח) צפוי להתקבל קיטוב לינארי.

כדי לבדוק האם אכן מתקבל קיטוב לינארי קבענו את המרחק בין הלוחות להיות $d = 0.033 \pm 0.001m$ (עקב יכולת רזולוציית הדיוק המתקבלת משיטת המדידה בעזרת סרגל) ומדדנו את המתח כתלות בזווית היחסית כפי שנעשה קודם לכן בחלקים הקודמים של הניסוי.

בגרף הבא מוצג המתח על הגלאי כתלות בזווית היחסית בין הגלאים בהצגה פולרית:



גרף 19: מתח הגלאי בV כתלות בזווית היחסית בין המשדר לגלאי

בגרף פולרי זה המדידות מסמונות בנקודות כחולות עם קווי שגיאה. הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה לפונקציה $a\cos^2(\theta)$:

$$y = (0.57 \pm 0.09)\, cos^2\left(\theta - (0.53 \pm 0.14)\right)$$

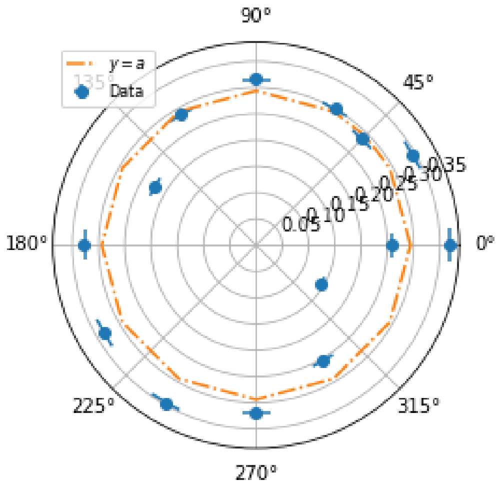
כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה ומתקיים $R^2 = 0.917$.

ממבט איכותי בגרף נראה שאין התאמה למצופה מגרף של עוצמת קרינה עם קיטוב לינארי, זאת על סמך כך שמעטפת הנקודות לא סימטרית סביב זווית של 45 מעלות כצפוי מגרף של עוצמה של קיטוב לינארי ב45 מעלות כתלות בזווית המדידה. בנוסף מנתוני רגרסיה לפונקציה מהצורה $a \cdot \cos^2\theta$ התקבל $R^2 = 0.917$, כלומר ההתאמה לא טובה ולכן ניתן לומר כי המדידות לא תואמות לציפייה מהתיאוריה. על פער זה נדון בהרחבה בדיון.

כדי ליצור קיטוב מעגלי חישבנו בעזרת נוסחא 5 את המרחק המתאים בין הלוחות להפרש פאזה של $\pi/2$ ועוד כפולה שלמה של π. כדי למצוא את המרחק הנ"ל הצבנו בנוסחא $\lambda = 0.028m,\ L = 0.15m,\ \Delta\phi = \frac{5}{2}\pi$, וקבלנו $d_{polar} = 0.0218 \pm 0.0008m$ (השגיאה חושבה לפי חישוב 11 בנספח).

כדי לבדוק האם אכן מתקבל קיטוב מעגלי קבענו את המרחק בין הלוחות להיות $d = 0.022 \pm 0.001m$ ומדדנו את המתח כתלות בזווית היחסית כפי שנעשה קודם לכן בחלקים הקודמים של הניסוי.

בגרף הבא מוצג המתח על הגלאי כתלות בזווית היחסית בין הגלאים בהצגה פולרית:



גרף 20: מתח הגלאי בV כתלות בזווית היחסית בין המשדר לגלאי

בגרף פולרי זה המדידות מסמונות בנקודות כחולות עם קווי שגיאה. הקו המקווקו הכתום מתאר את הרגרסיה לפונקציה קבועה a:

$$y = (0.294 \pm 0.032)$$

כאשר תחום השגיאה הוא תחום ה95% בר סמך שנלקח מנתוני הרגרסיה ומתקיים $R^2 = 0.963$.

ממבט איכותי בגרף נראה שאין התאמה למצופה מגרף של עוצמת קרינה עם קיטוב מעגלי. זאת על סמך כל שהמתחים הנמדדים השתנו כתלות בזווית המדידה, בעוד שבגרף עוצמה של קיטוב מעגלי כתלות בזווית אמורה להמדד עוצמה קבועה עבור כל הזוויות. כלומר המדידות לא תואמות לציפיה מהתיאוריה. על פער זה נדון בדיון בתוצאות.

דיון בתוצאות

נדון בתוצאות הניסויים השונים בנפרד.

ניסוי 1 - בחינת סריג מתכתי כמקטב לינארי של גלים אלקטרומגנטיים

במדידות מתח הגלאי כתלות בזווית היחסית בין המשדר והגלאי ללא הסריג קבלנו תוצאות החורגות מהמצופה מהתיאוריה. מנוסחא 1 ציפינו שיתקבל יחס ישר בין המתח על הגלאי V ל $\cos^2\theta$, אולם מן המדידות המוצגות בגרפים 1-4 התקבל שבכל התחומים בנפרד לא הייתה התאמה טובה של רגרסיה לינארית למדידות , בכולם התקבל ערך $R^2 < 0.96$:
בענף $\theta \in [0, \pi/2]$ התקבל $R^2 = 0.881$, בענף $\theta \in [\pi/2, \pi]$ התקבל $R^2 = 0.914$, בענף $\theta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ התקבל $R^2 = 0.957$ ובענף $\theta \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ התקבל $R^2 = 0.908$.
גם מההצגה של המתח כתלות ב θ באופן ישיר המוצגת בגרפים 5 ו 6 קבלנו שאין התאמה טובה של הנתונים לפונקציה מהצורה $a \cdot \cos^2\theta$, מהרגרסיה של הנתונים לפונקציה מהצורה התקבל $R^2 = 0.950$, ערך זה מראה התאמה לא טובה.
יש לציין שמהתבוננות בנתונים המוצגים בגרפים 5 ו6 עלה החשד שאכן יש התאמה לפונקציה מחזורית אחרת, ואכן מבדיקה להתאמה עם פונקציה מהצורה $a \cdot |cos\theta|$ ראינו התאמה טובה - מהרגרסיה של הנתונים לפונקציה מהצורה התקבל $R^2 = 0.995$, ערך זה מראה התאמה טובה מאוד.
בסך הכל לא התקבל הערך הצפוי מהתיאוריה, אנו משערים שהסיבה לפער זה היא התנהגות של הגלאי באופן שונה משחשבנו - כך שההנחה שהעוצמה המתקבל בגלאי היא ביחס ישר למתח המתקבל $I \propto V$ אולי לא נכונה עבור כל תחומי העוצמה שנמדדו בניסוי.

במדידות מתח הגלאי כתלות בזווית עם הסריג קבלנו תוצאות החורגות מהמצופה מהתיאוריה גם כן. מנוסחא 2 ציפינו שיתקבל יחס ישר בין המתח על הגלאי V ל $\cos^4\theta$ בכל התחומים, אולם ההתאמה הייתה טובה רק בחלק מהתחומים. בענפים $\theta \in [0, \pi/2]$ ו $\theta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ התקבלה התאמה טובה. בענף $\theta \in [0, \pi/2]$ התקבלה התאמה טובה מאוד עם ערך $R^2 = 0.997$ ונקודות המדידה ותחומי השגיאה שלהן הכילו את עקום הרגרסיה. גם בענף $\theta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ התקבלה התאמה טובה עם ערך $R^2 = 0.988$כשתחומי השגיאה של הנתונים מכילים את עקום הרגרסיה.
אולם בענפים $\theta \in [\pi/2, \pi]$ ו$\theta \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ התקבלה התאמה לא טובה, בענף $\theta \in [\pi/2, \pi]$ התקבל $R^2 = 0.950$ ו ובענף $\theta \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ התקבל $R^2 = 0.925$.
כלומר ישנה חריגה בין המתקבל מהמדידות לציפיה מהתיאוריה. אנו משערים שהסיבה לחריגה זו, בנוסף לסיבה שכתבנו מקודם ומשפיעה על כל תוצאות הניסוי היא בעיה בביצוע הניסוי הספציפי הזה. במהלך הניסוי ביצענו סיבוב של הגלאי והמשדר וכנראה נוצרה הטייה בינהם. באמצע הניסוי ביצענו תיקון להטייה, שבמדידות שלאחיה ניתן לראות חריגה מהאופי של שאר המדידות, הן המדידות בסביבות השיא ה2 בגרף 11.

ניסוי 2 - תכונות גלים אלקטרומגנטיים במעבר דרך גלבו

בחלק שבו קיטוב המשדר היה ניצב ללוחות הגלבו ומדדנו את המתח על הגלאי כתלות בd המרחק בין לוחות הגלבו, מהתבוננות איכותית ניתן לראות מגרף 13 שהחל מd מסוים מתקבלת עלייה המזכירה עלייה לינארית במתח. ציפינו לכך שגדלת המפתח תאפשר כניסה של יותר קרינה לגלבו ולכן גם ליותר קרינה שתגיע אל הגלאי. כלומר מבחינה איכותית יש התאמה בין המדידות לציפיה מהתיאוריה. עבור מפתח קבוע של $d = 0.04 \pm 0.001m$, כשמדדנו את העוצמה הנקלטת בתלות בזווית היחסית בין המשדר לגלאי כפי שמוצג בגרף 14 ציפינו להתאמה לגרף של קיטוב לינארי, מבחינה איכותית

נראה שיש התנהגות שמזכירה לינארית, שכן יש דעיכה לעוצמה 0 בזוויות שהן ± 90 מעלות והצורה של הגרף בהצגה פולרית סימטרית סביב זווית ה0.

בחלק שבו קיטוב המשדר היה מקביל ללוחות ומדדנו את המתח על הגלאי כתלות בd - תוצאות המוצגות בגרף 15, ניתן לראות שאכן ישנה נקודת אי רציפות , קיים d עבורו יש קפיצה משמעותית בעוצמה הנמדדת בגלאי. מצאנו שעברו מפתח $d_{min} = 0.014 \pm 0.001m$ התקבל מתח משמעותי בעוד שעבור כל מפתח קטן ממנו התקבל מתח 0. מהתיאוריה ציפינו שגם תהיה קפיצה כזאת בכמחצית מאורך הגל של המשדר, ואכן ממדידה זו אני מסיקים שאורך הגל הוא $\lambda = 2d_{min} = 0.028 \pm 0.002m$ כשהערך המצופה לפי אורך הגל הרשום על המשדר הוא $\lambda_{expected} = 0.028m$, ערך המוכל בתחום השגיאה של הערך שקיבלנו. עם שגיאה יחסית של: $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 7.14\%$ כלומר יש התאמה טובה לתיאוריה עם תחום שגיאה קטן.

בעזרת הפרספקס זיהינו גלים עומדים בתוך הגלבו עבור מפתח של $d = 0.02m$. מדדנו את מיקום הצמתים ומיקום האקסטרימות של גלים אלו. מכיוון שגל עומד הוא גל מחזורי במקום ציפנו לקבל גרף לינארי של הצמתים ושל האקסטרימות כתלות בסדר (מספר הצומת/אקסטרימה), ואומנם קיבלנו התאמות מצויינות לגרף לינארי, על פי מדד $R^2 = 0.999$ לשני הגרפים. משיפוע הגרפים חילצנו את אורך גל הגלבו, עבור גרף הצמתים:

$$\lambda_g^{nodes} = 0.037 \pm 0.001m,\ \ \frac{\delta\lambda_g^{nodes}}{\lambda_g^{nodes}} = 27.02\%$$

ועבור גרף האקסטרימות:

$$\lambda_g^{picks} = 0.0368 \pm 0.0002m,\ \ \frac{\delta\lambda_g^{picks}}{\lambda_g^{picks}} = 5.43\%$$

נשים לב שתחום השגיאה של λ_g^{nodes} עבור הצמתים מכיל את λ_g^{picks} עבור האקסטרימות, כמו כן השגיאה היחסית עבור מדידת הצמתים גדולה כמעט בסדר גודל מהשגיאה היחסית שהתקבלה עבור מדידת האקסטרימות, אנו מייחסים שגיאה זו לכך שעבור צמתים האות חלש במיוחד ולכן הפרעות ורעשים במדידה מורגשים יותר ומגדלים את השגיאה. בנוסף, נלקחה מדידה אחת יותר עבור האקסטרימות.

לאחר מכן חזרנו על הניסוי הנ"ל עבור מפתחי גלבו שונים ויצרנו התאמה לינארית בהתאם לנוסחא 3. מבחינה איכותית הייתה התאמה טובה היות והרגרסיה הוכלה בתחומי השגיאה של כל המדידות ומבחינה איכותית גם כן היות ו$R^2 = 0.988$. כמו כן, ציפנו מהנוסחא ששיפוע הגרף יהיה -1 ואכן שיפוע זה הוכל בתחום השיפוע שהתקבל מהרגרסיה -0.96 ± 0.12. מנקודת החיתוך יכולנו לחלץ את אורך הגל וקיבלנו

$$\lambda = 0.0279 \pm 0.0008m$$

תחום זה מכיל את אורך הגל אשר רשום על המשדר והגלאי $\lambda_{expected} = 0.028m$ והשגיאה היחסית שלו הינה $\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2.87\%$.

בחלק שבו ניסינו ליצור קרינה מקוטבת לינארית בעזרת הגלבו, התקבל שעבור המפתח שנקבע והיה צפוי להתקבל ממנו קרינה בקיטוב לינארי לא התקבלה התאמה לזו של קרינה מקוטבת לינארית. מקרינה מקוטבת לינארית היינו מצפים שיהיה יחס ישר בין העוצמה ל$cos^2\theta$ אולם מגרף 19 ומהרגרסיה של מדידות המתח כתלות בזווית לפונקציה מהצורה $a \cdot cos^2\theta$ התקבל ערך $R^2 = 0.917$, כלומר התאמה לא טובה ולכן מתקיימת חריגה מהציפייה התיאורטית.

גם כשניסינו ליצור קרינה מקוטבת מעגלית בעזרת הגלבו, התקבל שעבור המפתח הצפוי לא התקבלה התנהגות רצויה. ציפינו שהמתח הנמדד על הגלאי לא ישתנה כתלות בזווית, כיאה לקיטוב מעגלי בעוד שלפי גרף 20 והרגרסיה לפונקציה קבועה a התקבל $R^2 = 0.963$, כלומר ההתאמה לא טובה ולכן גם כאן חריגה מציפיה התיאורטית.
אנו מעריכים שהסיבה לחריגה היא שהצורה האיכותית של הגרפים רגישה לשינויים בהפרש הפאזה בין הגלים היוצאים, שהיא פונקציה של המפתח בין הלוחות d. המפתח נקבע עד כדי דיוק מסוים שיתכן שלא מספיק על מנת ליצור את ההתאבכויות הרצויות. יתכן גם שישנה עקמומיות מסוימת של לוחות הגלבו, עקמומיות הגורמת לכך שd לא מוגדר באופן חד משמעי ולכן עלולות להתרחש חריגות בצבירת הפאזה של רכיבי השדה בתוך הגלבו מהצפוי לפי התיאוריה.

מסקנות

בשני הניסויים בחנו את ההתנהגות של גלים אלקטרומגנטים בתחום המיקרו, בחלקים השונים בכל אחד מהם התקבלו לעיתים תוצאות להן ציפינו ולעיתים תוצאות מפתיעות.

בניסוי הראשון, בו בחנו את התנהגות סריג כמקטב לינארי, התקבלו חריגות מהציפייה התיאורטית. כשלא היה סריג בין המשדר והגלאי ציפינו לקיטוב לינארי, זאת בעוד שמהמדידות נראה שאין התאמה לציפיה זו - התאמה של רגרסיה למדידות התואמת למצופה מקיטוב לינארי (יחס ישר בין V ל $cos^2\theta$) הניבה ערך $R^2 = 0.950$. נצייין שהתאמה של המדידות לרגרסיה התואמת ליחס ישר בין V ל$|\cos\theta|$ הניבה תוצאות טובות בהרבה - $R^2 = 0.995$. גם כאשר מוקם סריג בין המשדר והגלאי התקבלה חריגה מהציפייה התיאורטית, ציפינו שיהיה יחס ישר בין V ל $cos^4\theta$ אולם מהרגסיה למדידות התקבלה התאמה טובה רק בתחומים$[0, \pi/2]$ עם $R^2 = 0.997$ ו $[\pi, 3/2\pi]$ עם $R^2 = 0.988$ בעוד שבשני התחומים הנותרים התקבלה התאמה לקויה עם $R^2 > 0.96$. אנו חושדים שהפער נובע מכך שההנחה שהמתח על הגלאי פרופורציוני לעוצמה המתקבלת אינה מתקיימת עבור כל העוצמות שאיתן נערך הניסוי.

בניסוי השני, כשבחנו את תכונות הגלים במעבר דרך גלבו, התקבלו הן התאמות בחלקים מסויימים והן חריגות בחלקים אחרים. ראינו שישנה התאמה מבחינה איכותית לציפיה התיאורטית בקשר שבין המתח המתקבל על הגלאי למרחק בין לוחות הגלבו. עבור קיטוב ניצב ללוחות ראינו שהגדלת המפתח מגדילה לינארית את המתח הנמדד החל מרוחב מרוחב מפתח מסוים סביב ה$0.028m$. כמו כן, ראינו שעבור קיטוב זה מתקבל מבחינה איכותית קשר שמזכיר התנהגות של מקטב לינארי במעבר דרך הגלבו. עבור קיטוב מקביל ללוחות ראינו שישנה נקודת אי רציפות ב$0.014 \pm 0.001m$ שהחל ממנה מתקבלת מדידה של מתח משמעותי על הגלאי, בהתאם לציפייה התיאורטית שהמפתח המינימלי הוא כחצי אורך גל המשדר שהוא $0.028m$.

בעזרת מיקום לוח פרספקס במקומות שונים לאורך הגלבו זיהנו נקודות צומת ואקסטרימות בגלים עומדים הנוצרים בגלבו ומתוכם מצאנו את אורך גל הגלבו. עבור הצמתים קיבלנו $\lambda_g^{nodes} = 0.037 \pm 0.001m$ עם שגיאה יחסית של 27.02% ועבור האקסטרימות קיבלנו $\lambda_g^{picks} = 0.0368 \pm 0.0002m$ עם שגיאה יחסית של 5.43%. כפונקציה של אורכי הגל בגלבו כתלות במרחק בין הלוחות חילצנו את אורך הגל של המשדר וקיבלנו $\lambda = 0.0279 \pm 0.0008m$ עם שגיאה יחסית של 2.87%. ערך זה מכיל את הערך הרשום על המשדר והגלאי ובנוסף שגיאתו היחיסית קטנה.

לבסוף, חקרנו את התופעה של צבירת פאזה, על ידי בחירת מרחקים מתאימים בין לוחות הגלבו ציפינו ליצור קיטובים לינארי ומעגלי, לא הייתה התאמה טובה לתאוריה הן מבחינה איכותית (לא קיבלנו בגרף הפולרי צורת שמתאימות לקיטוב לינארי ומעגלי) והן מבחינה כמותית בעזרת התאמה לרגרסיה קיבלנו $R^2 = 0.917$ ו$R^2 = 0.963$ עבור לינארי ומעגלי בהתאמה. ייתכן שהפער נבע מכך שהניסוי רגיש מאוד לחריגות במפתח d ולא הייתה לנו יכולת לקבוע אותו בדיוק שכזה. דרך אפשרית לשפר את הניסוי היא לחזור על המדידות עם מפתחים שונים עבור שני הקיטובים (לכל קיטוב יש מספר סדרים שמתאימים לו).

במהלך הניסוי מצאנו את אורך הגל של המשדר במספר דרכים שונות. הדרך הכי מדוייקת עם דיוק יחסי של פחות מ3% הייתה בעזרת מציאת אורך הגל בגלבו כפונקציה של המרחק בין הלוחות וחילוץ אורך הגל ממשוואת הרגרסיה, אך שווה לציין שבעזרת מדידת המפתח המינמלי עבורו יש קריאה משמעותית של הגלאי, חישבנו את אורך הגל בדיוק של כ7% במדידה מהירה בהרבה.

מקורות

תדריך גלי-מיקרו.

נספח

חישוב שגיאות נגררות:

$$\delta\lambda = 2\delta d_{min} \tag{6}$$

$$\delta\lambda_g = 2\delta m \tag{7}$$

כאשר δm הוא השגיאה של שיפוע הגרף שהתקבל מהרגרסיה.

$$\delta\frac{1}{\lambda_g^2} = 2\frac{\delta\lambda_g}{\lambda_g^3} \tag{8}$$

$$\delta\frac{1}{(2d)^2} = 2\frac{\delta d}{4d^3} \tag{9}$$

$$\delta\lambda = \frac{\delta b}{2b^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

כאשר b הוא נקודת החיתוך שהתקבל מהרגרסיה.

$$\delta d = \left| \frac{1}{4\left(\frac{\Delta\phi}{\pi L\lambda} - \left(\frac{\Delta\phi}{2\pi L}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(-\frac{\Delta\phi}{\pi L^2\lambda} + \left(\frac{\Delta\phi}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{2L}{L^3} \right) \delta L \right| \tag{11}$$