Problem 1

根据对称性，虚部应该为0。

Problem 2

后续记线性系统为L

(a)

$$
\begin{aligned}
L(\alpha v(t)+\beta u(t)) &= (\alpha v(t)+\beta u(t))\cos(\omega t) \\
&= \alpha v(t)\cos(\omega t)+\beta u(t)\cos(\omega t) \\
&= \alpha L(v(t))+\beta L(u(t)) \\
L(v(t-\tau)) &= v(t-\tau)\cos(\omega t) \\
&\neq v(t-\tau)\cos(\omega(t-\tau))
\end{aligned}
$$

所以该系统是线性系统，但不是时不变的。

(b)

$$
\begin{aligned}
L(\alpha v(t)+\beta u(t)) &= \sin(\alpha v(t)+\beta u(t)) \\
&\neq \sin(\alpha v(t))+\sin(\beta u(t)) \\
L(v(t-\tau)) &= \sin(\alpha v(t-\tau))
\end{aligned}
$$

所以该系统不是线性系统，但是是时不变的。

(c)

$$
\begin{aligned}
L(\alpha v(t)+\beta u(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha v(\tau)+\beta u(\tau))e^{-2\pi i t\tau}d\tau \\
&= \alpha\int_{-\infty}^{\infty}v(\tau)e^{-2\pi i t\tau}d\tau+\beta\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)e^{-2\pi i t\tau}d\tau \\
&= \alpha L(v(t))+\beta L(u(t)) \\
L(v(t-\tau)) &= \int_{-\infty}^{\infty}v(s-\tau)e^{-2\pi i t s}ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}v(s)e^{-2\pi i t(s+\tau)}ds \\
&= w(t+\tau) \\
&\neq w(t-\tau)
\end{aligned}
$$

所以该系统是线性系统，但不是时不变的。

(d)

$$
\begin{aligned}
L(\alpha v(t)+\beta u(t)) &= \frac{d}{dt}(\alpha v(t)+\beta u(t)) \\
&= \alpha\frac{d}{dt}v(t)+\beta\frac{d}{dt}u(t) \\
&= \alpha L(v(t))+\beta L(u(t)) \\
L(v(t-\tau)) &= \frac{d}{dt}v(t-\tau) \\
&= \frac{d}{d(t-\tau)}v(t-\tau) \\
&= w(t-\tau)
\end{aligned}
$$

所以该系统是线性系统，并且是时不变的。

(e)

$$
\begin{aligned}
L(\alpha v(t)+\beta u(t)) &\neq \alpha L(v(t))+\beta L(u(t)) \\
L(v(t-\tau)) &= \cos(\omega t+v(t-\tau)) \\
&\neq w(t-\tau)
\end{aligned}
$$

所以该系统不是线性系统，同时也不是时不变的。

Problem 3

(a)输入为

$$
v(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(kT)\delta\left(t-kT\right)
$$

输出为

$$
w(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(kT)\Pi_T\left(t-\frac{2k+1}{2}T\right)
$$

计算$L(\alpha v_1(t)+\beta v_2(t))$：

$$
\begin{aligned}
L(\alpha v_1(t)+\beta v_2(t)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\alpha u_1(kT)+\beta u_2(kT))\Pi_T\left(t-\frac{2k+1}{2}T\right) \\
&= \alpha\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_1(kT)\Pi_T\left(t-\frac{2k+1}{2}T\right)+\beta\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_2(kT)\Pi_T\left(t-\frac{2k+1}{2}T\right) \\
&= \alpha L(v_1(t))+\beta L(v_2(t))
\end{aligned}
$$

所以该系统为线性系统。

接着，计算$L(v(t-nT))$，此时输入为

$$
\begin{aligned}
v(t-nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\delta\left(t-(k+n)T\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u((k-n)T)\delta\left(t-kT\right)
\end{aligned}
$$

所以输出为

$$
L(v(t-nT)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u((k-n)T)\Pi_T\left(t-\frac{2k+1}{2}T\right)
$$

另方面，考虑$w(t-nT)$，我们有

$$
\begin{aligned}
w(t-nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\Pi_T\left(t-nT-\frac{2k+1}{2}T\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT)\Pi_T\left(t-\frac{2(n+k)+1}{2}T\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u((k-n)T)\Pi_T\left(t-\frac{2k+1}{2}T\right)
\end{aligned}
$$

所以平移采样的整数倍是时不变的。

(b)此时输入为$\delta(t)$，所以

$$
u(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

输出为

$$
h(t) = \Pi_T\left(t-\frac{1}{2}T\right)
$$

(c)转移函数为脉冲响应函数的傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \mathcal{F}h(s) \\
&= e^{-2\pi i s\frac{1}{2}T}\mathcal{F}\Pi_T \\
&= Te^{-\pi i s T}\operatorname{sinc}(Ts)
\end{aligned}
$$

Problem 4

(a)因为

$$
\mathcal{F}w(s) = \mathcal{F}h(s)\mathcal{F}v(s)
$$

所以如果h带宽有限，那么w同样带宽有限。

(b)由定义，我们有

$$
\begin{aligned}
w(t) &= (h*v)(t) \\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\,\mathrm{sinc}(t-m)\right) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\,\mathrm{sinc}(t-n)\right) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m)v(n)\left(\mathrm{sinc}(t-m) * \mathrm{sinc}(t-n)\right)
\end{aligned}
$$

现在对

$$
\mathrm{sinc}(t-m) * \mathrm{sinc}(t-n)
$$

取傅里叶变换得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\mathrm{sinc}(t-m) * \mathrm{sinc}(t-n)\right) &= e^{-2\pi i(m+n)}\Pi(s)\Pi(s) \\
&= e^{-2\pi i(m+n)}\Pi(s)
\end{aligned}
$$

取逆变换得到

$$
\mathrm{sinc}(t-m) * \mathrm{sinc}(t-n) = \mathrm{sinc}(t-m-n)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
w(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(m)v(n)\,\mathrm{sinc}(t-m-n) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m+n=k} h(m)v(n)\right)\mathrm{sinc}(t-k)
\end{aligned}
$$

因此

$$
w(k) = \sum_{m+n=k} h(m)v(n)
$$

Problem 5

(a)线性性显然，只需证明时不变性，这是因为

$$
\frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} f(x-\tau)dx = \frac{1}{2a}\int_{t-\tau-a}^{t-\tau+a} f(x)dx
$$

另一方面，考虑

$$
h(t) = \frac{1}{2a}\Pi\left(\frac{t}{2a}\right)
$$

那么

$$
Lf(t) = \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} f(x)dx = (h*f)(t)
$$

转移函数为

$$H(s)=\mathcal{F}h(t)=\operatorname{sinc}(2as)$$

(b)

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a}f(x)dx=f(t)$$

另一方面

$$\lim_{a\to 0}h(t)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{2a}\Pi\left(\frac{t}{2a}\right)=\delta(t)$$

(c)输出为

$$h*(h*f)=(h*h)*f$$

因为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h*h)&=(\mathcal{F}h(s))^2\\&=\operatorname{sinc}^2(2as)\end{aligned}$$

所以转移函数为

$$\operatorname{sinc}^2(2as)$$

取逆变换得到

$$(h*h)(t)=\frac{1}{2a}\Lambda\left(\frac{t}{2a}\right)$$

即脉冲响应为

$$\frac{1}{2a}\Lambda\left(\frac{t}{2a}\right)$$

(d)

- $f(t)$: iii
- $Lf(t)$: ii
- $Mf(t)$: i

根据卷积可以平滑数据得到判断。

Problem 6

(a)

$$\begin{aligned}w_n&=x\left(n\left(MT_s\right)\right)\\&=x(nMT_s)\\&=x_{nM}\end{aligned}$$

(b)由采样定理

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\operatorname{sinc}(t-kT_s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc}(t-kT_s)$$

取$t=\frac{n}{M}T_s$，我们有

$$y_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{M}T_s-kT_s\right)$$

(c)对于有理数，使用采样定理即可，结果类似(b)。对于任意实数，找到有理数逼近即可。