Problem 1

$[0,n)$中被p整除的数的数量为

$$[\frac{n}{p}] = q-1$$

$[0,n)$中被q整除的数的数量为

$$[\frac{n}{q}] = p-1$$

被pq同时整除的数不存在，所以危险信息的比例为

$$\begin{aligned}\frac{p+q-2}{n} &= \frac{p+q-2}{pq}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{2}{pq}\\ &\approx 10^{-200}+10^{-200}-2\times 10^{-400}\\ &= O(2\times 10^{-200})\end{aligned}$$

Problem 2

(a)考虑如下图

$$\begin{aligned}&1\to 2\\ &2\to 1 \qquad 2\to 3\\ &3\to 4\\ &4\to 2\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}&1\to 2\to 3\\ &3\to 4\to 2\to 1\end{aligned}$$

但是不存在包含$1,3$的cycle。

(b)如果该walk除了起点终点以外不包含重复节点，那么结论成立；否则至少包含一个重复节点，不妨设为u，如果u存在自循环，那么不走自循环即可，如果不存在自循环，那么必存在重复走过的边，去掉这些重边即构成cycle。

Problem 3

(a)只要让出度为1的节点指向出度为8的节点即可。

(b)将5个鸡视正五边形的5个顶点，然后有向边的关系为顺时针即可满足条件。

(c)假设a是出度最大的点，出度为m，直接相连的点为

$$a_1, \ldots, a_m$$

如果a不是king，那么必然存在b，使得a无法走到b，那么必然有$b \to a$，接着，因为

$$a \to a_i, i = 1, \ldots, m$$

所以必然有

$$a_i \nrightarrow b$$

因为是tournament图，所以必然有

$$b \to a_i, i = 1, \ldots, m$$

因此b的出度为$m+1$，这与a的定义矛盾。