10.9

(a)由行列式展开的特点，构成s^n的项为

$$\prod_{i=1}^{n}(s-a_{ii})$$

所以s^n的系数为1。

(b)由行列式展开的特点，构成s^{n-1}的项为

$$\prod_{i=1}^{n}(s-a_{ii})$$

所以s^{n-1}的系数为

$$-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=-\operatorname{Tr}A$$

(c)常数项为$s=0$时的多项式的值，即

$$\mathcal{X}(0)=\det(-A)$$

(d)第一个等式由定义即可，所以

$$\begin{aligned}a_{n-1}&=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\\ a_0&=\prod_{i=1}^{n}(-\lambda_i)\end{aligned}$$

10.11

由条件可得

$$A=P^{-1}\Lambda P=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k p_k q_k^T$$

(a)

range：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left(R_k\right)&=\{R_k x|x\in \mathrm{C}^n\}\\&=\left\{p_k q_k^T x|x\in \mathrm{C}^n\right\}\\&=\{\alpha p_k|\alpha\in \mathrm{C}\}\\&=\operatorname{span}\{p_k\}\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{rank}(R_k) = 1$$

利用正交矩阵的特点可得正交补空间为

$$\mathcal{N}\left(R_k\right) = \operatorname{span}\{p_i, i \neq k\}$$

(b)因为

$$PQ = QP = I$$

所以

$$q_i^T p_j = \delta_{ij}$$

那么对于$i \neq j$

$$\begin{aligned}
R_i R_j &= p_i q_i^T p_j q_j^T \\
&= p_i (q_i^T p_j) q_j^T \\
&= 0
\end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned}
R_i R_i &= p_i q_i^T p_i q_i^T \\
&= p_i (q_i^T p_i) q_i^T \\
&= p_i q_i^T \\
&= R_i
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(sI - A)^{-1} &= (P^{-1} sIP - P^{-1} \Lambda P)^{-1} \\
&= P^{-1} (sI - \Lambda)^{-1} P \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{s - \lambda_k}
\end{aligned}$$

(d)因为

$$PQ = QP = I$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k^T = I$$

(e)特征值为

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= -2
\end{aligned}$$

对应的特征向量为

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\\
p_2 &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

即

$$
P=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 1\end{bmatrix}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
Q^{-1} &= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\\
q_1^T &= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{3} & 0\end{bmatrix}\\
q_2^T &= \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
R_1 &= p_1 q_1^T\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{3} & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}\\
R_2 &= p_2 q_2^T\\
&= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

10.19

(a)注意到我们有

$$
\begin{aligned}
y(t) &= Ce^{tA}x(0)\\
&= Ce^{tA}\left(x(0)-x_0+x_0\right)\\
&= Ce^{tA}\left(x(0)-x_0\right)+Ce^{tA}x_0\\
&= Ce^{tA}\left(x(0)-x_0\right)+y_{\text{nom}}(t)
\end{aligned}
$$

因为

$$
\|x(0)-x_0\|\le r
$$

所以

$$
-\|Ce^{tA}\|r + y_{\text{nom}}(t) \leq y(t) \leq \|Ce^{tA}\|r + y_{\text{nom}}(t)
$$

即

$$
\begin{aligned}
\overline{y}(t) &= \|Ce^{tA}\|r + y_{\text{nom}}(t) \\
\underline{y}(t) &= -\|Ce^{tA}\|r + y_{\text{nom}}(t)
\end{aligned}
$$

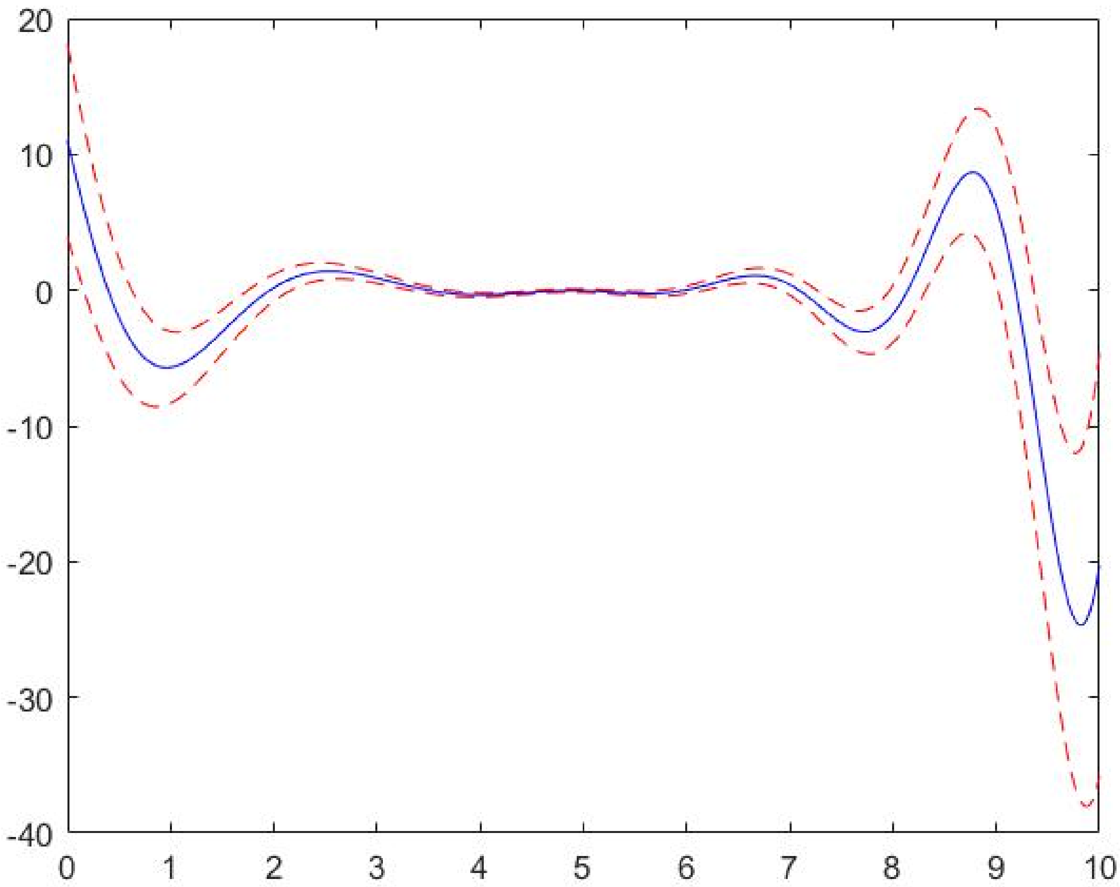
(b)

```
n = 6 ;
A =[-0.2880 -1.0174 0.4625 1.2678 -1.6342 0.8384 ;     1.5861 0.3352 2.1051 0.2998 0.3260 0.8293 ;     0.2411 -2.3091 -0.0736 -0.6288 0.1439 0.5105 ;     -1.2803 0.4842 0.7187 -0.8074 0.0901 1.3939 ;     1.2931 1.0224 -0.7501 0.0724 0.0088 1.7703 ;     0.5874 -0.4287 0.5852 -1.4978 -1.9009 -0.1749 ];
C =[-10.3166  3.4759  -0.8583  -2.5407  -3.4990  8.0032];
x_0 =[-1.2413;       0.5541;       -0.3143;       1.0052;       -0.0480;       -0.2018];
r = 0.5000;

%(b)
N = 1000;
t = linspace(0, 10, N);
y_max = zeros(1, N);
y_min = zeros(1, N);
y_nom = zeros(1, N);

for i = 1:N
    ynom = C * expm(A * t(i)) * x_0;
    res = norm(C * expm(A * t(i)) * r);
    y_nom(i) = ynom;
    y_max(i) = ynom + res;
    y_min(i) = ynom - res;
end

plot(t, y_nom, 'b-', t, y_min, 'r--', t, y_max,'r--')
```



11.13

实正规矩阵的形式为

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}\left(\Lambda_r, \begin{bmatrix} \sigma_{r+1} & \omega_{r+1} \\ -\omega_{r+1} & \sigma_{r+1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \sigma_n & \omega_n \\ -\omega_n & \sigma_n \end{bmatrix}\right)$$

其中

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad i = r+1, \ldots, n$$

下面讨论如何得到S，假设

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & \ldots & s_n \end{bmatrix}$$

对于$1 \le i \le r$，取s_i为对应的特征向量即可。

对于$i \ge r+1$，假设λ_i对应的复特征向量为

$$p_i + jq_i$$

那么

$$
\begin{aligned}
A(p_i + jq_i) &= (\sigma_i + j\omega_i)(p_i + jq_i) \\
&= (\sigma_i p_i - \omega_i q_i) + j(\omega_i p_i + \sigma_i q_i)
\end{aligned}
$$

对比实部虚部得到

$$
\begin{aligned}
Ap_i &= (\sigma_i p_i - \omega_i q_i) \\
Aq_i &= (\omega_i p_i + \sigma_i q_i)
\end{aligned}
$$

所以

$$
A\begin{bmatrix} p_i & q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i & q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix}
$$

利用上式计算即可：

```
N = 10;

while 1
    A = randn(N);
    %特征值分解
    [S0, Lambda] = eig(A);
    Lambda = diag(Lambda);
    %计算复特征值的数量
    index = imag(Lambda) ~= 0;
    if sum(index) > 0
        break
    end
end

S = zeros(N);
i = 1;
while i <= N
    if index(i)
        S(:, i) = real(S0(:, i));
        S(:, i + 1) = imag(S0(:, i));
        i = i + 2;
    else
        S(:, i) = S0(:, i);
        i = i + 1;
    end
end

S \ A * S
```

```
ans =
    3.3818    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
   0.0000
    0.0000    1.2037    2.1094   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   0.0000
    0.0000   -2.1094    1.2037   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
   0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.4661    2.4649    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
  -0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000   -2.4649   -0.4661   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -2.2108    0.9574   -0.0000    0.0000
   0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.9574   -2.2108    0.0000    0.0000
  -0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000   -1.3388    0.0000
   0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    1.0193
   0.4240
   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000   -0.4240
   1.0193
```

12.1

(a)

设

$$A=\begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_1 & \ldots & b_p \end{bmatrix}$$

那么

$$\begin{aligned} [AB]_{ij} &= a_i^T b_j = 0 \\ AB &= \begin{bmatrix} a_1^T B \\ \vdots \\ a_m^T B \end{bmatrix} = 0 \\ AB &= \begin{bmatrix} Ab_1 & \ldots & Ab_p \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

如果A列满秩，那么$Ax=0$不存在非零解，从而$b_i=0$，因此$B=0$，这就与题设矛盾，所以A行满秩，即

$$\mathrm{rank}(A)=m\le n$$

因为

$$a_i^T B = 0 \Leftrightarrow B^T a_i = 0$$

所以$B^Tx=0$有m个线性无关的解，因此

$$n-p\geq m\Leftrightarrow n\geq m+p$$

(b)正确，实际上，对于$A\in\mathbb{R}^{(2k+1)\times(2k+1)}$，该结论都成立。

首先由条件可得

$$A=-A^T$$

取行列式可得

$$\det(A)=(-1)^{2k+1}\det(A)=-\det(A)$$

那么

$$\det(A)=0$$

(c)正确

$$(I-A)\left(\sum_{i=0}^{k-1}A^i\right)=I$$

(d)不正确，反例如下：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

(e)正确，证明如下：

假设AB的λ_i的特征值对应的特征向量为q_i，那么

$$ABq_i=\lambda_i q_i\Rightarrow BA(Bq_i)=\lambda_i(Bq_i)$$

所以λ_i也是BA的特征值，反之同理。

(f)不正确，从上题中即可看出

(g)正确，利用反证法，假设A不可对角化，那么A存在阶数大于1的约当块J，不难看出J^2无法对角化，与题设矛盾。

13.1

首先

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ax + B_1 u + B_2 w_1 \\ Fz + G_1 v + G_2 w_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ax + B_1 u + B_2 H_1 z \\ Fz + G_1 v + G_2 \left(Cx + D_1 u + D_2 w_1 \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ax + B_1 u + B_2 H_1 z \\ Fz + G_1 v + G_2 \left(Cx + D_1 u + D_2 H_1 z \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Ax + B_2 H_1 z \\ Fz + G_2 Cx + G_2 D_2 H_1 z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 u \\ G_2 D_1 u + G_1 v \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & B_2 H_1 \\ G_2 C & F + G_2 D_2 H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ G_2 D_1 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

其次

$$
\begin{aligned}
y &= H_2 z + J w_2 \\
&= H_2 z + J \left(Cx + D_1 u + D_2 w_1 \right) \\
&= H_2 z + JCx + JD_1 u + JD_2 H_1 z \\
&= \begin{bmatrix} JC & H_2 + JD_2 H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} JD_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

补充题

1

因为

$$
Av = \lambda v
$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(A)v &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i v \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^i \right) v \\
&= f(\lambda) v
\end{aligned}
$$

代码如下:

```
n = 3;
A = randn(n);
[S1, Lambda1] = eig(A);
Lambda1 = diag(Lambda1);

% method 1
B = (eye(n) + A) / (eye(n) - A);
[S2, Lambda2] = eig(B);
```

```matlab
Lambda2 = diag(Lambda2);

% method 2
Lambda3 = (1 + Lambda1) ./ (1 - Lambda1);

Lambda2
Lambda3
```

```
Lambda2 =
   0.1312 + 1.4362i
   0.1312 - 1.4362i
   0.3422 + 0.0000i
Lambda3 =
   0.3422 + 0.0000i
   0.1312 + 1.4362i
   0.1312 - 1.4362i
```