## 定理 6.4.2

设 $\{F_n, n \geq 1\}$是 $\mathbb{R}^d$上一列概率分布函数，则它一定有淡收敛子列

证明：利用对角线方法。

记$Q = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$为全体有理数，因为$\{F_n(r_1)\}$有界，因此有收敛子列$\{F_{1n}(r_1)\}$，记

$$F_{1n}(r_1) \to F(r_1), n \to \infty$$

因为$\{F_{1n}(r_2)\}$也有界，因此有收敛子列$\{F_{2n}(r_2)\}$，记

$$F_{2n}(r_2) \to F(r_2), n \to \infty$$

注意$F_{1n}$在$r_1$收敛，$F_{2n}$在$r_1, r_2$收敛，如此下去，得到阵列

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} & \ldots \\ F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

于是$\{F_{nn}\}$在每个有理点都收敛，记

$$\lim_{n \to \infty} F_{nn}(r) = F(r)$$

再定义

$$F(x) = \inf_{x < r \in \mathbb{Q}} F(r), x \in \mathbb{R}$$

则$F(x)$是一分布函数且$F_n \stackrel{v}{\to} F, n \to \infty$

## 定理 6.4.3

若 $\{F_n\}$的每个淡收敛子列收有相同的极限，则 $\{F_n\}$淡收敛

证明：设$F$是所有淡收敛子列的极限，若$F_n \nrightarrow F$，则$\exists x_0 \in \mathcal{C}(F)$，使得$F_n(x_0) \nrightarrow F(x_0)$，所以有子列$\{F_{n_k}(x_0)\}$使得$|F_{n_k}(x_0) - F(x_0)| \geq \epsilon, \epsilon > 0$，而$\{F_{n_k}\}$有淡收敛子列$\{F_{n_k'}(x_0)\}$，极限为$F$，则$F_{n_k'}(x_0) \to F(x_0)$，这就产生了矛盾。

## 定理 6.4.4

若概率分布函数列 $F_n \stackrel{v}{\to} F$，则 $F$是概率分布函数 $\Leftrightarrow$
$\{F_n\}$ tight，即$\forall \epsilon > 0$，$\exists L > 0$，使得 $\sup_n \{F_n(-L) + 1 - F_n(L)\} < \epsilon$

证明：$\Rightarrow$：注意到

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$$

所以存在$L>0$，使得$F$在$L$与$-L$连续，并且

$$F(-L)+1-F(L)<\frac{\epsilon}{3}$$

因为$F_n \xrightarrow{v} F$，所以当$n$充分大时，

$$|F_n(-L)-F(-L)|<\frac{\epsilon}{3},|F_n(L)-F(L)|<\frac{\epsilon}{3}$$

从而

$$F_n(-L)<\frac{\epsilon}{3}+F(-L),-F_n(L)<\frac{\epsilon}{3}-F(L)$$

因此

$$F_n(-L)+1-F_n(L)<\frac{\epsilon}{3}+F(-L)+1+\frac{\epsilon}{3}-F(L)<\epsilon$$
$$\sup_n\{F_n(-L)+1-F_n(L)\}<\epsilon$$

$\Leftarrow$：注意到

$$\lim_{x\to-\infty}F_n(x)=F_n(-\infty)=0,\lim_{x\to\infty}F_n(x)=F_n(\infty)=1$$

所以同上一部分可得

$$F(-L)+1-F(L)<\epsilon$$

从而

$$F(-L)<\epsilon,1-F(L)<\epsilon$$

所以当$x>L$时，

$$F(-x)<\epsilon,1-F(x)<\epsilon$$

令$x\to\infty,\epsilon\to 0$可得

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=F(-\infty)=0,\lim_{x\to\infty}F(x)=F(\infty)=1$$

## 命题

$$\text{如果}\{F,F_n,n\geq 1\}\text{是概率分布函数，则}F_n \xrightarrow{w} F \Leftrightarrow$$
$$\forall a\leq b\in\mathcal{C}(F),F_n(b)-F_n(a)\to F(b)-F(a)$$

证明：$\Rightarrow$：因为弱收敛，所以$\forall a\leq b\in\mathcal{C}(F)$，

$$F_n(b)\to F(b),F_n(a)\to F(a)$$

从而

$$F_n(b)-F_n(a)\to F(b)-F(a)$$

$\Leftarrow$：$\forall a\leq b\in\mathcal{C}(F)$

$$F_n(b)-F_n(a)\to F(b)-F(a)$$

那么

$$\begin{aligned}|F_n(b)-F(b)| &= |F_n(b)-F_n(a)-F(b)+F(a)+F_n(a)-F(a)| \\ &\le |F_n(b)-F_n(a)-F(b)+F(a)|+|F_n(a)|+|F(a)|\end{aligned}$$

因为$\{F,F_n,n\ge 1\}$是概率分布函数，所以令$a\to -\infty$可得

$$|F_n(a)|\to 0,|F(a)|\to 0$$

令$n\to\infty$，由条件可得

$$|F_n(b)-F(b)|\le |F_n(b)-F_n(a)-F(b)+F(a)|+|F_n(a)|+|F(a)|\to 0$$

所以

$$F_n\overset{w}{\to}F$$

## 定义

设$\{\mu,\mu_n,n\ge 1\}$都是$\mathbb{R}$上的概率测度，若在区间$I=[a,b)$上满足$\mu(\{a,b\})=0$时有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n([a,b)=\mu([a,b))$$

则称$\{\mu_n\}$弱收敛于$\mu$，记为

$$\mu_n\overset{w}{\to}\mu$$

直观理解：注意到$\mu(\{a,b\})=0$时有

$$\begin{aligned}\mu(\{a\})=F(a)-F(a^-)=0\\ \mu(\{b\})=F(b)-F(b^-)=0\end{aligned}$$

这说明$F$在$a,b$点左连续，从而$F$在$a,b$点右连续，所以该定义的含义是在$F$的连续点$a,b$满足

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n([a,b)=\mu([a,b))$$

从而结合定理6.4.5以及定义可得如下推论：

## 推论

$$\mu_n\overset{w}{\to}\mu\Leftrightarrow F_n\overset{w}{\to}F\Leftrightarrow X_n\overset{d}{\to}X$$

## 定理 6.4.5

$$\begin{gathered}X_n\overset{d}{\to}X\Leftrightarrow\\ \text{对 }\mathbb{R}\text{上任意有界连续函数 }f,\mathbb{E}f(X_n)\to\mathbb{E}f(X)\Leftrightarrow\\ \text{对 }\mathbb{R}\text{上任意有界一致连续函数 }f,\mathbb{E}f(X_n)\to\mathbb{E}f(X)\end{gathered}$$

老师对这个定理没有给出严格证明，只给出直观解释。

因为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}f(X_n) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \\
\mathbb{E}f(X) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)
\end{aligned}
$$

所以第二行等价于

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$$

由推论可知第一行等价于

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$$

证明的思路是

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\mu_n(dx) \\
&\approx \sum_{k=1}^{\infty} f(\epsilon_k)\mu_n((a_{k-1},a_k]) \\
&\approx \sum_{k=1}^{\infty} f(\epsilon_k)\mu((a_{k-1},a_k]) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\mu_n(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)
\end{aligned}
$$

# Chapter 7 大数定理

## 1.几个经典结论

### 定理 7.1.1

$$\text{设 } \{X_n, n\geq 1\}\text{（两两不相关），} S_0=0, S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k\text{，若 } \mathrm{Var}(S_n)=o(n^2)$$

$$\text{则 } \frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow[P]{L^2} 0(n\to\infty)$$

证明：

$$\mathbb{E}|\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{n}|^2 = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} \to 0(n\to\infty)$$

从而

$$\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow[P]{L^2} 0(n\to\infty)$$

### 推论

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关，方差有界，则上述结论成立

## 例1

$$\{X_n\}\ iid, X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}，则 \frac{S_n}{n} \xrightarrow[P]{L^2} p(n \to \infty)$$

## 定理 7.1.2

$$在上述推论的条件下，\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{a.s} 0(n \to \infty)$$

证明：不妨假定$\mathbb{E}S_n = 0$，方差上界为$M$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_{n^2}}{n^2}| \geq \epsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 M}{\epsilon^2 n^4} = \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

从而

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow{a.s} 0$$

现在任取$n \geq 1$，存在$k_n$，使得$k_n^2 \leq n < (k_n+1)^2$，因此

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n} &= \frac{S_{k_n^2} + S_n - S_{k_n^2}}{n} \\
&= \frac{S_{k_n^2}}{k_n^2} \frac{k_n^2}{n} + \frac{S_n - S_{k_n^2}}{n} \\
&= \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)}
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{S_{k_n^2}}{k_n^2} \xrightarrow{a.s} 0, \frac{k_n^2}{n} \leq 1$$

所以

$$\Delta_1^{(n)} \xrightarrow{a.s} 0$$

而$\forall \epsilon > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\Delta_2^{(n)}| \geq \epsilon) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E}(\Delta_2^{(n)})^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(S_n - S_{k_n^2})^2}{\epsilon^2 n^2} \\
&\leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n + 1}{n^2} \\
&\leq \frac{M}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

倒数第三个不等号是因为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n - S_{k_n^2})^2 &= \mathbb{E}(X_{k_n^2+1} + \dots X_n)^2 \\
&= \sum_{i=k_n^2+1}^{n} \mathbb{E}X_i^2 \\
&\le \sum_{i=k_n^2+1}^{(k_n+1)^2} \mathbb{E}X_i^2 \\
&\le M(2k_n+1)
\end{aligned}
$$

倒数第二个不等号是因为

$$k_n \le \sqrt{n}, 1 \le \sqrt{n}$$

从而

$$
\begin{gathered}
\Delta_2^{(n)} \xrightarrow{a.s} 0 \\
\frac{S_n}{n} = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} \xrightarrow{a.s} 0
\end{gathered}
$$

从定理 7.1.1的推导的过程中，不难看出如果$\mathrm{Var}(S_n) = o(a_n^2)$，则

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{a_n} \xrightarrow[P]{L^2} 0(n \to \infty)$$

所以有如下推广的大数定律:

## 定义

$$
\begin{gathered}
\text{设 } \{X_n\} \text{是一列单调} r.v, b_n \uparrow +\infty\text{，} \{a_n\} \text{是一列实数，} S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \\
\text{若 } \frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0(n \to \infty)\text{，则称 } \{X_n\} \text{满足大数定律}
\end{gathered}
$$

## 例2

从$\{1, \dots, n\}$中放回抽样，$X_m$为第$m$次取的数，那么$X_1, \dots, X_m \ \ i.i.d$，记$\tau_k = \inf\{m||x_1, \dots, x_m| = k\}$，我们的目标是计算$\mathrm{Var}(\tau_n)$。

记$\tau_0 = 0$，那么

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$$

不难看出$\tau_k - \tau_{k-1}$独立，其含义为在已经抽取了$k-1$个不同的数的条件下，抽到第$k$个不同的数的次数，所以$\tau_k - \tau_{k-1}$服从参数为$p = \frac{n-(k-1)}{n}$的几何分布，所以

$$\mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \frac{q}{p^2} = \frac{1 - \frac{n-(k-1)}{n}}{(\frac{n-(k-1)}{n})^2} = \frac{n^2}{(n+1-k)^2} - \frac{n}{n+1-k}$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tau_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+1-k)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+1-k} \\
&= n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

备注：这部分和老师的结果有所不同，但是暂时没找出问题。

# 习题

## 习题1

（课本P223/8.5/4）

将题目中的相对紧修改为tight

证明：$\Rightarrow$：因为$\{F_\alpha\}$ tight，所以

$$
\begin{gathered}
\forall \epsilon > 0, \exists L > 0, s.t \\
\sup_{\alpha}\{F_\alpha(-L) + 1 - F_\alpha(L)\} < \epsilon
\end{gathered}
$$

所以当$x \geq L$时，$\forall \epsilon$

$$
\begin{gathered}
F_\alpha(-x) \leq F_\alpha(-L) < \epsilon, \\
1 - F_\alpha(x) \leq 1 - F_\alpha(L) < \epsilon
\end{gathered}
$$

从而$F_\alpha$对$\alpha$一致收敛

$\Leftarrow$：因为$F_\alpha$对$\alpha$一致收敛，所以

$$
\begin{gathered}
\forall \epsilon > 0, \exists L > 0, s.t\text{当}\, x \geq L\text{时，}\forall \alpha, \text{有} \\
F_\alpha(-x) < \frac{\epsilon}{2}, \\
1 - F_\alpha(x) < \frac{\epsilon}{2}
\end{gathered}
$$

因此

$$
\sup_{\alpha}\{F_\alpha(-L) + 1 - F_\alpha(L)\} < \epsilon
$$

所以$\{F_\alpha\}$ tight

## 习题2

（课本P223/8.5/5）

将题目中的相对紧修改为tight

证明：不妨设上界为$M$，则

$$\forall\alpha, \mathbb{E}[|X_\alpha|^r] \le M$$

现在$\forall\epsilon > 0$，取$L = (\frac{M}{\epsilon})^{\frac{1}{r}}$，那么

$$\mathbb{E}[|X_\alpha|^r 1_{\{|X_\alpha|^r \ge L^r\}}] \le \mathbb{E}[|X_\alpha|^r] \le M$$

注意到

$$L^r \mathbb{P}(|X_\alpha| \ge L) = L^r \mathbb{P}(|X_\alpha|^r \ge L^r) \le \mathbb{E}[|X_\alpha|^r 1_{\{|X_\alpha|^r \ge L^r\}}]$$

所以

$$L^r \mathbb{P}(|X_\alpha| \ge L) \le M$$
$$F(-L) + 1 - F(L) = \mathbb{P}(|X_\alpha| \ge L) \le \frac{M}{L^r} = \epsilon(\forall\alpha)$$

因此$\{F_\alpha\}$ tight

## 习题3

（课本P243/9.1/3）

证明：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[1_{\{X_{n2} \le f(X_{n1})\}}] &= \mathbb{P}(X_{n2} \le f(X_{n1})) \\ &= \int_0^1 \int_0^{f(r)} dsdr \\ &= \int_0^1 f(r)dr\end{aligned}$$

注意到

$$\mathbb{E}[1^2_{\{X_{n2} \le f(X_{n1})\}}] = \mathbb{E}[1_{\{X_{n2} \le f(X_{n1})\}}] = \int_0^1 f(r)dr$$

所以

$$\mathrm{Var}(1_{\{X_{n2} \le f(X_{n1})\}}) = (\int_0^1 f(r)dr)(1 - \int_0^1 f(r)dr) \le \frac{1}{4}$$

又因为$X_1, ..., X_n$独立同分布，所以满足强大数定律，从而

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 1_{\{X_{k2} \le f(X_{k1})\}} \underset{\mathbb{P}}{\overset{a.s.}{\to}} \int_0^1 f(r)dr(n \to \infty)$$

## 习题4

$$X_n\ a.s\text{有限，则可以找到}A_n \to +\infty,$$
$$s.t. |\frac{X_n}{A_n}| \overset{a.s.}{\to} 0$$

证明：因为$\{X_n\}$ a.s有限，所以$\exists M_n > 0$，使得

$$\mathbb{P}(|X_n| > M_n) < \frac{1}{2^n}$$

取$A_n = (\max\{n, M_n\})^2$，则

$$\frac{|X_n|}{A_n} = \frac{|X_n|1_{\{|X_n| \le M_n\}}}{A_n} + \frac{|X_n|1_{\{X_n > M_n\}}}{A_n} = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)}$$

注意到

$$\begin{aligned} A_n \ge n^2 \to \infty \\ A_n^2 \ge n^2 M_n^2 \end{aligned}$$

现在$\forall \epsilon > 0$，利用Markov不等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\Delta_1^{(n)} \ge \epsilon) &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^2 1_{\{X_n \le M_n\}}]}{\epsilon^2 A_n^2} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^2}{\epsilon^2 A_n^2} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^2}{\epsilon^2 n^2 M_n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

所以$\Delta_1^{(n)} \overset{a.s}{\to} 0$。接着考虑第二项

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\Delta_2^{(n)} \ge \epsilon) &\le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > M_n) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

所以$\Delta_2^{(n)} \overset{a.s}{\to} 0$。从而

$$\left|\frac{X_n}{A_n}\right| \overset{a.s.}{\to} 0$$