2.概率测度

1.基本概念

设Ω是样本空间，$\mathcal{F}$是其上的σ代数，则称$(\Omega,\mathcal{F})$是可测空间。

定义：设$\mathbb{P}$是$\mathcal{F}$上的一个（集合）函数，若它满足

$$\begin{aligned}&(1)\mathbb{P}(A)\geq 0,\forall A\in\mathcal{F}\\&(2)\mathbb{P}(\Omega)=1\\&(3)A_n\in\mathcal{F}\text{且互不相交}\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

则称$\mathbb{P}$为$\mathcal{F}$上的一个概率测度，$\mathbb{P}(A)$称为A的概率，称$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为概率空间。

2.基本性质

$$\begin{aligned}&(1)\mathbb{P}(\varnothing)=0\\&(2)\text{有限可加性：即}A_1,\ldots,A_n\text{互不相交}\Rightarrow\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\\&(3)\text{加法公式：}\mathbb{P}(A\bigcup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(AB)\\&(4)\text{单调性：}A,B\in\mathcal{F}\text{，}B\subset A\Rightarrow\mathbb{P}(A-B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)\text{，从而}\mathbb{P}(B)\leq\mathbb{P}(A)\\&\quad\text{特别地，}0\leq\mathbb{P}(A)\leq 1\text{，}\forall A\in\mathcal{F}\\&(5)\text{次可加性：}A_n\in\mathcal{F}\text{，}\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\\&(6)\text{连续性：}A_n\in\mathcal{F}\text{，}A_n\text{单调}\Rightarrow\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

3.$\mathbb{R}^d$上的分布函数与$L-S$测度

1.测度扩张定理

定理1.3.1

$$\text{设}\mathscr{S}\text{是半集代数，}\mathbb{P}\text{是}\mathscr{S}\text{上的概率测度，则}\mathbb{P}\text{可以唯一地扩张成}\sigma(\mathscr{S})\text{上的概率测度。}$$

该定理证明比较复杂，见课本60页。

2.$\mathbb{R}^d$上的分布函数与$L-S$测度

以$d=1$上为例，设F为$\mathbb{R}$上的（概率）分布函数，取

$$\mathscr{S}=\{(a,b](a\leq b),(-\infty,b],(a,+\infty),\mathbb{R}\}$$

则$\mathscr{S}$为半代数，且$\sigma(\mathscr{S})=\sigma(\text{开集})=\mathcal{B}$（Borel集）

定义：

$$\begin{gathered}\mathbb{P}((a,b])=F(b)-F(a)\\ \mathbb{P}((-\infty,b])=F(b)-F(-\infty)=F(b)\\ \mathbb{P}((a,+\infty))=1-F(a)\\ \mathbb{P}(\mathbb{R})=1\end{gathered}$$

则$\mathbb{P}$是$\mathscr{S}$上的概率测度，从而由测度扩张定理，$\mathbb{P}$可唯一地扩张成$\sigma(\mathscr{S})=\mathcal{B}$上的概率测度，称之为由$F$决定的$L-S$测度（当$F(x)=x$时生成的就是勒贝格测度）

$d>1$时，以$d=2$为例，分布函数需要满足条件

$$\begin{gathered}0\leq F(x,y)=\mathbb{P}(X\leq x,Y\leq y)=\mathbb{P}((X,Y)\in(-\infty,x]\times(-\infty,y])\\ P(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1\\ \text{四边形条件：}F(a_2,b_2)-F(a_2,b_1)-F(a_1,b_2)+F(a_1,b_1)\geq 0\\ \text{其中}a_1\leq a_2,b_1\leq b_2\end{gathered}$$

Chapter 2 随机变量与概率分布

1.随机变量

1.基本概念

定义：设$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$为概率空间，$X$是定义在$\Omega$上，取值于$\mathbb{R}^d$的映射，若

$$\forall B\in\mathcal{B}^d,\ \{X\in B\}=\{w:X(w)\in B\}\in\mathcal{F}$$

则称X为Ω上的（实）随机变量（向量）（可测映射）。上述定义等价于

$$\begin{gathered}\Leftrightarrow X^{-1}(B)\in\mathcal{F},\forall B\in\mathcal{B}^d\\ \Leftrightarrow X^{-1}(\mathcal{B}^d)\subset\mathcal{F}\end{gathered}$$

一般地，设(E,q)是可测空间，X是Ω到E的映射，若

$$\forall B\in q,\ \{w:X(w)\in B\}\in\mathcal{F}$$

则称X是E值随机变量（随机元）

定理2.1.1

$$\begin{gathered}X\text{是（一维实）随机变量}\Leftrightarrow\\ \{X\leq a\}\in\mathcal{F},\forall a\Leftrightarrow\\ \{X<a\}\in\mathcal{F},\forall a\Leftrightarrow\\ \{X\geq a\}\in\mathcal{F},\forall a\Leftrightarrow\\ \{X>a\}\in\mathcal{F},\forall a\Leftrightarrow\\ \{a<X\leq b\}\in\mathcal{F},\forall a,b,a<b\end{gathered}$$

证明：只证明第一个等价性。

$\Rightarrow$：取$B=(-\infty,a]$即可，显然。

$\Leftarrow$：定义

$$\Pi=\{B\in\mathcal{B}^d:X^{-1}(B)=\{X\in B\}\in\mathcal{F}\}$$

所以只要证明$\Pi=\mathcal{B}^d$即可，显然有$\Pi\subset\mathcal{B}^d$，所以只要证明$\mathcal{B}^d\subset\Pi$即可。

以$d=1$为例，记

$$C=\{(a,b],-\infty\leq a\leq b\leq+\infty\}$$

不难验证C为半代数。注意$\forall(a,b]\in C$

$$\begin{aligned}X^{-1}((a,b])&=\{w|a<X(w)\leq b\}\\&=\{w|X(w)\leq b\}-\{w|X(w)\leq a\}\end{aligned}$$

由条件可知$\{w|X(w)\leq b\}\in\mathcal{F},\{w|X(w)\leq a\}\in\mathcal{F}$，从而$X^{-1}((a,b])\in\mathcal{F}$，因此$C\subset\Pi$

注意到$\sigma(C)=\mathcal{B}$，所以结论等价于$\sigma(C)\subset\Pi$，由$\lambda-\pi$系方法，只要证明C是π系，Π是λ系。

C是π系：由定义即可验证，显然。

Π是λ系：

(1)$\mathbb{R}\in\Pi$

$X^{-1}(\mathbb{R})=\Omega\in\mathcal{F}$

(2)若$B_1,B_2\in\Pi,B_1\subset B_2$，则$B_2-B_1\in\Pi$

由Π的定义可知

$$\begin{gathered}B_1,B_2\in\mathcal{B}\\X^{-1}(B_1)\in\mathcal{F},X^{-1}(B_2)\in\mathcal{F}\end{gathered}$$

所以

$$\begin{gathered}B_2-B_1\in\mathcal{B}\\X^{-1}(B_2-B_1)=X^{-1}(B_2)-X^{-1}(B_1)\in\mathcal{F}\end{gathered}$$

因此$B_2-B_1\in\Pi$

(3)$B_1,\ldots,B_n,B_1\subset B_2\ldots\subset B_n$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\Pi$

由Π的定义可知

$$\begin{gathered}B_i\in\mathcal{B},X^{-1}(B_i)\in\mathcal{F}\\i=1,\ldots,n\end{gathered}$$

所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\in\mathcal{B}$$

$$X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}X^{-1}(B_n)\in\mathcal{F}$$

所以$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\Pi$。

由单调类定理可得：

$$\Pi \supset \sigma(C) = \mathcal{B}$$

例1

设$(\Omega, \mathcal{F})$是一可测空间，对于$A \subset \Omega$，定义示性函数：

$$1_A(w) = \begin{cases} 1, & 若 w \in A \\ 0, & 若 w \in A^C \end{cases}$$

则1_A是可测函数$\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$

2.基本性质

$$\begin{aligned}
&(1)若X是实随机变量，则aX是实随机变量 \\
&(2)若X,Y是实随机变量，则XY是实随机变量 \\
&(3)若X \in \mathbb{R}^d上的实随机变量，f是\mathbb{R}^d上连续函数，则y = f(x)是实随机变量 \\
&(4)若X是E值随机变量，f是(E,q)到(\mathbb{R},\mathcal{B})上的可测映射，则f(X)可测 \\
&(5)若X,Y都为一维实随机变量，则X \wedge Y(取小)，X \vee Y(取大), x^+, x^-, |x|是实随机变量 \\
&(6)若\{X_n\}是一维实随机变量，则\inf X_n, \sup X_n, \mathbb{E}[X_n], \lim_{n \to \infty} X_n是实随机变量
\end{aligned}$$

习题

习题1

设$(\Omega, \mathcal{F})$是一可测空间，对于$A \subset \Omega$，定义示性函数：

$$1_A(w) = \begin{cases} 1, & 若 w \in A \\ 0, & 若 w \in A^C \end{cases}$$

则1_A是可测函数$\Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$

证明：$\Rightarrow$：因为1_A是可测函数，所以

$$\{w | 1_A(w) \le x\} \in \mathcal{F}$$

注意到

$$\{w | 1_A(w) \le x\} = \begin{cases} \Omega, & x \ge 1 \\ A^C, & 0 < x < 1 \\ \varnothing, & x \le 0 \end{cases}$$

所以$A^C \in \mathcal{F}$，从而$A \in \mathcal{F}$

$\Leftarrow$：因为$A \in \mathcal{F}$，所以$A^C \in \mathcal{F}$，注意到

$$\{w | 1_A(w) \le x\} = \begin{cases} \Omega, & x \ge 1 \\ A^C, & 0 < x < 1 \\ \varnothing, & x \le 0 \end{cases}$$

所以对任意$x, \{w|1_A(w) \le x\} \in \mathcal{F}$，从而$1_A$是可测函数

习题2

若X, Y是实随机变量，则$X+Y$是实随机变量

证明：设全体有理点为$\{r_n\}$，可测空间为$(\Omega, \mathcal{F})$，注意到

$$X+Y<z \Leftrightarrow X<z-Y$$

因为$X<z-Y$，所以存在r_i，使得$X<r_i<z-Y$，因此

$$\begin{aligned}\{X+Y<z\} &= \{X<z-Y\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i<z-Y\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i\}\bigcap\{r_i<z-Y\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i\}\bigcap\{Y<z-r_i\}\end{aligned}$$

因为

$$\{X<r_i\} \in \mathcal{F}, \{Y<z-r_i\} \in \mathcal{F}$$

所以

$$\{X<r_i\}\bigcap\{Y<z-r_i\} \in \mathcal{F}$$
$$\{X+Y<z\} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X<r_i\}\bigcap\{Y<z-r_i\} \in \mathcal{F}$$

习题3

设$(\Omega, \mathcal{F})$是可测空间，μ是$\mathcal{F}$上可加测度，且具有次σ可加性，试证μ是测度

（课本P68/3.2/1)

证明：$\forall A_i \in \mathcal{F}$且$A_i$互不相交，由$\sigma$代数的定义可知

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

由μ是$\mathcal{F}$上可加测度可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

由单调性可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \le \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

此式对任意n都成立，所以令$n\to\infty$可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\leq\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)$$

由次可加性可得

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

因此

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

即μ是测度。

习题4

（课本P68/3.2/10）

(1)证明：$\forall 0<a<1,A\in\mathcal{F}$，定义

$$\mathbb{P}(A)=a\mathbb{P}_1(A)+(1-a)\mathbb{P}_2(A)$$

当$\mathbb{P}(A)=0$时，

$$a\mathbb{P}_1(A)+(1-a)\mathbb{P}_2(A)=0$$

因为$0<a<1$，所以

$$a\mathbb{P}_1(A)\geq 0,(1-a)\mathbb{P}_2(A)\geq 0$$

从而

$$\begin{gathered}a\mathbb{P}_1(A)=(1-a)\mathbb{P}_2(A)=0\\ \mathbb{P}_1(A)=\mathbb{P}_2(A)=0\end{gathered}$$

下面验证$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

1.$\forall A_n\in\mathcal{F}$且$A_n$互不相交，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)&=a\mathbb{P}_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)+(1-a)\mathbb{P}_2(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\\&=a\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_1(A_n)+(1-a)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_2(A_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(aP_1(A_n)+(1-a)\mathbb{P}_2(A_n)\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

2.

$$\mathbb{P}(\Omega)=a\mathbb{P}_1(\Omega)+(1-a)\mathbb{P}_2(\Omega)=a+1-a=1$$

所以$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

结合之前结论可得

$$\mathbb{P}_1\ll\mathbb{P},\mathbb{P}_2\ll\mathbb{P}$$

(2).同第一小问的思路，取正项无穷级数$\{a_n\}$，满足$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$（例如可取$a_n=\frac{1}{2^n}$），任取$A\in\mathcal{F}$，定义

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathbb{P}_n(A)$$

当$\mathbb{P}(A)=0$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathbb{P}_n(A)=0$$

因为$a_n>0,a_n\mathbb{P}_n(A)\geq 0$，所以

$$\begin{gathered}a_n\mathbb{P}_n(A)=0,\mathbb{P}_n(A)=0\\ n=1,2,\ldots\end{gathered}$$

下面验证$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

1.$\forall A_n\in\mathcal{F}$且$A_n$互不相交，则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)&=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathbb{P}_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_i(A_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathbb{P}_i(A_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

备注：第三个等号涉及到了极限交换次序的问题，严格来说应该补充

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathbb{P}_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

从而$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathbb{P}_i(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$一致收敛，可以换序。

2.

$$\mathbb{P}(\Omega)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathbb{P}_i(\Omega)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i=1$$

所以$\mathbb{P}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度。

结合之前结论可得

$$\mathbb{P}_n\ll\mathbb{P},n=1,2,\ldots$$

习题5

（课本P68/3.2/18）

证明：令

$$A=\{B|B\in\mathcal{F},\mu(B)=\nu(B)\}$$

显然$\mathcal{C}\subset A$，而$\mathcal{C}$为π系，所以只要说明A为λ系即可。

(1)$\Omega\in\mathcal{C}\subset A$

(2)$\forall C,D\in A,C\subset D$，因为$\mu,\nu$为有限测度，所以$\mu(D)-\mu(C),\nu(D)-\nu(C)$有意义，那么

$$\mu(D-C)=\mu(D)-\mu(C)=\nu(D)-\nu(C)=\nu(D-C)$$

(3)任取$C_n\in A,C_n\uparrow$

令$D_n=C_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}C_i=C_n-C_{n-1}$，那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\text{且}D_i\bigcap D_j=\varnothing(i\neq j)$$

由测度的性质可知

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)$$
$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)=\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(D_n)$$

由(2)可知$D_n\in A$，所以

$$\mu(D_n)=\nu(D_n)$$

累加可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(D_n)$$

从而

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(D_n)=\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n)$$

从而A为λ系，结论成立。