这一讲主要是复习鞅的概念。

鞅的定义

设$\{X_n, n\geq 0\}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上的（广义）实随机变量，$\{F_n,n\geq 0\}$是一列上升的$\sigma$域（称为$\sigma$域流），若它满足

$$
\begin{aligned}
&(1)\mathbb{E}[|X_n|]<\infty(\forall n\geq 0)\\
&(2)X_n\text{是}\mathcal{F}_n\text{可测（称为}\mathcal{F}_n\text{适应）}\\
&(3)\forall n\geq 0,\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=X_n(a.s)
\end{aligned}
$$

则称$\{X_n\}$关于$\{\mathcal{F}_n\}$是鞅，若将”$=$”改为”$\geq$”,”$\leq$”则为下，上鞅。

鞅的几个性质

(1)若$\{X_n\}$是鞅，φ是(下)凸函数，$\mathbb{E}[|\varphi(X_n)|]<\infty,\forall n\geq 1,$则$Y_n=\varphi(X_n)$是下鞅
(2)若$\{X_n\}$是下鞅，φ是(下)凸函数且非降，$\mathbb{E}[|\varphi(X_n)|]<\infty,\forall n\geq 1,$则$Y_n=\varphi(X_n)$是下鞅
(3)若$\{X_n\}$是下鞅，那么它一定可以唯一的分解为$X_n=M_n+A_n$，其中M_n是鞅，$\{A_n\}$是非降过程，A_n关于$\mathcal{F}_{n-1}$可测，$A_0=0$

结论(1)(2)的证明见习题。

接下来看几个例题。

例1

$$
\text{设}\{\zeta_n\}\text{是一列独立}r.v,\text{均值为}p_n，S_n=\sum_{k=1}^n\zeta_n,
$$
$$
\text{那么当}p_n=0(\leq 0,\geq 0)\text{时，}\{\zeta_n\}\text{关于}\mathcal{F}_n=\sigma\{\xi_n,1\leq k\leq n\}=\sigma\{S_n,1\leq k\leq n\}\text{为鞅(上鞅，下鞅)}
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]&=\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n]+\mathbb{E}[\zeta_{n+1}|\mathcal{F}_n]\\
&=S_n+\mathbb{E}[\zeta_{n+1}]\\
&=(\leq,\geq)S_n
\end{aligned}
$$

上例的特殊情形为$\{\zeta_n\}$独立同分布，考虑如下例子。

例2

$$
\text{若}\{\zeta_n\}i.i.d,\text{均值为}p，S_n=\sum_{k=1}^n\zeta_n,
$$
$$
p=0(\leq 0,\geq 0)\text{时，}\{\zeta_n\}\text{关于}\mathcal{F}_n=\sigma\{\xi_n,1\leq k\leq n\}=\sigma\{S_n,1\leq k\leq n\}\text{为鞅(上鞅，下鞅)}
$$

例3

如果$\{\zeta_n\}i.i.d$，且

$$\zeta_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \text{记} q = 1-p$$

那么

$$\mathbb{E}[\zeta_n] = p - q$$

现在假设

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k, S_0 \in (0, a+b)$$

现在有如下结论

$$\tau = \inf\{n \geq, S_n \in \{0, a+b\}\}$$
$$\mathbb{E}[\tau] < \infty$$

这个问题的背景是两个人赌钱，两人一共有$a+b$元，第一个人每次有p的概率赢得1元，有q的概率输1元，τ表示赌局结束的时间，上述结论的含义是赌局总会在有限时间内结束。

注意到

$$\mathbb{E}[\tau] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq n) < \infty$$

所以我们来估计$\mathbb{P}(\tau \geq \delta)$，注意到无论总哪个点出发，总有

$$\mathbb{P}(\tau < a+b+1) \geq \mathbb{P}(\zeta_1 = \ldots \zeta_{a+b} = 1) = p^{a+b} > 0$$

所以

$$\mathbb{P}(\tau \geq a+b+1) \leq 1 - \mathbb{P}(\tau < a+b+1) = 1 - p^{a+b} \triangleq \alpha < 1$$

接下去考虑$\mathbb{P}(\tau \geq 2(a+b+1))$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau \geq 2(a+b+1)) &= \mathbb{P}(\tau \geq 2(a+b+1), \tau \geq a+b+1) \\
&= \sum_{y \in (0,a+b)} \mathbb{P}(\tau \geq a+b+1, S_{a+b+1} = y, y + \sum_{k=a+b+1}^{a+b+k} \zeta_i \in (0, a+b), 1 \leq k \leq a+b+1) \\
&= \sum_{y \in (0,a+b)} \mathbb{P}(\tau \geq a+b+1) \mathbb{P}(\text{从 } y \text{出发，} a+b+1 \text{步内仍然在} (0, a+b) \text{内}) \\
&= \mathbb{P}(\tau \geq a+b+1) \sum_{y \in (0,a+b)} \mathbb{P}(\text{从 } y \text{出发，} a+b+1 \text{步内仍然在} (0, a+b) \text{内}) \\
&\leq \alpha^2
\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathbb{P}(\tau \geq n(a+b+1)) < \alpha^n$$

从而

$$\mathbb{P}(\frac{\tau}{a+b+1} \geq n) < \alpha^n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\frac{\tau}{a+b+1} \geq n) < \infty$$
$$\mathbb{E}[\frac{\tau}{a+b+1}] = \frac{\mathbb{E}[\tau]}{a+b+a} < \infty$$
$$\mathbb{E}[\tau] < \infty$$

例4

$$\{\zeta_n\} i.i.d, \zeta_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \text{记} \, q = 1-p, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_n,$$
$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_n, 1 \leq k \leq n\} = \sigma\{S_n, 1 \leq k \leq n\}$$
$$p \neq q$$

此时有如下结论

$$X_n \triangleq (\frac{q}{p})^{S_n} \text{是鞅}$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(\frac{q}{p})^{S_n}(\frac{q}{p})^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \\ &= (\frac{q}{p})^{S_n}\mathbb{E}[(\frac{q}{p})^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \\ &= (\frac{q}{p})^{S_n}\left(\frac{q}{p} \times p + \frac{p}{q} \times q\right) \\ &= (\frac{q}{p})^{S_n} \end{aligned}$$

沿用上例的τ，取$S_0 = a$，接下来计算X_τ的期望，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}[(\frac{q}{p})^{S_\tau}] \\ &= \mathbb{P}(S_\tau = 0) + \mathbb{P}(S_\tau = a+b)(\frac{q}{p})^{a+b} \\ &= 1 - \mathbb{P}(S_\tau = a+b) + \mathbb{P}(S_\tau = a+b)(\frac{q}{p})^{a+b} \end{aligned}$$

由鞅的性质可知

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_{\tau-1}]] = \mathbb{E}[X_{\tau-1}] = \ldots = \mathbb{E}[X_0] = (\frac{q}{p})^a$$

解得

$$\mathbb{P}(S_\tau = a+b) = \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$$

例5

$$
\begin{gathered}
\text{考虑如下盒子模型，盒子中有红黑球各一个，从中随机取一个球，观察颜色后放回，并加入一个同色球，} \\
\text{再从中随机取一球，放回，并加入同色球，如此重复下去。} \\
R_n\text{表示第}n\text{次取球中红球比例，则}\{R_n\}\text{关于}\mathcal{F}_n=\sigma(R_i(1\le i\le n))\text{为鞅}
\end{gathered}
$$

该结论的证明见习题。

Markov过程的定义

设$\{X_n,n\ge 1\}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上，取值于$(E,\Sigma)$中的随机变量，$\{F_n,n\ge 0\}$是一列上升的$\sigma$代数，若其满足

$$
\begin{aligned}
&(1)X_n\text{是}\ \mathcal{F}_n\text{可测} \\
&(2)\forall n\ge 1,B\in\Sigma,\mathbb{P}(X_{n+1}\in B|\mathcal{F}_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}\in B|X_n)(a.s)
\end{aligned}
$$

则称$\{X_n\}$关于$\{\mathcal{F}_n\}$是一个Markov过程，性质(2)称为Markov性。实际中常取

$$
\mathcal{F}_n=\sigma\{X_k(1\le k\le n)\}
$$

那么(2)可以化为

$$
\mathbb{P}(X_{n+1}\in B|X_1,\dots,X_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}\in B|X_n)(a.s)
$$

如果$E=\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$可数，那么$\{X_n\}$是Markov过程等价于

$$
\begin{gathered}
\forall n\ge 1,\forall X_1,\dots,X_{n+1}\in E, \\
\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n)
\end{gathered}
$$

习题

习题1

$$
\begin{gathered}
\text{考虑如下盒子模型，盒子中有红黑球各一个，从中随机取一个球，观察颜色后放回，并加入一个同色球，} \\
\text{再从中随机取一球，放回，并加入同色球，如此重复下去。} \\
R_n\text{表示第}n\text{次取球中红球比例，则}\{R_n\}\text{关于}\mathcal{F}_n=\sigma(R_i(1\le i\le n))\text{为鞅}
\end{gathered}
$$

证明：分别验证鞅的三个性质。

(1)

$$
\mathbb{E}[R_n]\le 1
$$

(2)

$$
R_n\text{关于}\mathcal{F}_n=\sigma(R_i(1\le i\le n))\text{可测}
$$

(3)记ξ_n为第n次取球时的红球数量，则

$$
\xi_n\in\{0,1\},\mathbb{P}(\xi_n)=R_n
$$

注意$(n+2)R_n$表示第n次取球时的红球数量，所以

$$(n+2)R_{n+1} = (n+1)R_n + \xi_n$$
$$R_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}R_n + \frac{1}{n+2}\xi_n$$

注意当前取球之后的结果之和上一次有关，所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[R_{n+1}|R_n] \\ &= \mathbb{E}[\frac{n+1}{n+2}R_n + \frac{1}{n+2}\xi_n|R_n] \\ &= \frac{n+1}{n+2}R_n + \frac{1}{n+2}\mathbb{P}(\xi_n|R_n) \\ &= \frac{n+1}{n+2}R_n + \frac{1}{n+2}R_n \\ &= R_n\end{aligned}$$

所以$\{R_n\}$关于$\mathcal{F}_n = \sigma(R_i(1 \le i \le n))$为鞅

习题2

$$(1)\text{若}\{X_n\}\text{是鞅，}\varphi\text{是（下）凸函数，}\mathbb{E}[|\varphi(X_n)|] < \infty, \forall n \ge 1, \text{则}Y_n = \varphi(X_n)\text{是下鞅}$$
$$(2)\text{若}\{X_n\}\text{是下鞅，}\varphi\text{是（下）凸函数且非降，}\mathbb{E}[|\varphi(X_n)|] < \infty, \forall n \ge 1, \text{则}Y_n = \varphi(X_n)\text{是下鞅}$$

(1)证明：因为φ是凸函数，$\{X_n\}$是鞅，所以

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \ge \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) = \varphi(X_n)$$

从而$\varphi(X_n)$是下鞅

(2)证明：因为$\{X_n\}$是下鞅，所以

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \ge X_n$$

因为φ是凸函数，且φ单调非降，所以

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \ge \varphi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]) \ge \varphi(X_n)$$

从而$\varphi(X_n)$是下鞅