4.独立性

1.事件与独立性

设$\mathcal{C}_1,...,\mathcal{C}_n$是$n$个事件类，称其独立，若

$$\forall \mathcal{A}_{i_j} \in \mathcal{C}_{i_j}, 1 \le i_1 \le ... \le i_k \le n$$
$$\mathbb{P}(A_{i_1}...A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})...\mathbb{P}(A_{i_k})$$

2.随机变量与独立性

设$X_1,...,X_n$是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上，取值于$\mathbb{R}^d$中的随机变量（向量），若$\forall B_1,...B_n \in \mathcal{B}^d$，

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1,...,X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)...\mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

则称$X_1,...,X_n$相互独立。

定理2.4.1

$$\text{在上述记号下，} X_1,...,X_n\text{相互独立} \Leftrightarrow$$
$$F(x_1,...,x_n) = F_1(x_1)...F_n(x_n), \forall x_i \in \mathbb{R}^d, 1 \le i \le n$$
$$\text{其中}F(x_1,...,x_n)\text{是}(X_1,...,X_n)\text{的联合分布函数，}F_i\text{是}X_i\text{的边缘分布函数}$$

证明：仅考虑$d=1$的情形。

$\Rightarrow$：显然，取$B_i = (-\infty, x_i]$即可

$\Leftarrow$：先考虑$n=2$的情形，要证

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2), \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$$

定义

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$$

那么$\mathcal{C}$为π系。现在$\forall B_1 = (-\infty, x_1] \in \mathcal{C}$，我们的目标是证明

$$\mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in B_2) = \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in B_2)$$

定义

$$\Lambda = \{B_2 \in \mathcal{B} : \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in B_2) = \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in B_2)\}$$

我们的目标是证明$\Lambda = \mathcal{B}$，显然有$\Lambda \subset \mathcal{B}$，为了证明$\mathcal{B} \subset \Lambda$，注意到

$$\mathcal{C} \subset \Lambda\text{，}\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}\text{，}\mathcal{C}\text{为}\pi\text{系}$$

所以只要验证Λ是λ系即可。

1.$\mathbb{R} \in \Lambda$

$$\mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1]) = \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in \mathbb{R})$$

2.$B_1, B_2 \in \Lambda, B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_2 - B_1 \in \Lambda$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in B_2 - B_1) &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in B_2) - \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in B_1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in B_2) - \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in B_1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in B_2 - B_1)\end{aligned}$$

3.$B_n \in \Lambda, n \geq 1$且$B_n \uparrow \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Lambda$

定义

$$A_n = B_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = B_n - B_{n-1} \in \Lambda(\text{由}\,2)$$

所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, A_i \text{互不相交}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in A_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1], X_2 \in A_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in A_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1]) \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(X_2 \in \bigcup_{n=1}^{m} A_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in (-\infty, x_1])\mathbb{P}(X_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)\end{aligned}$$

（备注：第二个等号是因为事件$X_1 \in (-\infty, x_1]$且$X_2 \in A_n$互不相交，所以由概率的性质可得）

从而Λ为λ系。

接着，定义

$$\Lambda^* = \{B_1 \in \mathcal{B} : \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2)\}$$

我们的目标是证明$\Lambda^* = \mathcal{B}$，显然有$\Lambda^* \subset \mathcal{B}$，为了证明$\mathcal{B} \subset \Lambda^*$，注意到由之前论述可得

$$\mathcal{C} \subset \Lambda^*, \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}，\mathcal{C}\text{为}\,\pi\text{系}$$

所以只要验证Λ^*是λ系即可。（类似上面验证即可）

命题

$$\text{如果}(X_1,\dots,X_n)\text{有概率密度}p(x_1,\dots,x_n)\text{，则}X_1\perp X_2\dots\perp X_N\Leftrightarrow$$
$$p(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n p(x_i)\text{对几乎所有}(x_1,\dots,x_n)$$

此时

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x_n}\dots\int_{-\infty}^{x_1}p(y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n&=F(x_1,\dots,x_n)\\&=F_1(x_1)\dots F_n(x_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}p(y_1)dy_1\dots\int_{-\infty}^{x_n}p(y_n)dy_n\\&=\int_{-\infty}^{x_n}\dots\int_{-\infty}^{x_1}p(y_1)\dots p(y_n)dy_1\dots dy_n\end{aligned}$$

Chapter 3 随机变量的数学期望

1.定义与基本性质

1. 定义

$$\begin{aligned}&\text{设}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{是概率空间，}X\text{是其上（一维）}r.v,\\&(1)\text{若}X=\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i},a_i\ge 0\text{是非负简单}r.v\text{，定义其数学期望为}\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{E}[1_{A_i}]=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{P}[A_i]\\&(2)\text{若}X\text{是非负}r.v,\text{定义其数学期望为}\mathbb{E}[X]=\sup_Y\mathbb{E}[Y],0\le Y\le X,Y\text{是简单}r.v\\&(3)\text{对任意}X,\mathbb{E}[X^+],\mathbb{E}[X^-]\text{都有定义且至少有一个有限，定义其数学期望为}\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X^+]-\mathbb{E}[X^-]\\&(4)A\in\mathcal{F},\text{定义}\int_A Xd\mathbb{P}=\mathbb{E}[X1_A]\end{aligned}$$

注意该定义应该验证唯一性，即如果

$$X=\sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}=\sum_{i=1}^m b_i 1_{B_i}$$

则应该$\mathbb{E}[X]$唯一，下面验证这点。

首先注意

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^n A_i=\bigcup_{i=1}^m B_i$$

所以

$$
\begin{aligned}
X &= \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i \bigcap (\bigcup_{j=1}^{m} B_j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} 1_{A_i B_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i 1_{A_i B_j} \\
X &= \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i B_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{A_i B_j}
\end{aligned}
$$

如果$\mathbb{P}(A_i B_j) = 0$，则该项对期望没有影响，否则在$A_i B_j$上有$a_i = b_j$，从而上述计算的期望唯一。

2.基本性质

$$
\begin{aligned}
&(1)\text{若} X, Y \text{是非负简单} r.v\text{，则} \forall \text{非负} a, b\text{，} \mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \\
&(2)\text{若} X, Y \text{是非负} r.v, \text{则} \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \\
&(3)\text{若} \mathbb{P}(A) = 0, \text{则对任意} r.v\text{，有} \int_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X 1_A] = 0 \\
&\quad \text{同理若} X = Y(a.s)\text{，则} \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y] \text{中一个有定义，另一个也有定义且} \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \\
&(4)\text{若} X, Y \text{是} r.v \text{且} X \le Y(a.s)\text{，则} \mathbb{E}[X] \le \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}
$$

(2)证明：设

$$
X = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}, Y = \sum_{i=1}^{m} b_i 1_{B_i}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X + Y] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i 1_{A_i B_j}] + \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{A_i B_j}] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) 1_{A_i B_j}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \mathbb{P}(A_i B_j) \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}
$$

定理 3.1.1(Levi)

$$\text{设}\{X_n\}\text{是}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{上一列非负}r.v,\text{且}X_n\uparrow X,\text{则}\\ \mathbb{E}[X_n]\uparrow\mathbb{E}[X]$$

推论

$$\text{若}X,Y\text{是非负}r.v,\text{则}\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$$

证明：取$X_n\uparrow X,Y_n\uparrow Y$，则$X_n+Y_n\uparrow X+Y$，然后利用Levi定理即可。

2.期望性质

定理3.2.1

$$\begin{aligned}
&(1)\text{若}\mathbb{E}[X]\text{存在，则对任意实数}a,\mathbb{E}[aX]\text{存在且}\mathbb{E}[aX]=a\mathbb{E}[X]\\
&(2)\text{若}\mathbb{E}[X],\mathbb{E}[Y]\text{存在且}\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]\text{有意义，则}\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]\\
&(3)\text{若}\mathbb{E}[X],\mathbb{E}[Y]\text{存在且}X\le Y\text{，则}\mathbb{E}[X]\le\mathbb{E}[Y]\\
&(4)X\text{可积}\Leftrightarrow|X|\text{可积}\\
&(5)\mathbb{P}(|X|\ge a)\le\frac{\mathbb{E}[|X|]}{a},a>0(\text{Markov不等式})\\
&(6)\text{若}X\text{可积，则}|X|<\infty(a.s)\\
&(7)\mathbb{E}|XY|\le[\mathbb{E}[X^2]]^{\frac{1}{2}}[\mathbb{E}[Y^2]]^{\frac{1}{2}}\\
&(8)\text{若}X=Y(a.s)\text{，则}\mathbb{E}[X]\text{存在时}\mathbb{E}[Y]\text{存在且}\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

(2)证明：注意到

$$X+Y=(X+Y)^+-(X+Y)^-=(X)+(Y)=X^+-X^-+Y^+-Y^-$$

注意由于可能涉及正无穷，所以不能直接做移项处理，要分情况讨论。由条件可知

$$\mathbb{E}[X^+]\text{，}\mathbb{E}[X^-]\text{至少有一个有限，}\\ \mathbb{E}[Y^+]\text{，}\mathbb{E}[Y^-]\text{至少有一个有限，}\\ \mathbb{E}[X^+]-\mathbb{E}[X^-]+\mathbb{E}[Y^+]-\mathbb{E}[Y^-]\text{有意义}$$

所以可以把涉及无穷的情形全部列出，这里考虑$\mathbb{E}[X]^+,\mathbb{E}[Y]^+$有限的情形，由(6)可知

$$X^+<+\infty,Y^+<+\infty$$

所以

$$(X+Y)^+\le X^++Y^+<\infty$$

移动这3个有限项可得

$$(X)^-+(Y)^--(X)^+-(Y)^+=(X+Y)^--(X+Y)^+$$

取期望得

$$\mathbb{E}[(X)^-]+\mathbb{E}[(Y)^-]-\mathbb{E}[(X)^+]-\mathbb{E}[(Y)^+]=\mathbb{E}[(X+Y)^-]-\mathbb{E}[(X+Y)^+]$$

两边取负号即可得到目标等式

$$\mathbb{E}[(X+Y)^+]-\mathbb{E}[(X+Y)^-]=+\mathbb{E}[(X)^+]-\mathbb{E}[(X)^-]+\mathbb{E}[(Y)^+]-\mathbb{E}[(Y)^-]$$

其余情形类似处理。

(3)注意到

$$Y=X+Y-X$$

如果$\mathbb{E}[X]=-\infty$，则结论显然成立，否则

$$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y-X]\geq\mathbb{E}[X]$$

(4)由如下分解即可得到结论

$$X=X^+-X^-,|X|=X^++X^-$$

如果X可积，则$\mathbb{E}[X]^+$，$\mathbb{E}[X]^-$都有限，从而$\mathbb{E}[|X|]=\mathbb{E}[X]^++\mathbb{E}[X]^-$有限，反之亦然。

(5)

$$\mathbb{E}[|X|]\geq\int_{|X|\geq a}|X|d\mathbb{P}\geq\int_{|X|\geq a}ad\mathbb{P}=a\mathbb{P}(|X|\geq a)$$
$$\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}$$

推论，取单调递增f，则

$$\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq\frac{\mathbb{E}[f(|X|)]}{f(a)}$$

(7)由$\mathbb{E}[(t|X|+|Y|)^2]\geq 0$恒成立可得二次函数判别式小于等于0

习题

习题1

$$\text{若}\,\mathbb{P}(A)=0,\text{则对任意}\,r.v,\ \text{有}\int_A Xd\mathbb{P}=\mathbb{E}[X1_A]=0$$
$$\text{同理若}\,X=Y(a.s),\ \text{则}\,\mathbb{E}[X],\mathbb{E}[Y]\text{中一个有定义，另一个也有定义}$$
$$\text{且}\,\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[Y]$$

证明：先证对任意简单随机变量上述结论成立，设

$$X=\sum_{i=1}^n b_i1_{B_i}$$

所以

$$X1_A=\sum_{i=1}^n b_i1_{AB_i}$$
$$\mathbb{E}[X1_A]=\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n b_i1_{AB_i}]=\sum_{i=1}^n b_i\mathbb{P}[AB_i]$$

因为$\mathbb{P}(A)=0, AB_i\subset A$，所以$\mathbb{P}[AB_i]=0$，从而

$$\mathbb{E}[X1_A]=0$$

由$X=X^+-X^-$，构造两列非负简单随机变量$X_n^+\uparrow X^+, X_n^-\uparrow X^-$，由上述结论可知

$$\mathbb{E}[X_n^+1_A]=0, \mathbb{E}[X_n^-1_A]=0$$

由Levi定理可知

$$\mathbb{E}[X^+1_A]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n^+1_A]=0, \mathbb{E}[X^-1_A]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n^-1_A]=0$$

所以

$$\mathbb{E}[X1_A]=\mathbb{E}[X^+1_A]-\mathbb{E}[X^-1_A]=0$$

因为$X=Y(a.s)$，所以

$$\begin{gathered}
\text{存在} A\subset\Omega\text{，使得当} w\in A\text{时，} X\neq Y\text{，}\\
w\notin A\text{时，} X=Y\\
\text{且}\,\mathbb{P}(A)=0
\end{gathered}$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_\Omega Y d\mathbb{P}\\
&= \int_{\Omega-A} Y d\mathbb{P} + \int_A Y d\mathbb{P}\\
&= \int_{\Omega-A} Y d\mathbb{P} + 0\\
&= \int_{\Omega-A} X d\mathbb{P} + \int_A X d\mathbb{P}\\
&= \int_\Omega X d\mathbb{P}\\
&= \mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$