2.随机变量的构造

简单随机变量和初等随机变量的定义

设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为概率空间，形如

$$X=\sum_{i=1}^{n}a_i1_{A_i},A_i\in\mathcal{F},\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,A_i\text{互不相交}$$

的X为简单随机变量。形如

$$X=\sum_{i=1}^{\infty}a_i1_{A_i},A_i\in\mathcal{F},\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega,A_i\text{互不相交}$$

的X为初等随机变量。

定理2.2.1

$$\begin{aligned}&\text{设 }X\text{是 }(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{上随机变量}\\&(1)\text{若 }X\text{非负，则存在一列非负简单随机变量}\{X_n\},X_n\uparrow,\lim_{n\to\infty}X_n=X\\&(2)\text{若 }X\text{非负，则存在一列非负初等随机变量}\{X_n\},X_n\uparrow,\lim_{n\to\infty}X_n=X\text{一致}\\&(3)\text{若 }X_n\text{是有界}r.v,\text{则存在一列简单}r.v\{X_n\},\text{满足}|X_n|\le|X|,\text{且}\lim_{n\to\infty}X_n=X\text{一致}\\&(4)\text{一般地，总存在简单}r.v\{X_n\},\text{满足}|X_n|\le|X|\text{且}\lim_{n\to\infty}X_n=X,\\&\quad\text{也存在初等}r.v\{X_n\},\text{满足}|X_n|\le|X|\text{且}\lim_{n\to\infty}X_n=X\text{一致}\end{aligned}$$

(1)证明：按X的值域划分可得随机变量X_n

$$X_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}1\{\frac{k-1}{2^n}\le X<\frac{k}{2^n}\}+n1\{X\ge n\}$$

比较X_n和X_{n+1}，先考虑范围$\frac{k-1}{2^n}\le X<\frac{k}{2^n}$，对应的$X_n=\frac{k-1}{2^n}$，注意到

$$\begin{gathered}\frac{k-1}{2^n}\le X<\frac{k}{2^n}\Leftrightarrow\\\frac{2k-2}{2^{n+1}}\le X<\frac{2k}{2^{n+1}}\Leftrightarrow\\\frac{2k-2}{2^{n+1}}\le X<\frac{2k-1}{2^{n+1}}\text{或}\frac{2k-1}{2^{n+1}}\le X<\frac{2k}{2^{n+1}}\end{gathered}$$

在$\frac{2k-2}{2^{n+1}}\le X<\frac{2k-1}{2^{n+1}}$范围内，

$$X_{n+1}=\frac{2k-2}{2^{n+1}}=\frac{k-1}{2^n}=X_n$$

在$\frac{2k-1}{2^{n+1}}\le X<\frac{2k}{2^{n+1}}$范围内，

$$X_{n+1}=\frac{2k-1}{2^{n+1}}>\frac{k-1}{2^n}=X_n$$

接着考虑范围$X\ge n$，此时$X_n=n$，而X_{n+1}的范围是

$$X_{n+1}\ge n$$

综上，$X_n\le X_{n+1}$。

接着比较$X_n(w)-X(w)$

$$|X_n(w)-X(w)|<\frac{1}{2^n}，X(w)<+\infty$$
$$X_n(w)=n,X(w)=+\infty$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X$$

不难看出有

$$|X_n|\le|X|$$

(2)取

$$X_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^n}1\{\frac{k-1}{2^n}\le X<\frac{k}{2^n}\}+(+\infty)1\{X=+\infty\}$$

那么

$$|X_n(w)-X(w)|<\frac{1}{2^n}，X(w)<+\infty$$
$$X_n(w)=+\infty,X(w)=+\infty$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X一致$$

不难看出有

$$|X_n|\le|X|$$

备注(1)(2)的区别在于(1)的n和$X(w)=+\infty$有关，从而和w而有关，而(2)中的n和w无关

(3)类似(1)可得

$$X_n=\sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}1_{\{}\frac{k-1}{2^n}\le X<\frac{k}{2^n}\}+n1\{X\ge n\}+(-n)1\{X<-n\}$$

因为X有界，所以当n充分大时

$$X_n=\sum_{k=-n2^n+1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}1_{\{}\frac{k-1}{2^n}\le X<\frac{k}{2^n}\}$$

从而n充分大时，

$$|X_n(w)-X(w)|<\frac{1}{2^n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X一致$$

此时显然有

$$|X_n|\le |X|$$

(4)注意有如下分解

$$X = X^+ - X^-$$
$$X^+\ge 0, X^-\ge 0$$

利用(1)(2)可以找到$X_n^+\uparrow X^+, X_n^-\uparrow X^-$(一致)，且

$$|X_n^+|\le |X^+|, |X_n^-|\le |X^-|$$

所以

$$X_n = X_n^+ - X_n^- \to X^+ - X^- = X（一致）$$

注意到

$$|X_n| = X_n^+ + X_n^- \le X^+ + X^- = |X|$$

从而结论成立。

命题

$$X^{-1}(\mathcal{B}^d)=\{X^{-1}(B), B\in\mathcal{B}^d\}是\Omega上的\sigma代数$$

定理 2.2.2

$$\text{设}X\text{是}\Omega\text{到}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)\text{中的映射，}\sigma(X)=X^{-1}(\mathcal{B}^d), Y\text{是}\Omega\text{到}\mathbb{R}\text{上的映射，}$$
$$\text{则}Y\text{关于}\sigma(X)\text{可测}\Leftrightarrow\text{存在}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)\text{到}(\mathbb{R},\mathcal{B})\text{的可测映射}g,\text{使得}Y=g。X=g(X)$$

这个定理老师没有给出完整证明，思路是先考虑Y是A的示性函数函数，那么由定义可知，

$$\exists B\in\mathcal{B}^d,\text{使得}A=X^{-1}(B)$$

那么

$$1_A(w)=1_{X^{-1}(B)}(w)=1_B(X(w))=g(X(w))$$

接着考虑简单函数的情形，最后由定理2.2.1推广至一般情形。

3.随机变量的概率分布

概率分布的定义

设X是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上，取值于$(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$的中的$r.v$，定义

$$\mu_X(B)=\mathbb{P}(X\in B),B\in\mathcal{B}^d$$

则μ_X是$(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$上概率测度，称为$X$（在$\mathbb{P}$上）的概率分布

分布函数的定义

定义

$$F(x_1,\dots,x_d)=\mu_X((-\infty,x_1]\times\dots\times(\infty,x_d])=\mathbb{P}(X_1\le x_1,\dots,X_d\le x_d)$$

定理2.3.1

$$\text{任意}\,\mathbb{R}^d\text{上概率测度}\,\mu\text{，一定存在}\,r.v\text{，使其概率分布为}\,\mu$$
$$\text{（等价于}\,\mathbb{R}^d\text{上概率分布函数}\,F\text{,一定存在}\,r.v\text{，使其分布函数为}\,F\text{）}$$

证明：取$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d,\mu)$，定义随机变量$X(w)=w$即可，下面验证这点。

验证其为随机变量：

$$\forall B\in\mathcal{B}^d\text{，},X^{-1}(B)=\{w|X(w)=w\in B\}=B\in\mathcal{B}^d=\mathcal{F}$$

验证其为概率分布：

$$\forall B\in\mathcal{B}^d\text{，}\mu_X(B)=\mathbb{P}(X(w)\in B)=\mathbb{P}(w\in B)=\mu(B)$$

例1

考虑二项分布$b(n,p)$，概率空间为

$$E=\{0,1,\dots,n\}\text{，}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=(\{0,1,\dots,n\},2^{\{0,1,\dots,n\}},\mu)$$

取

$$\mu(\{k\})=\mathbb{P}(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$$
$$\mu(B)=\mathbb{P}(B)=\sum_{k\in B}\mathbb{P}(\{k\})$$

再定义

$$X_{(k)}(w)=k$$

或取

$$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=(\{0,1\}^n,2^\Omega,\mathbb{P}),\{w\}=\{w_1,\ldots,w_n\},w_i\in\{0,1\}$$
$$\mathbb{P}(\{w\})=\mathbb{P}(\{w_1,\ldots,w_n\})=p^k(1-p)^{n-k},X(w)=\sharp\{i:w_i=1\}(w\text{中}1\text{的个数})$$
$$\mathbb{P}(B)=\sum_{w\in B}\mathbb{P}(\{w\})$$
$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(\{w:X(w)=k\})=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$$

习题

习题1

$$X^{-1}(\mathcal{B}^d)=\{X^{-1}(B),B\in\mathcal{B}^d\}\text{是}\Omega\text{上的}\sigma\text{代数}$$

证明:

1.取$B=\mathbb{R}^d$可得

$$\Omega=X^{-1}(\mathbb{R}^d)\in X^{-1}(\mathcal{B}^d)$$

2.$\forall A\in X^{-1}(\mathcal{B}^d)$，存在$B\in\mathcal{B}^d$，使得$A=X^{-1}(B)$，注意到$B^C\in\mathcal{B}^d$，所以

$$A^C=X^{-1}(B^C)\in X^{-1}(\mathcal{B}^d)$$

3.取$A_n\in X^{-1}(\mathcal{B}^d)$，那么存在$B_n\in\mathcal{B}^d$使得$A_n=X^{-1}(B_n)$，注意$\bigcup_{n=1}^\infty B_n\in\mathcal{B}^d$，所以

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n=X^{-1}(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)\in X^{-1}(\mathcal{B}^d)$$

结合以上3点可得$X^{-1}(\mathcal{B}^d)$是Ω上的σ代数。

习题2

（课本P87/4.1/9)

证明：设X,Y是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，取值于$(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$的随机变量，$f$是$(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$到$(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}^m)$映射

因为X,Y同分布，所以

$$\forall B\in\mathcal{B}^d，\mu_X(B)=\mu_Y(B)$$

因为f为Borel可测，所以

$$\forall A\in\mathcal{B}^m，f^{-1}(A)\in\mathcal{B}^d$$

在任取$C\in\mathcal{B}^m$，我们有

$$
\begin{aligned}
\mu_{f(X)}(C) &= \mathbb{P}(f(X) \in C) \\
&= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(C)) \\
&= \mu_X(f^{-1}(C)) \\
&= \mu_Y(f^{-1}(C)) \\
&= \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(C)) \\
&= \mathbb{P}(f(Y) \in C) \\
&= \mu_{f(Y)}(C)
\end{aligned}
$$

从而$f(X)$与$f(Y)$同分布

习题3

构造$X \sim E(\lambda)$的随机变量

解：设$G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$，取概率测度$\mathbb{P}$为$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$上由$G$决定的$L-S$测度，则$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$是一个概率空间，再定义$X(w) = w$，所以$X$的分布函数为

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

从而$X \sim E(\lambda)$