Chapter 2 The Well Ordering Principle

Problem 2.1

令

$$C ::= \{n | S(n), 5 \nmid n\}$$

如果C非空，那么C中存在最小值m，因为$5 \mid 0$，所以$m > 0$，那么由定义可知m至少由一枚10分的硬币或者一枚15分的硬币组成，因此$S(m-10)$或者$S(m-15)$成立，那么由m的最小性可知$5 \mid m-10$或$5 \mid m-15$，无论那种情形，都可以推出$5 \mid m$，这就产生了矛盾，从而C为空集

Problem 2.2

第9步错了，没有验证$m=2$的情形，当$m=2$时，$F(3)=F(1)+F(2)=1$不是偶数

Problem 2.3

问题在于有理数集不一定有有理数下界，所以没法使用WOP

Problem 2.4

令

$$C ::= \{n | \sum_{k=0}^{n} k^2 \neq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}\}$$

我们来利用WOP证明C为空集，利用反证法，假设C非空，那么C中存在最小值m，因为$0^2 = \frac{0\times(0+1)\times(2\times 0+1)}{6}$，所以$m > 0$，那么由定义可知

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}$$

两边加上m^2可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} k^2 &= \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + m^2 \\
&= \frac{m[(m-1)(2m-1)+6m]}{6} \\
&= \frac{m[2m^2-3m+1+6m]}{6} \\
&= \frac{m(2m^2+3m+1)}{6} \\
&= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}
\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，从而C为空集

Problem 2.5

考虑如下集合：

$$C ::= \{c \mid \text{存在正整数}\ a, b \text{使得}\ 4a^3 + 2b^3 = c^3\}$$

下面将证明C为空集。根据WOP，C中存在最小值c_1，对应的a, b为a_1, b_1，即

$$4a_1^3 + 2b_1^3 = c_1^3$$

因为左边为偶数，所以c_1^3为偶数，从而$2 \mid c_1$，因此$c_1 = 2c_2, c_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 4a_1^3 + 2b_1^3 &= 8c_2^3 \\ 2a_1^3 + b_1^3 &= 4c_2^3 \end{aligned}$$

同理$2 \mid b_1$，因此$b_1 = 2b_2, b_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 2a_1^3 + 8b_2^3 &= 4c_2^3 \\ a_1^3 + 4b_2^3 &= 2c_2^3 \end{aligned}$$

同理$2 \mid a_1$，因此$a_1 = 2a_2, a_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 8a_2^3 + 4b_2^3 &= 2c_2^3 \\ 4a_2^3 + 2b_2^3 &= c_2^3 \end{aligned}$$

这说明$c_2 < c_1$，但是$c_2 \in C$，与c_1的定义矛盾，从而C为空集，原方程无正整数解

Problem 2.6

考虑如下集合：

$$C ::= \{c \mid c \in \mathbb{N},\ c < 2^{m+1}, c\text{不能表示为}\ 1, 2, 2^2, \ldots, 2^m \text{中某些数的和}\}$$

下面将证明C为空集。根据WOP，C中存在最小值c_1，因为$0, 1$都能用$1, 2, 2^2, \ldots, 2^m$中某些数的和，所以$c_1 \geq 2$，找到最大的k，使得$c_1 - 2^k \geq 0$，那么由c_1的定义可知，$c_1 - 2^k$可以表示为$1, 2, 2^2, \ldots, 2^m$中某些数的和，注意由k的定义可知$c_1 < 2^{k+1}$，从而$0 \leq c_1 - 2^k < 2^k$，这说明$c_1 - 2^k$只能表示为$1, 2, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$中某些数的和，从而$c_1 = c_1 - 2^k + 2^k$可以表示为$1, 2, 2^2, \ldots, 2^k$中某些数的和，这就与$c$的定义相矛盾，从而$C$为空集

Problem 2.7

考虑如下集合：

$$C ::= \{c \mid c \geq 8, c \neq 3m + 5n, n, m \text{为非负整数}\}$$

下面将证明C为空集。根据WOP，C中存在最小值c_1，不难发现$8, 9, 10, 11, 12$都可以表示为$3m + 5n$的形式，因此$c_1 \geq 13$，那么$c_1 - 5 \geq 8$，由定义可知$c_1 - 5$可以表示为$3m + 5n$的形式，从而

$$c_1 = c_1 - 5 + 5 = 3m + 5n + 5 = 3m + 5(n + 1)$$

这就与c_1的定义相矛盾，从而C为空集

Problem 2.8

考虑如下集合：

$$D ::= \{d | \text{存在正整数} a, b, c \text{使得} 8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4\}$$

下面将证明D为空集。根据WOP，D中存在最小值d_1，对应的a, b, c为a_1, b_1, c_1，即

$$8a_1^4 + 4b_1^4 + 2c_1^4 = d_1^4$$

因为左边为偶数，所以d_1^4为偶数，从而$2 \mid d_1$，因此$d_1 = 2d_2, d_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 8a_1^4 + 4b_1^4 + 2c_1^4 &= 16d_2^4 \\ 4a_1^4 + 2b_1^4 + c_1^4 &= 8d_2^4 \end{aligned}$$

同理$2 \mid c_1$，因此$c_1 = 2c_2, c_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 4a_1^4 + 2b_1^4 + 16c_2^4 &= 8d_2^4 \\ 2a_1^4 + b_1^4 + 8c_2^4 &= 4d_2^4 \end{aligned}$$

同理$2 \mid b_1$，因此$b_1 = 2b_2, b_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 2a_1^4 + 16b_2^4 + 8c_2^4 &= 4d_2^4 \\ a_1^4 + 8b_2^4 + 4c_2^4 &= 2d_2^4 \end{aligned}$$

同理$2 \mid a_1$，因此$a_1 = 2a_2, a_2 \in \mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned} 16a_2^4 + 8b_2^4 + 4c_2^4 &= 2d_2^4 \\ 8a_2^4 + 4b_2^4 + 2c_2^4 &= d_2^4 \end{aligned}$$

这说明$d_2 < d_1$，但是$d_2 \in D$，与d_1的定义矛盾，从而D为空集，原方程无正整数解

Problem 2.9

考虑如下集合：

$$N ::= \{n | n \in \mathbb{N}, n > 3^{\frac{n}{3}}\}$$

下面将证明N为空集。根据WOP，N中存在最小值n_1，注意$0, 1, 2, 3, 4$满足$n \le 3^{\frac{n}{3}}$，所以$n_1 \ge 4$，由定义可知

$$n_1 - 1 \le 3^{\frac{n_1 - 1}{3}}$$

那么

$$n_1 \le 3^{\frac{n_1 - 1}{3}} + 1$$

注意到

$$3^{\frac{n_1 - 1}{3}} + 1 \le 3^{\frac{n_1}{3}} \Leftrightarrow 3^{-\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{n_1}{3}} \le 1$$

由$n_1 \geq 4$可得

$$3^{-\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{n_1}{3}} \leq 3^{-\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{4}{3}} < 0.925 < 1$$

从而$3^{\frac{n_1-1}{3}} + 1 \leq 3^{\frac{n_1}{3}}$成立，因此

$$n_1 \leq 3^{\frac{n_1-1}{3}} + 1 \leq 3^{\frac{n_1}{3}}$$

这就与n_1的定义相矛盾，从而N为空集

Problem 2.10

题目中使用了$m \geq 15$的假设，证明前应该验证这点，而$m = 10$时结论显然成立

Problem 2.11

(a)根据WOP，如果存在n不满足上述等式，那么必然存在最小的正整数m，使得上述等式不成立

(b)因为$2 \times 1 - 1 = 1$，所以$m \geq 2$

(c)因为m是最小的不满足上述的不等式的正整数，所以$m - 1$满足上述等式，因此

$$\sum_{i=1}^{m-1}(2(i-1)+1) = (m-1)^2$$

(d)两边同时加上$2m - 1$，可得

$$\sum_{i=1}^{m}(2(i-1)+1) = (m-1)^2 + 2m - 1$$

(e)因为

$$(m-1)^2 + 2m - 1 = m^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{m}(2(i-1)+1) = m^2$$

这就与m的定义矛盾，因此原等式成立

Problem 2.12

令

$$C ::= \{n | \sum_{k=1}^{n} 2k \neq n(n+1), n \in \mathbb{Z}^+\}$$

我们来利用WOP证明C为空集，利用反证法，假设C非空，那么C中存在最小值m，注意$2 \times 1 = 1 \times 2$，所以$m \geq 2$，有定义可知

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2k = (m-1)m$$

两边加上$2m$可得

$$\sum_{k=1}^{m} 2k = (m-1)m + 2m = m(m+1)$$

这就与m的定义相矛盾，从而C为空集

Problem 2.13

令

$$C ::= \{n | \sum_{i=0}^{n} i^3 \neq \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, n \in \mathbb{Z}\}$$

我们来利用WOP证明C为空集，利用反证法，假设C非空，那么C中存在最小值m，注意$m=0,1$时上述等式成立，所以$m \geq 2$，有定义可知$m-1$满足等式

$$\sum_{i=0}^{m-1} i^3 = \left(\frac{(m-1)m}{2}\right)^2$$

两边加上m^3可得

$$\sum_{i=0}^{m} i^3 = \left(\frac{(m-1)m}{2}\right)^2 + m^3 = \frac{m^4 - 2m^3 + m^2 + 4m^3}{4} = \frac{m^4 + 2m^3 + m^2}{4} = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$$

这就与m的定义相矛盾，从而C为空集

Problem 2.14

任取$n+f \in S$，由定义可知

$$n_S \leq n$$

如果$n > n_S + 1$，那么

$$n_S + f_S < n_S + 1 < n \leq n + f$$

如果$n = n_S$，那么由f_S的定义可知

$$f_S \leq f$$
$$n_S + f_S \leq n_S + f = n + f$$

从而$n_S + f_S$为S中最小值

Problem 2.15

(a)该集合是well ordered，该集合的任意子集S相当于

$$S=\{n|n\geq -1,n\in Z\}$$

(b)不是well ordered，不存在大于等于$\sqrt{2}$的最小有理数

(c)不是well ordered，$\frac{1}{n}$可以无限小

(d)该集合是well ordered，记

$$a=n!$$

对G的子集S，任取$s\in S$，由定义可知$s\times a\in\mathbb{Z}^{+}$，记映射后的集合为$S_1$，显然这种映射是一一对应且单调性不变，不难看出$S_1$为正整数集的子集，从而存在最小值$s_0$，那么$\frac{s_0}{a}$为$S$中的最小值

(e)由于

$$\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$$

所以对任意$\mathbb{F}_1\subset\mathbb{F}$，考虑分子集合$\mathbb{N}_1$，该集合为一个正整数集合，所以存在最小值$n_0$，因此$\frac{n_0}{1+n_0}$为$\mathbb{F}_1$的最小值

(f)对于W的子集W_1，考虑满足$n+f\in W_1,n\in\mathbb{N},f\in\mathbb{F}$的$n$构成的集合$\mathbb{N}_1$，这个集合为正整数集合，如果$\mathbb{N}_1$为空集，那么$W_1$为$\mathbb{F}$的子集，由e可知存在最小值，否则$\mathbb{N}_1$存在最小值$n_0$，此时考虑$f\in\mathbb{F}$使得$n_0+f\in W_1$构成的集合$F_0$，如果$F_0$为空集，那么$n_0$即为最小值，否则由e可知$F_0$存在最小值$f_0$，因此$n_0+f_0$为$W_1$的最小值

长度为i的递减序列可以按如下方式生成

$$i+\frac{i}{i+1},i+\frac{i-1}{i},\ldots,i+\frac{1}{2}$$

Problem 2.16

令

$$N::=\{n|n=|C|,C\subset\mathbb{R},\text{且}n<\infty,C\text{中不存在最小元素}\}$$

我们来利用WOP证明N为空集，利用反证法，假设N非空，那么N中存在最小值m，对应的$C_m=\{c_1,\ldots,c_m\}$，显然有$m\geq 2$，考虑集合$\{c_1,\ldots,c_{m-1}\}$，由m的定义可知，该集合存在最小元素c_0，取$c=\min\{c_0,c_m\}$，不难看出$c\in C$且c为C中最小元素，这就与C的定义相矛盾，从而N为空集，因此每个有限实数集存在最小元素

Problem 2.17

$\Rightarrow$

利用反证法，如果存在递减子列$\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$，那么考虑该子列构成的集合，对于其中任意一个元素r，总存在$r'<r$，这说明$\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$没有最小元素，这就与R为well ordered相矛盾

$\Leftarrow$

另一方面，如R没有最小元素，由Problem 2.16可知R为无限集，那么任取$r_0\in R$，因为R没有最小元素，所以存在$r_1\in R$，使得$r_1<r_0$，重复此步骤下去，可以得到

$$r_0>r_1>r_2>\ldots$$