

Problem 1

略过，画图即可。

Problem 2

\Rightarrow

反证法，如果存在 a, b ，使得 a, b 之间有两条不同路径 e_1, e_2 ，那么 $a \xrightarrow{e_1} b \xrightarrow{e_2} a$ 是一个循环，矛盾。

\Rightarrow

如果任意两点间有唯一的路径，那么必然没有循环，所以该图是树。

Problem 3

任取最小生成树 T ，假设 $e \notin T$ ，那么

$$T \cup e$$

必然有包含 e 的循环，那么删除该循环中 e 以外的另一条边依然为一个生成树，并且权重更小，这就与 T 的定义矛盾，所以 $e \in T$ 。

Problem 4

(a)关于顶点数 n 做数学归纳法，令

$$P(n) = \text{顶点数为 } n, \text{ 宽度为 } 1 \text{ 的图是森林}$$

$n = 1$ 时结论显然，假设 $n = k$ 时结论成立，那么 $n = k + 1$ 时，根据题意可以将所有顶点排序出来，现在删除排序后最后一个顶点，删除该顶点相连的边，由题意可知最多删除一条，那么删除后的图为 k 个顶点的图，并且该图的宽度依然为1，根据归纳假设可得删除后的图为森林，现在将删除的顶点和边加上，那么该图依然是森林。

(b)关于顶点数 n 做数学归纳法，令

$$G(n) = n \text{ 个顶点的树宽度为 } 1$$

$n = 1$ 时结论显然，假设 $n = k$ 时结论成立，那么 $n = k + 1$ 时，删除任意的叶节点及其对应的边，剩余的图为 $n - 1$ 个节点的图，由归纳假设，其宽度为1，所以对应一个序列，现在将叶子节点加入序列最后一位，由其性质可得，排在它前面的只有一个相邻点，所以原树的宽度依然为1。

因为森林可以由几颗树构成，所以森林的宽度同样为1，结合(a)可得图是森林当且仅当其宽度为1。