Problem 1

使用数学归纳法。

$k=2$时，左边为

$$1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

右边为

$$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

所以

$$\text{左边}<\text{右边}$$

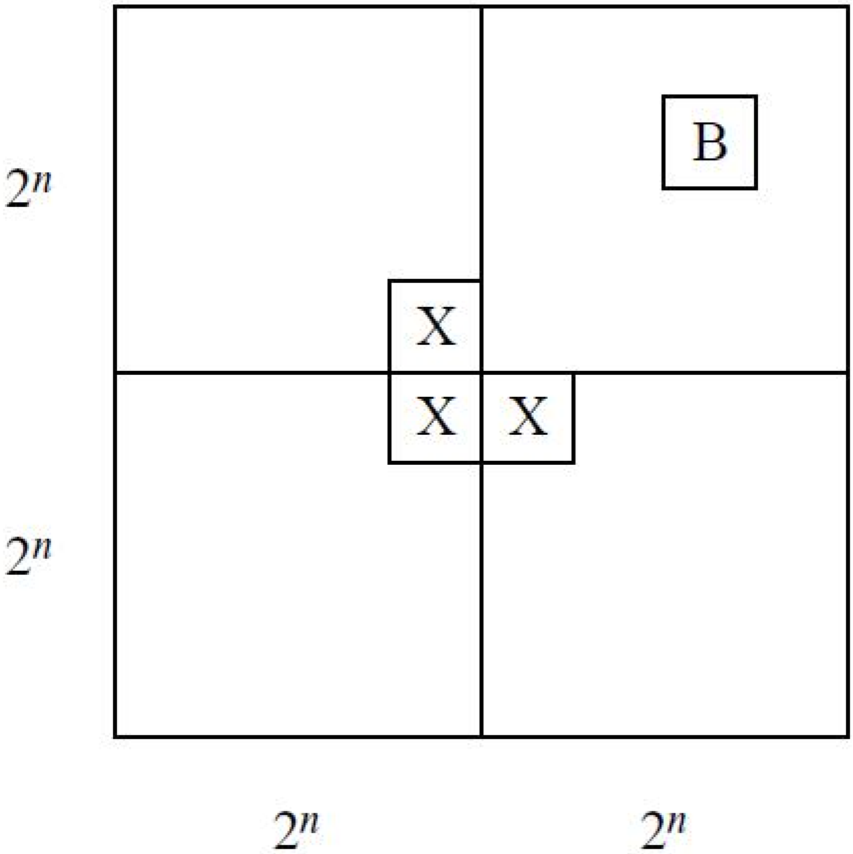
$k=2$时结论成立。

假设$k=n$时结论成立，那么

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}&<2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\\&<2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\\&=2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=2-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

所以$k=n+1$时结论也成立。

Problem 2



(a)利用上图辅助证明。首先$k=0$时结论成立，假设$k=n$时结论成立，当$k=n+1$时，由对称性，只要说明Bill可以放在右上角即可，由归纳假设，右上角的$2^n\times 2^n$方块可以用L形瓷砖铺满，接下来在上图中X的位置铺一块L形瓷砖，那么由归纳假设，其余三个$2^n\times 2^n$方块可以用L形瓷砖铺满，因此$k=n+1$时结论也成立。

(b)同样利用数学归纳法。首先$k=0$时结论成立，假设$k=n$时结论成立，当$k=n+1$时，由对称性，只要说明Bill可以放在位于右上方矩形的中心位置，将Bill放好后，在上图中X的位置铺一块L形瓷砖，那么由(a)可知，4个缺角的方块可以用L形瓷砖铺满。

Problem 3

$k=0$时，

$$12=3\times 4$$

所以$k=0$时结论成立。

假设$k=n$时结论成立，那么$k=n+1$时，分几种情形讨论。

如果$k=1$，那么

$$1+12=3\times 2+7$$

如果$k=2$，那么

$$2+12=7\times 2$$

如果$k\ge 3$，那么

$$k-3=n-2\le n$$

所以

$$(k-3)+12=3a+7b \\ a,b\in\mathbb{N}$$

因此

$$k+12=(k-3)+12+3=3(a+1)+7b$$

因此$k=n+1$时结论也成立。

Problem 4

实际上没有验证$n=2$的情形，这里补充即可。

假设

$$p|x_1x_2$$

如果

$$p\nmid x_1 \text{且} p\nmid x_2$$

因为p是素数，所以

$$p\nmid x_1x_2$$

这就与条件矛盾，因此

$$p|x_1 \text{或} p|x_2$$