Problem 1

(a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[R=S] &= \bigcup_{b\in V}\mathbb{P}[R=b,S=b] \\
&= \bigcup_{b\in V}\mathbb{P}[R=b]\mathbb{P}[S=b] \\
&= \bigcup_{b\in V}\frac{1}{|V|^2} \\
&= \frac{1}{|V|}
\end{aligned}
$$

(b)显然R和S独立，所以

$$
\mathbb{P}[R=S]=\frac{1}{|V|}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[R=S,S=T] &= \mathbb{P}[R=S=T] \\
&= \sum_{b\in V}\mathbb{P}[T=S=b]\mathbb{P}[R=b] \\
&= \frac{1}{|V|}\sum_{b\in V}\mathbb{P}[T=S=b] \\
&= \mathbb{P}[R=S]\mathbb{P}[T=S]
\end{aligned}
$$

(c)

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[R=i] &= \begin{cases} \frac{1}{2} & i=1 \\ \frac{1}{2} & i=2 \end{cases} \\
\mathbb{P}[S=j,T=k] &= \begin{cases} \frac{1}{3} & j=1,k=1 \\ \frac{1}{3} & j=2,k=3 \\ \frac{1}{3} & j=3,k=2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

显然

$$
\mathbb{P}[R=i,S=j,T=k]=\frac{1}{6}=\mathbb{P}[R=i]\times\mathbb{P}[S=j,T=k]
$$

(2)

$$\mathbb{P}[R=S]=\frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}[S=T]=\frac{1}{3}$$

但是

$$\mathbb{P}[R=S=T]=\frac{1}{6}$$

(3)显然。

Problem 2

(a)设实验次数为m，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[m]&=g\times\Big((1-p)^k+\big(1-(1-p)^k\big)\times(k+1)\Big)\\&=\frac{n}{k}\times\big(k+1-k(1-p)^k\big)\\&=\frac{n(k+1)}{k}-n(1-p)^k\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{n(k+1)}{k}-n(1-p)^k&\approx n+\frac{n}{k}-n\\&=\frac{n}{k}\end{aligned}$$

如果$k=\frac{1}{\sqrt{p}}$，那么

$$\frac{n}{k}\approx n\sqrt{p}$$

(c)方法1的实验次数为n，所以减少的百分比为

$$1-\sqrt{p}=1-0.1=0.9$$

(d)假设$n=guv$，先分为g组，每组再分为v组，每组u个人，设实验次数为m，记

$$q=(1-p)^u$$

那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[m]&=g\times\left(\sum_{i=0}^{v}C_v^i q^{v-i}(1-q)^i\,(v+iu)\right)\\&=g\times(v+uv(1-q))\\&=\frac{n}{uv}\times v+n\left(1-(1-p)^u\right)\\&=\frac{n}{u}+n\left(1-(1-p)^u\right)\end{aligned}$$

从这个公式看，期望值只和每组的人数有关。

Problem 3

(a)

$$p = 1 - \frac{1}{2^k}$$

(b)设ture k-clauses的数量为m，那么

$$\mathbb{E}[m] = n \times \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = n - \frac{n}{2^k}$$

(c)如果$n < 2^k$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[m] &= n - \frac{n}{2^k} \\ &> n - 1\end{aligned}$$

因为m是整数，所以必然存在使得$\mathcal{S}$中元素全真的分配，因为如果该结论不成立，那么必然有

$$\begin{aligned}m &\leq n - 1 \\ \mathbb{E}[m] &\leq n - 1\end{aligned}$$