Chapter 4乘积测度与独立性

1.有限维情形

1.乘积测度

$$\text{设}(E_1,\Sigma_1,\mu_1)\text{和}(E_2,\Sigma_2,\mu_2)\text{是两个概率空间,}$$
$$\text{在}E_1\times E_2=\{w=(w_1,w_2),w_1\in E_1,w_2\in E_2\}\text{上定义}\sigma\text{代数}$$
$$\Sigma_1\times\Sigma_2=\sigma\{\Sigma_1\times\Sigma_2:A_1\in\Sigma_1,A_2\in\Sigma_2\}$$
$$\text{称为}E_1,E_2\text{的乘积}\sigma\text{代数，称为}(E_1\times E_2,\Sigma_1\times\Sigma_2)\text{为乘积可测空间}$$

定理4.1.1

$$\text{在}\Sigma_1\times\Sigma_2\text{上存在唯一概率测度}\mu\text{满足}$$
$$\mu(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\times\mu_1(A_2),A_1\in\Sigma_1,A_2\in\Sigma_2$$

证明该定理之前，需要利用截口的概念。

截口定义

$$\text{设}A\subset E_1\times E_2,\text{对任意}x_1\in E_1,\text{定义}$$
$$A(x_1)=\{x_2\in E_2:(x_1,x_2)\in A\}$$
$$\text{称之为}A\text{在}x_1\text{处的截口，类似可以定义}A(x_2)$$

现在利用上述定义证明定理4.1.1

证明：$\forall A\in\Sigma_1\times\Sigma_2$，定义

$$\mu(A)\triangleq\int_{E_1}\mu_2(A(x_1))\mu_1(dx_1)=\int_{E_2}\mu_1(A(x_2))\mu_2(dx_2)$$

要验证μ是概率测度，就要验证非负性，规范性和可列可加性。非负性显然，接着验证规范性，当$A=E_1\times E_2$时，

$$\mu_2(A(x_1))=\mu_2(E_2)=1$$

所以

$$\mu(E_1\times E_2)=\int_{E_1}\mu_1(dx_1)=1$$

规范性也成立。最后验证可列可加性，任取$A_n\in\Sigma_1\times\Sigma_2$且互不相交，则

$$
\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \int_{E_1} \mu_2((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)(x_1))\mu_1(dx_1) \\
&= \int_{E_1} \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n(x_1)))\mu_1(dx_1) \\
&= \int_{E_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n(x_1))\mu_1(dx_1) \\
&\overset{\text{单调收敛定理}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_1} \mu_2(A_n(x_1))\mu_1(dx_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}
$$

（备注，严谨来说，这里要证明$\mu_2(A(x_1))$可测，可以参考课本135页定理6.1.9）

可以把上述结论推广至n维情形

$$
\begin{gathered}
\text{设}(E_k,\Sigma_k,\mu_k)\text{是}n\text{个概率空间，}1\le k\le n, \\
\text{乘积空间为}(E_1\times\ldots\times E_n,\Sigma_1\times\ldots\times\Sigma_n,\mu_1\times\ldots\times\mu_n), \\
(\mu_1\times\ldots\times\mu_n)(A)=\int_{E_1}\mu_1(dx_1)\ldots\int_{E_{n-1}}\mu_{n-1}(A(x_1,\ldots,x_{n-1}))\mu_n(dx_n)
\end{gathered}
$$

定理4.1.2

$$
\begin{gathered}
\text{设}X_1\text{与}X_2\text{是定义在}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{，取值于}(E_1,\Sigma_1),(E_2,\Sigma_2)\text{的随机变量（随机元），} \\
\mu,\mu_1,\mu_2\text{分别表示}(X_1,X_2),X_1,X_2\text{的概率分布函数，那么} \\
X_1\text{与}X_2\text{独立}\Leftrightarrow\mu=\mu_1\times\mu_2
\end{gathered}
$$

证明：$\Rightarrow$:

$$
\begin{aligned}
\mu(A_1\times A_2) &= \mathbb{P}((x_1,x_2)\in A_1\times A_2) \\
&= \mathbb{P}(x_1\in A_1,x_2\in A_2) \\
&= \mathbb{P}(x_1\in A_1)\mathbb{P}(x_2\in A_2) \\
&= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \\
&= (\mu_1\times\mu_2)(A_1\times A_2)
\end{aligned}
$$

由概率测度的唯一性可知$\mu=\mu_1\times\mu_2$

$\Leftarrow$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(x_1\in A_1,x_2\in A_2) &= \mathbb{P}((x_1,x_2)\in A_1\times A_2) \\
&= \mu(A_1\times A_2) \\
&= (\mu_1\times\mu_2)(A_1\times A_2) \\
&= \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \\
&= \mathbb{P}(x_1\in A_1)\mathbb{P}(x_2\in A_2)
\end{aligned}
$$

卷积公式

$$
X\sim b(m,p),Y\sim b(n,p),X\perp Y\Rightarrow Z=X+Y\sim b(m+n,p)
$$

证明：

$$\mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)=C_{m+n}^{k}p^{k}(1-p)^{m+n-k}$$

2.由初始分布和转移概率决定的测度

考虑如下问题：取$Z=(X,Y),A=(A_1,A_2)\in\Sigma_1\times\Sigma_2$，那么

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\mathbb{P}((X,Y)\in(A_1,A_2))\\&=\mathbb{P}(X\in A_1,Y\in A_2)\\&=\mathbb{P}(\{w:X(w)\in A_1\}\bigcap\{w:Y(w)\in A_2\})\\&=\mathbb{P}(X^{-1}(A_1)\bigcap Y^{-1}(A_2))\\&=\mathbb{P}(\tilde{A}_1\bigcap\tilde{A}_2)\\&=\mathbb{P}(\tilde{A}_1)\mathbb{P}(\tilde{A}_2|\tilde{A}_1)\\&=\mathbb{P}(X\in A_1)\mathbb{P}(Y\in A_2|X\in A_1)\end{aligned}$$

这就引出了转移概率测度的概念：

转移概率测度的定义

定义：

$$\begin{gathered}\text{设 }(E_1,\Sigma_1),(E_2,\Sigma_2)\text{是两个可测空间，}\mathbb{P}(X_1,A)\text{是定义在}E_1\times\Sigma_2\text{上的函数，若它满足}\\(1)\text{给定}X_1\in E_1,\mathbb{P}(.,A)\text{是}\Sigma_1\text{上概率测度}\\(2)\text{给定}A\in\Sigma_2,\mathbb{P}(X_1,.)\text{是}\Sigma_2\text{上可测函数}\\\text{则}\mathbb{P}\text{为}E_1\times\Sigma_2\text{上的一个转移概率测度}\end{gathered}$$

定理4.1.3

$$\begin{gathered}\text{设 }\mu_1\text{是 }\Sigma_1\text{上概率测度，}\mathbb{P}(.,.)\text{是 }A_1,\Sigma_1\text{上概率转移函数，}\\\text{则存在}E_1\times\Sigma_2\text{上唯一概率测度}\mu\text{，使得}\\\mu(A_1\times A_2)=\int_{A_1}\mathbb{P}(X_1,A_2)\mu_1(dx_1)\\\mu(A)=\int_{E_1}\mathbb{P}(X_1,A(X_1))\mu_1(dx_1)\end{gathered}$$

习题

习题1

（课本P145/6.1/3）

(1)证明：设X_1+X_2的概率分布测度为P，分布函数为F，概率密度为p，现在$\forall B\in\mathcal{B}^n$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= (P_1 \times P_2)(\{(x,y): x+y \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_1(\{x: x \in B-y\}) P_2(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_1(B-y) P_2(dy)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P((-\infty, x]) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_1((-\infty, x]-y) P_2(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_1((-\infty, x-y]) P_2(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F_1(x-y) dF_2(y)
\end{aligned}
$$

(2)证明：因为

$$
F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} p_i(t)dt, p_i(x) = dF_i(x)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} F_1(x-y) dF_2(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{x-y} p_1(t) p_2(y) dtdy
\end{aligned}
$$

令$t = u - y$，那么

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{x-y} p_1(t) p_2(y) dtdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{x} p_1(u-y) p_2(y) dudy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \int_{\mathbb{R}^n} p_1(u-y) p_2(y) dudy
\end{aligned}
$$

所以分布密度为

$$
p_1 * p_2(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_1(x-y) p_2(y) dudy
$$

(3)证明：记$\mathbb{R}^n$中分布测度全体为A，任取P_1, P_2, P_3，对应的随机变量为Z_1, Z_2, Z_3，由(1)可知

$$
P_1 * P_2 \in A, P_2 * P_3 \in A
$$

因为

$$
(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)
$$

所以

$$
(P_1 * P_2) * P_3 = P_1 * (P_2 * P_3)
$$

所以A对卷积运算构成半群。又因为

$$
Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1
$$

从而

$$P_1 * P_2 = P_2 * P_1$$

因此A为交换半群。

习题2

（课本P145/6.1/8）

证明：先证$\forall x \in [0,1]$，$\lambda(x,.)$为测度。

1.因为

$$f(x,y) \geq 0$$

所以

$$\lambda(x,B) = \int_B f(x,y)dy \geq 0$$

非负性得证。

2.

$$\begin{aligned}
\forall B_i \in \mathcal{B}[0,1], B_i \bigcap B_j = \varnothing(i \neq j) \\
\lambda(x, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} f(x,y)dy \\
&= \int_0^1 1_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} f(x,y)dy \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} 1_{B_i} f(x,y)dy
\end{aligned}$$

因为$f(x,y)$非负，所以由单调收敛定理可得

$$\begin{aligned}
\lambda(x, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{\infty} 1_{B_i} f(x,y)dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 1_{B_i} f(x,y)dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} f(x,y)dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(x, B_i)
\end{aligned}$$

可列可加性得证。结合以上两点可知$\forall x \in [0,1]$，$\lambda(x,.)$为测度。

再证$\forall B \in \mathcal{B}[0,1]$，$\lambda(.,B)$为可测函数。先对$f(x,y) = I_A(x,y)$的情形证明结论，构造两个集合：

$$S = \{A \in \mathcal{B}[0,1] \times \mathcal{B}[0,1] : \int_B I_A dy\text{可测}\}$$
$$C = \{A_1 \times A_2 : A_1, A_2 \in \mathcal{B}[0,1]\}$$

接着$\forall A = A_1 \times A_2 \in C$，

$$\lambda(x,B)=\int_B 1_A(x,y)dy=1_{A_1}(x)\mu(A_2B)$$

其中μ表示勒贝格测度，注意到$A_1\in\mathcal{B}[0,1]$，$\mu(A_2B)$为常数，所以此时λ(x,B)可测，因此

$$C\subset S$$

任取$A'=A_1'\times A_2',A''=A_1''\times A_2''\in C$，那么

$$A'\bigcap A''=(A_1'\bigcap A_1'')\times(A_2'\bigcap A_2'')\in C$$

从而C为π系。所以为证S为σ代数，只要证明S为λ系即可。

1.当$A=[0,1]\times[0,1]$时，

$$\int_B 1_A(x,y)dy=\mu(B)$$

因为常数显然可测，所以$[0,1]\times[0,1]\in S$

2.$\forall A_1,A_2\in S,A_1\subset A_2$

$$\int_B 1_{A_2-A_1}(x,y)dy=\int_B 1_{A_2}(x,y)dy-\int_B 1_{A_1}(x,y)dy$$

因为可测函数的差可测，所以

$$A_2-A_1\in S$$

3.$\forall A_n\in S,A_n\uparrow$且$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$

$$\int_B 1_A(x,y)dy=\int_B\lim_{n\to\infty}1_{A_n}(x,y)dy=\lim_{n\to\infty}\int_B 1_{A_n}(x,y)dy$$

因为可测函数的极限可测，所以

$$A\in S$$

因此S为λ系，从而S为σ代数。

由可测函数的线性性和可加性可知，如果f为非负简单函数，即$f=\sum_{i=1}^n a_i1_{A_i}$时，λ$(x,B)$可测。

对于一般的非负有界可测函数，存在非负简单函数$f_n(x,y)\uparrow f(x,y)$，从而

$$\lambda(x,B)=\lim_{n\to\infty}\int_B f_n(x,y)dy=\int_B f(x,y)dy$$

也可测。综上可知，λ(x,B)可测。