Problem 1

(a)数量为

$$10^9 - 8 \times 9^8$$

(b)剩余14本书有15个间隔，只要从这15各间隔中挑6个即可。

Problem 2

(a)假设编码的长度为$n-2$，那么数字树的元素为

$$1, \ldots, n$$

因为不在编码中的最大元素必然是叶节点，并且其父节点为编码的第一个元素，所以可以产生如下递归算法：

假设节点集为V，编码为长度为$|V|-2$的字符串S，记不在编码中且在V中的最大元素为l，那么l必为叶节点，并且其父节点为S第一个字符。现在对$V-\{l\}$和$S[1:]$递归调用该算法即可，终止条件为$|V|=2$。

(b)由(a)可知数字树和$n-2$位的编码一一对应，所以数字树的数量为

$$n^{n-2}$$

参考资料：https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2005/lecture-notes/cp9wsol.pdf

Problem 3

(a)考虑长度为$n+k$的bit串，其中有n个0，k个1。记第1个1之前0的数量为x_1，第i个1和第$i-1$个1直接0的数量为x_i，那么必然有

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le n$$

于是构成了双射。

(b)定义

$$y_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$$

即可。

Problem 4

(a)

$$|X|\times|Y|$$

(b)对于全函数f，$\forall x\in X$，$f(x)$有定义。假设

$$X=\{x_1,\dots x_n\}$$

f与如下向量一一对应

$$(f(x_1),\dots,f(x_n))\in Y^{|X|}$$

所以结论成立，因此

$$|[X\to Y]|=|Y^{|X|}|=|Y|^{|X|}$$

(c)将函数视为从X的子集到Y的映射即可，元素为k的子集构成的映射数量为

$$|Y|^k$$

因为元素为k的子集有$C_{|X|}^k$个，所以总共数量为

$$\sum_{i=1}^{|X|}C_{|X|}^k|Y|^k=(1+|Y|)^{|X|}-1$$

最后计算上式和$|Y|^{|X|}$的比值：

$$\begin{aligned}\frac{(1+|Y|)^{|X|}-1}{|Y|^{|X|}}&\le\frac{(1+|Y|)^{|X|}}{|Y|^{|X|}}\\&=\left(1+\frac{1}{|Y|}\right)^{|X|}\\&\le 2^{|X|}\end{aligned}$$

所以数量级为

$$O(2^{|X|})$$

(d)对于一个全函数f，$\forall x\in X$，如果

$$f(x)=1$$

那么定义

$$x\in B\subseteq X$$

反之，对于X的子集B，定义

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$$

所以一个全函数与X的一个子集一一对应，因此几个全函数就与X的幂集意义对应。

(e)假设

$$X=\{x_1,\ldots x_n\}$$

用向量的形式表示集合：

$$(x_1,\ldots,x_n)$$

对于双射f，定义向量

$$(f(x_1),\ldots,f(x_n))$$

该向量即为一个置换。

反之，对于置换

$$(x_1',\ldots,x_n')$$

定义双射f：

$$f(x_1)=x_1',f^{-1}(x_1')=x_1$$

所以双射和置换构成一一对应关系，因此双射的数量为$n!$。