Problem 1

注意到

$$
\begin{gathered}
26=2\times 13\\
297=3^3\times 11
\end{gathered}
$$

所以$25,297$互质，因此

$$
26^{\phi(297)}\equiv 1\mod 297
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\phi(297)&=\phi(3^3)\times\phi(11)\\
&=(3^3-3^2)\times(11-1)\\
&=180
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{gathered}
26^{180}\equiv 1\mod 297\\
26^{1818181}\equiv 26^{18\times 10101+1}\equiv 26\mod 297
\end{gathered}
$$

Problem 2

(a)因为

$$
\begin{gathered}
2012=2^2\times 503\\
77=7\times 11
\end{gathered}
$$

所以2012和77互质，2012^{1200}和77互质，因此2012^{1200}关于模77存在乘法逆。

(b)

$$
\phi(77)=\phi(7)\times\phi(11)=6\times 10=60
$$

(c)由欧拉定理可得

$$
2012^{60}\equiv 1\mod 77
$$

所以

$$
2012^{120}\equiv(2012^{60})^2\equiv 1\mod 77
$$

Problem 3

$0,\ldots,p^k-1$中被p整除的数的数量为

$$[\frac{p^k-1}{p}]+1=p^{k-1}-1+1=p^{k-1}$$

所以不被p整除的数的数量为

$$p^k-p^{k-1}$$

因此

$$\phi(p^k)=p^k-p^{k-1}$$

Problem 4

(a)因为n不一定和10互质。

(b)(c)

直接对任意的d证明结论。

$$\begin{aligned}
d^{13}-d&=d(d^{12}-1)\\
&=d(d^6-1)(d^6+1)\\
&=d(d^2-1)(d^2+d+1)(d^2+1)(d^2+d+1)\\
&=(d-1)d(d+1)(d^2+1)(d^2+d+1)^2
\end{aligned}$$

显然有

$$2|(d-1)d(d+1)(d^2+1)(d^2+d+1)^2$$

如果$d=5k,5k\pm1$，那么

$$5|(d-1)d(d+1)$$

如果$d=5k\pm2$，那么

$$d^2+1\equiv 4+1\equiv 0 \mod 5$$

因此无论那种情形，我们都有

$$5|(d-1)d(d+1)(d^2+1)(d^2+d+1)^2$$

因为$2,5$互质，所以

$$10|(d-1)d(d+1)(d^2+1)(d^2+d+1)^2=d^{13}-d$$