Problem 1

$\forall f,g\in C^1(\mathbb{R}),\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$，我们有$\alpha f+\beta g$连续可导，所以$\alpha f+\beta g\in C^1(\mathbb{R})$，因此$C^1(\mathbb{R})$是线性空间。

考虑$C^1(\mathbb{R})$的子集多项式全体，显然全体多项式的维度为∞，因此$C^1(\mathbb{R})$的维度为∞。

Problem 2

$$A^TA=\begin{bmatrix}\vec{c}_1^T\vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_1^T\vec{c}_n\\ \dots & \dots & \dots\\ \vec{c}_n^T\vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_n^T\vec{c}_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}, AA^T=\begin{bmatrix}\vec{r}_1^T\vec{r}_1 & \dots & \vec{r}_1^T\vec{r}_m\\ \dots & \dots & \dots\\ \vec{r}_m^T\vec{r}_1 & \dots & \vec{r}_m^T\vec{r}_m\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times m}$$

Problem 3

注意到原问题等价于最小化

$$\begin{aligned}f^2(\vec{x})&=||A\vec{x}-\vec{b}||^2\\&=(A\vec{x}-\vec{b})^T(A\vec{x}-\vec{b})\\&=\vec{x}^TA^TA\vec{x}-\vec{b}^TA\vec{x}-\vec{x}^TA^T\vec{b}+\vec{b}^T\vec{b}\\&=\vec{x}^TA^TA\vec{x}-2\vec{x}^TA^T\vec{b}+\vec{b}^T\vec{b}\end{aligned}$$

对上式关于$\vec{x}$求梯度可得

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{x}}f^2(\vec{x})&=\nabla_{\vec{x}}(\vec{x}^TA^TA\vec{x}-2\vec{x}^TA^T\vec{b}+\vec{b}^T\vec{b})\\&=2A^TA\vec{x}-2A^T\vec{b}\end{aligned}$$

令上式为0可得

$$\begin{aligned}A^TA\vec{x}&=A^T\vec{b}\\\vec{x}&=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}\end{aligned}$$

Problem 4

注意到原问题等价于最小化

$$||A\vec{x}||^2=\vec{x}^TA^TA\vec{x}$$

约束条件等价于

$$||B\vec{x}||^2=\vec{x}^TB^TB\vec{x}=1$$

根据该条件构造拉格朗日乘子：

$$L(\vec{x},\lambda)=\vec{x}^TA^TA\vec{x}-\lambda(\vec{x}^TB^TB\vec{x}-1)$$

求梯度可得

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{x}}L(\vec{x},\lambda)=2A^TA\vec{x}-2\lambda B^TB\vec{x}\\ \nabla_{\lambda}L(\vec{x},\lambda)=-\vec{x}^TB^TB\vec{x}+1\end{aligned}$$

令上式为0可得

$$\begin{aligned}A^TA\vec{x}&=\lambda B^TB\vec{x} &(1)\\ \vec{x}^TB^TB\vec{x}&=1 &(2)\end{aligned}$$

将(1)，(2)带入目标函数可得

$$\vec{x}^TA^TA\vec{x}=\lambda\vec{x}^TB^TB\vec{x}=\lambda$$

所以接下来只要求出λ即可，对等式(1)稍作变形可得

$$(A^TA-\lambda B^TB)\vec{x}=0$$

由约束条件可知$\vec{x}\neq 0$，所以上述线性方程有非零解，因此

$$|A^TA-\lambda B^TB|=0$$

解该n次方程即可求出$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$，记最小的正根为$\lambda_i$，最大的正根为$\lambda_j$，所以

$$||A\vec{x}||^2=\lambda\in[\lambda_i,\lambda_j]$$

Problem 5

注意约束条件等价于

$$\vec{x}^T\vec{x}=1$$

根据该条件构造拉格朗日乘子：

$$\begin{aligned}L(\vec{x},\lambda)&=\vec{a}.\vec{x}-\lambda(\vec{x}^T\vec{x}-1)\\ &=\vec{a}^T\vec{x}-\lambda(\vec{x}^T\vec{x}-1)\end{aligned}$$

求梯度可得

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{x}}L(\vec{x},\lambda)=\vec{a}-\lambda\vec{x}\\ \nabla_{\lambda}L(\vec{x},\lambda)=\vec{x}^T\vec{x}-1\end{aligned}$$

令上式为0可得

$$\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{a}$$
$$\vec{x}^T\vec{x} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{a}^T\vec{a} = 1$$
$$\lambda = \pm||\vec{a}||$$

将$\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{a}$带入可得

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\lambda}\vec{a}^T\vec{a} = \frac{1}{\lambda}||\vec{a}||^2 = \pm||\vec{a}||$$

所以

$$\max f(\vec{x}) = ||\vec{a}||$$