Problem 1

(a)作图后不难得出安排为：

	课程
第一学期	18.01,8.01,6.001
第二学期	18.02,6.042,18.03,8.02,6.034
第三学期	6.046,6.002
第四学期	6.840,6.003,6.004
第五学期	6.033
第六学期	6.857

(b)要5门课同时修，并且不包含18.03，那么6.002必然修了，画图后不难发现18.02,6.034,6.003必选，第四门课可以选6.042,6.046,6.840，第五门课可以选6.004,6.033,6.857。

(c)按照问题(a)中的课程从上到下，从左到右学习即可。

(d)一共15门课，所以至少需要8学期，实际中可以安排为8学期，具体如下

	课程
第一学期	18.01,8.01
第二学期	6.001,18.02
第三学期	6.042,18.03
第四学期	8.02,6.034
第五学期	6.046,6.002
第六学期	6.003,6.004
第七学期	6.840,6.033
第八学期	6.857

(e)注意至少需要6学期才能修完，并且存在6学期修完的方法：

	课程
第一学期	18.01,8.01,6.001
第二学期	6.042,18.03,8.02
第三学期	6.046,6.002,18.02
第四学期	6.034,6.003,6.004
第五学期	6.840,6.033
第六学期	6.857

Problem 2

(a)可以如下安排：

甲：devise logo,seize control, get shots,train army, launch fleet

乙：build fleet,open chain,defeat Microsoft

(b)下界为：

$$\lceil (8+18+9+11+10+4+6+8)/2 \rceil = 37$$

这个下界之所以低，是因为任务有先后关系，无法让两个按照最短时间完成。

(c)下界为：

$$8+9+10+4+8=39$$

这个下界之还是会低，仍然是因为任务有先后关系，例如上述安排就没考虑build fleet。

(d)按照(a)的安排即可，总时间为

$$40$$

Problem 3

(a)

1. 4
2. 2
3. 3

(b)由鸽笼原理，至少有一周有

$$\lceil \frac{n}{t} \rceil$$

个任务需要进行，所以至少需要

$$\lceil \frac{n}{t} \rceil$$

(c)答案为

$$\max\{\lceil \frac{n}{t} \rceil, n-t+1\}$$

最坏的情形为第一周有$n-t+1$个任务，其余每周有1个任务，结合(b)可知要取最大值。

Problem 4

(a)covering edges有：

$$1\to 2, 1\to 3, 1\to 5, 2\to 4, 2\to 6, 3\to 6$$

(b)任取a,b，下面证明从a到b的最长路径得到保留，假设中间节点为

$$c_0,\ldots,c_n$$

由最长路径的定义可得边$c_n\to b$为c_n到b的最长路径，即c_n,b之间只有一条路径，所以$c_n\to b$没被删除。注意到原路径中a到c_n部分也是a到c_n的最长路径，所以同理可得c_{n-1}没被删除，以此类推c_i没被删除，从而最长路径没被删除，因此结论成立。

(c)因为(b)已经证明了最长路径不会被删除，所以为了证明(c)，只需说明非最长路径都被删除即可。任取a,b，考虑非最长路径的中间节点

$$c_0,\ldots,c_n$$

假设从c_m开始该路径和最长路径不重合，因为c_m到b的最长路径没被删除，所以由定义可得

$$c_m,\ldots,c_n$$

必然被删除，因此非最长路径必然被删除。

(d)唯一性由(c)即可得到，只要证明边数量最短即可。假设原图为D，D_1为covering，D_2为包含D中全部walk relation的图，如果D_1的边比D少，那么存在a,b，使得D_1中从a到b路径长度比D冲从a到b的路径短，在原图中找到这两条路径，由covering的定义可知这两条路径必然重合（否则和covering的定义矛盾），这就与假设矛盾，因此D_1的边不可能比D的少。

(e)

图1

$$1\to 2$$

图2

$$1\to 1, 1\to 2$$

covering edge都是$1\to 2$.

(f)(i)没有covering edges

(ii)

$$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$$

(iii)

$$1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 3, 3 \to 1$$