

Problem 1

上述命题分别编号为1 ~ 5, 结果如下表所示

	\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}	\mathbb{C}
1	F	F	F	$T(\pm\sqrt{2})$	T
2	T(显然)	T	T	T	T
3	F	F	F	F	T(显然)
4	F	F	T(显然)	T	T
5	F	F	F	F	F

Problem 2

(a)

$$\exists y (yyy = x)$$

(b)

$$\exists y, \text{NO-1 S}(y), yy = x$$

(c)

$$\text{NO-1 S}(x) \text{ OR } (\text{NOT}(\text{SUBSTRING}(0, x)))$$

(d)

$$x = 1 \text{ 或 } \exists y, \text{NO-1 S}(y), 1y1 = x$$

(e)如果 x 只含有0或空字符串, 则显然正确; 否则至少含有一个1, 假设第 k 位是1, 那么 x 的前 k 位为

$$\underbrace{0 \dots 0}_{k-1 \uparrow 0} 1$$

$0x$ 的前 k 位为

$$\underbrace{0 \dots 0}_{k \uparrow 0}$$

所以 x 不是 $0x$ 的前缀, 因此

$$\text{PREFIX}(x, 0x)$$

等价于 x 只含有0或空字符串, 从而命题成立。

Problem 3

第一种情形是没人给自己发邮件

$$\neg \exists x, E(x, x)$$

第二种情形为只给自己发邮件，前一部分表示存在某人给自己发邮件，第二部分表示唯一性

$$(\exists x, E(x, x)) \wedge (E(x, s) \rightarrow s = x)$$

第三种情形为给除自己以外一个人发邮件

$$(\exists x, y, E(x, y)) \wedge (E(x, s) \rightarrow (s = x) \vee (s = y))$$

第四种情形为给除自己以外两个人发邮件，注意此时要表示这两个人不同

$$\begin{aligned} & (\exists x, y, z, E(x, y) \wedge E(x, z)) \wedge \\ & ((x \neq y) \wedge (y \neq z) \wedge (x \neq z)) \wedge \\ & (E(x, s) \rightarrow ((s = x) \vee (s = y) \vee (s = z))) \end{aligned}$$

Problem 4

1错误，2正确。

1的反例：

取

$$P(x, y) \text{ 为 } x > y$$

此时

$$\forall x. \exists y. P(x, y) \text{ 恒成立}$$

但是不存在 y ，使得 $\forall x$ ，满足

$$x > y$$

2的证明：

因为

$$\exists y. \forall x. P(x, y) \text{ 成立}$$

所以存在 y_0 ，使得 $P(x, y_0)$ 对任意 x 成立，也就是说，对任意 x ， $P(x, y_0)$ 成立，即

$$\forall x. \exists y. P(x, y) \text{ 成立}$$

Problem 5

(a)阴谋集团至少存在3个人

(b)Siggie和Annie至少有一个不在阴谋集团中

(c)如果Elizabeth在阴谋集团中，那么每个人都在阴谋集团中

(d)如果Annie在阴谋集团中，那么Siggie在阴谋集团中

(e)如果Ben和Albert至少有一个在阴谋集团中，那么Tom不在阴谋集团中

(f)如果Ben和Siggie至少有一个在阴谋集团中，那么Adam不在阴谋集团中

(g)根据上述结论推断谁在阴谋集团中

由c，e可知Elizabeth不在阴谋集团中；由b,d可知，Annie不在阴谋集团中。

如果Siggie在阴谋集团中，那么由f可知Adam不在阴谋集团中，如果Ben在阴谋集团中，那么由e可知，Tom不在阴谋集团中，由a可知，此时Albert在阴谋集团中；如果Ben不在阴谋集团中，此时已有4人不在阴谋集团中，结合a可知，Albert和Tom都在阴谋集团中，这就与e矛盾。

如果Siggie不在阴谋集团中；由e,f，如果Ben在阴谋集团中，那么Adam不在阴谋集团中，Tom不在阴谋集团中，此时有5人不在阴谋集团中，与a矛盾，所以Ben不在阴谋集团中，此时已有4人不在阴谋集团中，结合a可知，剩余3人都在阴谋集团中，这就与e矛盾，所以这种情形不会发生。

综上，阴谋集团的3人为Siggie，Ben，Albert。