Problem 1

(a)

$$
\begin{gathered}
(P \text{ AND } \bar{Q}) \text{ OR } (P \text{ AND } Q) \Leftrightarrow \\
P \text{ AND } (\bar{Q} \text{ OR } Q) \Leftrightarrow \\
P
\end{gathered}
$$

(b)

$\Rightarrow$：已知$x \in A$

如果$x \in B$，那么$x \in A \bigcap B$，如果$x \notin B$，那么$x \in A - B$，无论那种情形，都有

$$x \in (A - B) \bigcup (A \bigcap B)$$

$\Leftarrow$：已知$x \in (A - B) \bigcup (A \bigcap B)$

那么$x \in A - B$或$x \in A \bigcap B$，无论那种情形， 都有$x \in A$

综上

$$A = (A - B) \bigcup (A \bigcap B)$$

Problem 2

(a)

$$\nexists z. (z \in x)$$

(b)

$$\forall u. (u \in x \Leftrightarrow y \in x \text{ OR } z \in x)$$

(c)

$$\forall z. (z \in x \Rightarrow z \in y)$$

(d)

$$(x \subseteq y \bigcup z) \text{ AND } (y \bigcup z \subseteq x)$$

(e)

$$\forall u. (u \in x \Leftrightarrow u \in y \text{ AND } u \notin z)$$

(f)

$$\forall z. (z \subseteq y \Rightarrow z \in x)$$

(g)

$$\forall z.\,(z \in y \Rightarrow z \in x)$$

Problem 3

(a)因为(a,b)有序，而$\{a,b\}$无序

(b)$\{\{1\},\{2\}\}$可以表示$(1,\{2\})$或$(2,\{1\})$

(c)只要说明$\{a,\{a,b\}\}$可以唯一确定$\mathrm{pair}(a,b)$即可。

用$\{c,d\}$表示$\{a,\{a,b\}\}$，如果$c \in d$，那么$a=c, b=d\setminus c$；否则$a=d, b=c\setminus d$

Problem 4

假设四个元素为a,b,c,d，那么全部可选的集合为

$$\begin{gathered}\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\\ \{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\\ \{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\}\end{gathered}$$

下面分几种情形讨论。

情形一：第一个人选择三个元素，不妨设为$\{a,b,c\}$，那么第二个人选择$\{d\}$，剩余可选择的集合为：

$$\begin{gathered}\{a\},\{b\},\{c\}\\ \{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\end{gathered}$$

这样就可以化为三个元素的情形，所以第二个人胜利。

情形二：第一个人选择一个元素，那么第二个人选择剩余三个元素，这样就可以化为三个元素的情形，所以第二个人胜利。(类似第一种情形)

情形三：第一个人选择两个元素，不妨设为$\{a,b\}$，那么第二个人选择$\{c,d\}$，剩余可选择的集合为：

$$\begin{gathered}\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\\ \{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\}\end{gathered}$$

接下来进入第二轮，如果第一个人选择一个元素，由对称性，不妨设为$\{a\}$，那么第二个人选择$\{b\}$，剩余可选择的集合为：

$$\{c\},\{d\}$$

接下来即为两个元素的情形， 所以第二个人必胜。

如果第一个人选择两个元素，由对称性，不妨设为$\{a,c\}$，那么第二个选择互补的集合$\{b,d\}$，剩余可选择的集合为：

$$\begin{gathered}\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\\ \{a,d\},\{b,c\}\end{gathered}$$

接下来进入第三轮，如果第一个人选择一个元素，由对称性，不妨设为$\{a\}$，那么第二个人选择$\{b\}$，剩余可选择的集合为：

$$\{c\},\{d\}$$

接下来即为两个元素的情形， 所以第二个人必胜。

如果第一个人选择两个元素，由对称性，不妨设为$\{a,d\}$，那么第二个人也选择二元素集$\{b,c\}$，剩余可选择的集合为：

$$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$$

接下来必然是一人拿一个的情形， 所以第二个人必胜。