Problem 1

(a)R^{-1}具有传递性

由定义我们有

$$x\ R\ y \Leftrightarrow y\ R^{-1}\ x$$

$\forall a, b, c$，假设我们有

$$a\ R^{-1}\ b, b\ R^{-1}\ c$$

那么

$$b\ R\ a, c\ R\ b$$

由R的传递性，我们有

$$c\ R\ a$$

即

$$a\ R^{-1}\ c$$

(b)$R \cap S$具有传递性

$\forall a, b, c$，假设我们有

$$a(R \cap S)b, b(R \cap S)c$$

下面将证明

$$a(R \cap S)c$$

由定义，我们有

$$a\ R\ b, a\ S\ b, b\ R\ c, b\ S\ c$$

由R, S的传递性，我们有

$$a\ R\ c, a\ S\ c$$

因此

$$a(R \cap S)c$$

(c)$R \circ R$具有传递性

讨论之前先回顾二元关系复合的定义：

$$a\ R \circ S\ c$$

当且存在b，使得

$$a\ R\ b\text{且}\ b\ S\ c$$

$\forall a,b,c$，假设我们有

$$a\ R\circ R\ b, b\ R\circ R\ c$$

那么存在d,e，使得

$$a\ R\ d, d\ R\ b, b\ R\ e, e\ R\ c$$

由传递性，我们有

$$a\ R\ e, e\ R\ c$$

因此

$$a\ R\circ R\ e$$

(d)不具有传递性，例如取R为小于等于，S为整除关系。

Problem 2

(a)$R_1\cap R_2$是等价关系。

自反性：$\forall a$，我们有

$$a\ R_1\ a, a\ R_2\ a$$

所以

$$a\ R_1\cap R_2\ a$$

对称性：$\forall a,b$，假设我们有

$$a\ R_1\cap R_2\ b$$

所以

$$a\ R_1\ b, a\ R_2\ b$$

那么必然有

$$b\ R_1\ a, b\ R_2\ a$$

因此

$$b\ R_1\cap R_2\ a$$

传递性：$\forall a,b,c$，假设我们有

$$a\ R_1\cap R_2\ b, b\ R_1\cap R_2\ c$$

所以

$$\begin{aligned}a\ R_1\ b, a\ R_2\ b\\ b\ R_1\ c, b\ R_2\ c\end{aligned}$$

所以

$$a\ R_1\ c, a\ R_2\ c$$

因此

$$a\ R_1 \cap R_2\ c$$

(b)定义集合为一个学校的学生，定义R_1为年龄相同，定义R_2为两人同班，取

$$\begin{gathered}a\text{为 }1\text{班，}15\text{岁}\\ b\text{为 }2\text{班，}15\text{岁}\\ c\text{为 }2\text{班，}16\text{岁}\end{gathered}$$

那么

$$a\ R_1 \cup R_2\ b, b\ R_1 \cup R_2\ c$$

但是不能推出

$$a\ R_1 \cup R_2\ c$$

Problem 3

G_1和G_2不同构，因为G_1中只存在一个长度为5的闭环，但是G_2中存在两个。

G_1和G_3不同构，因为G_1中不存在长度为3的闭环，但G_3中存在$6-8-10$。

G_1和G_4不同狗，因为G_1中不存在长度为9的闭环，但G_4中存在。

G_2和G_3不同构，因为G_2中存在两个长度为5的闭环，但G_3中存在至少三个。

G_2和G_4不同构，因为G_2中存在两个长度为5的闭环，但G_4中存在至少三个。

G_3和G_4同构，映射如下：

$$\begin{gathered}1 \leftrightarrow 1\\ 6 \leftrightarrow 10\\ 5 \leftrightarrow 9\\ 2 \leftrightarrow 2\\ 9 \leftrightarrow 8\\ 7 \leftrightarrow 3\\ 10 \leftrightarrow 7\\ 8 \leftrightarrow 4\\ 4 \leftrightarrow 6\\ 3 \leftrightarrow 5\end{gathered}$$

Problem 4

(a)反例为一条线段和一个三角形。

(b)Inductive case错误，因不一定要直接添加边，可以删除一条边后再添加两条边。