Problem 1

(a)因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n}=\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2}=0$$

所以

$$g=O(f)$$

由极限为0可得最小的整数c为1，即$n\geq n_0$时

$$2n\leq n^2$$

解得

$$n\geq 2$$

所以$n_0=2$

(b)因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-7)/(n+4)}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{(3n-7)/(n+4)}=\frac{4}{3}$$

所以

$$f=O(g),g=O(f)$$

对于$f=O(g)$，最小整数为1，即$n\geq n_0$时

$$(3n-7)/(n+4)\leq 4$$

解得

$$n\geq -23$$

所以$n_0=0$

对于$g=O(f)$，最小整数为2，即$n\geq n_0$时

$$4\leq 2(3n-7)/(n+4)$$

解得

$$n\geq 15$$

所以$n_0=15.$

(c)不存在大O关系，因为当$n=2k,k\in\mathbb{N}$时，

$$f(2k)=1,g(2k)=6k$$

当$n=2k+1,k\in\mathbb{N}$时，

$$f(2k+1)=1+(2k+1)^2,g(2k+1)=6k+3$$

Problem 2

(a)

E:

$$f\sim g,f=\Theta(g)$$

W:

$$f=O(g)$$

S:

$$f=o(g),f=O(g)\text{ AND NOT }(g=O(f))$$

(b)

$$f\sim g\Rightarrow f=\Theta(g)\Rightarrow f=O(g)$$
$$f=o(g)\Rightarrow f=O(g)\text{ AND NOT }(g=O(f))\Rightarrow f=O(g)$$

Problem 3

因为

$$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$$

所以结论错误。

该证明的错误在于，$n+1$时的结论应该为

$$2^{n+1}\leq c$$

Problem 4

(1)正确

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$$

(2)错误，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n}=\infty$$

(3)错误，因为当$n=4k+2,k\in\mathbb{N}$时，

$$\sin((4k+2)\pi/2)=1$$

那么

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(4k+2)^{\sin((4k+2)\pi/2)+1}}{(4k+2)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{(4k+2)^2}{(4k+2)^2}=1$$

(4)正确

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{3n^3}{(n+1)(n-1)}}=\frac{1}{3}$$

Problem 5

令

$$f(x)=\log x$$

那么

$$\log(n!)=\sum_{i=1}^{n}\log i=\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

记

$$I=\int_1^n\log xdx=n\log n-n+1$$

那么

$$n\log n-n+1\le\log(n!)\le n\log n-n+1+\log n$$

所以

$$\log(n!)=\Theta(n\log n)$$