Problem 1

不失一般性，假设水和酒初始的数量为1。

(a)假设n步back-and-forth pouring后第一个杯子中酒的比例为a_n，第二个杯子中酒的比例为b_n，那么不难看出

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0, b_0 = 1 \\
a_n + b_n &= 1
\end{aligned}
$$

考虑第$n+1$次back-and-forth pouring，第一步从第一杯中倒$\frac{1}{3}$到第二杯中，此时第二杯中酒的含量为

$$
\frac{1}{3}a_n + b_n
$$

第二步从第二杯倒$\frac{1}{3}$到第一杯中，那么

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}a_n + b_n) \\
&= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}a_n + 1 - a_n) \\
&= \frac{4}{9}a_n + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(b)设极限为a，令$n \to \infty$可得

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{4}{9}a + \frac{1}{3} \\
a &= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Problem 2

(a)因为要来回，所以1加仑水离开的最远距离为$\frac{1}{2}$。

(b)类似例子中的思路，首先带1加仑水，先存放$\frac{1}{2}$加仑到距离起点$\frac{1}{4}$的距离，这部分共需要花1加仑，接着从起点带着剩下的1加仑出发，走到之前存水的位置时加满水，然后再往前走$\frac{1}{2}$的距离后返回，这样恰好可以返回，此时行走的距离为

$$
\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}
$$

(c)按照题目中的提示思考，首先想办法存储$n-1$加仑的水，假设存储点距离出发点为a，那么来回一次可以存储的加仑数为

$$
1 - 2a
$$

假设来回k次，那么总共存储的加仑数为

$$
k(1-2a)
$$

要使得上式为$n-1$，可取

$$k=n, a=\frac{1}{2n}$$

即缓存点距离出发点的距离为$\frac{1}{2n}$。注意最后一次运水后缓存点的加仑数为$n-1$，此时将身上剩下的$\frac{1}{2n}$加仑水也存储起来，利用剩下的$n-1$加仑前进，最远的前进距离为$n-1$加仑水前进的最远距离，最后回到存储点用剩下的$\frac{1}{2n}$返回出发点即可，如果记按这个策略操作，出发点有n加仑水达到的最远距离为d_n，那么

$$d_n=\frac{1}{2n}+d_{n-1}$$

特别的，我们取

$$d_1=\frac{1}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}
d_n&=\frac{1}{2n}+d_{n-1}\\
&=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}+d_{n-2}\\
&=\ldots\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\\
&=\frac{1}{2}H_n
\end{aligned}$$

(d)令

$$\begin{aligned}
d_n&=\frac{1}{2}H_n=10\\
H_n&=20
\end{aligned}$$

因为$H_n\sim\ln n$，所以

$$n\approx e^{20}$$

大约需要132万年。

Problem 3

记

$$\begin{gathered}
g(x)=f(n)-f(x)\ge 0, 0\le x\le n\\
S_1=\sum_{i=1}^{n}g(i)=nf(n)-\sum_{i=1}^{n}f(i)=nf(n)-S
\end{gathered}$$

不难看出$g(x)$单调递增，那么

$$I_1+f(n)-f(1)=I_1+g(1)\le S_1\le I_1+g(n)=I_1$$

因为

$$I_1=\int_1^n (f(n)-f(x))dx=(n-1)f(n)-I$$

所以

$$\begin{gathered}nf(n)-I-f(1)\le nf(n)-S\le (n-1)f(n)-I\\ I+f(n)\le S\le I+f(1)\end{gathered}$$

Problem 4

(a)

$$(m+f)p=mp+fp$$

(b)

$$\left((m+f)p+f\right)p=mp^2+fp^2+fp$$

(c)第d天的债务为

$$mp^d+f\left(\sum_{i=1}^d p^i\right)=mp^d+f\frac{p(1-p^d)}{1-p}$$

(d)取$m=10,d=365,f=0.1,p=1.01$可得

$$749.3470300910341$$

Problem 5

因为

$$T-zT=\sum_{i=1}^n z^i-nz^{n+1}=\frac{z(1-z^n)}{1-z}-nz^{n+1}$$

所以

$$T=\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}-\frac{nz^{n+1}}{1-z}$$