3.积分变换和期望计算

定理3.3.1

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$是概率空间，$X$是定义在其上，取值于可测空间$(E,\Sigma)$的随机变量（随机元），

f是 (E,Σ)到 $(\mathbb{R},\mathcal{B})$上可测函数，

则 $\int_\Omega f(X)d\mathbb{P}=\mathbb{E}[f(X)]=\int_E f(x)\mu_X(dx)$,其中$\mu_X$是$X$在$\mathbb{P}$下的概率分布

该等式的意义是一个若一个积分有意义，则另一个积分也有意义且相等

证明：老师没有给出完整证明，主要讲解了证明思路。

当$f=1_A,A\in\Sigma$时，

$$\text{左边}=\mathbb{E}[1_A(X)]=\mathbb{E}[1_{X\in A}]=\mathbb{P}(X\in A)=\mu_X(A)=\int 1_A(X)\mu_X(dx)=\text{右边}$$

接下来的思路是将其推广到非负简单，再到非负可测，最后到一般情形。

推论

若X是定义在$\mathbb{P}$上的实$r.v$且概率分布为μ_X，分布函数为F，则

$$\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}} x\mu_X(dx)=\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x),$$

$$\text{更一般的，}\mathbb{E}[f(X)]=\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_X(dx)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x)$$

定理 3.3.2

设 (E,Σ,μ)是（概率）测度空间，P是其上的非负实值可测函数，定义q上的函数ν如下：

$$\nu(B)=\int_B p(x)\mu(dx),B\in q$$

则ν是 (E,Σ)上的测度，且对(E,Σ)上任意可测函数g

$$\int_E g(x)\nu(dx)=\int_E g(x)p(x)\mu(dx)$$

该等式的含义是，若一边有意义，则另一边也有意义，且相等

证明：先考虑第一个等式，需要验证ν是测度，取$B_n\in\Sigma$互不相交：

$$
\begin{aligned}
\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} p(X)\mu(dx) \\
&= \int 1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} p(X)\mu(dx) \\
&= \int \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n} p(X)\mu(dx) \\
&= \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 1_{B_n} p(X)\mu(dx) \\
&\overset{\text{Levi}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int 1_{B_n} p(X)\mu(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{B_n} p(X)\mu(dx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n)
\end{aligned}
$$

当$g = 1_B, B \in q$时，

$$
\text{左边} = \int 1_B \nu(dx) = \nu(B) = \int_B p(X)\mu(dx) = \int_E 1_B p(X)\mu(dx) = \text{右边}
$$

接下来的思路是将其推广到非负简单，再到非负可测，最后到一般情形。

推论

$$
\text{若}X\text{是一维实}r.v\text{，具有密度}p\text{，则}
$$
$$
\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx
$$

证明：由定义可知

$$
\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\mu_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)
$$

所以只需要证明

$$
\forall B \in \mathcal{B},\ \mu_X(B) = \int_B p(x)dx
$$

当$B = (-\infty, a]$时，

$$
\mu_X(B) = F(a) - F(-\infty) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} p(x)dx
$$

为证上式对任意$B \in \mathcal{B}$成立，定义

$$
\Lambda = \{B \in \mathcal{B}, \mu_X(B) = \int_B p(x)dx\}
$$
$$
\mathcal{C} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}
$$

只要证明$\Lambda = \mathcal{B}$即可，显然有$\Lambda \subset \mathcal{B}$，并且$\mathcal{C} \subset A$，且$\mathcal{C}$是$\Pi$系，只要验证$\Lambda$是$\lambda$系即可，从而

$$\Lambda = \mathcal{B}$$

4.收敛定理

定理3.4.1（单调收敛定理）

$$X_n \uparrow X\text{且存在可积}r.v\,Y\text{，使得}X_n \geq Y(a.s)$$
$$\text{则}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}X_n]$$

证明：记$Y_n = X_n - Y$，则

$$0 \leq Y_n, Y_n \uparrow X - Y$$

由Levi定理可得

$$\mathbb{E}[X_n - Y] \uparrow \mathbb{E}[X - Y]$$

注意Y可积，所以

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n - Y] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}X_n]$$

定理3.4.2（Fatou引理）

$$\text{设}\{X_n\}\text{是一列实}r.v,\text{若存在可积}r.v,\text{使得}Y \leq X_n(a.s),\text{则}$$
$$\mathbb{E}[\varliminf_{n\to\infty}X_n] \leq \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]$$

证明：

$$\mathbb{E}[\varliminf_{n\to\infty}X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}\inf_{m\geq n}X_m] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}Y_n]$$

注意到$Y_n\uparrow$且$Y_n \geq Y$，所以由单调收敛定理可得

$$\mathbb{E}[\varliminf_{n\to\infty}X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty}Y_n] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[Y_n] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\inf_{m\geq n}X_m]$$

注意到

$$\mathbb{E}[\inf_{m\geq n}X_m] \leq \mathbb{E}[X_n]\text{对任意}m \geq n\text{恒成立}$$

所以

$$\mathbb{E}[\inf_{m\geq n}X_m] \leq \inf_{m\geq n}\mathbb{E}[X_m]$$

从而

$$\mathbb{E}[\varliminf_{n\to\infty}X_n] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\inf_{m\geq n}X_m] \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{m\geq n}\mathbb{E}[X_m] = \varliminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]$$

推论

$$
\text{设}\{X_n\}\text{是一列实}r.v,\text{若存在可积}r.v,\text{使得}Y \geq X_n(a.s),\text{则}
$$
$$
\mathbb{E}[\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n] \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}[X_n]
$$

证明：取$X_n' = -X_n$，应用Fatou引理即可。

定理3.4.3（控制收敛定理）

$$
\text{若} \lim_{n\to\infty} X_n = X(a.s),\text{存在可积}r.v\, Y\text{，使得}|X_n| \leq Y(a.s)
$$
$$
\text{则} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n]
$$

证明：利用Fatou引理，注意到此时

$$
X = \lim_{n\to\infty} X_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n
$$

所以

$$
\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n] \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}[X_n] \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n] = \mathbb{E}[X]
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n]
$$

习题

习题1

（课本P120/5.3/2）

解：

$$
\mathbb{E}|\eta|^r = \int |x|^r d(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F_k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int |x|^r d(F_k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^r
$$

习题2

（课本P120/5.3/3）

解：

$$\mathbb{E}[X^c] = \int_{-\infty}^{-c} (-c)d(F(x)) + \int_{-c}^{c} xd(F(x)) + \int_{c}^{+\infty} cd(F(x)) = \int_{-c}^{c} xd(F(x)) + c(1-F(c)-F(-c))$$
$$\mathbb{E}[(X^c)^2] = \int_{-\infty}^{-c} c^2 d(F(x)) + \int_{-c}^{c} x^2 d(F(x)) + \int_{c}^{+\infty} c^2 d(F(x)) = \int_{-c}^{c} x^2 d(F(x)) + c^2(1-F(c)-F(-c))$$
$$\mathbb{D}[X^C] = \mathbb{E}[(X^c)^2] - (\mathbb{E}[X^c])^2 = \int_{-c}^{c} x^2 d(F(x)) + c^2(1-F(c)-F(-c)) - [\int_{-c}^{c} xd(F(x)) + c(1-F(c)-F(-c))]^2$$

习题3

（课本P121/5.3/8）

解：当$z<0$时，

$$\mathbb{P}(X+Y\le z)=0$$

当$0\le z<1$时，

$$\mathbb{P}(X+Y\le z)=\mathbb{P}(X\le z, Y=0)=z(1-p)^n$$

当$1\le z<n+1$时，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y\le z) &= \sum_{i=0}^{[z]-1}\mathbb{P}(Y=i)+\mathbb{P}(X+[z]\le z)\mathbb{P}(Y=[z]) \\ &= \sum_{i=0}^{[z]-1} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + (z-[z])C_n^{[z]} p^{[z]} (1-p)^{n-[z]}\end{aligned}$$

当$z\ge n+1$时，

$$\mathbb{P}(X+Y\le z)=1$$

令$Z=X+Y$，所以

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ z(1-p)^n & 0\le z<1\\ \sum_{i=0}^{[z]-1} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} + (z-[z])C_n^{[z]} p^{[z]} (1-p)^{n-[z]} & 1\le z<n+1\\ 1 & z\ge n+1\end{cases}$$

关于Z求导可得

$$p(Z)=\begin{cases}(1-p)^n & 0\le z<1\\ C_n^{[z]} p^{[z]} (1-p)^{n-[z]} & 1\le z<n+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

合并上述结果可得

$$p(Z)=\begin{cases}C_n^{[z]} p^{[z]} (1-p)^{n-[z]} & 0\le z<n+1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

习题4

若 $\mathbb{E}|X|<\infty$，证明：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\int_{|X|>n}|x|d\mathbb{P}=0$$

$$(2)\lim_{\mathbb{P}(A)\to 0}\int_{A}|x|d\mathbb{P}=0$$

证明：(1)令

$$A_n=\{w:|X|>n\},X_n=|X|1_{A_n^C}$$

那么

$$X_n\uparrow|X|\text{且}X_n\geq 0$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n^C}xd\mathbb{P}=\mathbb{E}[|X|]$$

注意到

$$\mathbb{E}[|X|]=\int_{A_n}|x|d\mathbb{P}+\int_{A_n^C}|x|d\mathbb{P}$$

令$n\to\infty$可得

$$\mathbb{E}[|X|]=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|x|d\mathbb{P}+\lim_{n\to\infty}\int_{A_n^C}|x|d\mathbb{P}=\lim_{n\to\infty}\int_{|X|>n}|x|d\mathbb{P}+\mathbb{E}[|X|]$$

因为$\mathbb{E}[|X|]<\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|X|>n}|x|d\mathbb{P}=0$$

(2)证明：令

$$X_n=\min\{|X|,n\}$$

那么

$$X_n\geq 0,X_n\uparrow|X|$$

由单调收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{E}[|X|]$$

所以$\forall\epsilon>0,\exists n$，使得

$$\mathbb{E}[|X|-X_n]=\mathbb{E}[|X|]-\mathbb{E}[|X_n|]<\frac{\epsilon}{2}$$

取$\delta\in(0,\frac{\epsilon}{2n})$，当$\mathbb{P}(A)<\delta$时

$$
\begin{aligned}
\int_A |x| d\mathbb{P} &= \int_A (|x| - x_n) d\mathbb{P} + \int_A x_n d\mathbb{P} \\
&\leq \mathbb{E}[|X| - X_n] + n\mathbb{P}(A) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

所以结论成立。