Problem 1

(a)x属于F18推出2^x属于F18。因为2^x的反函数为$\log_2 x$，所以$\log_2 x$属于F18。因为-1属于F18，所以$-\log_2 x$属于F18，因此$2^{-\log_2 x}=\frac{1}{x}$属于F18。

(b)首先考虑Base case：

因为$\frac{dx}{dx}=1$，所以x的导数属于F18。

因为常数的导数为0，所以常数的导数属于F18。

注意$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$。因为$x,\frac{\pi}{2}$属于F18，所以$x+\frac{\pi}{2}$属于F18；因为$\sin x$属于F18，所以$\sin(x+\frac{\pi}{2})$属于F18，因此$\sin x$的导数属于F18。

Base case验证完成。

接下来考虑Constructor cases：

由Structural Induction，假设f,g属于F18，我们将推出由f,g生成的元素也属于F18，注意由假设可得f',g'属于F18。

(1)

$$(f+g)'=f'+g'\in F18$$

(2)注意

$$f'g,fg'\in F18$$

$$(fg)'=f'g+fg'\in F18$$

(3)注意

$$2^g,g',\ln 2\in F18$$

$$(2^g)'=2^g g'\ln 2\in F18$$

(4)由(a)可知$h(x)=\frac{1}{x}\in F18$，所以

$$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)}=h(f'(y))\in F18$$

(5)将f'和g复合可得

$$f'(g(x))\in F18$$

所以

$$\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x))g'(x)\in F18$$

Problem 2

(a)首先考虑Base case:

显然$\lambda \in \text{Erasable}$，因此Base case成立。

接着考虑Constructorcase:

由Structural Induction，假设s,t属于RecMatch且属于Erasable，我们将推出$[s]t$属于Erasable。

由归纳假设，首先将s消除，那么剩余$[]t$，所以接着将$[]$消除，剩余t，由归纳假设可知t可以被消除，因此$[s]t$属于Erasable。

(b)

(1)Basecase:

此时$n=0$，$x=\lambda \in \text{Erasable}$，所以$x \in \text{RecMatch}$。

(2)此时$n=2$，所以$x=[]$，显然$x \in \text{RecMatch}$。

(3)因为$y \in \text{RecMatch}$，所以由定义可知$x=py \in \text{RecMatch}$。

(4)因为$t \in \text{Erasable}$，所以$t' \in \text{Erasable}$，注意$|t'|<|t|$，所以由归纳假设可知$t' \in \text{RecMatch}$，那么x可以由s,t'构造产生，因此$x \in \text{RecMatch}$。

(5)首先因为$y \in \text{Erasable}$，那么其最左边的元素必然为$[$，又因为可擦，所以必然存在可擦的s,t，使得$y=[s]t$，所以y只能是这种形式。因为y是由x擦去一组$[]$产生，所以或者擦去了最左侧的$[]$，或者擦去了s中的$[]$，或者擦去了t中的$[]$，一共只有这三种情形。

Problem 3

(a)Basecase:

$$1 \in S$$

Constructorcases:

$$\text{如果 } n \in S\text{，那么 } 2n,3n,5n \in S$$

(b)对集合元素变形可得

$$2^k 3^{2k+m} 5^{m+n} = 18^k 15^m 5^n$$

所以定义如下：

Basecase:

$$1 \in T$$

Constructorcases:

$$\text{如果 } n \in T\text{，那么 } 18n,15n,5n \in T$$

(c)

Basecase:

$$(n,n) \in L, n \in \mathbb{Z}$$

Constructorcases:

$$\text{如果}\,(a,b)\in L\text{，那么}\,(a\pm 3,b)\in L$$

(d)Basecase：

因为

$$n-n=0$$

所以

$$(n,n)\in L$$

Constructorcases:

假设$(a,b)\in L$，那么

$$a-b=3k,k\in\mathbb{Z}$$

因此

$$a\pm 3-b=3(k\pm 1)$$

所以

$$(a\pm 3,b)\in L$$

因此结论成立。

(e)$\forall(a,b)\in L$，那么$a-b=3k,k\in\mathbb{Z}$。

如果$k=0$，那么

$$(a,b)=(a,a)\in L'$$

如果$k>0$，那么

$$(a,b)=(b+3k,b)\in L'$$

如果$k<0$，那么

$$(a,b)=(a+3k,b)=(a-(-3k),b)\in L'$$

因此结论成立。

(f)上述定义是确定的，由(e)的讨论即可得出。

Problem 4

(a)

$$\begin{aligned}G_{1,2}&=\langle\text{bintree},\langle\text{leaf, lose}\rangle,\langle\text{leaf, win}\rangle\rangle\\ G_1&=\langle\text{bintree},\langle\text{leaf, win}\rangle,G_{1,2}\rangle\\ G&=\langle\text{bintree},G_1,\langle\text{leaf, win}\rangle\rangle\end{aligned}$$

(b)Basecase：

如果$G=\langle \text{leaf}, l\rangle$，那么

$$\text{flatten}(G)=(l)$$

Constructorcases:

如果$G=\langle \text{bintree}, G_1, G_2\rangle$，那么

$$\text{flatten}(G)=\text{flatten}(G_1)+\text{flatten}(G_2)$$

其中加号表示拼接操作。

(c)Basecase：

左边为

$$2.\text{length}(\text{flatten}(G))=2$$

右边为

$$|G|+1=2$$

所以Basecase等式成立。

Constructorcases:

如果$G=\langle \text{bintree}, G_1, G_2\rangle$，且$G_1, G_2$满足等式，那么

$$\begin{aligned}2.\text{length}(\text{flatten}(G)) &= 2.\text{length}(\text{flatten}(G_1))+2.\text{length}(\text{flatten}(G_2)) \\ &= |G_1|+1+|G_2|+1 \\ &= |G|+1\end{aligned}$$

所以Constructorcases等式成立。