Course 1 Week 1

第一门课主要是介绍分治算法的，这一周主要介绍了一些算法的基本概念，例如算法复杂度等等，下面分别回顾下。

Part 1:整数乘法以及Merge Sort

整数乘法

- Input: 两个数字n位的数字x,y
- Output: x*y

如果直接计算不必多说，中学里已经学过，这里老师介绍了另一种算法

Karatsuba Multiplication

记$x=10^{\frac{n}{2}}a+b,y=10^{\frac{n}{2}}c+d$，那么

$$xy=10^n ac+10^{\frac{n}{2}}(ad+bc)+bd$$

这要来看，我们只要计算ac,ad,bc,bd即可，考虑如下关系

$$(a+b)(c+d)=ac+(ad+bc)+bd$$
$$ad+bc=(a+b)(c+d)-ac-bd$$

这说明不必分别计算ad,bc，而是可以把这两项的和当作整体，通过计算$(a+b)(c+d),ac,bd$来计算出$ad+bc$，所以就有了如下算法

- $xy=10^n ac+10^{\frac{n}{2}}(ad+bc)+bd$
- 递归计算ac
- 递归计算bd
- 递归计算$(a+b)(c+d)$

这个算法是一个典型的分治算法，下面再介绍一个经典的分治算法——Merge Sort

Merge Sort

算法介绍

Merge Sort是用来排序的，之所以这里介绍它，是因为这个算法采取了分治的思路，先给出算法的输入输出

- Input: n个数字的未排序数组
- Output: 数组按递增顺序排列

再给出算法的伪代码

- 递归地对数组的前一半进行排序

- 递归地对数组的后一半进行排序
- 将两个数组归并(merge)为一组

归并的伪代码如下

Pseudocode for Merge:

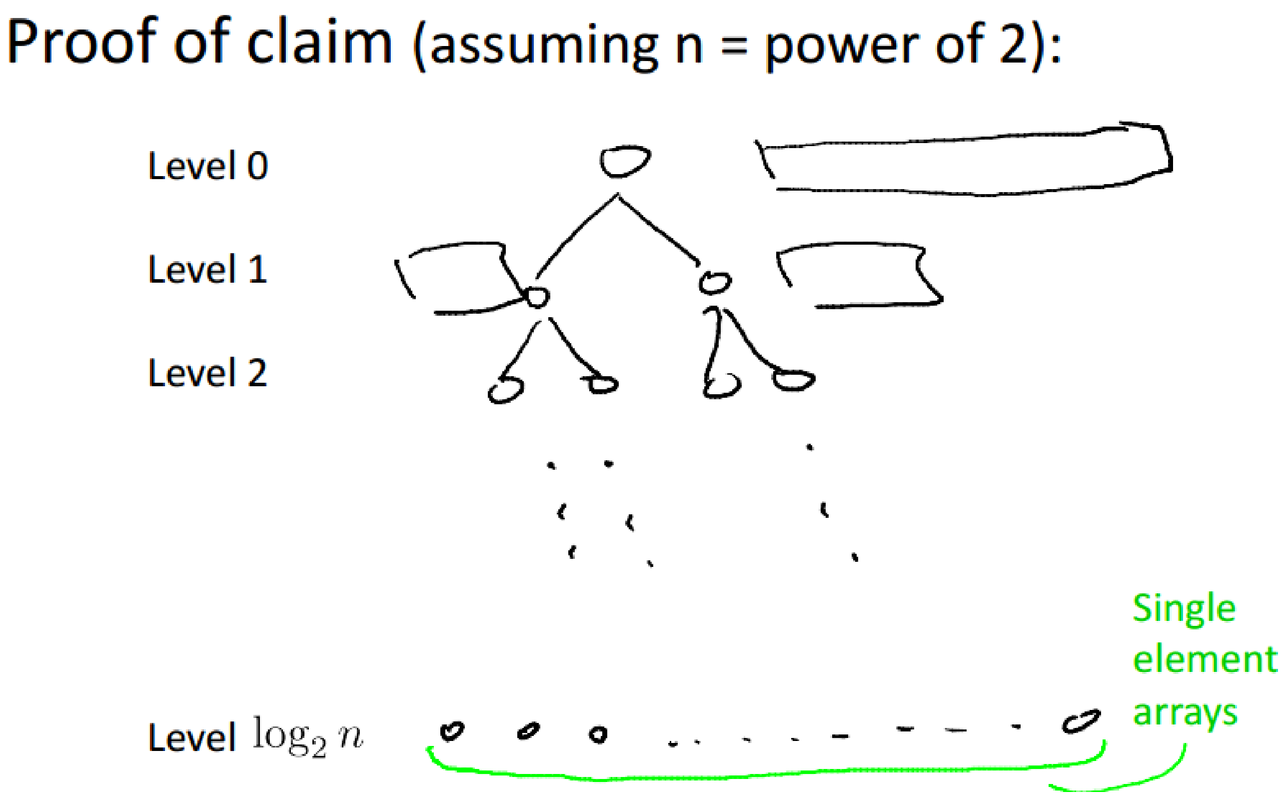
```
C = output [length = n]
A = 1st sorted array [n/2]
B = 2nd sorted array [n/2]
i = 1
j = 1

for k = 1 to n
        if A(i) < B(j)
                C(k) = A(i)
                i++
        else [B(j) < A(i)]
                C(k) = B(j)
                j++
end
        (ignores end cases)
```

算法分析

有了算法，最重要的是分析它的运行效率，我们来讨论Merge Sort的时间复杂度。

先考虑每次merge的时间复杂度，假设merge的数组的长度为m，由上图可知，i, j初始化需要2次操作，后面每次循环分别需要4次，分别为给k赋值，比较$A(i), B(j)$，给$C(k)$赋值，i, j的自增运算，所以每次merge需要$4m + 2 \le 6m$次操作。

接着考虑递归的过程，方便起见，假设原数组的长度n为2的幂。由伪代码可知，每次将数组均匀拆分为两个长度为原有数组长度一半的数组，所以这个过程最多进行$\log_2 n$次，整个过程可以由如下树状图所示



考虑第j层，有2^j个节点，每个节点有$\frac{n}{2^j}$个数字，即第j层有2^j个子问题，每个子问题的大小规模为$\frac{n}{2^j}$，所以第j层merge所需的时间复杂度为

$$2^j \times 6\frac{n}{2^j} = 6n$$

因为一共有$\log_2 n + 1$层， 所以总共的时间复杂度为

$$6n(\log_2 n + 1)$$

最后，为了叙述方便，这里再介绍算法分析常用的一些符号。

常用记号

Big-Oh Notation

定义：

$$\begin{gathered} T(n) = O(f(n))\text{等价于存在}c, n_0 > 0,\text{使得} \\ \text{对任意的}n \geq n_0, T(n) \leq cf(n) \end{gathered}$$

这里比较关键的一点是c, n_0与n无关。

Omega Notation

定义：

$$
\begin{gathered}
T(n)=\Omega(f(n))\text{等价于存在}c,n_0>0,\text{使得} \\
\text{对任意的}n\geq n_0,T(n)\geq cf(n)
\end{gathered}
$$

这里也是c, n_0与n无关。

Theta Notation

定义：

$$
T(n)=\theta(f(n))\text{等价于}T(n)=O(f(n))\text{和}T(n)=\Omega(f(n))
$$

这也等价于

$$
\begin{gathered}
\text{存在常数}c_1,c_2,n_0 \\
\text{任取}n\geq n_0,c_1f(n)\leq T(n)\leq c_2f(n)
\end{gathered}
$$

例子

这里举一个比较重要的例子

$$
\max\{f(n),g(n)\}=\theta(f(n)+g(n)),f(n)>0,g(n)>0
$$

从两个方向证明

$$
\begin{gathered}
\max\{f(n),g(n)\}\leq f(n)+g(n) \\
2\times\max\{f(n),g(n)\}\geq f(n)+g(n)
\end{gathered}
$$

所以

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}(f(n)+g(n))\leq\max\{f(n),g(n)\}\leq f(n)+g(n) \\
\max\{f(n),g(n)\}=\theta(f(n)+g(n))
\end{gathered}
$$

Part 2:习题

选择题

选择题1

3-way-Merge Sort：假设在Merge Sort的每一步中不是分成两半，而是分成三分之一，对每部分进行排序，最后使用三向合并子程序将它们组合起来。这个算法的整体渐近运行时间是多少？（提示：请注意，合并步骤仍然可以在中实现$O(n)$时间。）

- n
- $n^2\log(n)$
- $n(\log(n))^2$
- $n\log(n)$

这里和课件中的区别为树状图为三叉树，即第j层有3^j个子问题，每个子问题的大小规模为$\frac{n}{3^j}$，由于长度为m的数组每次Merge操作需要的时间复杂度为$O(m)$，所以第j层的时间复杂度为

$$
O(3^j\times\frac{n}{3^j})=O(n)
$$

因为为三叉数，所以一共有$O(\log n)$层，总共的时间复杂度为

$$O(n\log n)$$

选择题2

给你两个函数f,g满足$f(n)=O(g(n))$，那么$f(n)*\log_2(f(n)^c)=O(g(n)*\log_2(g(n)))$是否成立，其中$c$为正常数，你可以假设$f,g$非递减并且都大于1

- 有时是，有时不是，取决于f和g
- 错误
- 有时是，有时不是，取决于常数c
- 正确

因为$f(n)=O(g(n))$，所以存在n_0,k，使得当$n\ge n_0$时，

$$f(n)\le kg(n)$$

因为f,g都大于1，当$n\ge n_0$时

$$f(n)*\log_2(f(n)^c)=cf(n)*\log_2(f(n))\le ckg(n)*\log_2(kg(n))=ckg(n)*(\log_2 k+\log_2 g(n))\le m*g(n)*\log_2 g(n)$$

上述不等式关系可能不太严格，但是这里主要估计数量级，无伤大雅，所以这个结论是正确的。

选择题3

两个非递减的正函数f,g满足$f=O(g(n))$，是否满足$2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$

- 正确，如果$f(n)\le g(n)$对于所有足够大的n
- 有时正确
- 从不正确
- 总是正确

先举一个例子：$f(n)=n,g(n)=2n$，那么$f=O(g(n))$，但是

$$2^{f(n)}=2^n$$
$$2^{g(n)}=2^{2n}=4^n$$

所以$2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$成立

再举一个例子$f(n)=n,g(n)=2n$，那么$f=O(g(n))$，并且

$$2^{f(n)}=2^{2n}=4^n$$
$$2^{g(n)}=2^n$$

所以$2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$不成立

所以选项2是对的，此外从上述两个例子可以看出，该结论成立与否与f,g的大小有关，现在假设$f(n)\le g(n)$对于所有足够大的n，那么

$$2^{f(n)}\le 2^{g(n)}$$

从而$2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$

因此这题前两个选项均正确。

选择题4

k-way-Merge Sort。假设你得到了k个排好序的数组，每个都有n元素，并且你希望将它们组合成一个有kn个元素数组 。考虑以下方法。使用讲座中讲授的merge方法，merge前2个数组，然后用merge后的前两个数组merge第3个数组，依此类推，直到你把第k个数组merge完。这个连续合并算法的运行时间是多少？作为k, n的函数（可选：您能想到更快的方式来进行k-way合并过程吗？）

- $\theta(n^2 k)$
- $\theta(nk)$
- $\theta(n \log(k))$
- $\theta(nk^2)$

merge两个数组的时间和两个数组中较长的长度成正比，所以上述算法中，第i次merge的时间复杂度为

$$\theta(in)$$

总共的时间复杂度为

$$\sum_{i=1}^{k} \theta(in) = \theta(k^2 n)$$

更快的算法应该是将k个数组一起merge，这样的时间复杂度为$\theta(kn)$

选择题5

按递增的顺序排列以下函数，$g(n)$在$f(n)$之后当且仅当$f(n) = O(g(n))$

a)2^{2^n}

b)2^{n^2}

c)$n^2 \log(n)$

d)n

e)n^{2^n}

由数学知识可知，顺序为

$$dcbae$$