Problem 1

假设可以走到$(1,1)$，那么设步骤1,2,3,4使用的数量分别为a,b,c,d，于是我们有

$$\begin{gathered}2a-2b+c-d=1\\-a+b+3c-3d=1\end{gathered}$$

所以

$$\begin{gathered}2a-2b+c-d=-a+b+3c-3d\\3(a-b)=2(c-d)\end{gathered}$$

令$a-b=2k, k\in\mathbb{Z}$，那么

$$c-d=3k$$

带回原式可得

$$4k+3k=7k=1$$

这就与$k\in\mathbb{Z}$矛盾。

Problem 2

证明：

Base case：对于$\langle l,\mathrm{leaf}\rangle$，我们有

$$n_B=0, f_B=1$$

所以

$$f_B=n_B+1$$

Base case结论成立。

Constructor case：对于$A=\langle l,B,C\rangle$，假设B,C满足条件，那么我们有：

$$\begin{gathered}f_B=n_B+1\\f_C=n_C+1\end{gathered}$$

因为A标签唯一，所以

$$\begin{gathered}f_A=f_B+f_C\\n_A=n_B+n_C+1\end{gathered}$$

所以

$$f_A=f_B+f_C=n_B+1+n_c+1=n_A+1$$

Constructor case结论成立。

Problem 3

(a)定义$f(x)=\frac{1}{x}-1$

(b)对每个long序列a，将其映射为

$$0.a$$

对每个属于$(0,1]$的实数，将其映射到其小数部分——即一个long序列，这就构成了一个双射。

(c)$\forall l\in L$，记l的奇数子列为l_1，偶数子列为l_2，构造如下映射：

$$l\rightarrow(l_1,l_2)$$

显然该映射为满射。

(d)如果存在A到B的双射f，那么对于任意$(a_1,a_2)\in A\times A$，构造如下映射：

$$g:(a_1,a_2)\rightarrow(f(a_1),f(a_2))$$

下面证明g是双射，首先证明g是单射：

对于$(a_1,a_2),(a_3,a_4)\in A\times A$，如果

$$g((a_1,a_2))=g((a_3,a_4))$$

那么

$$(f(a_1),f(a_2))=(f(a_3),f(a_4))$$

所以

$$f(a_1)=f(a_3),f(a_2)=f(a_4)$$

因为f是双射，所以

$$\begin{gathered}a_1=a_3,a_2=a_4\\(a_1,a_2)=(a_3,a_4)\end{gathered}$$

所以g是单射。

接着证明g是满射：

对于$(b_1,b_1)\in A\times A$，由f是双射可得：

$$g((f^{-1}(b_1),f^{-1}(b_2)))=(b_1,b_2)$$

所以g是满射。综上，g是双射。

由(b)可知存在L到$(0,1]$的双射，所以存在L^2到$(0,1]^2$的双射。

(e)由(b)可知， 存在$(0,1]$到L的双射；由(c)可知，存在L到L^2的满射；所以存在$(0,1]$到L^2的满射；由(d)可知存在L^2到$(0,1]^2$的双射；所以存在$(0,1]$到$(0,1]^2$的满射。

接着，对于任意$(x,y)\in(0,1]^2$，定义如下映射：

$$(x,y)\to x$$

显然这是$(0,1]^2$到$(0,1]$的满射，由Schroder-Bernstein定理可得，存在$(0,1]$到$(0,1]^2$的双射。

(f)由(a)可知存在$(0,1]$到$[0,\infty)$的双射，结合(d)可知存在$(0,1]^2$到$[0,\infty)^2$的双射，因此存在$(0,1]$到$[0,\infty)^2$的双射。