Problem 1

(a)因为

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

如果

$$p=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

那么

$$p=pM$$

(b)如果从x开始，那么

$$\begin{aligned}p&=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\\ pM&=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\\ pM^2&=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}=p\end{aligned}$$

所以不可能收敛到平稳状态。

(c)

$$M=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.9 & 0.1\end{bmatrix}$$

求解

$$\begin{aligned}p&=pM\\ p_1+p_2&=1\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}p_1&=\frac{9}{19}\\ p_2&=\frac{10}{19}\\ p&=\begin{bmatrix}\frac{9}{19} & \frac{10}{19}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(d)都会趋近于平稳分布。

(e)

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求解

$$
\begin{aligned}
p &= pM \\
p_1+p_2+p_3+p_4 &= 1
\end{aligned}
$$

得到

$$p=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

所以有不可数个平稳分布。

(f)将会趋近于

$$p_3=0$$

(g)取

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

求解

$$
\begin{aligned}
p &= pM \\
p_1+p_2+p_3 &= 1
\end{aligned}
$$

得到

$$p=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Problem 2

设

$$M\in\mathbb{R}^{n\times n}, p=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

⇒：如果均匀分布是平稳分布，那么

$$p=pM$$

所以$\forall j=1,\dots,n$，

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\times\frac{1}{n}=p_i=\frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij}=1$$

⇐：如果

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 1$$

那么

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} \times \frac{1}{n}$$

所以

$$p = pM$$

Problem 3

(a)制造很多空网页，将自己的网页连接到这些空网页即可提高$d(v)$

(b)

$$\begin{aligned}
(dM)_j &= \sum_{i \to j} d_i M_{ij} \\
&= \sum_{i \to j} \frac{\mathrm{outdeg}(i)}{e} \frac{1}{\mathrm{outdeg}(i)} \\
&= \frac{\#\{i \to j\}}{e} \\
&= \frac{\mathrm{outdeg}(i)}{e}
\end{aligned}$$