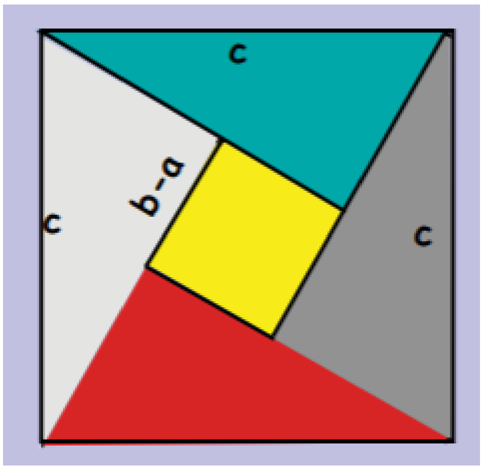
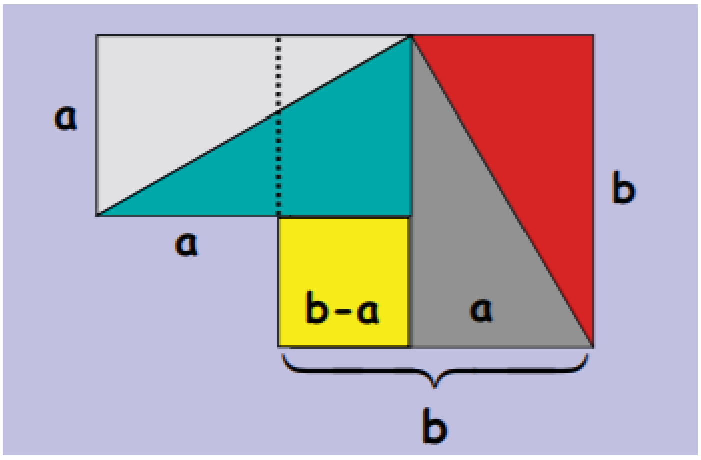
Chapter 1 What is a Proof?

Problem 1.1

(a)按照下图组合即可：



(b)按照下图组合即可：



(c)如果$a=b$，那么上图就变成一个变成为边长为a和$2a$的矩形，面积为$2a^2$，此时的等式为$2a^2=a^2+b^2=c^2$，依旧符合勾股定理。

(d)(a)，(b)两问中计算面积都利用到直角以及直线的条件。

Problem 1.2

(a)下面这一步出错，不能直接拆开

$$\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$$

(b)两边同除2可得

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

两边加上$\frac{3}{2}$可得

$$2=1$$

(c)利用平方根的定义验证即可

$$rs=\sqrt{rs}\times\sqrt{rs}=r\times s=\sqrt{r}\times\sqrt{r}\times\sqrt{s}\times\sqrt{s}=(\sqrt{r}\sqrt{s})\times(\sqrt{r}\sqrt{s})$$

从而

$$\sqrt{rs}=\sqrt{r}\sqrt{s}$$

Problem 1.3

(a)第二步错误，因为$\log_{10}\frac{1}{2}<0$

(b)第二步错误，美元是带单位的，平方后单位都不同，显然不相等

(c)倒数第三步到倒数第二步有问题，要讨论消去的项是否为0

Problem 1.4

第二步到第三步不等价，因为满足第三步等价于

$$\begin{aligned}(2\sqrt{ab}-a-b)(2\sqrt{ab}+a+b)\le 0\\ -a-b\le 2\sqrt{ab}\le a+b\end{aligned}$$

要在这一步利用$a>0,b>0$，将上式化为

$$2\sqrt{ab}\le a+b$$

最简单的推导方法是利用$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

Problem 1.5

我的理解是第一步假设就有问题，因为如果学生默认在周五不会有测验，那么在周五有测验本身就是个惊喜。

Problem 1.6

如果$n=7^s,s\in\mathbb{N}$，那么$\log_7 n=s\in\mathbb{N}$；否则可以假设$n=7^s t,s,t\in\mathbb{N},7\nmid t$，那么$\log_7 n=s+\log_7 t$，接下来证明$\log_7 t$为无理数，利用反证法，假设$\log_7 t=\frac{p}{q}$，$p,q$为整数且互质，那么

$$\begin{aligned}q\log_7 t=p\\ \log_7 t^q=p\\ t^q=7^p\end{aligned}$$

这说明$7\mid t^q$，因为7为质数，这说明$7\mid t$，这就与$7\nmid t$矛盾，从而$\log_7 t$为无理数，因此当$n=7^s t$时，$\log_7 n$为无理数

Problem 1.7

结论如下：

$$\text{无理数的无理次方可能为有理数}$$

考虑$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，如果$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$为有理数，那么结论成立，否则$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$为无理数，此时考虑$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{2}=2$，那么结论依旧成立，这就说明了无理数的无理次方可能为有理数。

关于此有一个更强的结论：

$$\text{几乎所有}(1,\infty)\text{里的有理数都是某个无理数}a\text{的}a\text{次方}$$

参考链接：http://www.matrix67.com/blog/archives/4984

Problem 1.8

反证法，如果a是奇数，那么$a=2k+1,k\in\mathbb{N}$，那么$a^n=(2k+1)^n$，所以$2\nmid a^n$，这就产生了矛盾

Problem 1.9

反证法，如果结论不成立，那么$a>\sqrt{n}$且$b>\sqrt{n}$，因此$ab>n$，这就产生了矛盾

Problem 1.10

这里证明一个更强的结论：

$$\text{任取质数}p\text{，如果}p\mid n^2\text{，那么}p\mid n$$

利用反证法，如果$p\nmid n$，那么$n=kp+r,0<r\le p-1$，从而$n^2=(kp+r)^2=k^2p^2+2kpr+r^2$，因为$p\mid n^2$，所以$p\mid r^2$，而$p$是质数，这说明$p\mid r$，这就与$0<r\le p-1$矛盾

Problem 1.11

取$m=4,n=2$，那么$m\mid n^2$，但是$m\nmid n$

如果$m<n$，取$m=4,n=6$，那么$m\mid n^2$，但是$m\nmid n$

Problem 1.12

这里证明更强的结论：

$$\text{对于任意素数}p,\sqrt{p}\text{都是无理数}$$

利用反证法证明，如果$\sqrt{p}$是有理数，那么$\sqrt{p}=\frac{m}{n},m,n\in\mathbb{N}\text{且}m,n\text{互质}$，平方可得

$$p = \frac{m^2}{n^2}$$
$$pn^2 = m^2$$

所以$p \mid m^2$，由Problem 1.10可得$p \mid m$，从而$m = pm_1$，带入上式可得

$$pn^2 = p^2 m_1^2$$
$$n^2 = pm_1^2$$

这说明$p \mid n^2$，$p \mid n$，这就与m, n互质矛盾

Problem 1.13

利用反证法，假设$\log_4 6 = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$且$m, n$互质，那么

$$n \log_4 6 = m$$
$$\log_4 6^n = m$$
$$6^n = 4^m$$
$$3^n = 2^{2m-n}$$

最后一步显然不可能，所以$\log_4 6$是无理数

Problem 1.14

(a)假设$\sqrt{2}$是有理数，选择最小的正整数q，使得$(\sqrt{2}-1)q$是非负整数，令$q' = (\sqrt{2}-1)q$，显然有$q' < q$，此外，我们我们还有

$$(\sqrt{2}-1)q' = (\sqrt{2}-1)^2 q = (3-2\sqrt{2})q = q + 2(1-\sqrt{2})q$$

因为$(\sqrt{2}-1)q$是整数，所以$q+2(1-\sqrt{2})q$也是整数，从而$(\sqrt{2}-1)q'$是整数，非负性是显然的，所以$(\sqrt{2}-1)q'$是非负整数，这就与q是使得$(\sqrt{2}-1)q$是非负整数的最小正整数矛盾，因此$\sqrt{2}$是无理数

(b)这种证明技巧性比较强，不如课本上的方法直接

Problem 1.15

(a)取$a_0 = -k, a_i = 0 (i = 1, \ldots, m-1)$，那么该方程的解为

$$x = k^{\frac{1}{m}}$$

如果$k \neq k_0^m$，那么x不是整数，从而由引理可知$x = k^{\frac{1}{m}}$为无理数

(b)只要证明该方程没有形如$x = \frac{p}{q}, q \neq 1, p, q$互质的解即可，利用反证法，假设有这样的解，带入上式可得

$$\sum_{i=0}^{m} a_i (\frac{p}{q})^i = 0$$

两边同乘q^m可得

$$\sum_{i=0}^{m}a_ip^iq^{m-i}=0$$
$$a_0q^m+a_1pq^{m-1}+\ldots+a_{m-1}p^{m-1}q+p^m=0$$

因为0被q整除，所以左边也被q整除，除去最后一项都是q的倍数，所以

$$q\mid p^m$$

由于p,q互质，这说明$q=1$，与假设矛盾，所以原结论成立

Problem 1.16

反证法，假设$2\log_2 3$为有理数，那么$2\log_2 3=\frac{p}{q},p,q$互质，因此

$$q\log_2 9=p$$
$$\log_2 9^q=p$$
$$9^q=2^p$$

左右两边奇偶性不同，显然不可能相等，所以$2\log_2 3$为无理数

Problem 1.17

(a)将多项式写出来，假设次数为k，那么

$$q(n)=\sum_{i=0}^{k}c_in^i,\ c_0=q(0)=c$$

从而

$$q(cm)=\sum_{i=0}^{k}c_i(cm)^i=\sum_{i=1}^{k}c_i(cm)^i+c$$

因此

$$c\mid q(cm)$$

(b)利用(a)即可，因为$c\mid q(cm)$且$c>1$，所以$q(cm)$不是质数，因为$m\in\mathbb{Z}$，注意$q(n)$不是常数，所以有无穷多个n，使得$q(n)$不是质数

(c)只要考虑$c=1$或$c=0$即可，如果$c=0$，那么多项式的形式如下

$$q(n)=n(\sum_{i=0}^{k}a_ix^k)$$

结论显然成立。

如果$c=1$，那么$q(0)=c=1$不是质数，此时结论也成立。

综上，对于任意整系数多项式$q(n)$，存在$n\in\mathbb{N}$，使得$q(n)$不是质数。

Problem 1.18

反证法，假设$\log_9 12$为有理数，那么$\log_9 12 = \frac{p}{q}, p, q$互质，因此

$$\begin{aligned} q\log_9 12 &= p \\ \log_9 12^q &= p \\ 12^q &= 9^p \\ 2^{2q} \times 3^q &= 3^{2p} \\ 2^{2q} &= 3^{2p-q} \end{aligned}$$

左右两边奇偶性不同，显然不可能相等，这就产生了矛盾

Problem 1.19

反证法，假设$\log_{12} 18$为有理数，那么$\log_{12} 18 = \frac{p}{q}, p, q$互质，因此

$$\begin{aligned} q\log_{12} 18 &= p \\ \log_{12} 18^q &= p \\ 12^p &= 18^q \\ 2^{2p} \times 3^p &= 3^{2q} \times 2^q \\ 3^{p-2q} &= 2^{q-2p} \end{aligned}$$

左右两边奇偶性不同，显然不可能相等，这就产生了矛盾