4.条件期望的性质

定理5.4.1

条件期望具有如下性质

$$
\begin{aligned}
&(1)\text{若}X\text{与}\mathcal{G}\text{独立（即}\sigma(X)\text{与}\mathcal{G}\text{独立，也即}X\text{与}1_A\text{独立），}\forall A\in\mathcal{G},\text{则}\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]=\mathbb{E}[X](a.s)\\
&(2)\text{若}X\text{为}\mathcal{G}\text{可测，则}\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]=X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}](a.s)\\
&(3)\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2\subset\mathcal{G},\text{则}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2]=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1](a.s)
\end{aligned}
$$

(1)证明：首先$\mathbb{E}[X]$为$\mathcal{G}$可测，接着$\forall A\in\mathcal{G}$，

$$
\int_A\mathbb{E}[X]dp=\int 1_A\mathbb{E}[X]dp\overset{\text{独立}}{=}\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[1_A]=\mathbb{E}[X1_A]=\int_A Xdp
$$

(2)证明：X为$\mathcal{G}$可测，$\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$为$\mathcal{G}$可测，从而$X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$为$\mathcal{G}$可测。我们的目标是证明

$$
\forall A\in\mathcal{G},\int_A X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]dp=\int_A XYdp
$$

如果$X=1_B$，那么

$$
\text{左边}=\int_A 1_B\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]dp=\int_{AB}\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]dp=\int_{AB}Ydp=\int_A 1_BYdp=\text{右边}
$$

接下来将上述结论推广到非负简单，非负可测，再到一般的情形，从而完成证明。

(3)证明：因为$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$为$\mathcal{G}_1$可测，所以$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$为$\mathcal{G}_2$可测，由(2)可得

$$
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2]=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]
$$

接着证明第二个等号。注意到$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]$为$\mathcal{G}_1$可测，$\forall A\in\mathcal{G}_1$，

$$
\int_A\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]dp=\int_A Xdp
$$

所以

$$
\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]
$$

定理5.4.2

$$
\begin{aligned}
&(1)\text{若}p,q\geq 1\text{是一对共轭对，}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\text{，那么}\mathbb{E}[|XY||\mathcal{G}]\leq(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}\\
&(2)\text{若}\mathbb{E}[X]\text{存在，}\varphi\text{是}\mathbb{R}\text{中下凸函数，使得}\mathbb{E}[\varphi(X)]\text{存在，则}\varphi(\mathbb{E}[X])\leq\mathbb{E}[\varphi(X)],\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\leq\mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}](a.s)
\end{aligned}
$$

(1)证明：利用

$$
ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},a,b\geq 0
$$

如果

$$
(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}\neq 0,(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}\neq 0
$$

取$a=\frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}}, b=\frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}}$，那么

$$\frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}}\frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|X|^p}{p\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}]}+\frac{|Y|^q}{q\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}]}$$

关于$\mathcal{G}$取条件期望可得

$$\mathbb{E}\Big[\frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}}\frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}}\Big|\mathcal{G}\Big] \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$
$$\mathbb{E}[|XY||\mathcal{G}] \leq (\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}$$

如果

$$(\mathbb{E}[|X|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}=0\text{或}(\mathbb{E}[|Y|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}=0$$

考虑$X+\epsilon, Y+\epsilon, \epsilon>0$，那么

$$\mathbb{E}[|(X+\epsilon)(Y+\epsilon)||\mathcal{G}] \leq (E[|(X+\epsilon)|^p|\mathcal{G}])^{\frac{1}{p}}(E[|(Y+\epsilon)|^q|\mathcal{G}])^{\frac{1}{q}}$$

令$\epsilon \to 0$即可。

(2)证明：因为下凸，所以$\forall x, y$

$$\varphi(y)-\varphi(x) \leq \varphi'_+(y)(y-x)$$

取$x=X(w), y=\mathbb{E}[X]$，则

$$\varphi(\mathbb{E}[X])-\varphi(X) \leq \varphi'_+(\mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X]-X)$$

取期望可得

$$\varphi(\mathbb{E}[X])-\mathbb{E}[\varphi(X)] \leq 0$$
$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

取$x=X(w), y=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$，则

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])-\varphi(X) \leq \varphi'_+(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]-X)$$

两边取关于$\mathcal{G}$取条件期望可得

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])-\mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}] \leq 0$$
$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}]$$

命题

$$\text{若}X,Y\text{独立，则}$$
$$\mathbb{E}[f(X,Y)|Y]=h(Y),$$
$$\text{其中}h(y)=\mathbb{E}[f(X,y)]$$
$$\text{特别的，}\mathbb{E}[f(X)g(Y)|Y]=g(Y)\mathbb{E}[f(X)|Y]=g(Y)\mathbb{E}[f(X)]$$

证明：由截口的定义知$h(Y)$是$\sigma(Y)$可测。

为了证明

$$\forall A \in \sigma(Y) = Y^{-1}(\Sigma) = \{Y^{-1}(B), B \in \Sigma\}$$
$$\int_{Y^{-1}(B)} h(y)dp = \int_{Y^{-1}(B)} f(x,y)dp$$

上式

$$\Leftrightarrow \int_{y\in B} h(y)dp = \int_{y\in B} f(x,y)dp$$
$$\Leftrightarrow \int 1_B(y)h(y)dp = \int 1_B(y)f(x,y)dp$$

注意到

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \int 1_B(y)h(y)dp \\
&= \int 1_B(y)h(y)\mu_Y(dy) \\
&= \int 1_B(y)\mathbb{E}[f(X,y)]\mu_Y(dy) \\
&= \int f(x,y)\mu_X(dx)\int 1_B(y)\mu_Y(dy) \\
&= \iint\limits_{E\times E} 1_B(y)f(x,y)d(\mu_X\times\mu_Y) \\
&= \text{右边}
\end{aligned}$$

定理5.4.3

$$\text{设 } \mathbb{E}[X^2] < \infty\text{，则对任意 }\mathcal{G}\text{可测的 }Y\text{，如果 }\mathbb{E}[Y^2] < \infty\text{，那么}$$
$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Y] = 0$$

证明:

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])Y]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])]|\mathcal{G}] = 0$$

推论

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X|Y]]^2 = \min_{Z\in L^2(\sigma(Y),\mathbb{P})} \mathbb{E}[X - Z]^2$$
$$L^2(\sigma(Y),\mathbb{P})\text{表示平方可积函数}$$

证明见习题。

习题

习题1

（课本P193/7.4/2）

(1)证明：首先考虑X'为示性函数的情形，假设$X'=1_A$，那么$\forall B\in\mathcal{C}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_B \mathbb{E}[XX'|\mathcal{C}]d\mathbb{P}_{\mathcal{C}} &= \int_B XX'd\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\\ &= \int_B X1_A d\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\\ &= \int_{AB} Xd\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\\ &= \int_{AB} \mathbb{E}[X|\mathcal{C}']d\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\\ &= \int_B 1_A\mathbb{E}[X|\mathcal{C}']d\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\\ &= \int_B X'\mathbb{E}[X|\mathcal{C}']d\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\\ &= \int_B \mathbb{E}[X'\mathbb{E}[X|\mathcal{C}']|\mathcal{C}]d\mathbb{P}_{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

最后一步是由条件期望的定义。

由条件期望的线性性可知，X'为简单函数时结论也成立。

如果X'为非负可测函数，存在简单简单函数$\{X'_n\}\uparrow X'$，利用单调收敛定理可得结论也成立。

如果X'为一般可测函数，利用$X'=X^{'+}-X^{'-}$可得结论也成立。

(2)证明：取$C'=C$，则

$$\mathbb{E}[XX'|C]=\mathbb{E}[X'\mathbb{E}[X|C]|C]=X'\mathbb{E}[X|C]$$

取$X'=1_C$，则

$$\mathbb{E}[X|C]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|C']|C]$$

习题2

（课本P193/7.4/3）

(1)证明：$\Rightarrow$：取$m=n+1$即可

$\Leftarrow$：因为$\mathcal{F}_n\uparrow$，所以

$$X_n=\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+2}|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[X_{n+2}|\mathcal{F}_n]$$

递推可得

$$X_n=\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_n](m>n)$$

(2)证明：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]&=\mathbb{E}[X_n+Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\\ &=\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]+\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]\end{aligned}$$

因为X_n为$\mathcal{F}_n$可测，Y_{n+1}与$\mathcal{F}_n$独立，所以

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]=X_n,\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathbb{E}[Y_{n+1}]=0$$

因此

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$$

从而X_n是鞅

习题3

（课本P193/7.4/5）

该题需增加如下条件

$$\mathbb{P}(|Y|<\infty)=1,\mathbb{P}(|X|<\infty)=1$$

备注：该证明参考老师上课的讲解。

证明：计算截断期望$\mathbb{E}[(X-Y)^2 1_{\{|X|\le n\}}]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-Y)^2 1_{\{|X|\le n\}}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Y)^2 1_{\{|X|\le n\}}|\mathcal{C}]] \\
&= \mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}} - 2X1_{\{|X|\le n\}}\mathbb{E}[Y|\mathcal{C}] + 1_{\{|X|\le n\}}\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{C}]] \\
&= \mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}}] - 2\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}}] + \mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

第二个等号成立需要拆开后的运算有意义，这里证明每一项都有限：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}}] &\le n^2 \\
\mathbb{E}[2|XY|1_{\{|X|\le n\}}] &\le 2n\mathbb{E}[|Y|1_{\{|X|\le n\}}] \\
&\le 2n(\mathbb{E}[Y^2 1_{\{|X|\le n\}}])^{\frac{1}{2}}(C-S\text{不等式}) \\
&\le 2n(\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y^2 1_{\{|X|\le n\}}]|\mathcal{C}])^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2n(\mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}}])^{\frac{1}{2}} \\
&\le 2n^2 \\
\mathbb{E}[Y^2 1_{\{|X|\le n\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y^2 1_{\{|X|\le n\}}]|\mathcal{C}] &= \mathbb{E}[X^2 1_{\{|X|\le n\}}] \le n^2
\end{aligned}$$

第三个等号用到了题目中的条件。

所以

$$(X-Y)1_{\{|X|\le n\}} = 0(a.s)$$

令$n\to\infty$可

$$X = Y(a.s)$$

习题4

$$\mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]]^2 = \min_{Z\in L^2(\sigma(Y),\mathbb{P})} \mathbb{E}[X-Z]^2$$

$$L^2(\sigma(Y),\mathbb{P})\text{表示平方可积函数}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X-Z]^2 &= \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]+\mathbb{E}[X|Y]-Z]^2 \\
&= \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]]^2+\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]-Z]^2+2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])(\mathbb{E}[X|Y]-Z)]
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])(\mathbb{E}[X|Y]-Z)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])(\mathbb{E}[X|Y]-Z)]|Y] \\
&= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X|Y]-Z)\mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]|Y]] \\
\mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]|Y] = 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])(\mathbb{E}[X|Y]-Z)] = 0
$$

$$
\mathbb{E}[X-Z]^2 = \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]]^2+\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]-Z]^2 \geq \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X|Y]]^2
$$