Problem 1

利用反证法，假设$\log_4 6=\frac{m}{n},m,n\in\mathbb{N}$且$m,n$互质，那么

$$\begin{aligned}n\log_4 6&=m\\ \log_4 6^n&=m\\ 6^n&=4^m\\ 3^n&=2^{2m-n}\end{aligned}$$

最后一步显然不可能，所以$\log_4 6$是无理数

Problem 2

考虑如下集合：

$$N::=\{n|n\in\mathbb{N},n>3^{\frac{n}{3}}\}$$

下面将证明N为空集。根据WOP，N中存在最小值n_1，注意$0,1,2,3,4$满足$n\le 3^{\frac{n}{3}}$，所以$n_1\ge 4$，由定义可知

$$n_1-1\le 3^{\frac{n_1-1}{3}}$$

那么

$$n_1\le 3^{\frac{n_1-1}{3}}+1$$

注意到

$$3^{\frac{n_1-1}{3}}+1\le 3^{\frac{n_1}{3}}\Leftrightarrow 3^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{n_1}{3}}\le 1$$

由$n_1\ge 4$可得

$$3^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{n_1}{3}}\le 3^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{4}{3}}<0.925<1$$

从而$3^{\frac{n_1-1}{3}}+1\le 3^{\frac{n_1}{3}}$成立，因此

$$n_1\le 3^{\frac{n_1-1}{3}}+1\le 3^{\frac{n_1}{3}}$$

这就与n_1的定义相矛盾，从而N为空集

Problem 3

(a)

P	Q	P IMPLIES Q	Q IMPLIES P	(P IMPLIES Q) OR (Q IMPLIES P)
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

(b)直接取

$$P \Leftrightarrow Q$$

注意上式等价于

$$\begin{gathered}(P \Leftarrow Q) \text{ AND } (Q \Leftarrow P) \\ (\bar{P} \text{ OR } Q) \text{ AND } (\bar{Q} \text{ OR } P)\end{gathered}$$

(c)如果P is valid ，那么没有一个环境可以使得NOT(P)成立，即NOT(P) is not satisfiable，反之也成立。

(d)

$$S = (\text{NOT } P_1) \text{ OR } (\text{NOT } P_2) \ldots (\text{NOT } P_n)$$

如果S是valid，那么P_i不能全为T，所以$P_1, \ldots, P_k$不是consistent，反之，因为P_i不能全为T，所以S是valid

Problem 4

(a)

$$\begin{gathered}p_0 = a_0 \text{ XOR } 1 \\ c = a_0 \text{ AND } 1\end{gathered}$$

(b)如果$b=1$，则$o_i = p_i$，否则$o_i = a_i$，从而

$$o_i = (p_i \text{ AND } b) \text{ OR } (a_i \text{ AND } (\text{ NOT } b))$$

(c)如果$c_{(1)} = 1$，那么$c = c_{(2)}$，否则$c = c_{(1)} = 0$，从而

$$c = c_{(1)} \text{ AND } c_{(2)}$$

(d)如果$c_{(1)} = 1$，那么$p_i = r_{i-(n+1)}$，否则$p_i = a_i$，从而

$$p_i = (r_{i-(n+1)} \text{ AND } c_{(1)}) \text{ OR } (a_i \text{ AND } (\text{ NOT } c_{(1)}))$$

(e)假设$n = 2^k$位需要的操作次数为$T(2^k)$，注意前一半和后一半的加法可以同时完成，完成之后我们只要计算根据$c_{(1)}$的值判断输出结果即可，所以

$$T(1) = 2$$
$$T(2^k) = T(2^{k-1}) + 1$$
$$T(2^k) = O(k)$$
$$T(n) = O(\log n)$$