Chapter 1 概率空间

1.集类与事件域

1.几种常见的集类

半（集）代数

定义：若子集类$\mathscr{S}$满足：

$$
\begin{aligned}
&(1)\Omega\in\mathscr{S},\varnothing\in\mathscr{S}\\
&(2)A,B\in\mathscr{S}\Rightarrow AB\in\mathscr{S}\\
&(3)A,A_1\in\mathscr{S}\text{且}A_1\subset A\Rightarrow\exists A_2,\dots,A_n\in\mathscr{S}\text{两两不交使得}A-A_1=\bigcup_{i=2}^{n}A_i
\end{aligned}
$$

则称$\mathscr{S}$为（集）代数。

（集）代数

定义：若子集类$\mathscr{A}$满足：

$$
\begin{aligned}
&(1)\Omega\in\mathscr{A}\\
&(2)A\in\mathscr{A}\Rightarrow A^C\in\mathscr{A}\\
&(3)A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow AB\in\mathscr{A}
\end{aligned}
$$

则称$\mathscr{A}$（集）代数。

σ代数

定义：若子集类$\mathscr{F}$满足：

$$
\begin{aligned}
&(1)\Omega\in\mathscr{F}\\
&(2)A\in\mathscr{F}\Rightarrow A^C\in\mathscr{F}\\
&(3)A_n\in\mathscr{F},n\geq1\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}
\end{aligned}
$$

则称$\mathscr{F}$为一$\sigma-$代数（或$\sigma-$域）。

命题1

设$\mathcal{C}$是任意子集类，则存在唯一的一个σ代数（$\sigma(\mathcal{C})$），它是包含$\mathcal{C}$的最小$\sigma-$代数，称$\sigma(\mathcal{C})$是$\mathcal{C}$生成的σ代数（$\mathcal{C}$为生成元）

证明：

$$\sigma(\mathcal{C})=\bigcap\nolimits_{\mathcal{F}'\text{为}\sigma\text{代数且}\mathcal{C}\subset\mathcal{F}'}\mathcal{F}'$$

注意满足条件的σ代数是存在的，因为$\mathcal{C}\subset2^{\Omega}$

λ系与π系

(1)定义：若子集类Π满足：

$$A,B\in\pi\Rightarrow AB\in\Pi$$

则称子集类Π为π系。

(2)定义：若子集类Λ满足

$$\begin{aligned}&(2.1)\Omega\in\Lambda\\&(2.2)A,B\in\Lambda,A\subset B\Rightarrow B-A\in\Lambda\\&(2.3)A_n\in\Lambda,n\geq 1\text{且}A_n\uparrow\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Lambda\end{aligned}$$

则称子集类Λ为λ系。

单调类

定义：若子集类$\mathscr{M}$满足：

$$\begin{aligned}&(1)\text{对不降集列的并封闭：即}A_n\in\mathscr{M}\text{且}A_n\uparrow,n\in\mathbb{N},\text{则有}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}\\&(2)\text{对不升集列的交封闭：即}A_n\in\mathscr{M}\text{且}A_n\downarrow,n\in\mathbb{N},\text{则有}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}\end{aligned}$$

则称子集类$\mathscr{M}$为单调类。

关于λ系与π系有如下重要定理。

2.单调类定理

定理1.1.1 $\lambda-\pi$系方法

$$\Lambda\text{是 }\lambda\text{系，}\Pi\text{是 }\pi\text{系，若}\Pi\subset\Lambda\text{，那么}\sigma(\Pi)\subset\Lambda$$

证明：用$\lambda(\Pi)$表示包含Π的最小λ系，则只需证$\lambda(\Pi)=\sigma(\Pi)$即可。

因为显然有$\lambda(\Pi)\subset\sigma(\Pi)$，所以只需证$\sigma(\Pi)\subset\lambda(\Pi)$，从而只需证$\lambda(\Pi)$为$\sigma$代数，又因为$\lambda(\Pi)$为$\lambda$系，所以只要证明$\lambda(\Pi)$关于可列并封闭即可。取$A_n\in\lambda(\Pi)$，那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$$

注意到$B_n\uparrow$，由λ系的性质3可知，我们只要说明$B_n\in\lambda(\Pi)$即可，从而只要证$\lambda(\Pi)$对有限并封闭。又注意到λ系包含全集且关于补封闭，所以我们只要证$\lambda(\Pi)$对有限交封闭，即证

$$A,B\in\lambda(\Pi)\Rightarrow AB\in\lambda(\Pi)$$

下面分几种情形讨论。

如果$A,B\in\Pi$，由于Π为π系，那么$AB\in\Pi\subset\lambda(\Pi)$，结论成立。

如果$A \in \Pi, B \in \lambda(\Pi)$，定义

$$\Pi_A = \{B \in \lambda(\Pi) | AB \in \lambda(\Pi)\}$$

下证$\lambda(\Pi) = \Pi_A$，注意到$\Pi_A \subset \lambda(\Pi)$，所以只要证明$\lambda(\Pi) \subset \Pi_A$即可。因为$\Pi \subset \Pi_A$，所以只要说明$\Pi_A$为$\lambda$系即可，下面逐条验证。

(1)$\Omega \in \Pi_A$

因为$A\Omega = A \in \Pi_A$，所以$\Omega \in \Pi_A$

(2)$B_1, B_2 \subset \Pi_A, B, B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_2 - B_1 \in \Pi_A$

要证明$B_2 - B_1 \in \Pi_A$，只要证明$A(B_2 - B_1) \in \lambda(\Pi)$。因为

$$A(B_2 - B_1) = AB_2 - AB_1$$

由定义可知$AB_2, AB_1 \in \lambda(\Pi)$且$AB_1 \subset AB_2$，所以由$\lambda$系的定义可知$AB_2 - AB_1 \in \lambda(\Pi)$，从而$B_2 - B_1 \in \lambda(\Pi)$

(3)$B_n \in \Pi_A, n \ge 1$且$B_n \uparrow \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Pi_A$

根据定义验证即可，先证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \lambda(\Pi)$：

- 因为$B_n \in \Pi_A \subset \lambda(\Pi), B_n \uparrow$，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \lambda(\Pi)$

再证明$A \bigcap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \lambda(\Pi)$：

- 因为$A \bigcap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \bigcap B_n)$，然后注意到$A \bigcap B_n \in \Pi_A \subset \lambda(\Pi)$且$A \bigcap B_n \uparrow$，所以$A \bigcap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \lambda(\Pi)$

结合上述3点可得Π_A为λ系。因为$\Pi \subset \Pi_A$，$\lambda(\Pi)$为包含Π的最小λ系，所以$\lambda(\Pi) \subset \Pi_A$，结合$\Pi_A \subset \lambda(\Pi)$可得$\Pi_A = \lambda(\Pi)$

如果$A \in \lambda(\Pi), B \in \lambda(\Pi)$，定义

$$\Pi_B = \{A \in \lambda(\Pi) | AB \in \lambda(\Pi)\}$$

注意由第二种情形可知$\Pi \subset \Pi_B$，所以同第二种情形的证明可得$\Pi_B = \lambda(\Pi)$

综上可得结论

$$A, B \in \lambda(\Pi) \Rightarrow AB \in \lambda(\Pi)$$

成立。

定理1.1.2 单调类定理

$$\mathscr{M}\text{为单调类，}\mathscr{A}\text{为代数，若}\mathscr{A} \subset \mathscr{M}\text{，则}\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}$$

证明见习题。

习题

习题1

$\mathscr{M}$为单调类，$\mathscr{A}$为代数，若$\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$，则$\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}$

证明：定义$M(\mathscr{A}) = \bigcap_{M'包含\mathscr{A}且M'为单调类} M'$，则$M(\mathscr{A})$为包含$\mathscr{A}$的最小单调类。由于$2^\Omega$显然为单调类且$\mathscr{A} \subset 2^\Omega$，所以满足条件$M'$存在，定义合理。

由定义可知$\mathscr{M}$为包含$\mathscr{A}$的单调类，所以$M(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}$，如果能推出$M(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A})$，则结论成立。因为$\sigma$代数显然为单调类，所以$M(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{A})$，从而只要验证$\sigma(\mathscr{A}) \subset M(\mathscr{A})$，若能证明$M(\mathscr{A})$为$\sigma$代数，则结论成立，下面将证明这点。

(1)$\Omega \in M(\mathscr{A})$

由$\mathscr{A}$为代数可知$\Omega \in \mathscr{A} \subset M(\mathscr{A})$

(2)$A \in M(\mathscr{A}) \Rightarrow A^C \in M(\mathscr{A})$

为了证明$M(\mathscr{A})$关于补运算封闭，构造如下集合：

$$\forall A \in M(\mathscr{A}), S_A = \{B : B \in M(\mathscr{A}), A - B \in M(\mathscr{A}), B - A \in M(\mathscr{A})\}$$

下证$S_A = M(\mathscr{A})$，类似$\lambda - \pi$系方法，分以下三步证明：

1.S_A为单调类

2.$\forall A \in \mathscr{A}, S_A = M(\mathscr{A})$

3.$\forall A \in M(\mathscr{A}), S_A = M(\mathscr{A})$

1.$\forall B_n \in S_A, B_n \uparrow$，那么$B_n \in M(\mathscr{A}), A - B_n \in M(\mathscr{A}), B_n - A \in M(\mathscr{A})$，由$B_n \uparrow$可知$A - B_n \downarrow$且

$B_n - A \uparrow$

由$A - B_n \downarrow$且$A - B_n \in M(\mathscr{A})$可得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A - B_n) = A - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in M(\mathscr{A})$$

由$B_n - A \uparrow$且$B_n - A \in M(\mathscr{A})$可得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n - A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - A \in M(\mathscr{A})$$

因为$M(\mathscr{A})$为单调类，$B_n \uparrow$，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in M(\mathscr{A})$。结合上述三点可得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in S_A$$

这说明S_A对不降序列集的并封闭。

$\forall B_n \in S_A, B_n \downarrow$，那么$B_n \in M(\mathscr{A}), A - B_n \in M(\mathscr{A}), B_n - A \in M(\mathscr{A})$，由$B_n \downarrow$可知$A - B_n \uparrow$且

$B_n - A \downarrow$

由$A - B_n \uparrow$且$A - B_n \in M(\mathscr{A})$可得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A - B_n) = A - \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in M(\mathscr{A})$$

由$B_n - A \downarrow$且$B_n - A \in M(\mathscr{A})$可得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(B_n - A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n - A \in M(\mathscr{A})$$

因为$M(\mathscr{A})$为单调类，$B_n \downarrow$，所以$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in M(\mathscr{A})$。结合上述三点可得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in S_A$$

这说明S_A对不升序列集列的交封闭。从而S_A为单调类。

2.$A \in \mathscr{A}$

由定义显然有$S_A \subset M(\mathscr{A})$，所以只要证明$M(\mathscr{A}) \subset S_A$即可。注意由$\mathscr{A}$为代数可得$\mathscr{A} \subset S_A$，又因为$S_A$为单调类，所以$S_A$为包含$\mathscr{A}$的单调类，而$M(\mathscr{A})$为包含$\mathscr{A}$的最小单调类，从而$M(\mathscr{A}) \subset S_A$。

3.$A \in M(\mathscr{A})$

由定义显然有$S_A \subset M(\mathscr{A})$，所以只要证明$M(\mathscr{A}) \subset S_A$即可。$\forall B \in \mathscr{A}$，由2可知，$A \in S_B$，所以

$$B - A \in M(\mathscr{A}), A - B \in M(\mathscr{A})$$

因为$B \in \mathscr{A} \subset M(\mathscr{A})$，所以$B \in S_A$（由定义），由$B$的任意性可知$\mathscr{A} \subset S_A$。又因为$S_A$为单调类，所以$S_A$为包含$\mathscr{A}$的单调类，而$M(\mathscr{A})$为包含$\mathscr{A}$的最小单调类，从而$M(\mathscr{A}) \subset S_A$。

综上，$M(\mathscr{A})$对差运算封闭。

(3)$\forall A_n \in M(\mathscr{A})$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M(\mathscr{A})$

由(1)(2)可知$M(\mathscr{A})$关于补运算封闭，所以$\forall A, B \in M(\mathscr{A})$

$$B^C \in M(\mathscr{A}), AB = A\bigcap(B^C)^C = A - B^C \in M(\mathscr{A})$$

从而$M(\mathscr{A})$为代数。

现在取$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，注意代数关于有限交和补运算封闭且包含全集，从而也关于有限并运算封闭，所以

$B_n \in M(\mathscr{A})$。因为$B_n \uparrow$，所以由单调类的定义可知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in M(\mathscr{A})$$

参考资料：https://www.lizhechen.com/2017/09/21/单调类定理/