Problem 1

证明：如果$a > \sqrt{n}, b > \sqrt{n}$，那么

$$a.b > n$$

与

$$a.b = n$$

矛盾

Problem 2

这里证明更强的结论：

$$\text{对于任意素数}p, \sqrt{p}\text{都是无理数}$$

利用反证法证明，如果$\sqrt{p}$是有理数，那么$\sqrt{p} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}\text{且}m, n\text{互质}$，平方可得

$$\begin{aligned} p &= \frac{m^2}{n^2} \\ pn^2 &= m^2 \end{aligned}$$

所以$p \mid m^2$，从而$p \mid m$，从而$m = pm_1$，带入上式可得

$$\begin{aligned} pn^2 &= p^2 m_1^2 \\ n^2 &= pm_1^2 \end{aligned}$$

这说明$p \mid n^2$，$p \mid n$，这就与m, n互质矛盾

Problem 3

结论如下：

$$\text{无理数的无理次方可能为有理数}$$

考虑$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，如果$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$为有理数，那么结论成立，否则$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$为无理数，此时考虑$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$，那么结论依旧成立，这就说明了无理数的无理次方可能为有理数。

关于此有一个更强的结论：

$$\text{几乎所有}(1, \infty)\text{里的有理数都是某个无理数}a\text{的}a\text{次方}$$

参考链接：http://www.matrix67.com/blog/archives/4984

Problem 4

反证法，假设$2\log_2 3$为有理数，那么$2\log_2 3=\frac{p}{q}, p, q$互质，因此

$$\begin{aligned} q\log_2 9 &= p \\ \log_2 9^q &= p \\ 9^q &= 2^p \end{aligned}$$

左右两边奇偶性不同，显然不可能相等，所以$2\log_2 3$为无理数