Метод ограничений

В методе уступок и методе идеальной точки, заданные критерии по степени важности неразличимы.

Однако нередко приходится сталкиваться с ситуациями, в которых подобное равноправие критериев нарушено, и у каждого из них есть свой вес.

Метод свертывания и метод ограничений показывают, как можно решать многокритериальную задачу с критериями, разными по степени важности.

Общая постановки линейной многокритериальной задачи.

Задача. Предположим заданными

область изменения допустимых значений переменных $x_1, \dots x_n$ определяемую совокупностью линейных уравнений и неравенств, и

набор критериев $Cr_1, \dots Cr_n$, оценивающих качество искомого решения.

Будем считать, что каждый из этих критериев линейно связан с переменными $x_1, \dots x_n$,

$$Cr_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} x_k$$

где γ_{ik} — известные числа.

В области ω требуется найти такой набор переменных $(x_1, \dots, x_n)$, при котором по всем критериям достигались бы максимальные значения,

$$Cr_1 \to max, \dots, Cr_n \to max$$

Метод свертывания

Лицо, принимающее решения, из некоторых, часто доступных только ему соображений назначает веса критериев,

$w_1, \dots, w_l, \dots, w_m,$

$w_1 \geq 0, \dots, w_l \geq 0, \dots, w_m \geq 0,$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

что позволяет свернуть заданные критерии в один глобальный критерий,

$$Cr = w_1 Cr_1 + \dots + w_i Cr_i \dots + w_n Cr_n$$

и свести исходную задачу к обычной задаче линейного программирования с одним критерием: найти в области ω такой набор переменных ($(x_1, \dots, x_n)$), при котором глобальный критерий *Cr* достигает максимального значения

Метод ограничений строится таким образом, что лицо, принимающее решения, определяет веса заданных критериев, опираясь только на количественную информацию о степени их важности, которую оно получает в ходе изучения поставленной задачи. Специально подчеркнем, что в распоряжении лица, принимающего решения, никаких предварительных сведений о сравнительной важности критериев нет.

Общая схема решения

Для решения многокритериальной задачи методом ограничений требуется несколько шагов (но не больше *m–1, m* – число частных критериев).

1-й шаг, как и следующие за ним, разбивается на ряд этапов.

На первом этапе в области допустимых значений ω осуществляется оптимизация отдельно по каждому из критериев (решаются соответствующие задачи линейного программирования). Затем для каждого найденного при этой однокритериальной оптимизации набора неизвестных ($(x_1, \dots, x_n)$) вычисляются значения всех критериев. Пусть, например, при оптимизации по критерию Cr_i, $i = 1,\dots,m$, мы получили набор ($(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$). Обозначим через $C_{p,i}$ $(p = 1,\dots, m)$ значения критериев для этого набора и составив таблицу

	Cr_1	...	Cr_i	...	Cr_m
Cr_1	$C_{1,1}$	...	$C_{i,1}$	...	$C_{m,1}$
...	...	...	...	...	...
Cr_i	$C_{1,i}$	...	$C_{i,i}$	...	$C_{m,i}$
...	...	...	...	...	...
Cr_m	$C_{1,m}$	...	$C_{i,m}$	...	$C_{m,m}$

(в *i*-м столбце помещены значения *i*-го критерия Cr_i, вычисленные для наборов, доставляющих максимум каждому из *m* заданных критериев). Ясно, что среди значений $Cr_{i,1}, \dots, Cr_{i,i}, \dots Cr_{i,m}$ критерия Cr_i, наибольшим является $Cr_{i,i}$, $C_{i,i} = max C_{p,i}$

Затем проводится нормировка найденных значений критериев к значениям в промежутке [0, 1] по формулам

$$c_{p,i} = \frac{c_{p,i} - minc_{q,i}}{maxc_{q,i} - minc_{q,i}}, p = 1, \dots, m. \qquad (*)$$

В случае, когда все значения критериев Cr_i, положительны, нормировку проводят немного иначе,

$$c_{p,i} = \frac{c_{p,i}}{maxc_{q,i}}, p = 1, \dots, m.$$

В результате получаем относительные (безразмерные) значения для всех критериев

	Cr_1	...	Cr_i	...	Cr_m
Cr_1	1	...	$c_{i,1}$	...	$c_{m,1}$
...	...	...	...	...	...
Cr_i	$c_{1,i}$	...	1	...	$c_{m,i}$
...	...	...	...	...	...
Cr_m	$c_{1,m}$	...	$c_{i,m}$	...	1

После нормировки наибольшее значение каждого критерия станет равным единице.

В таблице представлена ценная информация, характеризующая область допустимых значений заданных критериев. Если значения двух столбцов близки в каждой из строк (кроме строк, с единицами в этих столбцах), то соответствующие критерии сильно зависимы — изменения других критериев одинаково влияют на эти два. Есть и противоречивые критерии, когда высокая оценка по одному сопровождается низкой по другому.

По таблице вычисляются веса (индексы) критериев.

Пусть a_i^0 — среднее (среднее арифметическое) значение, взятое по всем элементам i-го столбца (кроме равного 1). Вес w_i^0 -го критерия определяется формулой

$$w_i^0 = \frac{1 - a_i^0}{\sum_{p=1}^{n}\left(1 - a_p^0\right)}$$

Найденный вес — это своеобразный коэффициент внимания, которое следует уделять i-му критерию при поиске решения. Предположим, к примеру, что все элементы i-го столбца в таблице близки к 1. Тогда среднее значение a_i^0, также будет близко к 1, $1 - a_i^0$ будет мало, малым будет и соответствующий вес w_i^0. Это означает, что если при оптимизации по другим критериям значение данного критерия близко к наилучшему, то ему вряд ли стоит уделять внимание. Наоборот, критерию, сильно зависящему от изменения других критериев (a_i^0 мало), должны соответствовать бОльшие значения веса.

Введенные веса иногда называют техническими, для того чтобы подчеркнуть, что они вычисляются, а не назначаются, как, например, в методе свертывания.

Следующий этап — оптимизация по глобальному критерию

$$Cr_{gl}^0 = w_1^0 Cr_1 + \cdots + w_i^0 Cr_i \ldots + w_m^0 Cr_m$$

отыскание $x_1^0, \ldots, x_n^0$, вычисление соответствующих значений критериев $Cr_1^0, \ldots, Cr_m^0$ и предъявление результатов лицу, принимающему решения (руководителю).

Анализ лицом, принимающим решения, предъявленных результатов — следующий важнейший этап.

Сначала, сравнивая компоненты вектора утопии

$z^0 = \{maxCr_1, \ldots, maxCr_m\}$ с только что найденными значениями критериев

$y^0 = \{Cr_1^*, \ldots, Cr_m^*\}$

лицо, принимающее решения, отвечает на вопрос: все ли компоненты вектора y^0 имеют удовлетворительные значения?

Если *да*, то искомое решение получено. Если *нет*, то лицо, принимающее решения, выделяет (один) критерий с наименее удовлетворительным значением (пусть это будет критерий *Cri*) и просит назначить для критерия *Cri* пороговое значение *li*, признавая тем самым, что приемлемо любое значение этого критерия, удовлетворяющее условию

$Cr_i \geq l_i$. Неравенство $Cr_i \geq l_i$ накладывает на область ω допустимых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ дополнительное ограничение и сужает ее до ω0.

2-й шаг

Начинается с этапа расчета для новой области допустимых значений.

При этом число критериев на единицу меньше исходного.

Завершается 2-й шаг выбором порогового значения для еще одного критерия.

Вследствие того что набор критериев конечен и на каждом шаге их число уменьшается на единицу, этот процесс рано или поздно подойдет к концу, и приемлемые значения будут получены по всем критериям.

Пример. Область ω допустимых значений неизвестных *x* и *y* задана системой неравенств

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \leq 0 \\ x - 3y + 11 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ 2x + 5y - 17 \geq 0 \end{cases}$$

Требуется найти в области ω такую точку, в которой каждый из трех критериев *Cr1*, *Cr2* и *Cr3* достигает максимального значения,

$$Cr_1 = 2x - 7y + 35 \rightarrow max$$
$$Cr_2 = -2x + 19y + 25 \rightarrow max$$
$$Cr_3 = -14x - 3y + 95 \rightarrow max$$

Решение.

Область ω представляет собой четырехугольник $ABCD$ с вершинами

$A(6,1)$, $B(4,5)$, $C(1,4)$, $D(1,3)$

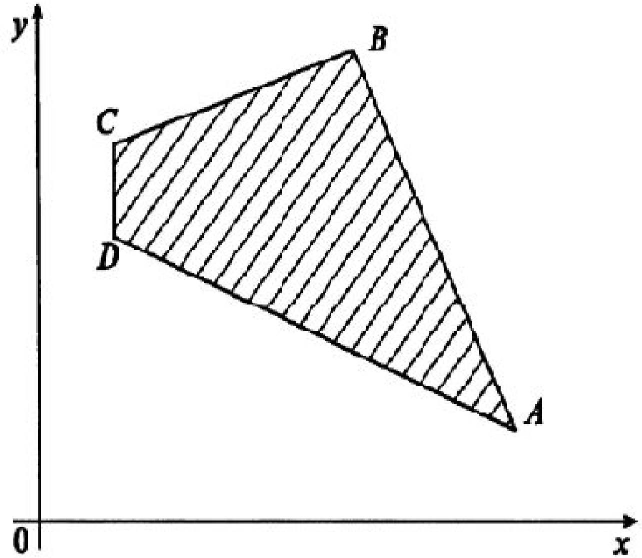
Его стороны лежат на прямых

AB: $2x + y - 13 = 0$,

BC: $x - 3y + 11 = 0$

CD: $x = 1$

DA: $2x + 5y - 17 = 0$



1-й шаг. Вычислим в каждой вершинс этого чстырсхугольника значсния вссх трсх критериев

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	40	32	8
B	8	112	24
C	9	99	69
D	16	80	72

Это позволит нам решить в области $ABCD$ три обычных задачи линейного программирования:

По критерию Cr1, Cr2, Cr3

Это позволит нам решить в области *ABCD* три обычных задачи линейного программирования:

1) по критерию Cr1 — он достигает максимального значения 40 в точке *A*,

2) по критерию Cr2 — он достигает максимального значения 112 в точке *D*

3) по критерию Cr3 — он достигает максимального значения 72 в точке *D*.

В таблице представлены значения каждого из этих трех критериев в точках *A*, *B* и *D*, доставляющих максимум критериям *Cr1*, *Cr2* и *Cr3* соответственно

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
Cr_1	$\underline{40}$	32	8
Cr_2	8	$\underline{112}$	24
Cr_3	16	80	$\underline{72}$

Пронормируем значения критериев в таблице по формулам (*).

Имеем

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
Cr_1	1	0	0
Cr_2	0	1	1/4
Cr_3	1/4	3/5	1

Вычисляя средние значения в каждом из столбцов таблицы (исключая равные 1),

$$a_1^0 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}, a_2^0 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}, a_3^0 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

получаем

$$1 - a_1^0 = \frac{7}{8}, 1 - a_2^0 = \frac{7}{10}, 1 - a_3^0 = \frac{7}{8}$$

Отсюда следует, что технические веса равны

$$w_1^0 = \frac{5}{14}, w_2^0 = \frac{4}{14}, w_3^0 = \frac{5}{14}$$

соответственно.

Глобальный критерий

$$Cr_{gl}^0 = \frac{5}{14}(2x - 7y + 35) + \frac{4}{14}(-2x + 19 + 25) + \frac{5}{14}(-14x - 3y + 95)$$

после приведения подобных преобразуется к виду

$$Cr_{gl}^0 = \frac{1}{7}(-34x + 13y + 375)$$

Решая задачу $Cr_{gl}^{0} \to max$

в четырехугольнике *ABCD*, получаем, что максимального значения глобальный критерий достигает в точке *C(1, 4)*. Сравним вектор утопии

$z^0 = \{40,112,72\}$

составленный из максимальных значений критериев *Cr1*, *Cr2* и *Cr3*, с вектором

$y^0 = \{9,99,69\}$

компоненты которого суть значения этих же критериев, вычисленные в точке С, доставляющей максимум глобальному критерию Cr_{gl}^{0}

Если лицо, принимающее решения, считает, что все компоненты вектора имеют приемлемые значения, то искомое решение получено — это

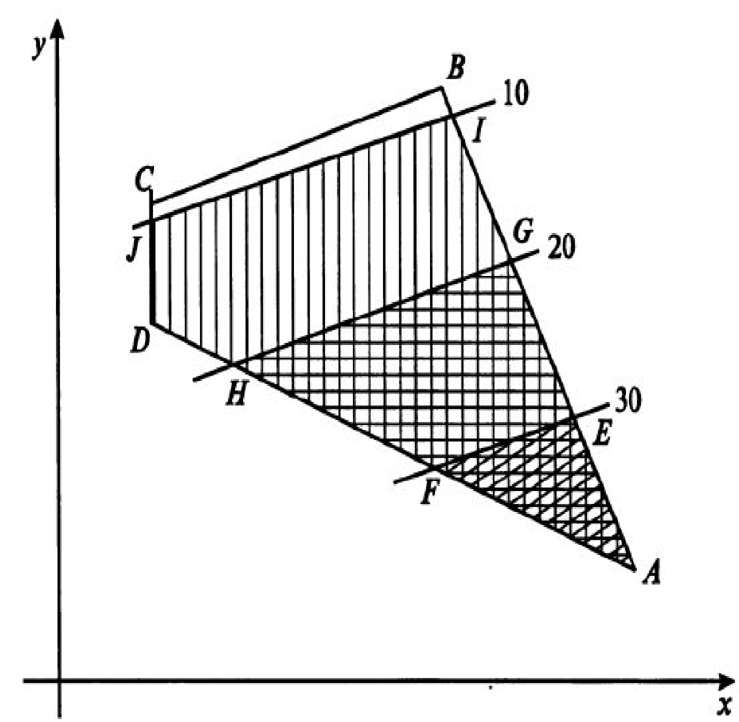
Cr1 =*9*, *Cr2* =99 и *Cr3*=6

при *x* = *1* и *y* = *4*.

Будем считать, что лицо, принимающее решения, полученным результатом не удовлетворено. Тогда оно (это лицо) должно выделить критерий с наименее приемлемым значением. Пусть это критерий *Cr1*. Для него лицом, принимающим решения, назначается порог *l1* = 20, ниже которого значения 1-го критерия не должны опускаться.

Чтобы дать возможность лицу, принимающему решения, принять более взвешенное решение, найдем максимально возможные значения двух других критериев *Cr2* и *Cr3* при следующих ограничениях, накладываемых на критерий *Cr1*.

$Cr_1 \geq 30,\ Cr_1 \geq 20$ и $Cr_1 \geq 10$



Для этого достаточно подсчитать эти значения в треугольнике *AEF*

в треугольнике *AGH*

в четырехугольнике *AIJD* с вершинами

треугольник AEF с вершинами

$$A(6,1), \quad E\left(\frac{43}{8},\frac{9}{4}\right), \quad F\left(\frac{47}{12},\frac{11}{6}\right)$$

треугольник AGH с вершинами

$$A(6,1), \quad G\left(\frac{19}{4},\frac{7}{2}\right), \quad H\left(\frac{11}{6},\frac{8}{3}\right)$$

четырехугольник $AIJD$ с вершинами

$$A(6,1), \quad I\left(\frac{33}{8},\frac{19}{4}\right), \quad J\left(1,\frac{27}{7}\right), \quad D(1,3)$$

Сравниваем решения

Результаты проведенных вычислений занесены в таблицу

	$Cr_1 \geq 30$	$Cr_1 \geq 20$	$Cr_1 \geq 10$
Cr_2	57	82	107
Cr_3	104/3	184/3	72

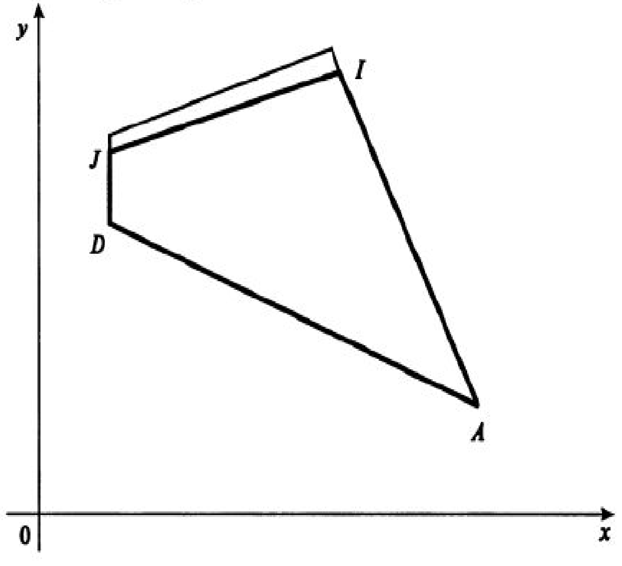
При анализе таблицы лицо, принимающее решения, выбирает условие $Cr_1 \geq 10$.

Конец 1-го шага.

2-й шаг. Новая область $\omega^0 \subset \omega$ допустимых значений переменных x и y описывает неравенствами

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \le 0 \\ x - 3y + 11 \ge 0 \\ x \ge 1 \\ 2x + 5y - 17 \ge 0 \\ 2x - 7y + 35 \ge 10 \end{cases}$$

(к исходным неравенствам, описывающим область ω, добавлено неравенство $Cr_1 = 2x - 7y + 35 \ge 10$, полученное в конце 1-го шага) и представляет собой четырехугольник *AIJD*



Проведем оптимизацию в области ω^0 по каждому из двух оставшихся критериев $Cr2$ и $Cr3$.

В таблице представлены значения этих критериев в точках I и D, доставляющих максимальные значения критериям $Cr2$ и $Cr3$ соответственно.

	Cr_2	Cr_3
Cr_2	107	23
Cr_3	80	72

Нормируя значения критериев таблицы по формулам

$$c_{p,i} = \frac{c_{p,i} - \min c_{q,i}}{\max c_{q,i} - \min c_{q,i}}, p = 1, \dots, m.$$

(*), получим

	Cr_2	Cr_3
Cr_2	1	23/72
Cr_3	80/107	1

Отсюда находим средние

$$a_1^{00} = \frac{80}{107} = 0.75, \qquad a_2^{00} = \frac{23}{72} = 0.32$$

Далее находим технические веса

технические веса

$$w_1^{00} = \frac{0.25}{0.93} = 0.27, \qquad w_2^{00} = \frac{0.68}{0.93} = 0.73$$

Это позволяет сформировать новый глобальный критерий

$$Cr_{gl}^{00} = 0.27(-2x + 19 + 25) + 0.73(-14x - 3y + 95) =$$
$$= -10.76x + 2.94y + 76.10$$

который достигает наибольшего значения в точке

$$J\left(1, \frac{27}{7}\right)$$

Для отыскания максимума достаточно сравнить его значения в вершинах четырехугольника *AIJD*:

$$Cr_{gl}^{00}(A) = -10.76 \cdot 6 + 2.94 \cdot 1 + 76.10,$$
$$Cr_{gl}^{00}(I) = -10.76 \cdot \frac{33}{8} + 2.94 \cdot \frac{19}{4} + 76.10,$$
$$Cr_{gl}^{00}(J) = -10.76 \cdot 1 + 2.94 \cdot \frac{27}{7} + 76.10,$$
$$Cr_{gl}^{00}(D) = -10.76 \cdot 1 + 2.94 \cdot 3 + 76.10.$$

Вычислив в точке J значения критериев $Cr2$ и $Cr3$,

$$Cr_2 = 96\frac{2}{7}, \qquad Cr_3 = 69\frac{3}{7}$$

построим вектор

$$y^{00} = \left\{96\frac{2}{7}, 69\frac{3}{7}\right\}$$

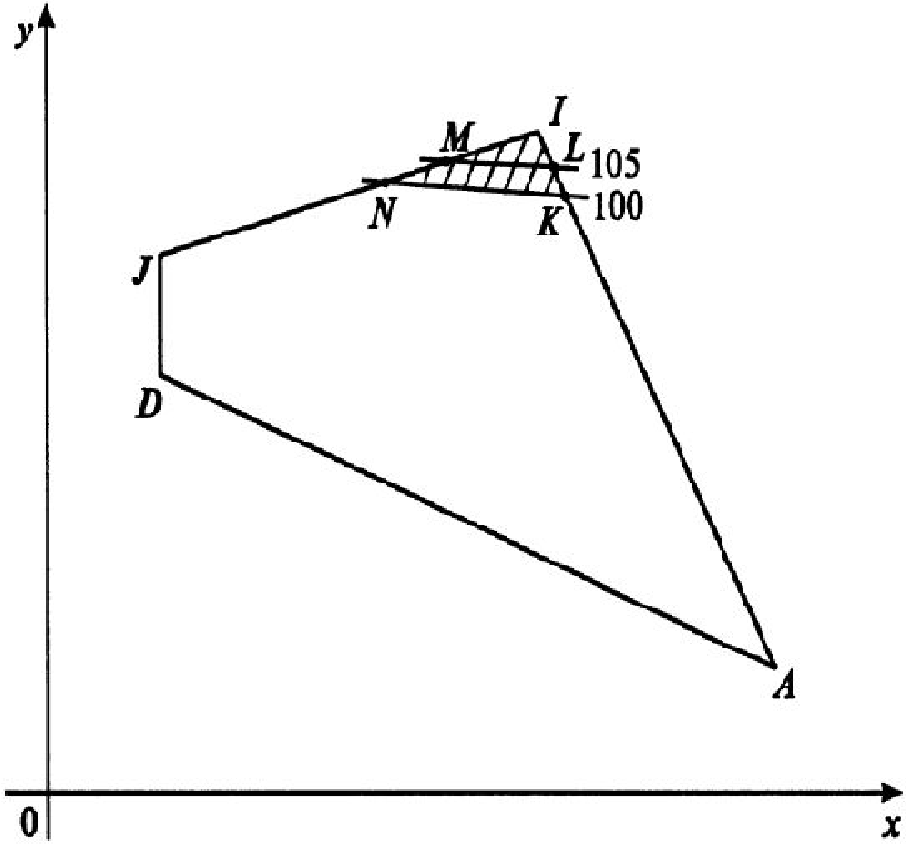
Предположим, что, сравнивая его с вектором утопии

$$z^{00} = \{107, 72\}$$

лицо, принимающее решения, заключает, что значение по критерию $Cr2$ наименее удовлетворительно, и назначает нижний уровень по этому критерию равным 100. Чтобы дать возможность руководителю принять более взвешенное решение, найдем максимально возможные значения оставшегося критерия $Cr3$ при следующих ограничениях, накладываемых на критерий $Cr2$:

$$Cr_2 \geq 105, Cr_2 \geq 100$$

Для этого достаточно подсчитать эти значения в треугольнике IKN с вершинами



$I(\frac{33}{8},\frac{19}{4})$, $K\left(\frac{43}{10},\frac{22}{5}\right)$, $N\left(\frac{25}{12},\frac{25}{6}\right)$

в треугольнике ILM с вершинами

$I(\frac{33}{8},\frac{19}{4})$, $L\left(\frac{167}{40},\frac{93}{20}\right)$, $M\left(\frac{85}{24},\frac{55}{12}\right)$

и сравнить.

Результаты проведенных вычислений занесены в таблицу

	$Cr_2 \geq 105$	$Cr_2 \geq 100$
Cr_3	95/3	160/3

При анализе таблицы лицо, принимающее решения, выбирает условие

$Cr_2 \geq 100$

Итак, выбор сделан

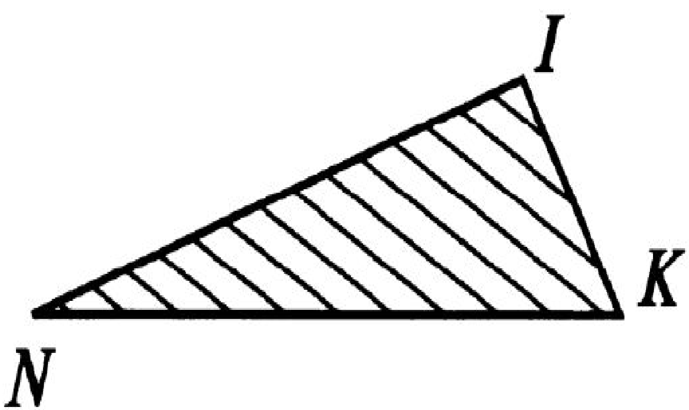
$Cr_1 \geq 10, Cr_2 \geq 100$

Конец 2-го шага.

3-й шаг. Новая область $\omega^{00} \subset \omega^{0}$ допустимых значений переменных x и y описывается неравенствами

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \le 0 \\ x - 3y + 11 \ge 0 \\ x \ge 1 \\ 2x + 5y - 17 \ge 0 \\ 2x - 7y + 35 \ge 10 \\ -2x + 19y + 25 \ge 100 \end{cases}$$

(добавлено неравенство $Cr_2 = -2x + 19y + 25 \ge 100$ полученное в конце 2-го шага) и представляет собой треугольник IKN



Проведем оптимизацию в области ω^{00} по оставшемуся критерию Cr_3

$Cr_3 \to max$

Вычисляя его значения в вершинах треугольника *IKN*,

$$Cr_3(I) = 23, \qquad Cr_3(N) = 53\frac{1}{3}, \qquad Cr_3(K) = 21\frac{3}{5}$$

получаем, что наибольшего значения критерий Cr_3 достигает в точке *N*. Теперь остается лишь выписать соответствующие значения переменных *x* и *y*,

$$x^0 = \frac{25}{12} \quad y^0 = \frac{25}{6}$$

Ответ: приемлемые значения критериев *Cr1*, *Cr2* и *Cr3*

$$Cr_1 = 10, \qquad Cr_2 = 100, \qquad Cr_3 = 55\frac{1}{3}$$

достигаются при $x^0 = \frac{25}{12} \quad y^0 = \frac{25}{6}.$

В одной работе описано, как метод ограничений был применен для прогнозирования последствий различных вариантов управления кадрами большой организации.
Была построена линейная модель, характеризующая изменения со временем состава персонала организации и продуктивности ее работы.
Проверялись разные стратегии приема на работу и повышения в должности через два, три и четыре года. В качестве переменных рассматривалось количество сотрудников, назначенных на различные должности в определенные промежутки времени.
В модель были заложены следующие зависимости.

1. Эффективность работы сотрудника линейно зависит от отношения оценки его возможностей к оценке требований, предъявляемых должностью к сотруднику.
2. Удовлетворение сотрудника во время пребывания на определенной должности сначала возрастает до максимального значения, а затем уменьшается со временем до начального значения, также в зависимости от отношения оценки его возможностей к оценке требований, предъявляемых должностью к сотруднику,

И были выбраны следующие четыре критерия.

1. Общее удовлетворение кадров (критерий *Cr1*).
2. Фактическая интенсивность работы кадров (критерий *Cr2*).
3. Затраты, связанные с приемом на работу дополнительных сотрудников (критерий *Cr3*).
4. Затраты, связанные с нехваткой кадров по отношению к прогнозируемым потребностям (критерий *Cr4*).

С математической точки зрения изучаемая проблема представляет собой задачу линейного программирования с четырьмя критериями качества.
Требовалось найти такой набор переменных, при котором каждый из этих четырех критериев принимает наибольшее значение.
Так как в этом конкретном случае рассматривалась большая организация, то и количество переменных и количество ограничений были велики — 350 и 200 соответственно. Поэтому для ее решения были использованы не только интеллектуальные, но и значительные вычислительные ресурсы.