

Problem 1

(a)因为平均伴侣数量和男女人数有关，因此该命题错误。

(b)设伴侣的数量为 n ，那么

$$\frac{n}{m} = 1.1 \times \frac{n}{f} \Rightarrow m = \frac{10}{11}f$$

(c)假设男性virgins的数量为 m_1 ，女性virgins的数量为 f_1 ，那么

$$m_1 = \frac{1}{20}m, f_1 = \frac{1}{5}f$$

nonvirgin male average number of partners为

$$\frac{n}{m - m_1} = \frac{n}{\frac{19m}{20}} = \frac{20n}{19m}$$

nonvirgin female average number of partners为

$$\frac{n}{f - f_1} = \frac{n}{\frac{4f}{5}} = \frac{5n}{4f}$$

所以

$$\frac{20n}{19m} / \frac{5n}{4f} = \frac{16}{19} \frac{f}{m}$$

因此

$$x = \frac{16}{19}$$

(d)因为可能是一对多关系。

Problem 2

(a)注意如下等式：

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

如果度数为奇数的顶点有奇数个，那么违背上述等式。

(b)将人看成顶点，握过手的两人有边相连，那么握手的次数为顶点的度数，所以利用(a)即可。

(c)考虑所有从George开始的握手序列的节点构成的图，然后使用反证法：如果结论不成立，那么该图中只存在一个度数为奇数的节点，这就与(b)(c)矛盾。

Problem 3

$$\begin{aligned}1 &\leftrightarrow a, 2 \leftrightarrow b, 3 \leftrightarrow c, 4 \leftrightarrow d, 5 \leftrightarrow e, 6 \leftrightarrow f \\1 &\leftrightarrow b, 2 \leftrightarrow a, 3 \leftrightarrow c, 4 \leftrightarrow d, 5 \leftrightarrow e, 6 \leftrightarrow f \\1 &\leftrightarrow a, 2 \leftrightarrow b, 3 \leftrightarrow d, 4 \leftrightarrow c, 5 \leftrightarrow f, 6 \leftrightarrow e \\1 &\leftrightarrow b, 2 \leftrightarrow a, 3 \leftrightarrow d, 4 \leftrightarrow c, 5 \leftrightarrow f, 6 \leftrightarrow e\end{aligned}$$

考虑度数，所以3, 4必然和c, d对应，因此其他点也可以随之确定。

Problem 4

(b)(c)(e)(f)(g)(i)(j)

Problem 5

(a)证明：

\Rightarrow

$$\forall h \in H(f(v))$$

那么

$$f(v) \rightarrow h$$

由定义，可以假设

$$h = f(h_1)$$

所以

$$\begin{aligned}f(v) &\rightarrow f(h_1) \\v &\rightarrow h_1\end{aligned}$$

因此

$$h_1 \in G(v), h = f(h_1) \in f(G(v))$$

\Leftarrow

$$\forall h \in f(G(v))$$

假设

$$h = f(h_1)$$

那么

$$h_1 \in G(v)$$

即

$$\begin{aligned}v &\rightarrow h_1 \\ f(v) &\rightarrow f(h_1)\end{aligned}$$

因此

$$h = f(h_1) \in H(f(v))$$

(b)因为 f 是双射，所以

$$|G(v)| = |f(G(v))| = |H(f(v))|$$