2.(弱)大数定律(LLN)

定理7.1.1

$$\text{设}\{X_n\}\ iid,\text{那么存在}\{a_n\}\text{使得}\frac{S_n}{n}-a_n\xrightarrow{\mathbb{P}}0\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}x\mathbb{P}(|X_1|>x)=0$$

证明：仅证明$\Leftarrow$：$\forall n\geq 1,1\leq k\leq n$，定义

$$X_{nk}\triangleq X_k1_{\{|X_k|\leq n\}},\hat{S}_n=\sum_{k=1}^{n}X_{nk}$$

不难看出$y_k=X_{nk}$独立同分布，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\hat{S}_n)&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_{nk})\\&\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_{nk}^2]\\&=\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_{n1}^2]\end{aligned}$$

回顾公式

$$\text{如果}X\text{非负，}\mathbb{E}[X^r]=r\int_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}(X>x)dx$$

那么对上式取$r=2$可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_{n1}^2]&=\frac{2}{n}\int_0^\infty x\mathbb{P}(|X_{n1}|>x)dx\\&=\frac{2}{n}\int_0^n x\mathbb{P}(|X_1|>x)dx\end{aligned}$$

由条件可知

$$\begin{gathered}\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n\geq N,\exists x_0,\text{当}x>x_0\text{时，}\\x\mathbb{P}(|X_1|>x)<\epsilon\end{gathered}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}[X_{n1}^2]&=\frac{2}{n}\int_0^n x\mathbb{P}(|X_1|>x)dx\\&=\frac{2}{n}\int_0^{x_0}x\mathbb{P}(|X_1|>x)dx+\frac{2}{n}\int_{x_0}^{n}x\mathbb{P}(|X_1|>x)dx\end{aligned}$$

上述第一项$\to 0$，第二项$<2\epsilon$，从而

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\hat{S}_n)\to 0$$

因此

$$\frac{\hat{S}_n - \mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n} \underset{p}{\overset{L^2}{\to}} 0$$

接下来计算$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon) &= \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon, S_n = \hat{S}_n) + \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon, S_n \neq \hat{S}_n) \\ &\leq \mathbb{P}(|\frac{\hat{S}_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon) + \mathbb{P}(S_n \neq \hat{S}_n)\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \neq \hat{S}_n) &= \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n}\{X_{nk} \neq X_k\}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_{nk} \neq X_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k > n) \\ &= n\mathbb{P}(X_1 > n) \\ &\to 0\end{aligned}$$

综上

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(|\frac{\hat{S}_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}| \geq \epsilon) + \mathbb{P}(S_n \neq \hat{S}_n) \to 0$$

此时

$$a_n = \frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_{nk}]}{n} = \mathbb{E}[X_{n1}] = \mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1| \leq n\}}] \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[X_1]$$

推论

$$\text{若}\,\mathbb{E}[X_1] < \infty,\text{则}\,\frac{S_n}{n} \overset{\mathbb{P}}{\to} a = \mathbb{E}[X_1]$$

证明：注意有如下命题

$$\mathbb{E}[|X_1|] < \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{\{|X_1|>n\}} X_1 d\mathbb{P} \to 0$$

此时

$$\lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}(|X_1| \geq x) = \lim_{x\to\infty}\int_{|X_1|\geq x} x d\mathbb{P} \leq \lim_{x\to\infty}\int_{|X_1|\geq x} |X_1| d\mathbb{P} \to 0$$

由上一定理可得

$$\frac{S_n}{n} \overset{\mathbb{P}}{\to} a_n = \mathbb{E}[X_{n1}]$$

而

$$\mathbb{E}[X_{n1}] \to \mathbb{E}[X_n] = a$$

从而

$$\frac{S_n}{n} \overset{\mathbb{P}}{\to} a$$

3.(强)大数定律(SLLN)

定理7.3.1 (Kolmogrov)

$$\text{设}\{X_n\}\text{相互独立，若}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty,$$
$$\text{则}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{n}\ a.s\text{收敛}$$

引理

$$\text{设}\{x_n\}\text{是一列实数，}\{a_n\}\text{是一列正数，}a_n \uparrow \infty,$$
$$\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{a_n}\text{收敛，则}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}x_k = 0$$

定理7.3.3

$$\text{设}\{X_n\}\ iid,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}X_k,\text{则}\frac{S_n}{n}\overset{a.s}{\to}\text{某个有限常数}a \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}[X_1]\text{有限，此时}a = \mathbb{E}[X_1]$$

证明：$\Leftarrow$：定义

$$\hat{X}_n \triangleq X_n 1_{\{|X_n|\le n\}}, \hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n}\hat{X}_k$$

则$\hat{X}_n$独立，且

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}(\hat{X}_n)}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[\hat{X}_n^2]}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}[X_n^2 1_{\{|X_n|\leq n\}}]}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_n^2 1_{\{k-1\leq|X_n|<k\}}] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{E}[|X_n|1_{\{k-1\leq|X_n|<k\}}] \\
&\overset{\text{Fubini定理}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2})k\mathbb{E}[|X_1|1_{\{k-1\leq|X_1|<k\}}] \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}k\mathbb{E}[|X_1|1_{\{k-1\leq|X_1|<k\}}] \\
&= 2\mathbb{E}[|X_1|] \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

由定理定理7.3.1可得

$$\frac{\hat{S}_n-\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}\overset{a.s}{\to}0$$

备注：倒数第二个不等号是因为

$$\frac{1}{n^2}\leq\int_n^{n+1}\frac{2}{x^2}dx$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=k}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{2}{x^2}dx=\int_k^{\infty}\frac{2}{x^2}dx=\frac{2}{k}$$

回顾之前的结论

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_1|>n)\leq\mathbb{E}[|X|]\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_1|>n)$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n\neq\hat{X}_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_1|>n)\text{有限}$$

所以由第12讲的B-C引理可得

$$\mathbb{P}(X_n\neq\hat{X}_n\text{发生无穷多次})=0$$

这说明

$$\frac{S_n-\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}\to 0$$

接下来证明

$$\frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}\to\frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}=\mathbb{E}[X_1]$$

利用定义即可

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n} &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[X_n,|X_n|\le k]}{n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_1,|X_1|\le k]
\end{aligned}
$$

利用控制收敛定理可得

$$
\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}[X_1,|X_1|\le k]=\mathbb{E}[X_1]
$$

从而

$$
\frac{\mathbb{E}[\hat{S}_n]}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_1,|X_1|\le k]\overset{n\to\infty}{\to}\mathbb{E}[X_1]
$$

结论得证。

$\Rightarrow$：反证法，若$\mathbb{E}[|X_1|]=+\infty$，那么$\forall A>0$

$$
\begin{aligned}
+\infty &= \mathbb{E}[\frac{|X_1|}{A}]\\
&= \int_0^{\infty}\mathbb{P}(\frac{|X_1|}{A}>x)dx\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\mathbb{P}(\frac{|X_1|}{A}>x)dx\\
&\le \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_1|\ge(n-1)A)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|\ge nA)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_1|\ge nA)=+\infty
$$

因为$\{|X_n|\ge nA\}$独立，所以由Borel 0-1律可得（见第12讲）

$$
\mathbb{P}(\{|X_n|\ge nA\}\text{发生无穷多次})=1
$$

注意到

$$
\{|S_n-S_{n-1}|=|X_n|\ge nA\}\Rightarrow\{S_n\ge\frac{nA}{2}\}\bigcup\{S_{n-1}\ge\frac{nA}{2}\}
$$

所以

$$
\mathbb{P}(\{S_n\ge\frac{nA}{2}\}\bigcup\{S_{n-1}\ge\frac{nA}{2}\}\text{发生无穷多次})=1
$$

即

$$
\mathbb{P}(\{S_n\ge\frac{nA}{2}\}\text{发生无穷多次})=1
$$

从而

$$
\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{n}\ge\frac{A}{2}
$$

由A的任意性可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|S_n|}{n}=+\infty$$

这就与条件矛盾，从而$\mathbb{E}[|X_1|]$有限，$\mathbb{E}[X_1]$有限，接着利用之前的证明可得

$$\frac{S_n}{n}\overset{a.s}{\to}\mathbb{E}[X_1]$$

注意条件为

$$\frac{S_n}{n}\overset{a.s}{\to}\text{某个有限常数}a$$

所以

$$a=\mathbb{E}[X_1]$$

Chapter 8

1.特征函数

1.特征函数的定义

定义：

$$\text{设}X\text{是定义在}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{上的（一维）}r.v,\text{定义其特征函数为：}\\ \varphi_X(t)=\varphi(t)=\mathbb{E}[e^{itX}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\mu(dx)=\mathbb{E}[\cos(tX)]+i\mathbb{E}[\sin(tX)](t\in\mathbb{R})$$

2.特征函数的性质

特征函数有如下性质

$$\begin{aligned}&(1)|\varphi(t)|\le 1=\varphi(0)\\&(2)\varphi\text{在}\mathbb{R}\text{中一致连续}\\&(3)\text{若}X\perp Y\text{，则}\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)\\&(4)\varphi_{aX+b}(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)\\&(5)\text{若}\mathbb{E}[|X|^n]<\infty\text{，则}\forall k\le n,\varphi^{(k)}(t)=i^k\mathbb{E}[X^ke^{itX}],\\&\quad\text{特别的，}\forall k\le n,\varphi^{(k)}(0)=i^k\mathbb{E}[X^k],\\&\quad\text{从而}\varphi(t)=1+i\mathbb{E}[X]t-\frac{\mathbb{E}[X^2]}{2}t^2+\ldots+\frac{i^n\mathbb{E}[X^n]}{n!}t^n+o(t^n)\end{aligned}$$

(1)证明：

$$|\varphi(t)|=|\mathbb{E}[e^{itX}]|\le|\mathbb{E}[1]|=1=\varphi(0)$$

(2)证明：

$$\begin{aligned}\sup_t|\varphi(t+h)-\varphi(t)| &= \sup_t|\mathbb{E}[e^{i(t+h)X}-e^{itX}]| \\ &= \sup_t|\mathbb{E}[e^{itX}(e^{ihX}-1)]| \\ &\le \sup_t \mathbb{E}|e^{ihX}-1| \\ &\overset{(h\to 0)}{\to} 0\end{aligned}$$

(3)(4)(5)利用定义即可验证

3.几个常见分布的特征函数

(1)

$$\begin{gathered}0-1\text{分布，}X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}\text{，}\\ \text{则}\,\varphi_X(t)=pe^{it}+q(q=1-p)\end{gathered}$$

(2)

$$\begin{gathered}\text{二项分布}b(n,p),X=\sum_{k=1}^n X_k,X_k\;iid\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix},\\ \text{则}\,\varphi_X(t)=(pe^{it}+q)^n\end{gathered}$$

(3)

$$\begin{gathered}\text{Possion分布}\,P(\lambda),\\ \text{则}\,\varphi_X(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{gathered}$$

(4)

$$\begin{gathered}X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2),\\ \text{则}\,\varphi_X(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\end{gathered}$$

(1)(2)(3)直接利用定义计算即可，这里只证明第(4)个结论。

首先计算标准正态分布的特征函数：

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(tx)dx+i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\sin(tx)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(tx)dx\end{aligned}$$

关于t求导可得

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}}\sin(tx)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= -t\varphi(t)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\frac{d\varphi}{\varphi} = -tdt
$$
$$
\varphi(t) = ce^{-\frac{t^2}{2}}
$$
$$
c = \varphi(0) = 1
$$
$$
\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}
$$

一般的，若$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$，则

$$
Y = \frac{X-\mu}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}(0,1)
$$
$$
\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{i\mu t}\varphi_Y(\sigma t) = e^{i\mu t-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}
$$

关于特征函数有如下定理：

定理8.1.1(连续性定理)

$$
\text{分布函数与特征函数相互唯一决定}
$$

定理8.1.2(唯一性定理)

$$
\text{若}\{X, X_n, n \ge 1\}\text{的特征函数为}\{\varphi, \varphi_n, n \ge 1\}\text{,} \\
\text{则}\, X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi_n \to \varphi
$$

2.多元特征函数

1.多元特征函数的定义

定义：

$$
\begin{aligned}
&\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)^T\text{是}n\text{维}r.v\text{，定义其特征函数为}\\
&\varphi(t_1,\dots,t_n)=\mathbb{E}[e^{i\vec{t}^T\vec{X}}]\\
&\qquad\qquad\qquad=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sum_{j=1}^n t_jx_j}dF(x_1,\dots,x_n)\\
&\qquad\qquad\qquad=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sum_{j=1}^n t_jx_j}\mu(dx_1\dots dx_n)\\
&\qquad\qquad\qquad\text{其中}\vec{t}=(t_1,\dots,t_n)^T\in\mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

利用定义不难计算出

$$
\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}\varphi(0)}{\partial t_1^{k_1}\dots\partial t_n^{k_n}}=i^{k_1+\dots+k_n}\mathbb{E}[X_1^{k_1}\dots X_n^{k_n}]
$$

2.多维Gauss分布

定义：

$$
\begin{gathered}
\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)^T\text{服从}n\text{维}\mathrm{Gauss}\text{分布，如果它的特征函数具有形式：}\\
\varphi(t_1,\dots,t_n)=e^{i\vec{a}^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}\\
\text{其中}\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)^T\text{是常数向量，}\Sigma=(\sigma_{ij})\text{是}n\text{维半正定阵，}\\
\text{特别，若}|\Sigma|>0\text{，则称}\vec{X}\text{服从}n\text{维正态分布}
\end{gathered}
$$

性质

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Gauss}\text{分布有如下性质：}\\
\vec{a}=(\mathbb{E}[X_1],\dots,\mathbb{E}[X_n])^T,\Sigma=(\mathrm{Cov}(X_i,X_j))
\end{gathered}
$$

证明：关于$\varphi(t)$求一次偏导可得

$$
\frac{\partial\varphi(0)}{\partial t_j}=e^{i\vec{a}^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}(ia_j-\sum_{k=1}^n\sigma_{jk}t_k)\Big|_{t=0}=ia_j=i\mathbb{E}[X_j]
$$

所以

$$
\begin{gathered}
\mathbb{E}[X_j]=a_j\\
\vec{a}=(\mathbb{E}[X_1],\dots,\mathbb{E}[X_n])^T
\end{gathered}
$$

关于$\varphi(t)$求两次偏导可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial t_k\partial t_j}&=\frac{\partial}{\partial t_k}\left(e^{i\vec{a}^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}(ia_j-\sum_{m=1}^n\sigma_{jm}t_m)\right)\\
&=e^{i\vec{a}^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}(-\sigma_{jk})+e^{i\vec{a}^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}(ia_j-\sum_{m=1}^n\sigma_{jm}t_m)(ia_k-\sum_{m=1}^n\sigma_{km}t_m)\Big|_{t=0}\\
&=-\sigma_{jk}-a_ja_k\\
&=-\sigma_{jk}-\mathbb{E}[X_j]\mathbb{E}[X_k]\\
&=-\mathbb{E}[X_jX_k]
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{gathered}
\sigma_{jk}=\mathbb{E}[X_jX_k]-\mathbb{E}[X_j]\mathbb{E}[X_k]=\mathrm{Cov}(X_j,X_k)\\
\Sigma=(\sigma_{jk})=(\mathrm{Cov}(X_j,X_k))
\end{gathered}
$$

定理8.1.3

$$
\begin{gathered}
若\ \vec{X}=(X_1,\dots,X_n)^T\sim\mathcal{N}(\vec{a},\Sigma),\\
A=(a_{ij})_{m\times n},\vec{b}=(b_1,\dots,b_m)^T,\\
则\ A\vec{X}+\vec{b}\sim\mathcal{N}(A\vec{a}+\vec{b},A\Sigma A^T)
\end{gathered}
$$

证明：利用特征函数的定义

$$
\begin{aligned}
\varphi_{A\vec{X}+\vec{b}}(t_1,\dots,t_n)&=\mathbb{E}[e^{i\vec{t}^T(A\vec{X}+\vec{b})}]\\
&=e^{i\vec{t}^T\vec{b}}\mathbb{E}[e^{i(A^T\vec{t})^T\vec{X}}]\\
&=e^{i\vec{t}^T\vec{b}}e^{i\vec{a}^TA^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^TA\vec{\Sigma}\vec{A}^T\vec{t}}\\
&=\exp\left(i\vec{b}^T\vec{t}+i\vec{a}^TA^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^TA\vec{\Sigma}\vec{A}^T\vec{t}\right)\\
&=\exp\left(i\vec{(}A\vec{a}+\vec{b})^T\vec{t}-\frac{1}{2}\vec{t}^TA\vec{\Sigma}\vec{A}^T\vec{t}\right)
\end{aligned}
$$

利用唯一性定理可得

$$
A\vec{X}+\vec{b}\sim\mathcal{N}(A\vec{a}+\vec{b},A\Sigma A^T)
$$

定理8.1.4

$$
\begin{gathered}
若\ \vec{X}=(X_1,\dots,X_n)^T=\begin{pmatrix}\overrightarrow{X^{(1)}}\\ \overrightarrow{X^{(2)}}\end{pmatrix}\sim\mathcal{N}(\vec{a},\Sigma),\\
\overrightarrow{X^{(1)}}=(X_1,\dots,X_k)^T,\overrightarrow{X^{(2)}}=(X_{k+1},\dots,X_n)^T\\
相应地将\Sigma表达为\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\ \Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\\
则\ \overrightarrow{X^{(1)}}\perp\overrightarrow{X^{(2)}}\Leftrightarrow\Sigma_{12}=\Sigma_{21}=0
\end{gathered}
$$

定理8.1.5

$$
\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)^T服从\ n维\ \mathrm{Gauss}分布\Leftrightarrow\forall\lambda_1,\dots,\lambda_n,\sum_{j=1}^n\lambda_jX_j服从一维\ \mathrm{Gauss}分布
$$

2.中心极限定理(CLT)

定理8.2.1

$$
\begin{gathered}
设\ \{X_n\}\ iid,\ \ a=\mathbb{E}[X_1],0<\sigma^2=\mathrm{Var}(X_1)<\infty,\\
则\ \frac{S_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)
\end{gathered}
$$

证明：

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{S_n-na}{\sigma\sqrt{n}}}(t)&=\varphi_{S_n-na}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})\\&=(\varphi_{X_1-a}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n\\&=(1-\frac{1}{2n}t^2+o(\frac{t^2}{n}))^n\\&\to e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

所以

$$R_n=\frac{S_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)$$

关于特征函数有如下命题：

命题

$$若\varphi(t)是特征函数，那么e^{\varphi(t)-1}也是特征函数$$

证明该结论之前需要利用如下两个结论：

$$(1)若\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)是n个特征函数，那么\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi_i(t)也是特征函数，其中\lambda_i\ge 0,\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$$

$$(2)若\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)是n个特征函数，那么\prod_{i=1}^n\varphi_i(t)是特征函数，$$

$$特别地，若\varphi(t)是特征函数，那么\varphi^n(t)是特征函数$$

结论(1)的证明：

假设$\varphi_i(t)$对应的分布函数为$F_i(x)$，那么$\sum_{i=1}^n\lambda_iF_i(t)$也是分布函数，由定义即可验证其特征函数为$\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi_i(t)$

结论(2)的证明：

假设$\varphi_i(t)$对应的变量为X_i，X_i相互独立，则$X=\sum_{i=1}^nX_i$的特征函数为$\prod_{i=1}^n\varphi_i(t)$

接下来利用上述结论证明该命题。

证明：将$e^{\varphi(t)-1}$进行泰勒展开可得

$$e^{\varphi(t)-1}=\frac{1}{e}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\varphi^i(t)$$

因此考虑如下函数

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{x_n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}\varphi^i(t)$$

$$x_n=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i!}$$

不难看出

$$\frac{1}{x_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}=1$$

所以由之前的结论可知$\varphi_n(t)$是特征函数，注意到

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=e^{\varphi(t)-1}$$

所以由唯一性定理可得存在随机变量X，其特征函数为$e^{\varphi(t)-1}$，即$e^{\varphi(t)-1}$是特征函数。

独立不同分布时有如下定理：

定理8.2.2(Lindeberg-Feller定理)

$$R_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2}},\text{则}$$

$$R_n\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)\text{且}\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le n}\frac{\sigma_j^2}{B_n^2}=0\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|X_k-a_k|^2 1_{\{|X_k-a_k|\ge\epsilon B_n\}}]=0$$

$$\text{其中}B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2=\mathrm{Var}(S_n)$$

（备注，这部分是结合课本补充的，老师没有讲，可以忽略）

这里简述下证明思路，首先要利用如下引理：

引理

$$\forall|z_k|\le1,|w_k|\le1$$
$$\Big|\prod_{k=1}^{n}z_k-\prod_{k=1}^{n}w_k\Big|\le\sum_{k=1}^{n}\Big|z_k-w_k\Big|$$

利用归纳法证明该不等式。

$n=1$时显然，假设$n=m-1$时结论成立，$n=m$时

$$\begin{aligned}\Big|\prod_{k=1}^{m}z_k-\prod_{k=1}^{m}w_k\Big|&=\Big|\prod_{k=1}^{m}z_k-\prod_{k=1}^{m-1}z_kw_m+\prod_{k=1}^{m-1}z_kw_m-\prod_{k=1}^{m}w_k\Big|\\&=\Big|(z_m-w_m)\prod_{k=1}^{m-1}z_k+w_m(\prod_{k=1}^{m-1}z_k-\prod_{k=1}^{m-1}w_k)\Big|\\&\le\Big|z_m-w_m\Big|\Big|\prod_{k=1}^{m-1}z_k\Big|+\Big|w_m\Big|\Big|\prod_{k=1}^{m-1}z_k-\prod_{k=1}^{m-1}w_k\Big|\\&\le\Big|z_m-w_m\Big|+\sum_{k=1}^{m-1}\Big|z_k-w_k\Big|\\&=\sum_{k=1}^{n}\Big|z_k-w_k\Big|\end{aligned}$$

从而结论成立。

由之前的命题可知，

$$\text{若}\,\varphi_{Y_i}(t)\text{是特征函数，那么}\,e^{\varphi_{Y_i}(t)-1}\text{是特征函数，因此}\,e^{\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{Y_i}(t)-1)}\text{是特征函数}$$

所以我们考虑$\prod_{i=1}^{n}\varphi_{Y_i}(t)-e^{\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{Y_i}(t)-1)}$，注意到

$$|\varphi_{Y_i}(t)|\leq 1, |e^{\varphi_{Y_i}(t)-1}|=e^{\mathrm{Rez}(\varphi_{Y_i}(t)-1)}\leq 1$$

所以利用上述引理可得

$$|\prod_{i=1}^{n}\varphi_{Y_i}(t)-e^{\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{Y_i}(t)-1)}|\leq\sum_{i=1}^{n}|\varphi_{Y_i}(t)-e^{\varphi_{Y_i}(t)-1}|$$

接下来计算$\sum_{i=1}^{n}|\varphi_{Y_i}(t)-e^{\varphi_{Y_i}(t)-1}|$，若上式$\to 0$，那么命题得证，此定理的条件可以推出这点，更具体的部分可以参考课本。

上述定理的条件不好验证，有如下更好验证的条件：

定理8.2.3(李雅普诺夫中心极限定理)

$$\text{若}\,\exists\delta>0,\text{使得}$$
$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|X_k-a_k|^{2+\delta}]\to 0(n\to\infty),$$
$$\text{则}\,\mathrm{CLT}\text{成立}$$