2.概率测度

1.基本概念

设Ω是样本空间，$\mathcal{F}$是其上的σ代数，则称$(\Omega,\mathcal{F})$是可测空间。

定义：设$\mathbb{P}$是$\mathcal{F}$上的一个（集合）函数，若它满足

$$\begin{aligned}&(1)\mathbb{P}(A)\geq 0,\forall A\in\mathcal{F}\\&(2)\mathbb{P}(\Omega)=1\\&(3)A_n\in\mathcal{F}\text{且互不相交}\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

则称$\mathbb{P}$为$\mathcal{F}$上的一个概率测度，$\mathbb{P}(A)$称为A的概率，称$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为概率空间。

2.基本性质

$$\begin{aligned}&(1)\mathbb{P}(\varnothing)=0\\&(2)\text{有限可加性：即}A_1,\ldots,A_n\text{互不相交}\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\\&(3)\text{加法公式：}\mathbb{P}(A\bigcup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)\\&(4)\text{单调性：}A,B\in\mathcal{F}\text{，}B\subset A\Rightarrow\mathbb{P}(A-B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)\text{，从而}\mathbb{P}(B)\leq\mathbb{P}(A)\\&\quad\text{特别地，}0\leq\mathbb{P}(A)\leq 1\text{，}\forall A\in\mathcal{F}\\&(5)\text{次可加性：}A_n\in\mathcal{F}\text{，}\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\\&(6)\text{连续性：}A_n\in\mathcal{F}\text{，}A_n\text{单调}\Rightarrow\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

3.$\mathbb{R}^d$上的分布函数与$L-S$测度

1.测度扩张定理

定理1.3.1

$$\text{设}\mathscr{S}\text{是半集代数，}\mathbb{P}\text{是}\mathscr{S}\text{上的概率测度，则}\mathbb{P}\text{可以唯一地扩张成}\sigma(\mathscr{S})\text{上的概率测度。}$$

该定理证明比较复杂，见课本60页。

2.$\mathbb{R}^d$上的分布函数与$L-S$测度

以$d=1$上为例，设F为$\mathbb{R}$上的（概率）分布函数，取

$$\mathscr{S}=\{(a,b](a\leq b),(-\infty,b],(a,+\infty),\mathbb{R}\}$$

则$\mathscr{S}$为半代数，且$\sigma(\mathscr{S})=\sigma(\text{开集})=\mathcal{B}$（Borel集）

定义：

$$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a)$$
$$\mathbb{P}((-\infty,b]) = F(b) - F(-\infty) = F(b)$$
$$\mathbb{P}((a,+\infty)) = 1 - F(a)$$
$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$$

则$\mathbb{P}$是$\mathscr{S}$上的概率测度，从而由测度扩张定理，$\mathbb{P}$可唯一地扩张成$\sigma(\mathscr{S}) = \mathcal{B}$上的概率测度，称之为由$F$决定的$L-S$测度（当$F(x) = x$时生成的就是勒贝格测度）

$d > 1$时，以$d = 2$为例，分布函数需要满足条件

$$0 \le F(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbb{P}((X,Y) \in (-\infty,x] \times (-\infty,y])$$
$$P(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$$
$$\text{四边形条件：} F(a_2,b_2) - F(a_2,b_1) - F(a_1,b_2) + F(a_1,b_1) \ge 0$$
$$\text{其中} a_1 \le a_2, b_1 \le b_2$$

Chapter 2 随机变量与概率分布

1.随机变量

1.基本概念

定义：设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为概率空间，$X$是定义在$\Omega$上，取值于$\mathbb{R}^d$的映射，若

$$\forall B \in \mathcal{B}^d\text{，}\{X \in B\} = \{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$$

则称X为Ω上的（实）随机变量（向量）（可测映射）。上述定义等价于

$$\Leftrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}^d$$
$$\Leftrightarrow X^{-1}(\mathcal{B}^d) \subset \mathcal{F}$$

一般地，设(E,q)是可测空间，X是Ω到E的映射，若

$$\forall B \in q\text{，}\{w : X(w) \in B\} \in \mathcal{F}$$

则称X是E值随机变量（随机元）

定理2.1.1

$$X\text{是（一维实）随机变量} \Leftrightarrow$$
$$\{X \le a\} \in \mathcal{F}, \forall a \Leftrightarrow$$
$$\{X < a\} \in \mathcal{F}, \forall a \Leftrightarrow$$
$$\{X \ge a\} \in \mathcal{F}, \forall a \Leftrightarrow$$
$$\{X > a\} \in \mathcal{F}, \forall a \Leftrightarrow$$
$$\{a < X \le b\} \in \mathcal{F}, \forall a,b, a < b$$

证明：只证明第一个等价性。

$\Rightarrow$：取$B = (-\infty,a]$即可，显然。

$\Leftarrow$：定义

$$\Pi = \{B \in \mathcal{B}^d : X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathcal{F}\}$$

所以只要证明$\Pi = \mathcal{B}^d$即可，显然有$\Pi \subset \mathcal{B}^d$，所以只要证明$\mathcal{B}^d \subset \Pi$即可。

以$d = 1$为例，记

$$C = \{(a, b], -\infty \le a \le b \le +\infty\}$$

不难验证C为半代数。注意$\forall (a, b] \in C$

$$\begin{aligned} X^{-1}((a, b]) &= \{w | a < X(w) \le b\} \\ &= \{w | X(w) \le b\} - \{w | X(w) \le a\} \end{aligned}$$

由条件可知$\{w | X(w) \le b\} \in \mathcal{F}, \{w | X(w) \le a\} \in \mathcal{F}$，从而$X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$，因此$C \subset \Pi$

注意到$\sigma(C) = \mathcal{B}$，所以结论等价于$\sigma(C) \subset \Pi$，由$\lambda - \pi$系方法，只要证明C是π系，Π是λ系。

C是π系：由定义即可验证，显然。

Π是λ系：

(1)$\mathbb{R} \in \Pi$

$X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{F}$

(2)若$B_1, B_2 \in \Pi, B_1 \subset B_2$，则$B_2 - B_1 \in \Pi$

由Π的定义可知

$$\begin{gathered} B_1, B_2 \in \mathcal{B} \\ X^{-1}(B_1) \in \mathcal{F}, X^{-1}(B_2) \in \mathcal{F} \end{gathered}$$

所以

$$\begin{gathered} B_2 - B_1 \in \mathcal{B} \\ X^{-1}(B_2 - B_1) = X^{-1}(B_2) - X^{-1}(B_1) \in \mathcal{F} \end{gathered}$$

因此$B_2 - B_1 \in \Pi$

(3)$B_1, \ldots, B_n, B_1 \subset B_2 \ldots \subset B_n$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Pi$

由Π的定义可知

$$\begin{gathered} B_i \in \mathcal{B}, X^{-1}(B_i) \in \mathcal{F} \\ i = 1, \ldots, n \end{gathered}$$

所以

$$\begin{gathered} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B} \\ X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) \in \mathcal{F} \end{gathered}$$

所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Pi$。

由单调类定理可得：

$$\Pi \supset \sigma(C) = \mathcal{B}$$

例1

设$(\Omega, \mathcal{F})$是一可测空间，对于$A \subset \Omega$，定义示性函数：

$$1_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{若} w \in A \\ 0, & \text{若} w \in A^C \end{cases}$$

则1_A是可测函数$\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$

2.基本性质

$$\begin{aligned}
&(1)\text{若}X\text{是实随机变量，则}aX\text{是实随机变量}\\
&(2)\text{若}X,Y\text{是实随机变量，则}XY\text{是实随机变量}\\
&(3)\text{若}X \in \mathbb{R}^d\text{上的实随机变量，}f\text{是}\mathbb{R}^d\text{上连续函数，则}y = f(x)\text{是实随机变量}\\
&(4)\text{若}X\text{是}E\text{值随机变量，}f\text{是}(E,q)\text{到}(\mathbb{R},\mathcal{B})\text{上的可测映射，则}f(X)\text{可测}\\
&(5)\text{若}X,Y\text{都为一维实随机变量，则}X \wedge Y(\text{取小})\text{，}X \vee Y(\text{取大}), x^+, x^-, |x|\text{是实随机变量}\\
&(6)\text{若}\{X_n\}\text{是一维实随机变量，则}\inf X_n, \sup X_n, \mathbb{E}[X_n], \lim_{n\to\infty} X_n\text{是实随机变量}
\end{aligned}$$

习题

习题1

设$(\Omega, \mathcal{F})$是一可测空间，对于$A \subset \Omega$，定义示性函数：

$$1_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{若} w \in A \\ 0, & \text{若} w \in A^C \end{cases}$$

则1_A是可测函数$\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$

证明：$\Rightarrow$：因为1_A是可测函数，所以

$$\{w | 1_A(w) \le x\} \in \mathcal{F}$$

注意到

$$\{w | 1_A(w) \le x\} = \begin{cases} \Omega, & x \ge 1 \\ A^C, & 0 < x < 1 \\ \varnothing, & x \le 0 \end{cases}$$

所以$A^C \in \mathcal{F}$，从而$A \in \mathcal{F}$

$\Leftarrow$：因为$A \in \mathcal{F}$，所以$A^C \in \mathcal{F}$，注意到

$$\{w | 1_A(w) \le x\} = \begin{cases} \Omega, & x \ge 1 \\ A^C, & 0 < x < 1 \\ \varnothing, & x \le 0 \end{cases}$$

所以对任意$x, \{w|1_A(w) \leq x\} \in \mathcal{F}$，从而$1_A$是可测函数

习题2

若X, Y是实随机变量，则$X+Y$是实随机变量

证明：设全体有理点为$\{r_n\}$，可测空间为$(\Omega, \mathcal{F})$，注意到

$$X+Y<z \Leftrightarrow X<z-Y$$

因为$X<z-Y$，所以存在r_i，使得$X<r_i<z-Y$，因此

$$\begin{aligned}\{X+Y<z\} &= \{X<z-Y\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i<z-Y\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i\}\bigcap\{r_i<z-Y\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i\}\bigcap\{Y<z-r_i\}\end{aligned}$$

因为

$$\{X<r_i\} \in \mathcal{F}, \{Y<z-r_i\} \in \mathcal{F}$$

所以

$$\{X<r_i\}\bigcap\{Y<z-r_i\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X+Y<z\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i\}\bigcap\{Y<z-r_i\} \in \mathcal{F}$$

习题3

设$(\Omega, \mathcal{F})$是可测空间，μ是$\mathcal{F}$上可加测度，且具有次σ可加性，试证μ是测度

（课本P68/3.2/1）

证明：$\forall A_i \in \mathcal{F}$且$A_i$互不相交，由$\sigma$代数的定义可知

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

由μ是$\mathcal{F}$上可加测度可得

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

由次可加性可得

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

此式对任意n都成立，所以令$n \to \infty$可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\leq\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)$$

由次可加性

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

因此

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

即μ是测度。

习题4

（课本P68/3.2/10）

(1)证明：$\forall 0<a<1, A\in\mathcal{F}$，定义

$$\mathbb{P}(A)=a\mathbb{P}_1(A)+(1-a)\mathbb{P}_2(A)$$

当$\mathbb{P}(A)=0$时，

$$a\mathbb{P}_1(A)+(1-a)\mathbb{P}_2(A)=0$$

因为$0<a<1$，所以

$$a\mathbb{P}_1(A)\geq 0,(1-a)\mathbb{P}_2(A)\geq 0$$

从而

$$a\mathbb{P}_1(A)=(1-a)\mathbb{P}_2(A)=0$$
$$\mathbb{P}_1(A)=\mathbb{P}_2(A)=0$$

下面验证$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

1.$\forall A_n\in\mathcal{F}$且$A_n$互不相交，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)&=a\mathbb{P}_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)+(1-a)\mathbb{P}_2(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\\&=a\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_1(A_n)+(1-a)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_2(A_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(aP_1(A_n)+(1-a)\mathbb{P}_2(A_n)\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

2.

$$\mathbb{P}(\Omega)=a\mathbb{P}_1(\Omega)+(1-a)\mathbb{P}_2(\Omega)=a+1-a=1$$

所以$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

结合之前结论可得

$$\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}, \mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}$$

(2).同第一小问的思路，取正项无穷级数$\{a_n\}$，满足$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$（例如可取$a_n = \frac{1}{2^n}$），任取$A \in \mathcal{F}$，定义

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n(A)$$

当$\mathbb{P}(A) = 0$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n(A) = 0$$

因为$a_n > 0, a_n \mathbb{P}_n(A) \geq 0$，所以

$$\begin{gathered} a_n \mathbb{P}_n(A) = 0, \mathbb{P}_n(A) = 0 \\ n = 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

下面验证$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

1.$\forall A_n \in \mathcal{F}$且$A_n$互不相交，则

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{P}_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{P}_i(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

备注：第三个等号涉及到了极限交换次序的问题，严格来说应该补充

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{P}_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

从而$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{P}_i(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$一致收敛，可以换序。

2.

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{P}_i(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$$

所以$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

结合之前结论可得

$$\mathbb{P}_n \ll \mathbb{P}, n = 1, 2, \ldots$$

习题5

（课本P68/3.2/18）

证明：令

$$A=\{B|B\in\mathcal{F},\mu(B)=\nu(B)\}$$

显然$\mathcal{C}\subset A$，而$\mathcal{C}$为π系，所以只要说明A为λ系即可。

(1)$\Omega\in\mathcal{C}\subset A$

(2)$\forall C,D\in A,C\subset D$，因为$\mu,\nu$为有限测度，所以$\mu(D)-\mu(C),\nu(D)-\nu(C)$有意义，那么

$$\mu(D-C)=\mu(D)-\mu(C)=\nu(D)-\nu(C)=\nu(D-C)$$

(3)任取$C_n\in A,C_n\uparrow$

令$D_n=C_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}C_i=C_n-C_{n-1}$，那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\text{且}D_i\bigcap D_j=\varnothing(i\neq j)$$

由测度的性质可知

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)$$
$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)=\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(D_n)$$

由(2)可知$D_n\in A$，所以

$$\mu(D_n)=\nu(D_n)$$

累加可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(D_n)$$

从而

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(D_n)=\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)$$

从而A为λ系，结论成立。