Problem 1

(a)顶点为变量，例如a, b, c, d，如果一个变量需要另一个生成，那么这两个顶点相连。

(b)记register为$1, 2, 3$，按如下方式分配即可：

$$
\begin{aligned}
1 &: c, h \\
2 &: a, b, f \\
3 &: d, e, g
\end{aligned}
$$

(c)将后来的t视为新的变量即可。

Problem 2

(a)两个矩形构成的图。

(b)错误在于$n+1$个节点构成的图删除任何一个节点后构成的n个节点的子图不一定度数都大于0。

Problem 3

(a)$\Rightarrow$：因为P, Q和N相连，所以P, Q颜色不是N

$\Leftarrow$：P, Q颜色不是N，取P, Q为F，$P \text{ or } Q$为F即可用三种颜色对图着色。

(b)$\Rightarrow$：此时$P \text{ or } Q$为T，如果P, Q都是F，那么P, Q上方的点只能是N，这就与相邻节点颜色不同矛盾。

$\Leftarrow$：P, Q中至少一个为T，由对称性，不妨设为P。如果$P \text{ or } Q$不是T，那么只能为F，所以P正上方的点只能为N，因此Q正上方的点只能为T，Q只能为F，因此P, Q下方的点为N，T右侧的点只能为T，这就与相邻节点颜色不同矛盾。

(c)将T右侧的节点和F相连即可，下面验证这点：

$\Rightarrow$：假设P, Q为T，如果$P \text{ or } Q$为F，那么P, Q正上方的节点为N，但这两个点相连，这就产生了矛盾。

$\Leftarrow$：假设$P \text{ or } Q$为T，如果P, Q都为F，那么P, Q正上方的节点都为N，但这两个点相连，这就产生了矛盾；如果P, Q中只有一个为F，那么P, Q下方的顶点为N，所以P左侧的点必然为T，然而该点与$P \text{ or } Q$相连，这就产生了矛盾。

Problem 4

(a)首先考虑距离为1的点：由对称性，只讨论$000, 001$：

$$
\begin{aligned}
000, 001 \\
000, 010, 011, 001 \\
000, 100, 101, 001
\end{aligned}
$$

接着考虑距离为2的点：由对称性，只讨论$000, 011$：

$$
\begin{aligned}
000, 010, 011 \\
000, 001, 011 \\
000, 100, 110, 111, 011
\end{aligned}
$$

最后考虑距离为3的点：由对称性，只讨论$000, 111$：

$$
\begin{aligned}
000, 001, 011, 111 \\
000, 010, 110, 111 \\
000, 100, 101, 111
\end{aligned}
$$

(b)$\forall x, y$，由(a)可得路径不相交，所以删除任意两条边x, y仍然相连，但是删除x, y路径上的三条边，那么x, y就不相连，因此H_3的connectivity为3。

(c)讨论之前给出如下定义：

$$
\begin{aligned}
&(1)\forall a, b \in \{0, 1\}^n, \text{我们称}\ a, b\text{共面，如果}\ \exists i, s.t\ a[i] = b[i] \\
&(2)\bar{x} = 1 - x
\end{aligned}
$$

使用归纳法证明如下结论即可：

$$
\forall x, y \in H_n, \text{存在}n\text{条完全不交的路线从}\ x\text{到}\ y
$$

$n = 1, 2, 3$时结论显然。下面假设$n = k$时结论成立，那么$n = k + 1$时，$\forall u, v$：

case1：

$$
d(u, v) \le k
$$

此时u, v必然共面，不失一般性，不妨设$u[k] = v[k]$，下面分两种情况讨论。

第一种情形为不改变$u[k]$，那么只需考虑$u[0...k-1]$到$v[0...k-1]$的路径数量即可，由归纳假设可得$u[0...k-1]$到$v[0...k-1]$有k条不相交的路径，所以这种情形有k条不相交的路径。

第二种情形为改变$u[k]$为$\bar{u}[k]$，假设第1步经过节点$u[0...k-1]\bar{u}[k]$，并且假设倒数第二步的节点为$v[0...k-1]\bar{v}[k] = v[0...k-1]\bar{u}[k]$，因为

$$
u[0...k-1]\bar{u}[k]
$$

和

$$
v[0...k-1]\bar{u}[k]
$$

在同一平面，所以这两点之间存在k条路径（保持最后一位不变），任取一条路径即可，所以这种情形存在一条路径。注意这种情形和第一种必然不相交，这是因为第一种情形一直保持$u[k]$不变，但是第二种情形的$u[k]$除了最后一步始终为$\bar{u}[k]$；另一方面，由归纳假设，第一种情形的路径必然不相交。

综上有且仅有$k + 1$条不相交的路径。

case2：

$$
d(u, v) = k + 1
$$

不失一般性，不妨设

$$
u = 0^{k+1}, v = 1^{k+1}
$$

注意倒数第二步所在的节点必然为

$$a_i = 1^i \times 0 \times 1^{k-i}, 0 \le i \le k$$

那么u和a_i共面，考虑u, a_i除去第i位以外的部分，这部分长度为k，记为u_{-i}, a_{-i}。由归纳假设，这两点有k条不相交的路径，所以u, a_i之间也有k条不相交的路径，但是这些路径的最后一步必然为

$$a_i \to v$$

所以对每个a_i，只有一条路径。因为一共有$k+1$个a_i，所以总共有$k+1$条路径。

最后证明这些路径都不相交，事实上，对于第i种路径$0 \le i \le k$，除了最后一步，其路径上每一点的第i位必然为0，所以任取第i种路径上的节点s和第j种路径上的节点t，必然有

$$s[i] = 0 \ne t[i]$$

因此这些路径必然不相交。

综上有且仅有$k+1$条不相交的路径。