13.17

(a)z^{-1}的作用为延迟算子，所以

$$A=\begin{bmatrix}0 & \cdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=0$$

(b)A的特征值全为0

(c)

$$A=\begin{bmatrix}0 & \cdots & & & 10^{-5} \\ 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=0$$

(d)

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^{100}-10^{-5}$$

特征值为

$$\lambda=10^{-5/100}e^{2\pi k/100},k=0,\ldots,99$$

(e)系统的效果没有太大变化，但是特征值变化很大。

14.2

假设A的秩为r，其正交分解为

$$\begin{aligned}A&=Q\Lambda Q^T\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_i q_i^T\\&=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i q_i q_i^T\\&=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i q_i q_i^T,k\ge r\end{aligned}$$

这里假设

$$
\begin{gathered}
\lambda_i = 0, i = r+1, \ldots, n \\
\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r
\end{gathered}
$$

(a)如果$f(x) = \|Fx\|^2$，那么结论显然成立。

如果$f(x)$半正定，那么$\lambda_r > 0$，记

$$
F = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} q_1^T \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_k} q_k^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}
$$

那么

$$
F^T F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i q_i^T = A
$$

从而

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^T A x \\
&= x^T F^T F x \\
&= \|Fx\|^2
\end{aligned}
$$

不难看出最小的$k = r$

(b)因为

$$
\|Fx\|^2 - \|Gx\|^2 = x^T \left(F^T F - G^T G \right) x
$$

所以

$$
A = F^T F - G^T G
$$

将正负特征值区分开来，设

$$
\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_s > 0 > \lambda_{s+1} \ldots \geq \lambda_{s+t}, s + t = r
$$

那么

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i q_i^T \\
&= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i q_i^T - \sum_{i=1}^{t} (-\lambda_{s+i}) q_{s+i} q_{s+i}^T
\end{aligned}
$$

所以我们可取

$$
\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} q_1^T \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_s} q_s^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s\times n} \\
G &= \begin{bmatrix} \sqrt{-\lambda_{s+1}} q_{s+1}^T \\ \vdots \\ \sqrt{-\lambda_{s+t}} q_{s+t}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{t\times n}
\end{aligned}
$$

那么

$$
F^TF - G^TG = \sum_{i=1}^r \lambda_i q_i q_i^T = A
$$

14.3

(a)$\forall x \in \mathbb{R}^n$，

$$
\begin{aligned}
x^TZ^TAZx &= (Zx)^TA(Zx) \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

(b)必要性由(a)即可，只需证明充分性。

$\forall x \in \mathbb{R}^n$，取

$$
y = T^{-1}x
$$

那么

$$
\begin{aligned}
y^TT^TATy &= (Ty)^TA(Ty) \\
&= x^TAx \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
A \geq 0
$$

14.4

(a)$\forall x \in \mathbb{R}^n$，那么

$$
\begin{aligned}
x^T(\alpha A)x &= \alpha(x^TAx) \\
&\geq 0 \\
x^T(A+B)x &= x^TAx + x^TBx \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

(b)假设k阶子矩阵为A_k，对应的行为$i_1,\ldots,i_k$，现在$\forall x \in \mathbb{R}^k$，构造$\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$使得

$$
\tilde{x}_j = \begin{cases} x_j & j \in \{i_1, \ldots, i_k\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
x^T A_k x &= \tilde{x}^T A \tilde{x} \\
&\ge 0
\end{aligned}
$$

(c)取$x = e_i$即可

(d)考虑子矩阵

$$
A_2 = \begin{bmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{bmatrix}
$$

由(b)可得A_2半正定，所以

$$
x^T A_2 x = A_{ii} x_1^2 + 2A_{ij} x_1 x_2 + A_{jj} x_2^2 \ge 0
$$

恒成立，从而

$$
\Delta = 4A_{ij}^2 - 4A_{ii}A_{jj} \le 0
$$

即

$$
|A_{ij}| \le \sqrt{A_{ii}A_{jj}}
$$

14.6

(a)

$$
\begin{aligned}
G_{ji} &= \int_a^b f_j(t) f_i(t) dt \\
&= \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt \\
&= G_{ij}
\end{aligned}
$$

记

$$
f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \end{bmatrix}^T
$$

那么

$$
\begin{aligned}
f(t)f(t)^T &= \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_1(t)f_1(t) & f_1(t)f_2(t) & \ldots & f_2(t)f_n(t) \\ f_2(t)f_1(t) & f_2(t)f_2(t) & \cdots & f_2(t)f_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \\ & & \vdots & \\ f_n(t)f_1(t) & f_n(t)f_2(t) & \cdots & f_n(t)f_n(t) \end{bmatrix} \\
G &= \int_a^b f(t)f(t)^T dt
\end{aligned}
$$

现在$\forall x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$
\begin{aligned}
x^T G x &= x^T \left(\int_a^b f(t)f(t)^T dt\right) x \\
&= \int_a^b (x^T f(t))(x^T f(t))^T dt \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
G \geq 0
$$

(b)记

$$
G = \begin{bmatrix} g_1 & \ldots & g_n \end{bmatrix}
$$

其中

$$
g_i = \begin{bmatrix} \int_a^b f_1(t)f_i(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)f_i(t)dt \end{bmatrix}
$$

$\Leftarrow$：如果$f_1,\ldots,f_n$线性相关，那么存在不全为零的系数$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$，使得

$$
\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) = 0
$$

所以$\forall k = 1,\ldots,n$，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_k(t)f_i(t)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_a^b f_k(t)f_i(t)dt=0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i=0$$

即G奇异

$\Rightarrow$:

如果G奇异，那么存在不全为零的系数$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i=0$$

所以$\forall k=1,\ldots,n$，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_a^b f_k(t)f_i(t)dt=0$$

记

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(t)$$

那么上式等价于

$$\int_a^b f_k(t)h(t)dt=0$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(t)h(t)dt&=\int_a^b h^2(t)dt\\&=0\end{aligned}$$

从而

$$h(t)=0$$

即$f_1,\ldots,f_n$线性相关

14.8

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}^2+x_i^2-2x_ix_{i+1}\right) \\
&= x_1^2+x_n^2+2\sum_{i=2}^{n-1}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}
\end{aligned}
$$

因此

$$
P=\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1
\end{bmatrix}
$$

显然有

$$
P \geq 0
$$

另一方面，如果

$$
x_i=1, i=1,\ldots,n
$$

那么

$$
\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}-x_i\right)^2=0
$$

所以P不是正定矩阵，因此

$$
P \geq 0
$$

14.9

取$x=e_i$可得

$$
\begin{aligned}
e_i^TAe_i &= a_{ii} \\
e_i^TBe_i &= b_{ii} \\
a_{ii} &= b_{ii}
\end{aligned}
$$

取$x=e_i+e_j$得到

$$
\begin{aligned}
(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j) &= a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=a_{ii}+a_{jj}+2a_{ij} \\
(e_i+e_j)^TB(e_i+e_j) &= b_{ii}+b_{jj}+b_{ij}+b_{ji}=b_{ii}+b_{jj}+2b_{ij} \\
a_{ij} &= b_{ij}
\end{aligned}
$$

14.11

注意到

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

所以$\forall x$，我们有

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} < 1 \Rightarrow \|Ax\| < \|x\|$$

由上式可得，A的特征值的绝对值小于1，所以$I+A$的特征值的绝对值大于0，从而$I+A$可逆。

14.13

满奇异值分解为

$$A = U\Sigma V^T$$

其中

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathrm{Rank}(A) = r$
- $U \in \mathbb{R}^{n\times n}, U^TU = UU^T = I$
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}, V^TV = VV^T = I$
- $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$，其中$\sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_n > 0$

所以

$$\begin{aligned} A^TA &= V\Sigma U^T U\Sigma V^T \\ &= V\Sigma^2 V^T \\ AA^T &= U\Sigma V^T V\Sigma U^T \\ &= U\Sigma^2 U^T \end{aligned}$$

因为

$$A = A^T$$

所以

$$AA^T = A^TA$$

所以v_i, u_i都是σ_i^2对应的特征向量，且范数为1，从而可得

$$u_i = \pm v_i$$

因为

$$Av_i = \sigma_i u_i = \pm \sigma_i v_i$$

所以特征值和奇异值的关系为

$$
|\lambda_i| = \sigma_i
$$

14.21

设A的正交分解为

$$
S = Q\Lambda Q^T
$$

记

$$
\Lambda^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)
$$

注意这里假设

$$
\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0
$$

那么

$$
S = \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T\right)^T \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T\right)
$$

从而

$$
x^T S x = \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T x\right)^T \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T x\right)
$$

因此

$$
\mathcal{E}_1 = \left\{x \middle| \left\|\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T x\right\| \leq 1\right\}
$$

另一方面

$$
x = A^{-1} y
$$

所以

$$
\mathcal{E}_2 = \left\{y \middle| \|A^{-1} y\| \leq 1\right\}
$$

(a)对比后不难发现，

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T \\
A &= Q \Lambda^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
A^{-1} = \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T \Rightarrow S = \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T\right)^T \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} Q^T\right) = A^{-T} A^{-1} = (AA^T)^{-1}
$$

(c)对$\mathcal{E}_2$稍作变形，

$$
\mathcal{E}_2 = \left\{y \middle| \|A^{-1} y\| \leq 1\right\} = \left\{y \middle| y^T (AA^T)^{-1} y \leq 1\right\}
$$

另一方面

$$\mathcal{E}_1=\left\{x|x^TSx\le 1\right\}$$

假设A的SVD为

$$A=U\Sigma V^T$$

那么

$$\begin{aligned}(AA^T)^{-1}&=(U\Sigma^2U^T)^{-1}\\&=U\Sigma^{-2}U^T\end{aligned}$$

注意

$$S=Q\Lambda Q^T$$

所以可以取

$$A=Q\lambda^{-\frac{1}{2}}V^T$$

其中V任意正交矩阵。

14.33

考虑在如下条件下

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i=0,\quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_ix_i^T=I$$

最小化

$$J^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\|y_i-Ax_i-b\|^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\left(y_i^Ty_i+x_i^TA^TAx_i+b^Tb-2y_i^TAx_i-2y_i^Tb-2b^TAx_i\right)$$

先关于b求梯度可得

$$\nabla_bJ^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(2b-2y_i-2Ax_i)=0$$

利用之前的条件可得

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(2b-2y_i-2Ax_i)=0$$

$$Nb-\sum_{i=1}^{N}y_i-A\sum_{i=1}^{N}x_i=0$$

$$b=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$$

现在令

$$\begin{aligned} z_i &= y_i-b \\ X &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times N} \\ Z &= \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times N} \end{aligned}$$

那么

$$J^2=\frac{1}{N}\|Z-AX\|_F^2$$

假设Z的奇异值分解为

$$Z=U\Sigma V^T$$

m的一个合适的选择如下：选择m，使得$\sigma_m \gg \sigma_{m+1}$，由最佳近似的性质可得，我们应该选择

$$AX=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i u_i v_i^T=U_m\Sigma_m V_m^T$$

这里

$$U_m\in\mathbb{R}^{n\times m},\Sigma_m\in\mathbb{R}^{m\times m},V_m\in\mathbb{R}^{N\times m}$$

现在取

$$A=\frac{1}{\sqrt{N}}U_m\Sigma_m,X=\sqrt{N}V_m^T$$

那么

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_i^T &= \frac{1}{N} X X^T \\
&= \frac{1}{N} N V_m^T V_m \\
&= I \\
\sum_{i=1}^{N} x_i &= X 1_N \\
&= \sqrt{N} V_m^T 1_N \\
&= 0
\end{aligned}
$$

其中最后一个等号的原因如下:

我们有

$$
\sum_{i=1}^{N} z_i = Z 1_N = U\Sigma V^T 1_N = 0
$$

因为$U\Sigma$列满秩，所以我们有

$$
V^T 1_N = 0
$$

这可以推出

$$
V_m^T 1_N = 0
$$

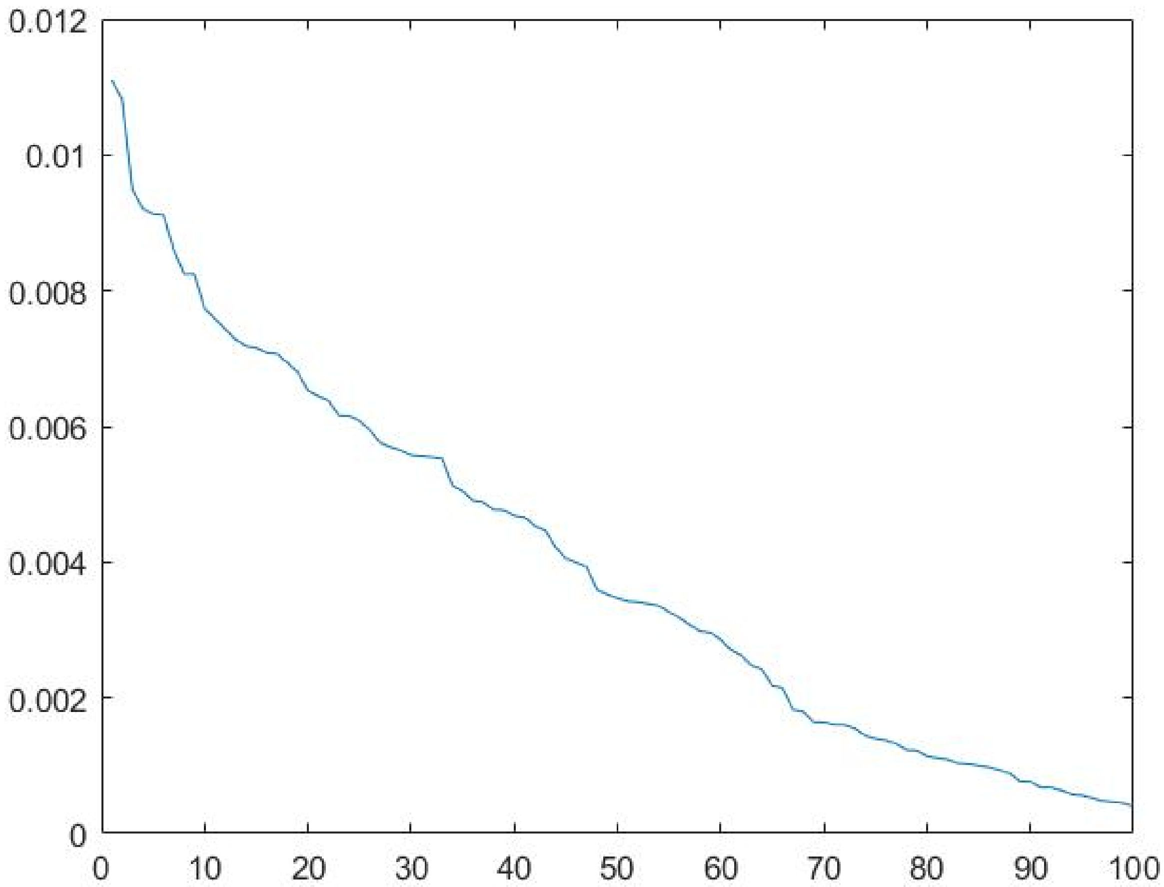
将内容总结如下:

$$
\begin{aligned}
z_i &= y_i - b \\
X &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times N} \\
Z &= \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times N} \\
A &= \frac{1}{\sqrt{N}} U_m \Sigma_m \\
X &= \sqrt{N} V_m^T
\end{aligned}
$$

(b)代码如下:

```
%b
b = mean(Y, 2);
%Z
Z = Y - b * ones([1, N]);
%SVD
[U, Sigma, V] = svd(Z, 0);
tmp = diag(Sigma)
m = 3;
Sigmam = diag(tmp(1: 3))
%A, X
A = U(:, 1:m) * Sigmam / sqrt(N);
X = V(:, 1:m)' * sqrt(N);
```

```
X * ones(N, 1)
1 / N * X * X'
%res
res = Z - A * X;
Norm = zeros([1, N]);
for i = 1:N
    Norm(i) = norm(res(:, i));
end
Norm = sort(Norm, 'descend');
plot(Norm)
```



补充题

1

(a)取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

那么

$$x^T A x = 1 + 1 - 5 = -3$$

正确的做法是先计算

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

如果B的特征值非负，那么$x^T A x \geq 0$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

那么

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$