Problem 1

利用数学归纳法，$k=0$时，

$$F_k = 0 = \frac{p^0 - q^0}{\sqrt{5}}$$

假设$k \le n$时结论成立，那么当$k=n+1$时，

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &= \frac{p^n - q^n}{\sqrt{5}} + \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{p^n(1+p) - q^n(1+q)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{p^n p^2 - q^n q^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

注意这里使用了如下结论：

$$p^2 = p+1, q^2 = q+1$$

所以$k=n+1$时结论也成立。

Problem 2

构造如下命题：

$$\begin{aligned} R(n) &::= \text{假设}A\text{到}B\text{是由}n\text{步产生，那么}P(A) \ge P(B) \\ Q(n) &::= \text{假设}A\text{到}B\text{是由}n\text{步产生，那么产生的得分为}P(A) - P(B) \end{aligned}$$

当$k=0$时结论显然，

当$k=1$时，因为是1步产生，假设将$a+b$拆分成a和b，那么得分为

$$ab$$

注意到

$$\begin{aligned} P(A) - P(B) &= \frac{(a+b)(a+b-1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2} - \frac{b(b-1)}{2} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a - b - a^2 + a - b^2 + b}{2} \\ &= ab \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

所以$k=1$时结论成立。

假设$k\le n$时结论成立，那么$k=n+1$时，假设A由n步产生C，再C由1步产生B，那么

$$P(B)\ge P(C)\ge P(A)$$

并且A到C产生的得分为$P(C)-P(A)$，C到B产生的得分为$P(B)-P(C)$，所以总得分为

$$P(C)-P(A)+P(B)-P(C)=P(B)-P(A)$$

所以$k=n+1$时结论也成立。

Problem 3

surjective表示满射，injective表示单射。

(a)成立，因为h是surjective，所以$\forall y\in C$，存在x，使得

$$y=h(x)=f(g(x))$$

这说明f是surjective。

(b)不一定。

(c)不一定。

(d)如果g不是injective（单映），不妨设$x_1\neq x_2$，但是$g(x_1)=g(x_2)$。注意f是total，结合f是函数，所以$f(g(x_1))$有意义，因此

$$h(x_1)=f(g(x_1))=f(g(x_2))=h(x_2)$$

这就与h是injective矛盾。