# 3.矩收敛与$L^r$收敛

## 1.$L^r$收敛

### $L^r$收敛的定义

定义：

$$\text{设}(\Omega,\mathcal{F},P)\text{是一概率空间，定义}L^r=L^r(\Omega,\mathcal{F},P)=\{r.v\ \ X:\mathbb{E}|X|^r<\infty\}\text{。}$$
$$\text{若}\{X;X_n,n\geq 1\}\subset L^r\text{且}\mathbb{E}|x_n-x|^r\to 0\text{，则称}X_n\ r\text{阶矩收敛于}X\text{，记为：}$$
$$X_n\xrightarrow{r}X\quad(n\to\infty)$$

## 推论(1)

$$X_n\xrightarrow{r}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X\quad(n\to\infty)$$

证：$\forall\epsilon>0$

$$\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\epsilon)\leq\epsilon^{-r}\mathbb{E}|X_n-X|^r\to 0$$

## 推论(2)

$$X_n\xrightarrow{r}X\Rightarrow\mathbb{E}|X_n|^r\to\mathbb{E}|X|^r$$

证明之前先介绍Cr不等式以及Minkowski不等式。

**引理 1： Cr不等式**

$X_1,...,X_n$是随机变量，$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，那么

$$\mathbb{E}|S_n|^r\leq c_r\sum_{i=1}^n\mathbb{E}|X_i|^r$$
$$c_r=\begin{cases}1, & 0<r\leq 1\\ n^{r-1}, & r>1\end{cases}$$

证明：令$\xi$是一个随机变量，以相同概率取值于$a_1,...,a_n$，那么

$$\mathbb{E}|\xi|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|a_i|,\mathbb{E}|\xi|^r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|a_i|^r$$

下面证明

$$\Big(\sum_{i=1}^n|a_i|\Big)^r\leq c_r\sum_{i=1}^n|a_i|^r$$
$$c_r=\begin{cases}1, & 0<r\leq 1\\ n^{r-1}, & r>1\end{cases}$$

如果$r>1$，取$f(x)=x^r$，利用Jenson不等式可得

$$f(\mathbb{E}|\xi|) \le \mathbb{E}f(|\xi|) = \mathbb{E}|\xi|^r$$
$$\frac{1}{n^r}\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|\Big)^r \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |a_i|^r$$
$$\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|\Big)^r \le n^{r-1}\sum_{i=1}^n |a_i|^r = c_r\sum_{i=1}^n |a_i|^r$$

如果$0 < r \le 1$，注意到$a_i$全为0时结论显然，否则利用$x \le x^r (0 < x \le 1)$可得

$$\frac{|a_k|}{\sum_{i=1}^n |a_i|} \le \frac{|a_k|^r}{(\sum_{i=1}^n |a_i|)^r}(k = 1, \dots, n)$$

关于$k$累加可得

$$1 = \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|}{\sum_{i=1}^n |a_i|} \le \frac{\sum_{k=1}^n |a_k|^r}{(\sum_{i=1}^n |a_i|)^r}$$
$$(\sum_{i=1}^n |a_i|)^r \le \sum_{k=1}^n |a_k|^r = c_r\sum_{k=1}^n |a_k|^r$$

综上

$$\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|\Big)^r \le c_r\sum_{i=1}^n |a_i|^r$$
$$c_r = \begin{cases} 1, & 0 < r \le 1 \\ n^{r-1}, & r > 1 \end{cases}$$

现在取$a_i = X_i$，带入上述不等式可得

$$\Big(\sum_{i=1}^n |X_i|\Big)^r \le c_r\sum_{i=1}^n |X_i|^r$$

两边取期望可得

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n |X_i|\Big)^r \le c_r\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^r$$

注意到

$$\mathbb{E}|S_n|^r = \mathbb{E}\Big(|\sum_{i=1}^n X_i|\Big)^r \le \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n |X_i|\Big)^r \le c_r\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^r$$

从而Cr不等式成立。

**引理 2： Minkowski不等式**

当$r \ge 1$时，在$L^r$中定义$||x||_r = (\mathbb{E}|x|^r)^{\frac{1}{r}}$，那么$||.||_r$是范数，特别地

$$||x + y||_r \le ||x||_r + ||y||_r$$

因此可以在$L^r$中定义距离

$$d(x, y) = ||x - y||_r$$

证：$r = 1$时即为三角不等式，显然成立。否则注意到有如下事实

$$\mathbb{E}|x+y|^r = \mathbb{E}|x+y|^{r-1}|x+y| \le \mathbb{E}|x||x+y|^{r-1} + \mathbb{E}|y||x+y|^{r-1}$$

回顾Holder不等式

$$\mathbb{E}|xy| \le (\mathbb{E}|x|^p)^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}|x|^q)^{\frac{1}{q}}$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p\ge 1, q\ge 1$$

这里取$p=r, q=\frac{r}{r-1}$可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x+y|^r &= \mathbb{E}|x||x+y|^{r-1} + \mathbb{E}|y||x+y|^{r-1}\\ &\le (\mathbb{E}|x|^r)^{\frac{1}{r}}(\mathbb{E}|x+y|^{(r-1)\times\frac{r}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}} + (\mathbb{E}|y|^r)^{\frac{1}{r}}(\mathbb{E}|x+y|^{(r-1)\times\frac{r}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}}\\ &= (\mathbb{E}|x|^r)^{\frac{1}{r}}(\mathbb{E}|x+y|^r)^{\frac{r-1}{r}} + (\mathbb{E}|y|^r)^{\frac{1}{r}}(\mathbb{E}|x+y|^r)^{\frac{r-1}{r}}\\ &= \left((\mathbb{E}|x|^r)^{\frac{1}{r}} + (\mathbb{E}|y|^r)^{\frac{1}{r}}\right)(\mathbb{E}|x+y|^r)^{1-\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

如果$\mathbb{E}|x+y|^r<\infty$，那么两边同除$(\mathbb{E}|x+y|^r)^{1-\frac{1}{r}}$即可得到：

$$(\mathbb{E}|x+y|^r)^{\frac{1}{r}} \le (\mathbb{E}|x|^r)^{\frac{1}{r}} + (\mathbb{E}|y|^r)^{\frac{1}{r}}$$
$$||x+y||_r \le ||x||_r + ||y||_r$$

如果$\mathbb{E}|x+y|^r=\infty$，那么$(\mathbb{E}|x|^r)^{\frac{1}{r}}$和$(\mathbb{E}|y|^r)^{\frac{1}{r}}$至少有一个为正无穷，否则由Cr不等式可得

$$\mathbb{E}|x+y|^r \le 2^{r-1}(\mathbb{E}|x|^r + \mathbb{E}|y|^r) < \infty$$

从而产生矛盾。因此$\mathbb{E}|x+y|^r=\infty$时不等号两边都为$\infty$，结论也成立。

接下来证明推论2，首先考虑$r\le 1$的情形，应用Cr不等式$n=2$的情形：

$$\mathbb{E}|X_n|^r = \mathbb{E}|X_n-X+X|^r \overset{Cr\text{不等式}}{\le} \mathbb{E}|X_n-X|^r + \mathbb{E}|X|^r \Rightarrow \mathbb{E}|X_n|^r - \mathbb{E}|X|^r \le \mathbb{E}|X_n-X|^r$$
$$\mathbb{E}|X|^r = \mathbb{E}|X-X_n+X_n|^r \overset{Cr\text{不等式}}{\le} \mathbb{E}|X-X_n|^r + \mathbb{E}|X_n|^r \Rightarrow \mathbb{E}|X|^r - \mathbb{E}|X_n|^r \le \mathbb{E}|X-X_n|^r$$

所以

$$|\mathbb{E}|X_n|^r - \mathbb{E}|X|^r| \le \mathbb{E}|X-X_n|^r$$

令$n\to\infty$可得

$$0 \le \lim_{n\to\infty}|\mathbb{E}|X_n|^r - \mathbb{E}|X|^r| \le \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X-X_n|^r = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n|^r = \mathbb{E}|X|^r$$

接下来考虑$r>1$的情形，应用Minkowski不等式可得

$$(\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} = (\mathbb{E}|X_n-X+X|^r)^{\frac{1}{r}} \le (\mathbb{E}|X_n-X|^r)^{\frac{1}{r}} + (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}}$$

取上极限可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(\mathbb{E}|X_n-X|^r)^{\frac{1}{r}} + (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} = (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

另一方面

$$(\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} = (\mathbb{E}|X - X_n + X_n|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}|X_n - X|^r)^{\frac{1}{r}} + (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}}$$

取下极限可得

$$(\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} \leq \varliminf_{n\to\infty} \left((\mathbb{E}|X_n - X|^r)^{\frac{1}{r}} + (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}}\right) \leq \varlimsup_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n - X|^r)^{\frac{1}{r}} + \varliminf_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} = \varliminf_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}}$$

注意这里使用了如下事实

$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n$$

结合两个方向的不等式可得

$$\varlimsup_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} \leq \varliminf_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}}$$
$$(\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n|^r)^{\frac{1}{r}}$$

### 推论(3)

考虑空间$L^\infty$（即$r = \infty$时的$L^r$）

$$L^\infty = \{r.v.\ X, \exists M > 0, s.t\ |X| \leq M(a.s)\}$$

在其上定义

$$||X||_\infty = \inf\{M : |X| \leq M(a.s)\}$$

$||X||_\infty$称为$X$的本性上确界，也满足

$$||X + Y||_\infty \leq ||X||_\infty + ||Y||_\infty$$

如果$0 < r < r' < \infty$，那么

$$(\mathbb{E}|X|^{r'})^{\frac{1}{r'}} \geq (\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}}$$

证明见习题。

进一步$r > 0$时，

$$||X||_\infty \geq ||X||_r$$

证明：由定义可知$|X| \leq ||X||_\infty$，所以

$$(\mathbb{E}|X|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}(||X||_\infty^r)^{\frac{1}{r}} = (||X||_\infty^r)^{\frac{1}{r}} = ||X||_\infty$$

## 2.$L^r$收敛与矩收敛

### 定理

$$\text{设 } X_n \xrightarrow{P} X\text{，则以下结论等价：}$$
$$(1)\mathbb{E}|X_n - X|^r \to 0(n \to \infty)$$
$$(2)\mathbb{E}|X_n|^r \to \mathbb{E}|X|^r(n \to \infty)$$

证明之前给出如下引理：

**引理 3**

$$|X_n| \le U_n\text{，}U_n\text{可积，}U_n \overset{a.s}{\to} U\text{，}\mathbb{E}U_n \to \mathbb{E}U\text{，那么}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} X_n$$

证明见习题。

接下来利用引理3证明定理。

证明：$(1) \Rightarrow (2)$已证

$(2) \Rightarrow (1)$需证$\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r = 0$，因为$X_n \overset{P}{\to} X$，所以可取子列$\{n_k\}$使得

$$X_{n_k} \overset{a.s}{\to} X\text{且}$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}|X_n - X|^r = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}|X_{n_k} - X|^r$$

注意这显然是可以做到的，因为由上极限的定义可知存在$\{n'_k\}$使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}|X_n - X|^r = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}|X_{n'_k} - X|^r$$

又由于$X_n \overset{P}{\to} X$，所以$X_{n'_k} \overset{P}{\to} X$，我们在$\{X_{n'_k}\}$取子列$\{n_k\}$使得$X_{n_k} \overset{a.s}{\to} X$即可。

由Cr不等式可知

$$|X_{n_k} - X|^r \le C_r(|X_{n_k}|^r + |X|^r) \triangleq U_{n_k}$$

因为$X, X_{n_k} \in L^r$，所以$U_{n_k}$可积。又由$X_{n_k} \overset{a.s}{\to} X$可知，$U_{n_k} \overset{a.s}{\to} 2C_r|X|^r \triangleq U$，$\mathbb{E}U_{n_k} \to 2C_r\mathbb{E}|X|^r = \mathbb{E}U$

从而由引理3可知

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}|X_n - X|^r &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}|X_{n_k} - X|^r \\ &= \mathbb{E}\lim_{k\to\infty} |X_{n_k} - X|^r \\ &= 0\end{aligned}$$

最后给出如下定理：

## 定理 7.3.2 (推广的勒贝格控制收敛定理)

$$X_n \overset{P}{\to} X\text{，若存在可积随机变量}Y\text{，使得}|X_n| \le Y(\forall n)\text{，则}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r = 0$$

证：取子列$\{n_k\}$满足

$$X_{n_k} \overset{a.s}{\to} X$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{E}|X_n - X|^r = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}|X_{n_k} - X|^r$$

因为$|X_{n_k} - X| \le 2|Y|$，由控制收敛定理可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbb{E}|X_n-X|^r=\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}|X_{n_k}-X|^r=\mathbb{E}\lim_{k\to\infty}|X_{n_k}-X|^r=0$$

# 4.依分布收敛与概率测度的弱收敛

## 1.依分布收敛

### 依分布收敛的定义

$$\text{设}\{X;X_n,n\ge1\}\text{一列实值}r.v\text{，分布函数分别为}\{F;F_n,n\ge1\}\text{，记}\mathcal{C}(F)\text{为}F\text{的连续点全体。}$$
$$\text{若}\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)\text{，}\forall x\in\mathcal{C}(F)\text{，则称}\{X_n\}\text{依分布收敛于}X\text{，记为}$$
$$X_n\xrightarrow{d}X\quad(n\to\infty)$$

### 推论

$$X_n\xrightarrow{d}X\text{，}X_n\xrightarrow{d}Y\Rightarrow X\xrightarrow{d}Y$$

证明：只需证$F_X\equiv F_Y$，注意到

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F_X(x)=F_Y(x)$$
$$\forall x\in\mathcal{C}(F_X)\bigcap\mathcal{C}(F_Y)$$

又由于$F_X,F_Y$单调，所以他们的间断点可数，因此$\mathcal{C}(F_X)\bigcap\mathcal{C}(F_Y)$在$\mathbb{R}^d$中稠，从而$\forall x_0\in\mathbb{R}^d$，可取$x_n\in\mathcal{C}(F_X)\bigcap\mathcal{C}(F_Y)$，使得$F_X(x_n)\to F_X(x_0)$，$F_Y(x_n)\to F_X(x_0)$，所以

$$F_X(x_0)=F_Y(x_0)$$

现在给出如下问题，如果$X_n\xrightarrow{d}X$，$Y_n\xrightarrow{d}Y$，那么能否推出$X_n\pm Y_n\xrightarrow{d}X\pm Y$?

回答是否定的，考虑如下例子

$$X_n\sim\mathcal{N}(0,1+\frac{1}{n}),X\sim\mathcal{N}(0,1)$$
$$Y_n=-X_n\sim\mathcal{N}(0,1+\frac{1}{n}),Y\sim\mathcal{N}(0,1)$$

那么$X_n+Y_n=0$，但是$X+Y\sim\mathcal{N}(0,2)$

### 定理 6.4.1

$$\text{若}\{X;X_n,n\ge1\}\text{都是定义在}(\Omega,\mathcal{F},P)\text{上的实值}r.v\text{，那么}X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X\text{。}$$
$$\text{如果}X=C\text{为常数，则}X_n\xrightarrow{d}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X,$$
$$\text{此时}X_n\xrightarrow{d}X\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{P}X$$

证：$\forall\epsilon>0,\forall x$

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= \mathbb{P}(X_n \le x) \\
&= \mathbb{P}(X_n \le x, X \le x+\epsilon) + \mathbb{P}(X_n \le x, X > x+\epsilon) \\
&\le \mathbb{P}(X \le x+\epsilon) + \mathbb{P}(X - X_n \ge \epsilon)
\end{aligned}
$$

令$n \to \infty$可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le F(x+\epsilon)$$

再令$\epsilon \to 0$可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \le F(x)$$

同理可证$\underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \ge F(x)$，这部分参考习题。

### 淡收敛与弱收敛的定义

$$
\begin{gathered}
\text{设}\{F_n, n\ge 1\}\text{是一列概率分布函数，}F\text{是一分布函数，若} \\
\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}(F) \\
\text{则称}\{F_n\}\text{淡收敛于}F\text{，记为} \\
F_n \xrightarrow{v} F \\
\text{若进一步有}F_n(\infty) - F_n(-\infty) \to F(\infty) - F(-\infty)\text{，则称}\{F_n\}\text{弱收敛于}F\text{，记为} \\
F_n \xrightarrow{w} F
\end{gathered}
$$

### 定理 6.4.2

$$\text{设}\{F_n, n\ge 1\}\text{是}\mathbb{R}^d\text{上一列概率分布函数，则它一定有淡收敛子列。}$$

# 习题

## 习题1

$$\text{如果}0 < r \le r' < \infty\text{，那么}(\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}} \le (\mathbb{E}[|X|^{r'}])^{\frac{1}{r'}}$$

证明：令$Y = X^r$，则原不等式等价于

$$
\begin{gathered}
\Leftrightarrow (\mathbb{E}[|Y|])^{\frac{1}{r}} \le (\mathbb{E}[|Y|^{\frac{r'}{r}}])^{\frac{1}{r'}} \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}[|Y|] \le (\mathbb{E}[|Y|^{\frac{r'}{r}}])^{\frac{r}{r'}}
\end{gathered}
$$

因为$\frac{r'}{r} > 1$，所以取$p = \frac{r'}{r}, q$，使得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

从而原不等式等价于

$$\mathbb{E}[|Y|] \le (\mathbb{E}[|Y|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|1|^q])^{\frac{1}{q}}$$

此即为Holder不等式，所以原不等式成立。

## 习题2

$$|X_n| \le U_n\text{，}U_n\text{可积，}U_n \overset{a.s}{\to} U\text{，}\mathbb{E}[U_n] \to \mathbb{E}[U]\text{，那么}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

证明：因为$U_n \overset{a.s}{\to} U$，所以$\exists N_0$，使得$n > N_0$时，

$$|U_n - U| \le 1(a.s)$$
$$|U_n| \le |U| + |U_n - U| \le |U| + 1(a.s)$$
$$|U| \le |U_n| + |U_n - U| \le |U_n| + 1$$

取

$$V = \max\{|U_1|, \dots, |U_{N_0}|, |U| + 1\}$$

那么

$$|X_n| \le U_n \le |U_n| \le V$$

注意到$U_n$可积，从而$\mathbb{E}[U_n]$有限，而$|U| \le |U_n| + 1$，$\mathbb{E}[U_n] \to \mathbb{E}[U]$，所以

$$\mathbb{E}[U]\text{有限，}U\text{可积}$$

因为$U_1, \dots U_{N_0}, U$可积，所以$V$可积，从而$X_n$被可积函数控制，由控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n]$$

## 习题3

$$\text{若}\{X; X_n, n \ge 1\}\text{都是定义在}(\Omega, \mathcal{F}, P)\text{上的实值}r.v\text{，那么}X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{d}{\to} X$$
$$\text{证明 } \varliminf_{n\to\infty} F_n(x) \ge F(x)$$

证明：$\forall x \in \mathcal{C}(F)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \le x - \epsilon) &= \mathbb{P}(X \le x - \epsilon, X_n \le x) + \mathbb{P}(X \le x - \epsilon, X_n > x) \\ &\le \mathbb{P}(X_n \le x) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \epsilon)\end{aligned}$$

令$n \to \infty$可得

$$F(x - \epsilon) \le \varliminf_{n\to\infty} F_n(x)$$

因为$x$为连续点，所以令$\epsilon \to 0$可得

$$F(x) \le \varliminf_{n\to\infty} F_n(x)$$

## 习题4

$$\text{如果}X = C\text{为常数，则}X_n \stackrel{d}{\rightarrow} X \Leftrightarrow X_n \stackrel{P}{\rightarrow} X$$

证明：只需证$\Rightarrow$，注意到

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq C \\ 0, & x < C \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) &= \mathbb{P}(|X_n - C| > \epsilon) \\ &= \mathbb{P}(X_n > C + \epsilon) + \mathbb{P}(X_n < C - \epsilon) \\ &\leq 1 - \mathbb{P}(X_n \leq C + \epsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq C - \epsilon) \\ &= 1 - F_n(C + \epsilon) + F_n(C - \epsilon) \end{aligned}$$

令$n \rightarrow \infty$可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 1 - F(C + \epsilon) + F(C - \epsilon) = 0$$

所以

$$X_n \stackrel{P}{\rightarrow} X$$

# 习题5

（课本P223/8.3/4）

证明：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X|^r] &= \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n|^r] \\ &\leq \mathbb{E}[\sup_n |X_n|^r] \\ &< \infty \end{aligned}$$

所以$X \in L^r(\mathbb{P})$。因为

$$X_n \stackrel{a.e}{\rightarrow} X$$

所以$\forall \epsilon > 0, \exists N$，使得$n > N$时，

$$\begin{aligned} |X_n - X| < \epsilon^{\frac{1}{r}} (a.e) \\ \mathbb{E}[|X_n - X|^r] &= \mathbb{E}[|X_n - X|^r \Big| |X_n - X| < \epsilon^{\frac{1}{r}}] + \mathbb{E}[|X_n - X|^r \Big| |X_n - X| > \epsilon^{\frac{1}{r}}] \\ &= \mathbb{E}[|X_n - X|^r \Big| |X_n - X| < \epsilon^{\frac{1}{r}}] \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

由$\epsilon$的任意性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0$$

$$X_n \stackrel{r}{\rightarrow} X$$