Problem 1

(a)初始状态为$(x, y, 0)$，此时

$$rs + a = xy$$

所以初始状态时$P((r, s, a))$成立。

假设在(r, s, a)处$P((r, s, a))$成立，下面证明经过转移后该性质也成立。如果$s > 0$为偶数，那么转移到$(2r, s/2, a)$，所以

$$(2r)(s/2) + a = rs + a = xy$$

如果如果$s > 0$为奇数，那么转移到$(2r, (s-1)/2, a+r)$，所以

$$2r(s-1)/2 + (a+r) = rs - r + a + r = rs + a = xy$$

所以经过转移后该性质也成立。

(b)终止条件为$s = 0$，所以

$$rs + a = a = xy$$

(c)由转移状态可知，每次状态转移，s至少减少一半，注意s的初始值为y，所以由除法的含义可知，转移次数最多为y的二进制表示的长度。

Problem 2

(a)初始状态为

$$([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], (4, 4))$$

目标状态为

$$([15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1], (4, 4))$$

(b)因为i相等，所以只要比较两者的$P(L)$即可，初始状态的$P(L) = 0$，目标状态的$P(L) > 0$，两者的parity不相等。

(c)如果横向移动空格，那么L不变，因为此时i不变，所以parity不变。如果纵向移动空格，不妨设向下移动（向上移动同理），假设位于$(i-1, j)$位置的元素在L的位置为k，那么该移动只会影响$L[k]$和$L[k+1], L[k+2], L[k+3]$的相对位置，移动后的次序为

$$L[k+1], L[k+2], L[k+3], L[k]$$

与之前的次序

$$L[k], L[k+1], L[k+2], L[k+3]$$

相比，相当于交换三次相邻元素，因为每次交换相邻元素逆序数增加或减少1，所以该操作会改变$P(L)$的奇偶性，结合j变成$j+1$可得$P(L) + j$的奇偶性不变，因此结论成立。

Problem 3

(a)进大桥的状态转移为

$$(A, B, C) \rightarrow (A+3, B, C+1)$$

出大桥的状态转移为

$$(A, B, C) \rightarrow (A, B+2, C-1)$$

(b)显然A, B都为WI，由状态转移可知$A+B$为SI。不难验证

$$2A-3B-6C$$

为常数，记

$$D_0=2A_0-3B_0-6C_0$$

因此

$$2A-3B-6C=D_0$$

所以

$$A-B=\frac{1}{2}(6C+B+D_0)$$

由状态转移可知$6C+B$可能增加，也可能减少，所以$A-B$为N。注意到

$$3C-A=-\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}D_0$$

所以$3C-A$是WD，同理可知$2A-3B, B+3C$是N。由等式可知$2A-3B-6C$是constant以及

$$2A-2B-3C=B+3C+D_0$$

所以$2A-2B-3C$是N。

(c)（参考05版解答）

由(b)可知

$$2A-3B-6C=D_0$$

所以这是一个不变性质。另一个不变性质为$C \leq 1000$，下面来验证这点。注意能上桥的条件为

$$A-B<T_0$$

假设我们从状态(A, B, C)转移到(A', B', C')，将恒等式变形可得

$$
\begin{aligned}
6C' &= 2A' - 3B' - D_0 \\
&= 2(A' - B') - (B' + D_0) \\
&\le 2(A + 3 - B) - (B + D_0) \\
&= 6 + 2(A - B) - (B + D_0) \\
&< 6 + 2T_0 - B - D_0 \\
&\le 6 + 2T_0 - B_0 - D_0 \\
&= 6 + 6000 - 6C_0 + 2A_0 - 2B_0 - B_0 - D_0 \\
&= 6006
\end{aligned}
$$

其中第一个不等号是因为

$$A' - B' = A + 3 - B \text{或 } A - B - 2$$

以及B非降，因此

$$A' - B' \le A + 3 - B$$

第二个不等号是因为

$$A - B < T_0$$

最后一个不等号是因为B非降。

由上述讨论可得

$$
\begin{aligned}
C' < 1001 \\
C' \le 1000
\end{aligned}
$$

所以结论得证。

(d)因为当一辆车进出之后，$A - B$增加1，所以当进出了3000辆车之后，我们有

$$A - B \ge 3000 + A_0 - B_0 > T_0$$

此时就无法上桥了。当再过最多1000次状态转换后，桥上没有车，这样就会产生桥为空，但是无法上桥的情形。

Problem 4

定义全体感染学生的周长为恰有一侧有感染学生的边的数量，那么每次状态转移，最多增加两条边，至少减少两条边，所以周长非增。如果可以感染全体成员，那么最终的周长为$4n$，但是初始状态边长小于$4n$，这就产生了矛盾。