1.几乎处处收敛

1.定义与基本性质

定义

$$\begin{gathered}
\text{设}\{X;X_n,n\geq 1\}\text{是一列定义在}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{，取值于}\mathbb{R}^d\text{中的随机变量，}\\
\text{若存在}\mathbb{P}-\text{零集}N\text{，使得}\forall w\in N^C,\\
\lim_{n\to\infty}X_n(w)=X(w)\\
\text{则称}\{X_n\}\text{几乎处处收敛于}X\text{或以概率}1\text{收敛于}X,\\
\text{记为}X_n\overset{a.s}{\to}X(n\to\infty)\text{或}\lim_{n\to\infty}X_n=X(a.s)
\end{gathered}$$

基本性质

$$\begin{aligned}
&(1)X_n\overset{a.s}{\to}X,X_n\overset{a.s}{\to}Y\Rightarrow X=Y(a.s)\\
&(2)X_n\overset{a.s}{\to}X,X_n\overset{a.s}{\to}Y\Rightarrow X_n\pm Y_n\overset{a.s}{\to}X\pm Y\\
&\quad X_nY_n\overset{a.s}{\to}XY,\frac{X_n}{Y_n}\overset{a.s}{\to}\frac{X}{Y}\\
&(3)X_n\overset{a.s}{\to}X,f\text{连续}\Rightarrow f(X_n)\overset{a.s}{\to}f(X)
\end{aligned}$$

2.一个有用的刻划

$$\begin{gathered}
\text{若}X\text{和}X_n\text{都是}a.s\text{有限，则}X_n\overset{a.s}{\to}X\Leftrightarrow\\
1=\mathbb{P}(w:\{X_n\}\text{都有限且}\lim_{n\to\infty}X_n=X)=\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{k}\})\Leftrightarrow\\
\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\frac{1}{k}\})=0\Leftrightarrow\\
\forall k\geq 1,\mathbb{P}(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\frac{1}{k}\})=0\Leftrightarrow\\
\forall\epsilon>0,\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\epsilon\})=0\Leftarrow\\
\forall\epsilon>0,\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})<\infty
\end{gathered}$$

倒数第三行和倒数第二行等价是因为

$$B_N=\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\frac{1}{k}\}\downarrow$$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\frac{1}{k}\})=\mathbb{P}(\lim_{N\to\infty}B_N)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(B_N)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\epsilon\})$$

最后一行可以推出第二行是因为

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\epsilon\})\leq\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})<\infty$$

所以余项$\rightarrow 0$，从而

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\epsilon\})\leq\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})=0$$

把上面一段讨论总结为如下定理及推论：

定理6.1.1

$$\text{若} X,X_n\text{都是} a.s\text{有限，则} X_n\xrightarrow{a.s}X\Leftrightarrow$$
$$\forall\epsilon>0,\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n-X|\geq\epsilon\})=0$$

推论

$$(1)\forall\epsilon>0,\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})<\infty,\text{则} X_n\xrightarrow{a.s}X$$
$$(2)\text{若存在正数列},\epsilon_n\downarrow 0,s.t.\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon_n\})<\infty,\text{则} X_n\xrightarrow{a.s}X$$

证明：(1)已证明

(2)证明：由有条件可知，

$$\exists n_0,n\geq n_0\text{时，}\epsilon_n<\epsilon$$

所以$n\geq n_0$时

$$\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})\leq\mathbb{P}(\{|X_n-X|\geq\epsilon_n\})$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}P(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})&=\sum_{n=1}^{n_9}P(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}P(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})\\&\leq\sum_{n=1}^{n_9}P(\{|X_n-X|\geq\epsilon\})+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}P(\{|X_n-X|\geq\epsilon_n\})\\&<\infty\end{aligned}$$

从而

$$X_n \xrightarrow{a.s} X$$

B-C引理

$$\text{若} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty, \text{则} \, \mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0$$

$$\{A_n \text{ i.o.}\} \triangleq \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

$$w \in \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n (\forall N) \text{表示} w \text{属于无穷多个} A_n$$

证明：

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

Borel 0-1律

$$\text{若} \{A_n\} \text{是一列相互独立的事件，那么}$$
$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = \begin{cases} 0, & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \\ 1, & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \end{cases}$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{A_n \text{ i.o.}\}^C) &= \mathbb{P}(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n^C) \\
&= \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n^C) \\
&= \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(\lim_{k \to \infty} \bigcap_{n=N}^{N+k-1} A_n^C) \\
&= \lim_{N \to \infty} \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=N}^{N+k-1} A_n^C) \\
&= \lim_{N \to \infty} \lim_{k \to \infty} \prod_{n=N}^{N+k-1} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \\
&\leq \lim_{N \to \infty} \lim_{k \to \infty} e^{-\sum_{n=N}^{N+k-1} \mathbb{P}(A_n)} \\
&= \lim_{N \to \infty} e^{-\sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)} \\
&= e^{-\lim_{N \to \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)}
\end{aligned}$$

如果$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$，那么余项$\to 0$，从而

$$e^{-\lim_{N \to \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)} = 1$$

否则对任意N，

$$
-\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\to-\infty
$$

从而

$$
e^{-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)}=0
$$

$$
\mathbb{P}(\{A_n\ \text{i.o.}\}^C)=\lim_{N\to\infty}e^{-\sum_{n=N}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)}=\begin{cases}1 & \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)<\infty\\ 0 & \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\infty\end{cases}
$$

2.依概率收敛

定义

$$
\text{设}\{X;X_n,n\geq 1\}\text{是一列定义在}(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\text{，取值于}\mathbb{R}^d\text{中的随机变量，若}\forall\epsilon>0,
$$
$$
\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\epsilon)=0
$$
$$
\text{则称}\{X_n\}\text{依概率收敛于}X,\text{记为}
$$
$$
X_n\xrightarrow{P}X(n\to\infty)
$$

基本性质

$$
\begin{aligned}
&(1)X_n\xrightarrow{P}X,X_n\xrightarrow{P}Y\Rightarrow X=Y(a.s)\\
&(2)X_n\xrightarrow{P}X,Y_n\xrightarrow{P}Y\Rightarrow X_n\pm Y_n\xrightarrow{P}X\pm Y,X_nY_n\xrightarrow{P}XY,\frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{P}\frac{X}{Y}\\
&(3)X_n\xrightarrow{P}X,f\text{连续，则}f(X_n)\xrightarrow{P}f(X)
\end{aligned}
$$

(1)证明：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-Y|>0)&=\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty}|X-Y|>\frac{1}{k})\\
&=\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(|X-Y|>\frac{1}{k})\\
&\leq\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X-X_n+X_n-Y|>\frac{1}{k})\\
&\leq\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\mathbb{P}(|X-X_n|>\frac{1}{2k})+\mathbb{P}(|X_n-Y|>\frac{1}{2k})]\\
&=0
\end{aligned}
$$

下述命题给出了几乎处处收敛和依概率收敛的关系：

命题

$$
X_n\xrightarrow{a.s}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X
$$

证明：$\forall\epsilon>0$

$$0=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=N}^{\infty}|X_n-X|\geq\epsilon)\geq\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(|X_N-X|\geq\epsilon)$$

该命题的逆命题不成立，但是有如下定理

定理6.2.1

$$X_n\xrightarrow{P}X\Leftrightarrow\text{存在子列}\{n_k\}\text{的子列}\{n_k'\}\text{，使得}X_{n_k'}\xrightarrow{a.s}X$$

证明：$\Rightarrow$：只需证

$$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow\text{存在子列}X_{n_k}\xrightarrow{a.s}X$$

取$n_k\uparrow+\infty$，使得

$$\mathbb{P}(|X_{n_k}-X|>\frac{1}{2^k})<\frac{1}{2^k}$$

那么

$$X_{n_k}\xrightarrow{a.s}X$$

$\Leftarrow$：反证法，如果$X_n\overset{P}{\nrightarrow}X$，那么$\exists\epsilon_0>0$，使得

$$a_n\triangleq\mathbb{P}(|X_n-X|\geq\epsilon)\nrightarrow 0$$

所以存在子列a_{n_k}，使得

$$a_{n_k}\to a_0>0$$

但是由条件可知，$\{X_{n_k}\}$存在子列$\{X_{n_k'}\}$使得

$$X_{n_k'}\xrightarrow{a.s}X$$

从而

$$X_{n_k'}\xrightarrow{P}X$$
$$a_{n_k'}\to 0$$

与

$$a_{n_k}\to a_0>0$$

矛盾。

接下来利用该定理证明基本性质(3)

证明：因为$X_n\xrightarrow{P}X$，所以X_{n_k}有子列X_{n_k}'满足$X_{n_k'}\xrightarrow{a.s}X$，又因为$f$连续，所以

$$f(X_{n_k'})\xrightarrow{a.s}f(X)$$

由定理定理6.2.1可得

$$
f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)
$$

利用性质(3)可以推出性质(2)的全部结论。

习题

习题1

（课本P210/8.1/3）

证明：因为X有限，所以

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X| > n) = 0
$$

所以$\forall \epsilon > 0$，存在N_1，使得

$$
\mathbb{P}(|X| > N_1) < \frac{\epsilon}{4}
$$

因为$X_n \xrightarrow{a.s} X$，所以

$$
\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}|X_n - X| > 1) = \lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(\bigcup_{n=k}^{\infty}|X_n - X| > 1) < \frac{\epsilon}{4}
$$

所以存在$N_2 > 0$，使得

$$
\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2+1}^{\infty}|X_n - X| > 1) < \frac{\epsilon}{4}
$$

从而可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2+1}^{\infty}|X_n| > 1 + N_1) &= \mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2+1}^{\infty}|X_n| > 1 + N_1, |X| \le N_1) + \mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2+1}^{\infty}|X_n| > 1 + N_1, |X| > N_1) \\
&\le \mathbb{P}(\bigcup_{n=N_2+1}^{\infty}|X_n - X| > 1) + \mathbb{P}(|X| > N_1) \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\
&= \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

因为X_n有限，所以$\forall k \le N_2$，存在M_k，使得

$$
\mathbb{P}(|X_k| > M_k) < \frac{\epsilon}{2N_2}
$$

现在取

$$
M(\epsilon) = \max\{N_1 + 1, M_1, \ldots, M_{N_2 - 1}\}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup|X_n|\le M(\epsilon)) &= \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X_n|\le M(\epsilon)\}) \\
&= 1-\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X_n|>M(\epsilon)\}) \\
&= 1-\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{N_2}\{|X_n|>M(\epsilon)\})-\mathbb{P}(\bigcup_{N_2+1}^{\infty}\{|X_n|>M(\epsilon)\}) \\
&\ge 1-\sum_{n=1}^{N_2}\mathbb{P}(\{|X_n|>M(\epsilon)\})-\frac{\epsilon}{2} \\
&\ge 1-N_2\times\frac{\epsilon}{2N_2}-\frac{\epsilon}{2} \\
&= 1-\epsilon
\end{aligned}
$$

习题2

（课本P215/8.2/2）

证明：因为$X_n \stackrel{P}{\to} X$，f为有界一致连续函数，所以

$$f(X_n)\stackrel{P}{\to} f(X), |f(X)|\le M(M>0)$$

找$\{f(X_n)\}$的子列$\{f(X_{n_k})\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int|f(X_{n_k})-f(X)|d\mu=\overline{\lim_{n\to\infty}}\int|f(X_n)-f(X)|d\mu$$

因为

$$f(X_{n_k})\stackrel{P}{\to} f(X)$$

所以

$$f(X_{n_k})-f(X)\stackrel{P}{\to} 0$$

从而存在$\{X_{n_k}\}$的子列$\{X_{n'_k}\}$，使得

$$f(X_{n'_k})-f(X)\stackrel{a.s}{\to} 0$$

注意到

$$|f(X_{n'_k})-f(X)|\le 2M, 2M\text{可积}$$

所以由控制收敛定理可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int|f(X_n)-f(X)|d\mu=\lim_{n\to\infty}\int|f(X_{n'_k})-f(X)|d\mu=\int\lim_{n\to\infty}|f(X_{n'_k})-f(X)|d\mu=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int|f(X_n)-f(X)|d\mu=0$$

注意到

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\int f(X_n) - f(X)d\mu| \leq \lim_{n\to\infty} \int |f(X_n) - f(X)|d\mu = 0$$

因此

$$\int f(X_n)d\mu \to \int f(X)d\mu$$
$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$$

习题3

$$X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y, \text{则} X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

证明：因为

$$\{|X_n + Y_n - X - Y| \geq \epsilon\} \subset \{|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \bigcup \{|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$$

所以

$$\mathbb{P}(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2})$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \frac{\epsilon}{2}) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \frac{\epsilon}{2}) = 0$$
$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

习题4

$$X_n \xrightarrow{P} X, f\text{一致连续，则} f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$$

证明：因为f一致连续，所以$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得$|X_n - X| < \delta$时，

$$|f(X_n) - f(X)| < \epsilon$$

因此

$$|X_n - X| < \delta \Rightarrow |f(X_n) - f(X)| < \epsilon$$
$$\mathbb{P}(|X_n - X| < \delta) \leq \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| < \epsilon)$$

令$n \to \infty$可得

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| < \delta) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| < \epsilon) \leq 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| < \epsilon) = 1$$
$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$$