Problem 1

(a)图为

$$
\begin{aligned}
&1 \to 2 \\
&2 \to 2, 2 \to 3 \\
&3 \to 1
\end{aligned}
$$

然后取$v=1$，walk为

$$1 \to 2 \to 2 \to 3 \to 1$$

即可满足条件。

(b)图为

$$
\begin{aligned}
&1 \to 2 \\
&2 \to 2, 2 \to 3 \\
&3 \to 4 \\
&4 \to 1
\end{aligned}
$$

然后取$v=1$，walk为

$$1 \to 2 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$$

即可满足条件。

(c)如果存在自循环，那么显然满足条件；否则如果存在重复路线，必然为

$$u \to v \to u \to v$$

的形式，即u到v共走了奇数步，将重复路径去除（删除数量为偶数），最后的路径为

$$u \to v$$

将全部重复路线删除后即可得到一个cycle，因为每次删除的数量为偶数，所以最终长度为奇数。

Problem 2

(a)如果等号成立，那么

$$\operatorname{dist}(u,v) = \operatorname{dist}(u,x) + \operatorname{dist}(x,v)$$

假设h是$u \to v$的最短路径，f是$u \to x$的最短路径，g是$x \to v$的最短路径。现在利用反证法，如果x不在最短路径上，那么必然有

$$|h| < |f| + |g|$$

即

$$\operatorname{dist}(u,v) < \operatorname{dist}(u,x) + \operatorname{dist}(x,v)$$

这就产生了矛盾。

(b)如果x在$u \to v$的最短路径h上，假设f是$u \to x$的最短路径，g是$x \to v$的最短路径，那么

$$|h| = |f| + |g|$$

所以

$$\text{dist}(u, v) = \text{dist}(u, x) + \text{dist}(x, v)$$

Problem 3

(a)可以取

$$1000101110$$

下面证明长度至少要10。首先需要连续3个0以连续3个1，由对称性，不妨设111在000左侧，那么构造101至少要还需要2个位置，构造011至少还需要1个位置，构造001至少还需要1个位置，所以总共至少需要10个位置，因此总长度大于等于10。

(b)从某个节点开始，记录该节点上的字符，称该字符为当前字符；然后走一条经过每条边的路径，将路径上的字符拼接到当前字符上，走完一圈回到出发节点则结束，之前的字符构造方式如下：

$$10 \stackrel{+0}{\to} 00 \stackrel{+0}{\to} 00 \stackrel{+1}{\to} 01 \stackrel{+0}{\to} 10 \stackrel{+1}{\to} 01 \stackrel{+1}{\to} 11 \stackrel{+1}{\to} 11 \stackrel{+0}{\to} 10$$

(c)注意到有这样一个特点，每到一个节点，当前字符最后两位为节点上的字符，所以当前节点加上边上字符即构成3-bit string，因为有8条路径，配合节点正好构成了全部8种3-bit string，所以结论成立。

(d)由(c)的启发，仍然考虑末每个字符串的末两位，其转移状态依然类似如图1，例如末两位为10的只能转移到01或00，不难发现每个字符串只能转移到两种状态，因为长度为k的字符串一共有2^k种，所以路径总数为

$$2^k \times 2 = 2^{k+1}$$

结合初始的长度为k的字符，所以总长度为

$$2^{k+1} + k$$

状态转移，入度和出度之前都已验证，所以只要验证最后一条性质。假设两个节点分别为

$$a_1 \ldots a_k, b_1 \ldots b_k$$

在最坏的情况下，只要按照

$$b_1, b_2, \ldots, b_k$$

的次序进行状态转移，即可从$a_1 \ldots a_k$转移到$b_1 \ldots b_k$。

Problem 4

(a)图为

$$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$$

那么ranking为

$$1,2,3;2,3,1$$

(b)只要证明存在一个经过每个点的path即可，假设图中共有n个节点，设最长路径为r，并且设长度为r的全体路径为

$$\begin{gathered}a_1^{(1)}\ldots a_r^{(1)}\\ a_1^{(2)}\ldots a_r^{(2)}\\ \ldots\\ a_1^{(s)}\ldots a_r^{(s)}\end{gathered}$$

记构成这些路径的节点为A，考虑其补集B，设

$$B=\{b_1,\ldots,b_m\}$$

下面证明

$$r=n$$

首先证明

$$B=\varnothing$$

利用反证法，如果$B\neq\varnothing$，那么首先我们必然有

$$a_r^{(i)}\nrightarrow b_k,\forall i,j,k$$

那么由round-robintournament的性质，我们必然有

$$b_k\rightarrow a_r^{(i)},\forall i,j,k$$

接着考虑$a_{r-1}^{(i)}$和b_k的关系，事实上，我们依然有

$$a_{r-1}^{(i)}\nrightarrow b_k,\forall i,j,k$$

这是因为如果上述事实不成立，那么存在i,k，使得有如下长度为$r+1$的路径

$$a_1^{(i)}\ldots a_{r-1}^{(i)}b_k a_r^{(i)}$$

这就与条件矛盾，所以

$$b_k\rightarrow a_{r-1}^{(i)},\forall i,j,k$$

利用归纳法，同样可以证明

$$b_k\rightarrow a_l^{(i)},\forall i,j,k,l$$

因此我们有长度为$r+1$的路径

$$b_k a_1^{(1)}\ldots a_r^{(1)}$$

这就与A的定义矛盾，所以

$$B=\varnothing,|A|=n$$

现在利用这点证明$r=n$，如果不成立，那么有$r\le n-1$，又因为$|A|=n$，所以必然存在两条路径，其包含的节点不全相同，不妨设为

$$a_1^{(i)}\ldots a_r^{(i)},a_1^{(j)}\ldots a_r^{(j)}$$

如果

$$a_r^{(i)}\neq a_r^{(j)}$$

那么必然有一个胜者，不妨设为$a_r^{(i)}$，因此

$$a_1^{(i)}\ldots a_r^{(i)}a_r^{(j)}$$

为一条长度为$r+1$的路径，产生矛盾，所以必然有

$$a_r^{(i)}=a_r^{(j)}$$

利用归纳法，同样可以推出我们有

$$a_k^{(i)}=a_k^{(j)},k=1,\ldots,r$$

这就与这两条路径包含的节点不全相同产生矛盾，因此必然有$r=n$。