Problem 3.1

新的真值表为

P	Q	P **IMPLIES** Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

不难看出新的⇒即为AND关系

Problem 3.2

(a)R AND NOT(Q)

(b)P AND Q AND R

(c)R IMPLIES P

(d)P AND NOT(Q) AND R

Problem 3.3

因为这里要考虑语义，母亲的话中明显有“如果写完作业，就能看电视”的含义，由于连续不一定可导，所以数学家的话不能翻译为IFF

Problem 3.4

代码如下：

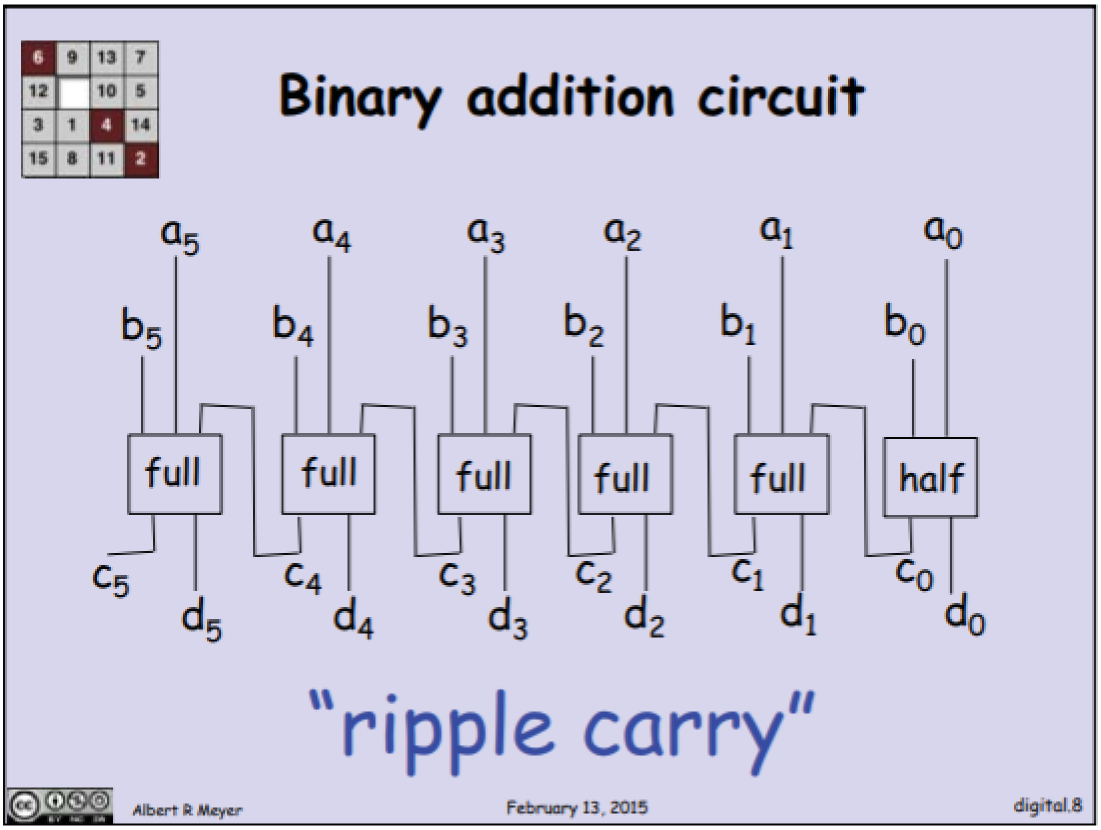
```python
def f(n):
    if n == 1:
        return [["T"], ["F"]]
    else:
        temp = f(n - 1)
        r1 = [i + ["T"] for i in temp]
        r2 = [i + ["F"] for i in temp]
        return r1 + r2
result = f(5)
for i in result:
    print(" ".join(i))
```

Problem 3.5

(a)该题即为模拟二进制数和一位的二进制数的加法，两个二进制相加是用XOR运算，进位是用AND运算，所以可得：

$$c_0 = b$$
$$s_k = a_k \text{ XOR } c_k, c_k = a_{k-1} \text{ AND } s_{k-1}$$

(b)利用(a)一位一位相加，把上述过程用下图表示，d_i表示结果，c_i表示进位：

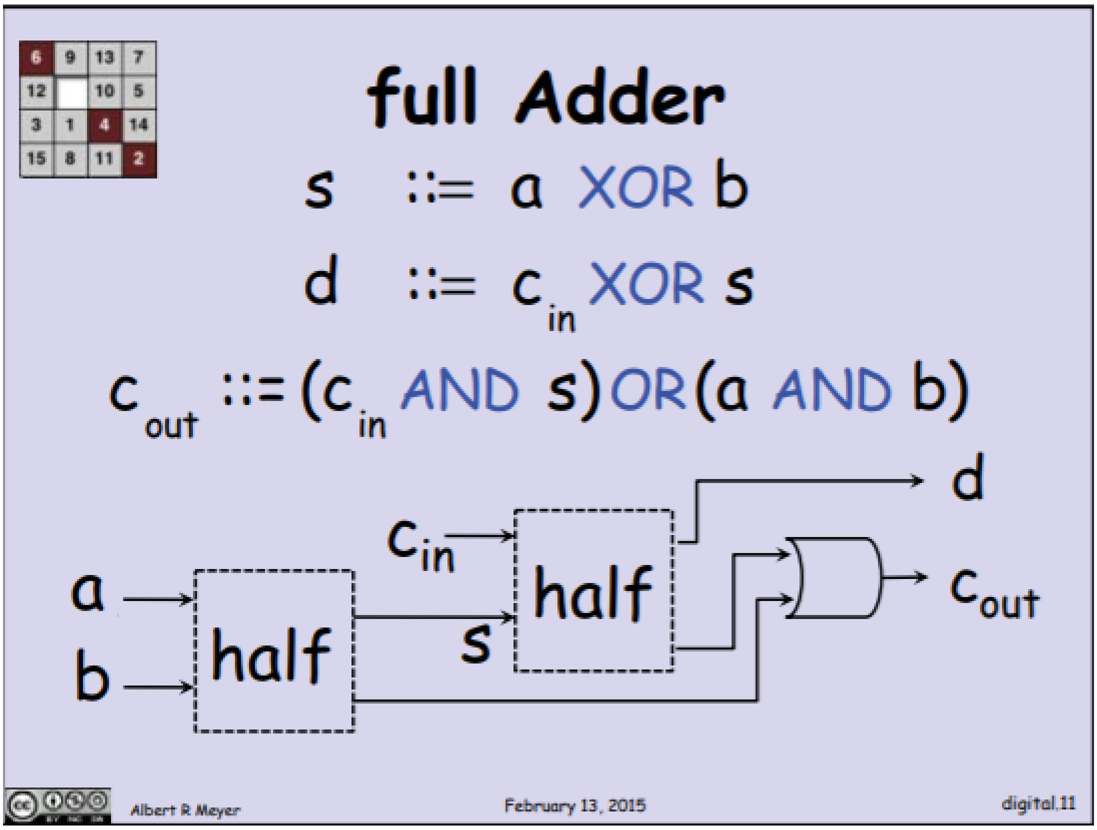


由于末位加法不需要考虑进位，所以称为half Adder，具体关系如下图：

所以

$$d_0 = a_0 \text{ XOR } b_0, c_0 = a_0 \text{ AND } b_0$$

其余位数的加法要考虑进位问题，所以称为full Adder，具体关系如下图：



首先a, b做XOR运算，得到临时结果s，然后和之前的进位c_{in}再做一次XOR运算，得到最终结果d，然后计算进位c_{out}，不难看出之前两次运算如果有一次有进位，那么$c_{out}=1$，因此$c_{out}=(c_{in}\text{ AND } s)\text{ OR }(a\text{ AND } b)$

把之前的结果整理归纳可得

$$
\begin{gathered}
d_0=a_0 \text{ AND } b_0, c_0=a_0 \text{ XOR } b_0 \\
s_i=a_i \text{ XOR } b_i, d_i=c_{i-1} \text{ XOR } s_i \\
c_i=(c_{i-1} \text{ AND } s_i) \text{ OR }(a_i \text{ AND } b_i)
\end{gathered}
$$

(c)从(b)中不难看出每一轮要做5次逻辑运算，结合一开始2次，所以一共要$5n+2$次

Problem 3.6

(a)

$$
\begin{gathered}
p_0=a_0 \text{ XOR } 1 \\
c=a_0 \text{ AND } 1
\end{gathered}
$$

(b)如果$b=1$，则$o_i=p_i$，否则$o_i=a_i$，从而

$$
o_i=(p_i \text{ AND } b) \text{ OR }(a_i \text{ AND }(\text{ NOT } b))
$$

(c)如果$c_{(1)}=1$，那么$c=c_{(2)}$，否则$c=c_{(1)}=0$，从而

$$
c=c_{(1)} \text{ AND } c_{(2)}
$$

(d)如果$c_{(1)}=1$，那么$p_i=r_{i-(n+1)}$，否则$p_i=a_i$，从而

$$
p_i=(r_{i-(n+1)} \text{ AND } c_{(1)}) \text{ OR }(a_i \text{ AND }(\text{ NOT } c_{(1)}))
$$

(e)假设$n=2^k$位需要的操作次数为$T(2^k)$，注意前一半和后一半的加法可以同时完成，完成之后我们只要计算根据$c_{(1)}$的值判断输出结果即可，所以

$$
\begin{gathered}
T(1)=2 \\
T(2^k)=T(2^{k-1})+1 \\
T(2^k)=O(k) \\
T(n)=O(\log n)
\end{gathered}
$$

Problem 3.7

(a)一共6个变量，如果用真值表，需要$2^6=64$行

(b)要使得上式为True，那么M为True，N为False，如果P为True，那么Q,R,S为True；如果P为False，那么Q,R,S为False，所以一共有两种truth environments

Problem 3.8

- 1.S，$M:T,Q:T$时成立
- 2.S，$M:F,P$和Q任意时成立
- 3.S，$M:T,P:F$时不成立，$M:T,Q:T$时成立
- 4.S，$P:T,Q:F$时不成立，$P:T,Q:T$时成立
- 5.注意

  $$(\overline{P} \text{ AND } \overline{Q}) = \text{ NOT } (P \text{ OR Q})$$

  所以S，$P:F,Q:F$时成立
- 6.S，$P:F,Q:F,M:F$时成立
- 7.S，$P:F,Q:T$时成立
- 8.V

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	P XOR Q	$\overline{P}$ OR $\overline{Q}$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T

- 9.S，P,Q,M都为T时成立

Problem 3.9

第一个式子只有在P,Q,R全为F时才为F，否则都为T。第二个式子如果P,Q,R全为F时则为F，否则至少存在一个T，不妨设为P，如果Q,R都是T，那么P AND Q AND R为T；如果Q,R都是F，那么P AND (NOT Q)为T；如果一个为T，一个为F，那么P AND (NOT Q)和Q AND NOT (P)至少有一个为T，从而第二个式子也只有P,Q,R全为F时才为F，否则都为T。因此结论成立。

Problem 3.10

由狄摩根律即可得到，这里略过穷举。

Problem 3.11

(a)

P	Q	P **IMPLIES** Q	Q **IMPLIES** P	**(**P **IMPLIES** Q**) OR (**Q **IMPLIES** P**)**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

(b)直接取

$$P \Leftrightarrow Q$$

注意上式等价于

$$\begin{gathered}(P \Leftarrow Q) \text{ AND } (Q \Leftarrow P) \\ (\bar{P} \text{ OR } Q) \text{ AND } (\bar{Q} \text{ OR } P)\end{gathered}$$

(c)如果P is valid，那么没有一个环境可以使得NOT(P)成立，即NOT(P) is not satisfiable，反之也成立。

(d)

$$S = (\text{NOT } P_1) \text{ OR } (\text{NOT } P_2) \ldots (\text{NOT } P_n)$$

如果S是valid，那么P_i不能全为T，所以$P_1, \ldots, P_k$不是consistent，反之，因为P_i不能全为T，所以S是valid

Problem 3.12

(a)

$$
\begin{gathered}
\neg L \rightarrow Q \\
\neg L \rightarrow B \\
\neg L \leftrightarrow N \\
\neg Q \rightarrow B \\
\neg B
\end{gathered}
$$

(b)要使得上述命题全真，则B必然为F，然后根据上述关系可得

L	Q	B	N
T	T	F	F

(c)由填表的过程不难看出使得上述命题全真的情形唯一。

Problem 3.13

(a)因为

$$A \text{ IFF } B = (A \text{ IMPLIES } B) \text{ AND } (B \text{ IMPLIES } A)$$

所以

$$A \text{ IFF } B = (\text{NOT}(A) \text{ OR } B) \text{ AND } (\text{NOT}(B) \text{ OR } A)$$

对于异或运算

$$A \text{ XOR } B = (A \text{ AND NOT}(B)) \text{ OR } (B \text{ AND NOT}(A))$$

(b)

$$A \text{ AND } B = \text{NOT}(\text{NOT}(A) \text{ OR NOT}(B))$$

(c)

$$\text{NOT}(A \text{ AND } B) = (\text{NOT } A) \text{ OR } (\text{NOT } B)$$

Problem 3.14

不难看出

$$P \text{ NOR } Q = \text{NOT}(P \text{ OR } Q)$$

所以

$$
\begin{aligned}
(P \text{ NOR } Q) \text{ NOR } (P \text{ NOR } Q) &= \text{NOT}\Big((\text{NOT}(P \text{ OR } Q)) \text{ OR } (\text{NOT}(P \text{ OR } Q))\Big) \\
&= (P \text{ OR } Q) \text{ AND } (P \text{ OR } Q) \\
&= P \text{ OR } Q
\end{aligned}
$$

并且

$$P \text{ NOR } 0 = \text{NOT}(P \text{ OR } 0) = \text{NOT } P$$

所以NOR可以表示或运算以及非运算，从而能够表达所有的逻辑运算。

Problem 3.15

如果

$$\begin{aligned}\bar{A} &= P_1 \text{ OR } P_2 \ldots \text{ OR } P_n \\ P_i &= Q_1 \text{ AND } Q_2 \ldots \text{ AND } Q_{j_i}\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}A &= \bar{P}_1 \text{ AND } \bar{P}_2 \ldots \text{ AND } \bar{P}_n \\ \bar{P}_i &= \bar{Q}_1 \text{ OR } \bar{Q}_2 \ldots \text{ OR } \bar{Q}_{j_i}\end{aligned}$$

所以可以从否命题的析取范式得到原命题的合取范式。

Problem 3.16

$$\begin{aligned}A \text{ XOR } B \text{ XOR } C =& ((\bar{A} \text{ AND } B) \text{ OR } (\bar{B} \text{ AND } A)) \text{ XOR } C \\ =& \Big(\text{NOT}\big((\bar{A} \text{ AND } B) \text{ OR } (\bar{B} \text{ AND } A)\big) \text{ AND } C\Big) \text{ OR } \Big(\big((\bar{A} \text{ AND } B) \text{ OR } (\bar{B} \text{ AND } A)\big) \text{ AND } \bar{C}\Big) \\ =& \Big(\text{NOT}(\bar{A} \text{ AND } B) \text{ AND NOT}(\bar{B} \text{ AND } A) \text{ AND } C\Big) \text{ OR } \\ & \Big((\bar{A} \text{ AND } B \text{ AND } \bar{C}) \text{ OR } (\bar{B} \text{ AND } A \text{ AND } \bar{C})\Big) \\ =& \Big((A \text{ OR } \bar{B}) \text{ AND } (B \text{ OR } \bar{A}) \text{ AND } C\Big) \text{ OR } (\bar{A} \text{ AND } B \text{ AND } \bar{C}) \text{ OR } (\bar{B} \text{ AND } A \text{ AND } \bar{C})\end{aligned}$$

接着处理$(A \text{ OR } \bar{B}) \text{ AND } (B \text{ OR } \bar{A}) \text{ AND } C$

$$\begin{aligned}(A \text{ OR } \bar{B}) \text{ AND } (B \text{ OR } \bar{A}) \text{ AND } C =& \Big(\big((A \text{ OR } \bar{B}) \text{ AND } B\big) \text{ OR } \big((A \text{ OR } \bar{B}) \text{ AND } \bar{A}\big)\Big) \text{ AND } C \\ =& \Big(\big(A \text{ AND } B\big) \text{ OR } \big(\bar{B} \text{ AND } \bar{A}\big)\Big) \text{ AND } C \\ =& \big(A \text{ AND } B \text{ AND } C\big) \text{ OR } \big(\bar{B} \text{ AND } \bar{A} \text{ AND } C\big)\end{aligned}$$

从而

$$A \text{ NOR } B \text{ NOR } C = \big(A \text{ AND } B \text{ AND } C\big) \text{ OR } \big(\bar{B} \text{ AND } \bar{A} \text{ AND } C\big) \text{ OR } (\bar{A} \text{ AND } B \text{ AND } \bar{C}) \text{ OR } (\bar{B} \text{ AND } A \text{ AND } \bar{C})$$

Problem 3.17

(a)题目的意思是解释为什么3.27是satisfiable等价于下式

$$
\begin{gathered}
\Big(X_1 \text{ IFF } (P \text{ XOR } Q)\Big) \text{ AND} \\
\Big(X_2 \text{ IFF } (X_1 \text{ XOR } R)\Big) \text{ AND} \\
\Big(A \text{ IFF } (\bar{P} \text{ AND } S)\Big) \text{ AND} \\
\Big(O \text{ IFF } (X_2 \text{ OR } A)\Big) \text{ AND} \\
O
\end{gathered}
$$

是satisfiable。记3.27为M，上式为N。

如果N是satisfiable，那么存在一种情形，使得上式每一项都为真，所以有如下关系

命题	真值
O	1
O IFF $(X_2$ OR $A)$	1
A IFF $(\bar{P}$ AND $S)$	1
X_2 IFF $(X_1$ XOR $R)$	1
X_1 IFF $(P$ XOR $Q)$	1

特别地，取

命题	真值
P	0
Q	1
R	1
S	1

此时M为真，所以N是satisfiable可以推出M是satisfiable。

反之，如果M是satisfiable，那么

$$
\begin{gathered}
((P \text{ XOR } Q) \text{ XOR } R)\text{为真} \\
\text{或者} \\
(\bar{P} \text{ AND } S)\text{为真}
\end{gathered}
$$

如果$((P \text{ XOR } Q) \text{ XOR } R)$为真，那么$(X_1 \text{ XOR } R)$为真，其中$X_1 \text{ IFF } (P \text{ XOR } Q)$，所以$X_2$为真，从而$(X_2 \text{ OR } A)$为真，$O$为真；

如果$(\bar{P} \text{ AND } S)$为真，那么A为真，从而$(X_2 \text{ OR } A)$为真，O为真。

无论哪种情形，都可以得到O为真，接着按照要求赋值即可，从而M是satisfiable可以推出N是satisfiable。

(b)该题参考如下解答，但是没有完全解出来，但感觉基本思路应该是对的。

https://cs.stackexchange.com/questions/3021/3cf-3-conjunctive-form-satisfiability

首先不难得到如下关系

$$a \Leftrightarrow b \text{ IFF } (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)$$

结合(a)可知，我们每一次的操作为引入b，使得

$$a \Leftrightarrow b$$

该逻辑运算等价于

$$(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)$$

其中

$$b = c * d, *\text{为某种逻辑操作}$$

注意到$b = c * d$一定能表示为如下形式

$$(c \vee d) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (c \vee \bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

$\bar{b}$一定能表示为如下形式

$$(c \vee d) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (c \vee \bar{d}) \wedge (\bar{c} \vee \bar{d})$$

带入不难发现一共有8个三元组，即24个变量。从而每一步的变量从2最多变为24，从而总体变量最多变为12倍。

(c)对每个二元运算$a * b$，引入c，使得

$$c \text{ IFF } a * b$$

然后利用(b)的方法得到规范形式。

Problem 3.18

题目的意思是用命题公式或者数字电路表达SAT问题是一致的。我没有完全理解题目的含义，但是感觉因为数字电路能够表达非，或逻辑，所以就可以表达命题公式，从而两者没有区别。

Problem 3.19

(a)1,3

(b)1,3,4

(c)1,2,4

Problem 3.20

不难看出(a)正确，因为(a),(d)等价，所以(d)也正确。