

Problem 1

如果结论不成立，假设 M, N 为两颗最小生成树，令 e 集合 $(M - N) \cup (N - M)$ 中最短的边，不失一般性，假设 $e \in M - N$ ，由定义可得 $N \cup e$ 包含循环，不妨设该环为 R ，如果存在 $r \in R$ ，并且 $r > e$ ，那么 $N \cup e - r$ 依然为生成树，但是长度更小，这就与 N 为最小生成树矛盾；如果 $\forall r \in R, r < e$ ，那么因为 e 为属于 M 但不属于 N 的最短边，我们必然有 $r \in N$ ，即 $R \subseteq N$ ，所以 N 中包含一个环，这就与 N 为最小生成树矛盾。

Problem 2

(a)(b)画图即可验证这点。

Problem 3

(a)直接验证即可。

(b)因为

$$(B_1, G_2), (B_2, G_1)$$

也是stable matching，所以不是boy-pessimal。

因为

$$(B_3, G_4), (B_4, G_3)$$

也是stable matching，所以不是boy-optimal。

(c)只要按照提示分组即可，每组男生和对应的女生可以构成两种stable assignment，因为一共有 $\frac{n}{2}$ 组，所以stable assignment的数量大于等于

$$2^{\frac{n}{2}}$$