Chapter 5条件期望

1.符号测度及其分布

考虑如下问题，假设存在随机变量X，满足$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\xrightarrow{X}(\mathbb{R},\mathcal{B})$，如果$\mathbb{E}[X]$存在，那么

$$\nu(A)=\int_A xd\mathbb{P}=\mathbb{E}[X1_A]=\int_A x^+d\mathbb{P}-\int_A x^-d\mathbb{P}$$

存在。从这个例子中引出符号测度的定义。

符号测度的定义

$$\begin{aligned}&\text{设 }(E,\Sigma)\text{是一可测空间，}\mu\text{是定义在}\Sigma\text{上的函数，满足}\\&(1)\mu(\varnothing)=0\\&(2)A_n\in\Sigma,\text{互不相交}\Rightarrow\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\\&\qquad\text{则称}\mu\text{是}\Sigma\text{上的符号测度}\end{aligned}$$

注：μ最多只能取$\pm\infty$之一 这是因为

$$\begin{aligned}&\text{若}\,\mu(A)=-\infty\text{，则}\,\mu(E)=\mu(A)+\mu(A^C)=-\infty\\&\text{若}\,\mu(B)=+\infty\text{，则}\,\mu(E)=\mu(B)+\mu(B^C)=+\infty\end{aligned}$$

从而产生了矛盾。

关于符号测度有如下定理：

定理5.1.1

$$\begin{aligned}&\text{若}\,\mu\text{是}\,\Sigma\text{上的符号测度，则存在}\,N,P\in\Sigma\text{，满足}\\&(1)NP=\varnothing,N\bigcup P=E\\&(2)\mu(P)=\sup_{A\in\Sigma}\mu(A)\geq 0,\mu(N)=\inf_{A\in\Sigma}\mu(A)\leq 0\end{aligned}$$

这个定理的证明从略，可以参考教材。

定理5.1.2(Hahn分解)

$$
\begin{gathered}
\text{若}\mu\text{是}\Sigma\text{上符号测度，则存在}N,P\text{满足}\\
NP=\varnothing,N\bigcup P=E\\
\text{且}\forall A\in\Sigma,\\
\mu(P\bigcap A)=\sup_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A)\geq 0\\
\mu(N\bigcap A)=\inf_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A)\leq 0\\
\text{于是定义}\\
\mu^{+}(A)=\mu(P\bigcap A)\\
\mu^{-}(A)=-\mu(N\bigcap A)\\
|\mu|(A)=\mu^{+}(A)+\mu^{-}(A)\\
\text{则}\mu^{+},\mu^{-},|\mu|\text{都是}\Sigma\text{上的测度且}\mu=\mu^{+}-\mu^{-}
\end{gathered}
$$

证明：取N,P为定理5.1.1中的N,P，先证明

$$
\mu(P\bigcap A)=\sup_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A)
$$

利用反证法，若存在B，使得

$$
\mu(P\bigcap A)<\mu(B\bigcap A)
$$

那么

$$
\begin{aligned}
\mu(P)&=\mu(P\bigcap A)+\mu(P\bigcap A^{C})\\
&<\mu(B\bigcap A)+\mu(P\bigcap A^{C})\\
&=\mu((B\bigcap A)\bigcup(P\bigcap A^{C}))
\end{aligned}
$$

这就与$\mu(P)$最大矛盾，从而$\mu(P\bigcap A)=\sup_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A)$成立。进一步，证明

$$
\mu(N\bigcap A)=\inf_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A)
$$

利用之前证明的结论即可，$\forall B\in\Sigma$

$$
\mu(N\bigcap A)=\mu(A)-\mu(P\bigcap A)\leq\mu(A)-\mu(B^{C}\bigcap A)=\mu(B\bigcap A)
$$

从而结论成立。$\mu^{+},\mu^{-},|\mu|$都是Σ上的测度利用定义验证即可，$\mu=\mu^{+}-\mu^{-}$利用如下事实即可

$$
\mu(A)=\mu(P\bigcap A)+\mu(N\bigcap A)=\mu^{+}(A)-\mu^{-}(A)
$$

2.Lebesgue分解

μ-连续以及μ-奇异的定义

$$
\begin{gathered}
\text{设}(E,\Sigma)\text{是一可测空间，}\mu\text{是定义在}\Sigma\text{上的函数，}\\
\Sigma\text{上符号测度}\varphi\text{是}\mu-\text{连续，若}\mu(A)=0\Rightarrow\varphi(A)=0\\
\Sigma\text{上符号测度}\varphi\text{是}\mu-\text{奇异，若存在}N\in\Sigma\text{，使得}\mu(N)=0\Rightarrow\forall A\in\Sigma,\varphi(A\bigcap N^{C})=0\\
\text{这两种情形分别记为}\varphi\ll\mu\text{，}\varphi\perp\mu
\end{gathered}
$$

这两个定义是为了介绍如下定理：

定理5.2.1

$$\text{设 }\mu\text{是 }\sigma\text{有限测度，}\varphi\text{是符号测度，则 }\varphi\text{可以唯一的表示为}$$
$$\varphi=\varphi_C+\varphi_S$$
$$\varphi_C,\varphi_S\text{为}\Sigma\text{上符号测度且存在}(E,\Sigma)\text{可测函数 }f\text{，使得}$$
$$\varphi_C=\int_A fd\mu,(\varphi_c\ll\mu)$$
$$\text{且}\varphi_S\perp\mu$$

σ有限的含义是可以把全空间分解为很多小块，每一块都有限。该定理的含义是可以把σ有限测度分解为μ连续以及μ奇异部分。

定理5.2.2

$$\text{若 }\varphi\text{是 }\sigma\text{上符号测度且}\varphi\ll\mu\text{，则 }\varphi\text{可表示为}$$
$$\varphi(A)=\int_A fd\mu$$
$$\text{称 }f\text{为 }\varphi\text{关于 }\mu\text{的R-N导数，记为 }\frac{d\varphi}{d\mu}$$

根据上述定理，如下等式成立

$$\varphi(A)=\int_A\frac{d\varphi}{d\mu}d\mu$$
$$\int gd\varphi=\int g\frac{d\varphi}{d\mu}d\mu$$

定理5.2.3(分布函数的Lebesgue分解)

$$\text{设 }F\text{是 }\mathbb{R}\text{上概率分布函数，则 }F\text{可以唯一的分解为：}$$
$$F=\lambda_1F_c+\lambda_2F_d+\lambda_3F_{s,c}$$
$$\text{其中 }F_c\text{是连续型概率分布函数，即存在 }\mathbb{R}\text{上可测函数 }p\text{，使得}$$
$$F_c(x)=\int_{-\infty}^x p(y)dy$$
$$F_d\text{是 }\mathbb{R}\text{上离散型概率分布函数，即存在}\{x_k\}\text{和非负数列}\{p_k\}\text{，使得}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1,F_d(x)=\sum_{x_k\le x}p_k$$
$$F_{s,c}\text{是连续分布函数，它关于Lebesgue测度的导数几乎处处为}0\text{,而又不是非零常数}$$
$$\lambda_i\ge0,\sum_{i=1}^3\lambda_i=1$$

证明：注意到F_c的导数为F的导数，定义

$$\hat{F}_c(x)=\int_{-\infty}^x F'(y)dy$$

为定义F_d，设$\{x_n\}$是F的全体间断点（注意F为单调函数，单调函数的间断点可列），定义

$$p_k = \mathbb{P}(x = x_k) = F(x_k) - F(x_k^-)$$

再定义

$$\hat{F}_d(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i$$
$$\hat{F}_{s,c}(x) \triangleq F(x) - \hat{F}_c(x) - \hat{F}_d(x)$$

那么

$$\begin{aligned}&(1)\hat{F}_{s,c}(x) \geq 0\\&(2)\hat{F}_{s,c}\text{非降}\\&(3)\hat{F}'_{s,c}(x) = 0(a.e)\\&(4)\hat{F}_{s,c}(x)\text{连续}\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}\hat{F}_{s,c}(x) &= F(x) - \int_{-\infty}^{x} F'(y)dy - \hat{F}_d(x)\\&= F(x) - \int_{-\infty}^{x} (F'(y) - \hat{F}'_d(y))dy - \hat{F}_d(x)\\&= F(x) - \hat{F}_d(x) - \int_{-\infty}^{x} (F'(y) - \hat{F}'_d(y))dy\end{aligned}$$

由实分析的结论

$$F\uparrow, G(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} F'(y)dy$$
$$\text{则 } G(b) - G(a) \leq F(b) - F(a)$$
$$\text{令 } a \to -\infty\text{可得}$$
$$G(b) \leq F(b)$$

因此

$$\hat{F}_{s,c}(x) \geq 0$$

(2)设$x_1 < x_2$，那么

$$\begin{aligned}\hat{F}_{s,c}(x_2) - \hat{F}_{s,c}(x_1) &= F(x_2) - \hat{F}_d(x_2) - \int_{-\infty}^{x_2} (F'(y) - \hat{F}'_d(y))dy - [F(x_1) - \hat{F}_d(x_1)] + \int_{-\infty}^{x_1} (F'(y) - \hat{F}'_d(y))dy\\&= g(x_2) - g(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} g'(y)dy\\&\geq 0\end{aligned}$$

其中

$$g(x) = F(x) - \hat{F}_d(x)$$

(3)

$$\hat{F}'_{s,c}(x) = F'(x) - F'(x) = 0(a.e)$$

(4)

$$\hat{F}_{s,c}(x)-\hat{F}_{s,c}(x^-)=F(x)-F(x^-)-(\hat{F}_c(x)-\hat{F}_c(x^-))-(\hat{F}_d(x)-\hat{F}_d(x^-))$$

由定义可知

$$F(x)-F(x^-)=\hat{F}_d(x)-\hat{F}_d(x^-)$$
$$\hat{F}_c(x)-\hat{F}_c(x^-)=0$$

所以

$$\hat{F}_{s,c}(x)-\hat{F}_{s,c}(x^-)=0$$

因此$\hat{F}_{s,c}$左连续，注意到$F(x),F_c(x),\hat{F}_d(x)$右连续，所以

$$\hat{F}_{s,c}(x)=F(x)-\hat{F}_c(x)-\hat{F}_d(x)$$

右连续，因此

$$\hat{F}_{s,c}(x)\text{连续}$$

若$\hat{F}_c(+\infty)>0,\hat{F}_d(+\infty)>0,\hat{F}_{s,c}(+\infty)>0$，那么

$$\begin{aligned}F(x)&=\hat{F}_c(+\infty)\frac{\hat{F}_c(x)}{\hat{F}_c(+\infty)}+\hat{F}_d(+\infty)\frac{\hat{F}_d(x)}{\hat{F}_d(+\infty)}+\hat{F}_{s,c}(+\infty)\frac{\hat{F}_{s,c}(x)}{\hat{F}_{s,c}(+\infty)}\\&\triangleq\lambda_1F_c(x)+\lambda_2F_d(x)+\lambda_3F_{s,c}(x)\end{aligned}$$

令$x\to+\infty$可得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

若$\hat{F}_c(+\infty),\hat{F}_d(+\infty),\hat{F}_{s,c}(+\infty)$某项为0，则取对应的$\lambda_i=0$即可

3.条件期望

设X是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$上实值$r.v$且$\mathbb{E}[X]$存在，我们有如下命题：

命题

$$\text{定义}\,\nu(A)=\int_A xd\mathbb{P},\text{则}\,\nu\text{是}\,\mathcal{F}\text{上符号测度}$$

证明：显然$\nu(\varnothing)=0$，所以只需证明第二条性质即可。设$\{A_n\}$互不相交，则

$$
\begin{aligned}
\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} x d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega} x \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega} x^+ (\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} - \sum_{n=1}^{\infty} x^- 1_{A_n}) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega} x^+ \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} d\mathbb{P} - \int_{\Omega} x^- \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} x^+ 1_{A_n} d\mathbb{P} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} x^- 1_{A_n} d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} (x^+ - x^-) 1_{A_n} d\mathbb{P} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} x d\mathbb{P}
\end{aligned}
$$

其中倒数第三个等号是因为单调收敛定理。

习题

习题1

（课本P173/7.1/1）

证明：由Hahn分解的定义可知

$$
\varphi = \varphi^+ - \varphi^-
$$
$$
\varphi^+(A) = \varphi(A \bigcap P), \varphi^-(A) = -\varphi(A \bigcap N)
$$

$\forall A \in \Omega$，注意$\mu_1(A), \mu_2(A)$，所以

$$
\begin{aligned}
\varphi^+(A) &= \varphi(A \bigcap P) \\
&= \mu_1(A \bigcap P) - \mu_2(A \bigcap P) \\
&\leq \mu_1(A \bigcap P) \\
&\leq \mu_1(A) \\
\varphi^-(A) &= -\varphi(A \bigcap N) \\
&= \mu_2(A \bigcap N) - \mu_1(A \bigcap N) \\
&\leq \mu_2(A \bigcap N) \\
&\leq \mu_2(A)
\end{aligned}
$$

由A的任意性可得

$$
\varphi^+ \leq \mu_1, \varphi^- \leq \mu_2
$$

习题2

（课本P182/7.2/3）

证明：因为

$$\varphi,\varphi' \ll \mu$$

所以

$$\varphi+\varphi' \ll \mu$$

从而可以用定理5.5.2，注意$(\varphi+\varphi')(A)=\varphi(A)+\varphi'(A)$，所以

$$\begin{aligned}(\varphi+\varphi')(A)&=\int_A \frac{d(\varphi+\varphi')}{d\mu}d\mu\\&=\varphi(A)+\varphi'(A)\\&=\int_A \frac{d\varphi}{d\mu}d\mu+\int_A \frac{d\varphi'}{d\mu}d\mu\\&=\int_A (\frac{d\varphi}{d\mu}+\frac{d\varphi'}{d\mu})d\mu\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d(\varphi+\varphi')}{d\mu}=\frac{d\varphi}{d\mu}+\frac{d\varphi'}{d\mu}(a.e)$$

因为$\nu \ll \mu$，所以任取可测函数g，有

$$\int_A g d\nu=\int_A g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

因为$\varphi \ll \nu$，所以$g=\frac{d\varphi}{d\nu}$可测，带入可得

$$\varphi(A)=\int_A \frac{d\varphi}{d\nu}d\nu=\int_A \frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

注意到

$$\varphi(A)=\int_A \frac{d\varphi}{d\mu}d\mu=\int_A \frac{d\varphi}{d\nu}d\nu$$

因此

$$\frac{d\varphi}{d\mu}=\frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}(\mu\ \ a.e)$$

习题3

（课本P182/7.2/6）

证明：

$$\varphi(A)=\int_A f d\mu=\int_A f^+ d\mu-\int_A f^- d\mu$$

令

$$u_1(A)=\int_A f^+d\mu, u_2(A)=\int_A f^-d\mu$$

另一方面，$\varphi(A)$是符号测度，所以有Hahn分解，因此

$$\begin{gathered}
\varphi(A)=\varphi^+(A)-\varphi^-(A), \\
\varphi^+(A)=\varphi(P\bigcap A)=\sup_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A) \\
\varphi^-(A)=-\varphi(N\bigcap A)=-\inf_{B\subset\Sigma}\mu(B\bigcap A)
\end{gathered}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\varphi^+(A)&=\varphi(P\bigcap A) \\
&=u_1(P\bigcap A)-u_2(P\bigcap A) \\
&\leq u_1(P\bigcap A) \\
&\leq u_1(A)
\end{aligned}$$

所以接下来只要证明反方向的不等式即可，令$C=\{f\geq 0\}$，接着利用定义计算

$$\begin{aligned}
u_1(A)&=\int_A f^+d\mu \\
&=\int_{A\bigcap C} fd\mu \\
&=\varphi(A\bigcap C) \\
&\leq \varphi^+(A)
\end{aligned}$$

最后一个不等号是由$\varphi^+(A)$的定义决定的。因此

$$\varphi^+(A)=u_1(A)=\int_A f^+d\mu$$

同理可得

$$\varphi^-(A)=u_2(A)=\int_A f^-d\mu$$

所以

$$\begin{aligned}
|\varphi|(A)&=\varphi^+(A)+\varphi^-(A) \\
&=\int_A f^+d\mu+\int_A f^-d\mu \\
&=\int_A (f^++f^-)d\mu \\
&=\int_A |f|d\mu
\end{aligned}$$