Problem 1

这里直接计算结果。

(a)

$$C_7^2 \times 5!$$

(b)

$$6 \times C_7^2 \times 5!$$

(c)

$$6 \times 5 \times 4 \times C_7^2 \times C_5^2$$

Problem 2

(a)一共5个元音字母，剩下有21个非元音字母，这部分先排列，总数为$21!$，元音字母从除了最后一个间隔以外21个间隔内进行排列，总数为P_{21}^5，所以总数为

$$21! \times P_{21}^5$$

(b)利用减法即可：

$$26! - 21! \times P_{22}^5$$

(c)

$$(2n-1)!!$$

(d)每种type可以唯一对应一个递增的序列：

$$0 \le y_1 \le \ldots \le y_8 \le 9$$

回顾in class question 25的第三题可得总数为

$$C_{17}^8$$

Problem 3

(a)只要证明当$k_i < p, i = 1, \ldots, n$时，我们有

$$p \Big| \binom{p}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

即可。事实上，因为

$$\binom{p}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{p!}{\prod_{i=1}^n k_i!} = p\frac{(p-1)!}{\prod_{i=1}^n k_i!}$$

因为p是质数，所以$k_i < p$时，我们有

$$(k_i!, p) = 1$$

所以

$$(\prod_{i=1}^n k_i!, p) = 1$$

由组合数的定义可知

$$\prod_{i=1}^n k_i! \big| p \times (p-1)!$$

所以

$$\prod_{i=1}^n k_i! \big| (p-1)!$$

因此

$$\frac{(p-1)!}{\prod_{i=1}^n k_i!}$$

是整数，由此

$$p \big| p\frac{(p-1)!}{\prod_{i=1}^n k_i!} = \binom{p}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

(b)取$x_i = 1$可得

$$n^p \equiv n \mod p$$

所以

$$p \big| (n^p - n) = n(n^{p-1} - 1)$$

因为n不是p的倍数，并且p是质数，所以

$$(n, p) = 1$$

因此

$$p | n^{p-1} - 1$$

即

$$n^{p-1} \equiv 1 \mod p$$