Problem 1

(a)9位数字之和的范围为9到81，一共73种，所以75个人中至少两人的身份证数字之和相同。

(b)将数字关于73的余数分组，同余的分为一组，所以一共37组，同组内数字之差为37的倍数，而100个数字至少有2个数字在同一组。

(c)将方块等分为4个部分，至少有两个点在同一小块内，同一小块内的两点距离小于$\frac{1}{\sqrt{2}}$。

(d)将$\{1,2,3,...,2n\}$分为如下n组：

$$(1,2),(3,4),...,(2n-1,2n)$$

所以$n+1$个数字必然有两个在同一组。

Problem 2

(a)将drop看成整体，所以数量为7!

(b)将drop,fails看成成体，所以数量为$3!$

(c)总数为

$$10!-7!-6!+3!$$

Problem 3

一共要走100步，50次向上，50次向右，所以数量为C_{100}^{50}。

经过$(10,11)$的数量为

$$C_{21}^{11}C_{79}^{39}$$

经过$(21,20)$的数量为

$$C_{41}^{21}C_{59}^{29}$$

同时经过$(10,11),(21,20)$的数量为

$$C_{21}^{10}C_{20}^{11}C_{59}^{29}$$

所以不经过$(10,11),(21,20)$的数量为

$$C_{100}^{50}-C_{21}^{11}C_{79}^{39}-C_{41}^{21}C_{59}^{29}+C_{21}^{10}C_{20}^{11}C_{59}^{29}$$

Problem 4

(a)记n位全7的数字为a_n，任取一个数x，考虑$\{a_n\}$关于x的剩余类，不难看出必然有两个数属于同一类，不妨设为$a_i,a_j,i>j$，所以

$$x|a_i-a_j$$

而a_i-a_j为题目中的形式。

(b)依旧记n位全7的数字为a_n，所以(a)中数字的形式为

$$a_n\times 10^m,m\in\mathbb{Z}$$

不难看出

$$(a_n,10^m)=1$$

现在任取不被$2,5$整除的数x，因为存在n,m使得

$$x\mid a_n\times 10^m$$

并且

$$(x,10^m)=1$$

所以

$$x|a_n$$

结论成立。

Problem 5

任何数都能表示为

$$3^n\times m,n\ge 0,3\nmid m$$

将m相同的数分为一组，因为小于300且被3整除的正整数共有$[\frac{299}{3}]=99$个，所以不被3整除的数共有200个，所以有200组，组内的数之商为3的幂，因为201个数必然有两个在同一组，所以结论成立。