Problem 1

令

$$C ::= \{n | S(n), 3 \nmid n\}$$

如果C非空，那么C中存在最小值m，因为$5 \mid 0$，所以$m > 0$，那么由定义可知m至少由一枚6分的硬币或者一枚15分的硬币组成，因此$S(m-6)$或者$S(m-15)$成立，那么由m的最小性可知$3 \mid m-6$或$5 \mid m-15$，无论那种情形，都可以推出$3 \mid m$，这就产生了矛盾，从而C为空集

Problem 2

令

$$C ::= \{n | \sum_{k=0}^{n} k^2 \neq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}\}$$

我们来利用WOP证明C为空集，利用反证法，假设C非空，那么C中存在最小值m，因为$0^2 = \frac{0\times(0+1)\times(2\times0+1)}{6}$，所以$m > 0$，那么由定义可知

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}$$

两边加上m^2可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} k^2 &= \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + m^2 \\ &= \frac{m[(m-1)(2m-1)+6m]}{6} \\ &= \frac{m[2m^2-3m+1+6m]}{6} \\ &= \frac{m(2m^2+3m+1)}{6} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\end{aligned}$$

这就产生了矛盾，从而C为空集

Problem 3

考虑如下集合：

$$D ::= \{d | \text{存在正整数} a, b, c \text{使得} 8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4\}$$

下面将证明D为空集。根据WOP，D中存在最小值d_1，对应的a,b,c为a_1,b_1,c_1，即

$$8a_1^4+4b_1^4+2c_1^4=d_1^4$$

因为左边为偶数，所以d_1^4为偶数，从而$2\mid d_1$，因此$d_1=2d_2,d_2\in\mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned}8a_1^4+4b_1^4+2c_1^4&=16d_2^4\\4a_1^4+2b_1^4+c_1^4&=8d_2^4\end{aligned}$$

同理$2\mid c_1$，因此$c_1=2c_2,c_2\in\mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned}4a_1^4+2b_1^4+16c_2^4&=8d_2^4\\2a_1^4+b_1^4+8c_2^4&=4d_2^4\end{aligned}$$

同理$2\mid b_1$，因此$b_1=2b_2,b_2\in\mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned}2a_1^4+16b_2^4+8c_2^4&=4d_2^4\\a_1^4+8b_2^4+4c_2^4&=2d_2^4\end{aligned}$$

同理$2\mid a_1$，因此$a_1=2a_2,a_2\in\mathbb{Z}^+$，带入上式可得

$$\begin{aligned}16a_2^4+8b_2^4+4c_2^4&=2d_2^4\\8a_2^4+4b_2^4+2c_2^4&=d_2^4\end{aligned}$$

这说明$d_2<d_1$，但是$d_2\in D$，与d_1的定义矛盾，从而D为空集，原方程无正整数解

Problem 4

考虑如下集合：

$$C::=\{c|c\in\mathbb{N},\ c<2^{m+1},c\text{不能表示为}1,2,2^2,\ldots,2^m\text{中某些数的和}\}$$

下面将证明C为空集。根据WOP，C中存在最小值c_1，因为$0,1$都能表示为$1,2,2^2,\ldots,2^m$中某些数的和，所以$c_1\ge 2$，找到最大的k，使得$c_1-2^k\ge 0$，那么由c_1的定义可知，c_1-2^k可以表示为$1,2,2^2,\ldots,2^m$中某些数的和，注意由k的定义可知$c_1<2^{k+1}$，从而$0\le c_1-2^k<2^k$，这说明c_1-2^k只能表示为$1,2,2^2,\ldots,2^{k-1}$中某些数的和，从而$c_1=c_1-2^k+2^k$可以表示为$1,2,2^2,\ldots,2^k$中某些数的和，这就与c的定义相矛盾，从而C为空集

Problem 5

考虑如下集合：

$$C::=\{c|c\ge 30,c\neq 6m+10n+15q,n,m\text{为非负整数}\}$$

下面将证明C为空集。根据WOP，C中存在最小值c_1，注意到

$$
\begin{gathered}
30 = 15 \times 2 \\
31 = 6 + 10 + 15 \\
32 = 6 \times 2 + 10 \times 2 \\
33 = 6 \times 3 + 15 \\
34 = 6 \times 4 + 10 \\
35 = 10 \times 2 + 15
\end{gathered}
$$

因此$c_1 \geq 36$，那么$c_1 - 6 \geq 30$，由定义可知$c_1 - 6$可以表示为$6m + 10n + 15q$的形式，从而

$$c_1 = c_1 - 6 + 6 = 6m + 10n + 15q + 6 = 6(m+1) + 10n + 15q$$

这就与c_1的定义相矛盾，从而C为空集