Problem 1

(a)由定义，我们有

$$\begin{aligned}C &= LL^T \\ &= \begin{pmatrix} L_{11} & \vec{0} & 0 \\ \vec{l}_k^T & l_{kk} & \vec{0}^T \\ L_{31} & \vec{l}'_k & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & \vec{l}_k & L_{31}^T \\ \vec{0}^T & l_{kk} & \vec{l}'^T_k \\ 0 & \vec{0} & L_{33}^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}L_{11}^T & L_{11}\vec{l}_k & L_{11}L_{31}^T \\ \vec{l}_k^T L_{11}^T & \vec{l}_k^T\vec{l}_k + l_{kk}^2 & \vec{l}_k^T L_{31}^T + l_{kk}\vec{l}'^T_k \\ * & * & * \end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{l}_k^T L_{11}^T &= \vec{c}_k^T \\ \vec{l}_k^T\vec{l}_k + l_{kk}^2 &= c_{kk}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}L_{11}\vec{l}_k &= \vec{c}_k \\ l_{kk} &= \sqrt{c_{kk} - \|\vec{l}_k\|_2^2}\end{aligned}$$

所以可以利用上式对$k = 1, \ldots, n$遍历求解。

(b)

$$\begin{aligned}2\text{proj}_{\vec{v}}\vec{b} - \vec{b} &= 2\frac{\vec{v}.\vec{b}}{\vec{v}.\vec{v}}\vec{v} - \vec{b} \\ &= 2\vec{v}.\frac{\vec{v}^T\vec{b}}{\vec{v}^T\vec{v}} - \vec{b} \\ &= \Big(\frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} - I_n\Big)\vec{b} \\ &\triangleq -H_{\vec{v}}\vec{b}\end{aligned}$$

下面验证其正交性：

$$
\begin{aligned}
H_{\vec{v}}^T H_{\vec{v}} &= \left(I_n - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right)^T \left(I_n - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right) \\
&= \left(I_n - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right)\left(I_n - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}}\right) \\
&= I_n + \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \\
&= I_n + \frac{4(\vec{v}\vec{v}^T)(\vec{v}^T\vec{v})}{(\vec{v}^T\vec{v})(\vec{v}^T\vec{v})} - \frac{4\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \\
&= I_n + \frac{4\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} - \frac{4\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

(c)只要找到反射平面的方向向量$\vec{v}$即可，作图后不难发现，可以取

$$
\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}
$$

然后计算反射矩阵，不失一般性，这里假设

$$
\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{y}\|_2 = 1
$$

计算可得：

$$
\begin{aligned}
H_{\vec{v}} &= I_n - \frac{2\vec{v}\vec{v}^T}{\vec{v}^T\vec{v}} \\
&= I_n - \frac{2(\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y})^T}{(\vec{x}-\vec{y})^T(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= I_n - \frac{2(\vec{x}\vec{x}^T - \vec{y}\vec{x}^T - \vec{x}\vec{y}^T + \vec{y}\vec{y}^T)}{\vec{x}^T\vec{x} - 2\vec{y}^T\vec{x} + \vec{y}^T\vec{y}} \\
&= I_n - \frac{2(\vec{x}\vec{x}^T - \vec{y}\vec{x}^T - \vec{x}\vec{y}^T + \vec{y}\vec{y}^T)}{2 - 2\vec{y}^T\vec{x}} \\
&= I_n - \frac{\vec{x}\vec{x}^T - \vec{y}\vec{x}^T - \vec{x}\vec{y}^T + \vec{y}\vec{y}^T}{1 - \vec{y}^T\vec{x}}
\end{aligned}
$$

最后验证结论：

$$
\begin{aligned}
-H_{\vec{v}}\vec{x} &= \left(\frac{\vec{x}\vec{x}^T - \vec{y}\vec{x}^T - \vec{x}\vec{y}^T + \vec{y}\vec{y}^T}{1-\vec{y}^T\vec{x}} - I_n\right)\vec{x} \\
&= \frac{(\vec{x}\vec{x}^T - \vec{y}\vec{x}^T - \vec{x}\vec{y}^T + \vec{y}\vec{y}^T)\vec{x}}{1-\vec{y}^T\vec{x}} - \vec{x} \\
&= \frac{\vec{x}(\vec{x}^T\vec{x}) - \vec{y}(\vec{x}^T\vec{x}) - \vec{x}(\vec{y}^T\vec{x}) + \vec{y}(\vec{y}^T\vec{x})}{1-\vec{y}^T\vec{x}} - \vec{x} \\
&= \frac{\vec{x} - \vec{y} - \vec{x}(\vec{y}^T\vec{x}) + \vec{y}(\vec{y}^T\vec{x})}{1-\vec{y}^T\vec{x}} - \vec{x} \\
&= \frac{(1-\vec{y}^T\vec{x})\vec{x} - (1-\vec{y}^T\vec{x})\vec{y}}{1-\vec{y}^T\vec{x}} - \vec{x} \\
&= \vec{x} - \vec{y} - \vec{x} \\
&= -\vec{y}
\end{aligned}
$$

即

$$H_{\vec{v}}\vec{x} = \vec{y}$$

Problem 2

(a)因为A是半正定正交矩阵，所以存在正交矩阵Q和对角元全大于0的对角阵Λ，使得

$$A = Q\Lambda Q^T$$

记

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \\
\Lambda_1 &= \mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\}
\end{aligned}
$$

那么

$$\Lambda = \Lambda_1^2$$

所以

$$A = Q\Lambda_1^2 Q^T = (Q\Lambda_1 Q^T)(Q\Lambda_1 Q^T) \triangleq (\sqrt{A})^2$$

(b)大部分矩阵的平方根不唯一，因为上述对角阵对角元的次序可以改变。

(c)注意到我们有

$$
\begin{aligned}
A^2 &= Q\Lambda Q^T Q\Lambda Q^T = Q\Lambda^2 Q^T \\
&\ldots \\
A^k &= Q\Lambda^k Q^T
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q \Lambda^k Q^T \\
&= Q \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k \Big) Q^T \\
&= Q e^{\Lambda} Q^T
\end{aligned}
$$

(d)由定义，我们有

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \\
e^A e^B &= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i \Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i \frac{1}{j!} B^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j
\end{aligned}
$$

接着，对$(A+B)^k$展开，因为$AB = BA$，所以可以使用二项式定理，即

$$
(A+B)^k = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j
$$

因此

$$
\begin{aligned}
e^A e^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} A^i B^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k \\
&= e^{A+B}
\end{aligned}
$$

(e)首先考虑e^{At}的求导运算，利用(c)，我们有

$$
e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\frac{de^{At}}{dt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1} \\
&= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} \\
&= A e^{At}
\end{aligned}
$$

接着验证题目中解即可

$$
\begin{aligned}
\vec{y}'(t) &= -Ae^{-At}\vec{y}_0 \\
&= -A\vec{y}(t)
\end{aligned}
$$

所以结论成立。最后考虑$t \to \infty$时解的性质，注意我们有

$$
\begin{aligned}
e^{-At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-At)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (-t)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Q \Lambda^k Q^T (-t)^k \\
&= Q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\Lambda t)^k \right) Q^T \\
&= Q e^{-\Lambda t} Q^T
\end{aligned}
$$

因为

$$
\frac{1}{k!} (-\Lambda t)^k
$$

为对角矩阵，所以

$$
e^{-\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\Lambda t)^k
$$

也为对角矩阵，其对角元第i个元素为

$$
e^{-\lambda_i t}
$$

因为$\lambda_i > 0$，所以当$t \to \infty$时，上式趋于0，即

$$
e^{-\Lambda t} \to \mathrm{diag}\{0, \ldots, 0\}
$$

因此

$$
e^{-At} = Q e^{-\Lambda t} Q^T \to 0
$$

Problem 3

(a)直接验证即可

$$
\begin{aligned}
A^T(I_m - QQ^T) &= R^TQ^T(I_m - QQ^T) \\
&= R^TQ^T - R^TQ^TQQ^T \\
&= R^TQ^T - R^TQ^T \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以结论成立。

(b)因为

$$
\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.\|\vec{a}\|
$$

利用第五讲的定义可得

$$
Q_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, R_1 = \|\vec{a}\|
$$

(c)注意上式等价于

$$
AQ^T = R
$$

所以只要利用正交矩阵对A做列变换，使得最终结果为上三角阵即可，所以存在上述分解。

(d)注意上式等价于

$$
Q^TA = L
$$

所以只要利用正交矩阵对A做行变换，使得最终结果为下三角阵即可，所以存在上述分解。