Problem 1

(a)

$$\text{Members}(p, a, b) ::= z \in p \text{ IFF } z = a \text{ OR } z = b$$

(b)

$$\text{Pair}(p, a, b) ::= \text{Members}(p, a, \text{Members}(q, a, b))$$

(c)

$$\text{Second}(p, b) ::= \exists a, s.t\ a \in \text{Pair}(p, a, b)$$

Problem 2

$\forall x \in \overline{A \cap B}$，记

$$P \triangleq \{x \in A\}, Q \triangleq \{x \in B\}$$

那么$x \in \overline{A \cap B}$等价于

$$\text{NOT}(P \text{ AND } Q)$$

上述命题等价于

$$\overline{P} \text{ OR } \overline{Q}$$

所以$x \in \overline{A}$或$x \in \overline{B}$，因此

$$x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

反之同理。

Problem 3

(a)不妨设原始集合为R_0, S_0，经过有限次拼接后并取并集（去重）的集合为R_1, S_1，两者的补集为$\overline{R_1}, \overline{S_1}$，为了方便说明，记$R_0 \cup S_0$经过有限次拼接取并后生成的集合为$T$，那么一共只有四种情形：

$$R = R_1, S = S_1$$
$$R = R_1, S = \overline{S_1}$$
$$R = \overline{R_1}, S = S_1$$
$$R = \overline{R_1}, S = \overline{S_1}$$

由对称性，情形2,3只需要讨论一种，这里只考虑情形2。

第一种情形：$\forall x\in R\cap S$，那么$x\in R_1\cap S_1$，所以$R\cap S$可以由$R_0\cup S_0$经过有限次拼接取并后生成，这说明$R\cap S$是c-d。

第二种情形：$\forall x\in R\cap S$，那么$x\in R_1\cap \overline{S_1}$，因此$R\cap S\subset R_1$，所以$R\cap S$可以由$R_0$经过有限次拼接取并后生成，这说明$R\cap S$是c-d。

第四种情形：$\forall x\in R\cap S$，那么$x\in \overline{R_1}\cap \overline{S_1}=\overline{R_1\cup S_1}$，注意$R_1\cup S_1$可以由$R_0\cup S_0$经过有限次拼接取并后生成，这说明$R\cap S$是c-d。

(b)(c)(d)暂时没思路，略过。

(e)首先$\{00\}^*\cap 0^*$显然不是有限集，其次$\{00\}^*$的补集必然包含长度为奇数的全0序列，所以$\overline{\{00\}^*}\cap 0^*$不是有限集，因此$\{00\}^*$不是0-boring。

(f)分四种情形考虑

$$
\begin{aligned}
&R\text{是 0-finite}, S\text{是 0-finite}\\
&\overline{R}\text{是 0-finite}, S\text{是 0-finite}\\
&R\text{是 0-finite}, \overline{S}\text{是 0-finite}\\
&\overline{R}\text{是 0-finite}, \overline{S}\text{是 0-finite}
\end{aligned}
$$

由对称性，情形2,3只需要讨论一种，这里只考虑情形2。

第一种情形：

$$
|(R\cup S)\cap 0^*|=|(R\cap 0^*)\cup (S\cap 0^*)|\le |R\cap 0^*|+|(S\cap 0^*)|<\infty
$$

所以$R\cup S$是boring。

第二种情形：

$$
|\overline{(R\cup S)}\cap 0^*|=|(\overline{R}\cap \overline{S})\cap 0^*|\le |\overline{R}\cap 0^*|<\infty
$$

所以$R\cup S$是boring。

第四种情形：

$$
|\overline{(R\cup S)}\cap 0^*|=|(\overline{R}\cap \overline{S})\cap 0^*|\le |\overline{R}\cap 0^*|<\infty
$$

所以$R\cup S$是boring。

(g)分三种情形讨论。

第一种情形， R,S都是0-finite，那么

$$
|R.S\cap 0^*|\le |R\cap 0^*||S\cap 0^*|<\infty
$$

$R.S$是boring。

第二种情形，R中S至少有一个不包含全0的字符串以及空串，那么

$$
|R.S\cap 0^*|=0<\infty
$$

第三种情形，R,S都包含全0的字符串以及空串，且不都是0-finite，不妨设R不是0-finite，那么$\bar{R}$是0-finite，注意R,S包含空串，所以我们有

$$R \subset R.S$$

因此

$$\overline{R.S} \subset \bar{R}$$

所以

$$\begin{aligned} |\overline{R.S} \cap 0^*| &\leq |\overline{R} \cap 0^*| \\ &< \infty \end{aligned}$$

那么$R.S$是boring。

(h)如果R是boring，那么$\overline{R}$也是boring，因为c-d语言是由并，拼接以及补操作构造的，所以由(f)，(g)，(h)可知，c-d语言是boring。