## Problem 1

(a)该证明没什么问题。

(b)同(a)，我们可以取出$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$，现在构造如下映射：

$$f(a_n) = n, n \in \mathbb{N}$$
$$f(a) = 0, a \in A - \{a_0, a_1, \ldots\}$$

## Problem 2

证明：因为$f:\mathbb{N} \to S$是满射，所以$\forall s \in S$，存在$n \in \mathbb{N}$，使得

$$s = f(n)$$

现在可以按如下方式列出$S$中的元素：

- 初始化$A = \{\}$
- 对$n = 0, 1, \ldots, \ldots$
    - 如果$f(n)$有定义，且$f(n) \notin A$，那么列出$f(n)$，并且令
    $$A = A \cup f(n)$$

## Problem 3

(a)将$(i,j)$映射到$\frac{i}{j}$，那么这是一个满射。

(b)按对角线方法列出$(i,j)$，即对$n = 2, \ldots$，列出

$$(1, n-1), (2, n-2), \ldots, (n-1, 1)$$

这样就可以将所有的$(i,j)$列出，因此$\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$可列，由(a)和上一题可知，正有理数集可列。

## Problem 4

(a)假设输入是字符串$a$，可以用如下递归算法处理：

- 如果$a$的长度为$1$，返回False。
- 如果$a$的长度为$2$：
    - 如果$a[0] = a[1]$，返回True。
    - 否则返回Fasle。
- 如果$a$的长度大于$2$：
    - 如果$a[0] = a[1]$，那么对$a[2:]$重复运行该算法。
    - 否则返回Fasle。

(b)$\forall s \in \mathrm{range}(f)$，必然存在$s_1$，使得

$$f(s_1)=s$$

所以$P_{s_1}$可以识别$s$中全体字符串，这就说明$\mathrm{range}(f)$是全体可识别的字符串集合全体。

(c)如果$\mathcal{N}$是可识别的，那么存在$s_1$，使得

$$f(s_1)=\mathcal{N}$$

那么由定义可知，$\forall s\in \mathrm{string}$

$$s\in f(s_1)\Leftrightarrow s\notin f(s)$$

取$s=s_1$，我们有

$$s_1\in f(s_1)\Leftrightarrow s_1\notin f(s_1)$$

这就产生了矛盾，这说明$\mathcal{N}$是不可识别的。

(d)因为对于每个“program analyzers”，我们都可以定义上述的$\mathcal{N}$，使得$\mathcal{N}$不可识别，这说明无法设计出完美的“program analyzers”。