

Лекция

# Методы оценки и сравнения многокритериальных альтернатив

Системный анализ

# Этапы принятия решения: укрупненно

- поиск информации,
- поиск и нахождение альтернатив и
- выбор лучшей альтернативы.

# Альтернативы

- **Альтернативы** - варианты действий.
- Альтернативы бывают независимыми и зависимыми.
- Независимыми являются те альтернативы, любые действия с которыми (удаление из рассмотрения, выделение в качестве единственно лучшей) не влияют на качество других альтернатив.
- При зависимых альтернативах оценки одних из них оказывают влияние на качество других.

# Альтернативы

В зависимости от наличия альтернатив на момент выработки политики и принятия решений выделяют задачи:

- Задачи, когда все альтернативы уже заданы, уже определены, и необходимо лишь выбрать лучшие из этого множества. Например, мы можем искать наиболее эффективную фирму из уже имеющихся, определять лучший университет, лучшую из построенных яхт и т.д. Особенностью этих задач является замкнутое, нерасширяющееся множество альтернатив.
- Задачи, где все альтернативы или их значительная часть появляются после принятия основных решений. Например, необходимо разработать правило открытия кредитов в банке для организаций или частных лиц. Здесь альтернативы (конкретные организации или лица) принципиально появляются лишь после выработки и оглашения правил.
- Задачи с конструируемыми альтернативами. Часто в процессе выбора возникают новые альтернативы. Первичные, основные альтернативы не всегда удовлетворяют участников процесса выбора. Однако они помогают им понять, чего конкретно не хватает, что реализуемо при данной ситуации, а что нет.

# Критерии

**Критерии оценки альтернатив** - показатели их привлекательности (или непривлекательности) для участников процесса выбора

Критерии могут быть независимыми или зависимыми.

Зависимыми называются те критерии, при которых оценка альтернативы по одному из них определяет (однозначно либо с большой степенью вероятности) оценку по другому критерию.

Зависимость между критериями приводит к появлению целостных образов альтернатив, которые имеют для каждого из участников процесса выбора определенное смысловое содержание.

# Критерии

На сложность задач принятия решений влияет также количество критериев.

При небольшом числе критериев (два-три) задача сравнения двух альтернатив достаточно проста и прозрачна, качества по критериям могут быть непосредственно сопоставлены и выработан компромисс.

При большом числе критериев задача становится малообозримой. При большом количестве критериев они обычно могут быть объединены в группы, имеющие конкретное смысловое значение и название.

Основанием для естественной группировки критериев является возможность выделить плюсы и минусы альтернатив, их достоинства и недостатки (например, стоимость и эффективность). Такие группы, как правило, независимы. Выявление структуры на множестве критериев делает процесс принятия решений значительно более осмысленным и эффективным.

# Принцип последовательного уменьшения неопределенности

В реальных задачах принятия управленческих решений к этапу выбора все еще сохраняется большая неопределенность информации, обусловленная наличием многих ситуаций и целей.

Поэтому сразу осуществить выбор единственного решения из множества сформулированных очень сложно.

В связи с этим используется принцип последовательного уменьшения неопределенности, заключающийся в последовательном сужении множества решений.

Различают три последовательные стадии такого сужения.

1. Множество альтернативных решений  $Y$  сужается до множества допустимых решений  $Y_g \subseteq Y$
2. Множество допустимых решений сужается до множества эффективных решений  $Y_0 \subseteq Y_g$ .
3. Осуществляется выбор единственного решения  $Y^*$  из множества эффективных решений.

# Принцип последовательного уменьшения неопределенности

- Множество альтернативных решений сужается до множества допустимых решений на основе учета ограничений. Задача - получить множество приемлемых решений.
- Сужение множества допустимых решений до множества эффективных решений осуществляется на основе анализа предпочтений. Решение называется эффективным, если не существует более предпочтительного. Множество эффективных решений в литературе называют также множеством Парето, множеством недоминируемых решений.
- Определение единственного оптимального решения из множества эффективных решений:
  - 1. Если имеется возможность получения новой дополнительной информации, то ЛПР на основе этой информации оценивает предпочтительность эффективных решений и делает выбор окончательного решения.
  - 2. Если получить новую информацию о предпочтительности эффективных решений нельзя, например, из-за ограниченности времени или ресурсов, то в качестве окончательного решения можно выбрать любое из эффективных решений. Такой выбор обеспечит гарантию, что выбранное решение не хуже любого другого.



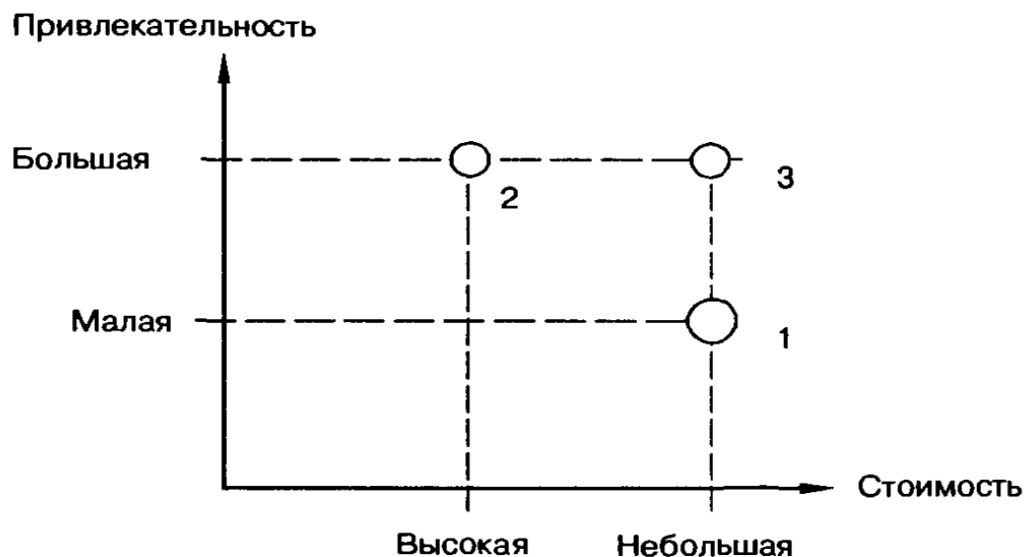
# Множества Парето

- Назовем альтернативу А **доминирующей** по отношению к альтернативе В, если по всем критериям оценки альтернативы А не хуже, чем альтернативы В, а хотя бы по одному критерию оценка А лучше.
- При этом альтернатива В называется **доминируемой**.
- Альтернативы относятся к множеству Эджворта-Парето (Э—П), если каждая из них превосходит любую другую по какому-то из критериев.
- Множество Эджворта-Парето названо так по именам ученых, впервые обративших внимание на альтернативы, не уступающие друг другу по критериальным оценкам, т. е. на альтернативы, не находящиеся в отношении доминирования.
- Альтернативы, принадлежащие множеству Э—П, принято называть *несравнимыми*.

# Множества Парето

Оценки альтернативных вариантов туров

Альтернатива	Критерий	
	Стоимость	Привлекательность, новые впечатления
1. Океанские острова	Небольшая	Малая
2. Скайландия	Высокая	Большая
3. Свапландия	Небольшая	Большая



# Типовые задачи принятия решений

В современной науке о принятии решений центральное место занимают многокритериальные задачи выбора. Принято различать три основные задачи принятия решений.

- 1. *Упорядочение альтернатив.* Для ряда задач представляется вполне обоснованным требование определить порядок на множестве альтернатив. В общем случае требование упорядочения альтернатив означает определение относительной ценности каждой из альтернатив.
- 2. *Распределение альтернатив по классам решений.* Например, Группы товаров различаются по качеству. Абитуриент делит на группы вузы, в которые он стремится поступить. Точно так же люди часто выделяют для себя группы книг (по привлекательности для чтения), туристские маршруты и т.д.
- 3. *Выделение лучшей альтернативы.* Основная в принятии решений. Выбор одного предмета при покупке, выбор места работы, выбор проекта сложного технического устройства. Кроме того, такие задачи распространены в мире политических решений, где альтернатив сравнительно немного, но они достаточно сложны для изучения и сравнения.

# Классификация методов многокритериальной оценки альтернатив

## Классификация методов многокритериальной оценки альтернатив

- Аксиоматические методы
- Прямые методы
- Методы компенсации
- Методы порогов несравнимости
- Человеко-машинные процедуры принятия решений

# Аксиоматические методы

- Эта группа методов в настоящее время наиболее популярна. В литературе она рассматривается иногда как единственный “научно обоснованный” подход к анализу многокритериальных альтернатив, известный под названием MAUT (многокритериальная теория полезности).
- Хотя все методы оценки многокритериальных альтернатив так или иначе используют измерение ценности, полезности, аксиоматические методы подходят к этим измерениям наиболее теоретически: они рассматривают их как определенные шаги, подтверждающие справедливость выбора некоторых аксиом и ведущие к возможности использования определенной функции полезности.

# Аксиоматические методы

Обычно аксиоматические методы подразделяют на две подгруппы:

- 1) оценки альтернатив по многим критериям считаются известными (принятие решений при определенности):
- 2) заданы функции распределения вероятностей оценок альтернатив (принятие решений при риске).

Обе подгруппы используют близкую систему аксиом.

Обычно используются три группы аксиом.

- 1. Аксиомы "слабого порядка" и транзитивности. Эти аксиомы определяют отношение превосходства одной альтернативы над другой при наличии таких свойств, как связность и транзитивность.
- 2. Аксиомы, исключаящие так называемые ненормальности в предпочтениях. Имеются две такие аксиомы. Одна из них утверждает, что можно использовать любые части полезности двух альтернатив (объектов) для выражения эквивалентной полезности третьей. Вторая аксиома запрещает использование альтернатив, неизмеримо превосходящих другие альтернативы (архимедова аксиома).
- 3. Аксиомы независимости. Эти аксиомы требуют, чтобы предпочтения между альтернативами не зависели от некоторых преобразований этих альтернатив. В настоящее время существует много форм аксиом независимости.

# Аксиоматические методы

- Приведенные аксиомы используются обычно для доказательств существования функции полезности определенного вида. Так, например, доказано, что при справедливости аксиом групп 1 и 2, а также при выполнении аксиом условной независимости по полезности и совместной независимости функция полезности многокритериальной альтернативы может быть выражена в виде:

- $$U = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$$

- где  $x_i$  - оценка по  $i$ -му критерию;  $f_i$  - функция полезности по  $i$ -му критерию.
- Критически оценивая аксиоматические методы, следует отметить их искусственность - в основу положены чисто формальные допущения и главная проблема сравнения альтернатив отступает на второй план перед чисто формальной проблемой поиска функции полезности в определенной форме.
- Несмотря на известность данного подхода в среде теоретиков, трудно дать общую оценку возможности его применения в практических случаях. Большинство примеров использования этих методов, описанных в литературе, имеет искусственный характер.

# Прямые методы

- Существует большое число методов, в которых форма зависимости результирующей полезности альтернативы от ее оценок по многим критериям задается без всяких теоретических оснований, а параметры этой зависимости либо также задаются, либо непосредственно, “впрямую”, оцениваются ЛПР. Такие методы называются прямыми (в противоположность аксиоматическим, которые называются непрямыми).
- Прямые методы можно разделить на пять групп.
- 1. Постулируемые принципы
- Этот подход на первый взгляд кажется наиболее простым. ЛПР предлагается ряд принципов, принятие каждого из которых влечет выбор определенной зависимости между полезностью многокритериальной альтернативы и ее оценками по критериям. Для всех критериев как бы вводится квадратичный штраф отклонений от наилучшего значения. Отметим, что данный подход часто предлагается для динамических систем, где оптимизация по каждому из отдельных критериев достаточно трудоемка. Выбор “принципа” освобождает ЛПР от всех хлопот, но встает вопрос об обоснованности такого выбора.



# Прямые методы

- 2. Выбор глобального критерия
- Для методов данной группы исходной информацией является таблица, в которую заносятся оценки полезностей альтернатив при том или ином варианте внешних условий, характеризующих обстановку после принятия решений. Считается, что вероятности внешних условий заранее неизвестны, а сама таблица известна при принятии решения. Обычно рассматриваются агрегированные оценки альтернатив, но нет принципиальных препятствий против рассмотрения оценок альтернатив по многим критериям (при известной формуле их агрегации).
- Выбор предпочитаемой альтернативы производится на основании одного из следующих критериев:
  - 1) Максиминный критерий (наибольшая осторожность).
  - 2) Критерий минимаксного сожаления.
  - 3) Критерий максимакса (крайний оптимизм)
  - 4) Критерий Гурвица.
  - 5) Критерий Лапласа.
- Нет никаких оснований считать априори один критерий чем-то лучшим, чем другой. Поэтому принято, что такой выбор должен делать руководитель. Если исключить очевидные случаи (доминирование одной альтернативы над всеми), то для ЛПР выбор критерия столь же труден, как и прямой выбор одной из альтернатив.

# Прямые методы

- 3. Двойники аксиоматических методов
- Существует группа простых методов, форма зависимостей в которых имеет тот же вид, что и в некоторых аксиоматических методах. Как известно, основная направленность аксиоматических методов состоит в обосновании таких зависимостей, в то время как в прямых методах они просто постулируются. Это различие практически исчезает в случаях, когда не выполняются те или иные аксиомы и определенная зависимость принимается без достаточных обоснований. Выделение этой группы прямых методов необходимо, особенно если учесть их значительную популярность.
- К основным методам данной группы следует отнести:
- 1. Метод взвешенной суммы, логическим обоснованием которого является представление об общей полезности альтернативы как о сумме оценок нескольких независимых критериев.
- 2. Мультипликативный метод, логическим обоснованием которого является представление об оценках по критериям, как о вероятностях достижения определенных показателей качества.
- 3. Лексикографическое упорядочение критериев. В данном методе критерии упорядочиваются по важности, после чего считается лучшей альтернатива, имеющая более высокую оценку по более важному критерию вне зависимости от оценок по прочим критериям (методы лексикографического упорядочения критериев по важности имеют аксиоматическое обоснование, но для них не разработаны процедуры проверки аксиом, характерные для аксиоматических методов).
- Существует множество модификаций приведенных выше основных типов прямых методов.

# Прямые методы

## ■ 4. Интерполяция функции полезности

- При данном подходе также постулируется общий вид функции полезности. Отличие от предыдущего заключается в том, что параметры функции не назначаются ЛПР, а определяются расчетным путем на основе прямой (числовой) оценки ЛПР некоторых многокритериальных альтернатив.

## ■ 5. Наука о решениях

- 
- Именно под таким названием (decision science) известен в литературе подход, связанный с оценкой вероятностей на деревьях решений.
- Здесь имеются две проблемы: как заранее определить всевозможные исходы различных действий – именно для этого строится так называемое дерево решений; как определить вероятности исходов – для этого используется метод потерей.
- Деревья решений строят, исходя из последовательного анализа всех возможных событий. Определение субъективных вероятностей событий производится путем поиска безразличия между двумя лотереями подбором вероятности осуществления событий в одной из них. Подход применим как при оценках альтернатив по одному критерию, так и при многокритериальных альтернативах

# Прямые методы

- Для многих прямых методов характерны высокие требования к ЛПР на начальных этапах работы. Так, для методов первой группы ЛПР должен сделать выбор “наиболее справедливого и обоснованного принципа. В задачах принятия решений с субъективными критериями такой выбор сделать крайне сложно, если не невозможно. Аналогичные сложности возникают для методов второй и третьей групп. Как и для аксиоматических методов, остаются нерешенными проблемы зависимых критериев

# Методы компенсации

- Идея компромисса, уравнивания по полезности оценок различных критериев, достаточно широко известна. При сравнении трудно одновременно держать в голове все достоинства и недостатки каждой из альтернатив. Поэтому выписываются в два отдельных списка достоинства и недостатки альтернативы, после тщательного анализа определяется, какой недостаток (или их совокупность) можно считать эквивалентным определенному достоинству (или их совокупности), после чего они вычеркиваются из списка.
- Переход от сравнения качеств по различным критериям к сравнению альтернатив может быть осуществлен различными путями. Среди них следует выделить построение кривых безразличия и сравнение разностей оценок альтернатив по критериям.
- Методы построения кривых или поверхностей безразличия очень трудоемки и малопригодны при количестве альтернатив более трех.
- Возможное появление нетранзитивностей при использовании методов сравнения разностей оценок альтернатив требует построения замкнутых процедур итеративного типа, в которых полученная при сравнениях информация проверялась бы на непротиворечивость. В большинстве случаев методы сравнения разностей оценок приводят к необходимости непосредственного сравнения многокритериальных альтернатив.

# Методы порогов несравнимости

- Связь между любой парой альтернатив определяется последовательностью бинарных отношений. “Сильным” бинарным отношениям соответствуют большие требования к превосходству одной альтернативы над другой и, следовательно, большее число несравнимых альтернатив. Самым сильным является требование полного доминирования одной альтернативы над другой. Более “слабые” бинарные отношения определяют условия, при которых, несмотря на противоречивые оценки, одна альтернатива объявляется лучшей, чем другая.
- На основе выбранного бинарного отношения осуществляется попарное сравнение всех альтернатив, причем альтернативы, оказавшиеся лучшими при всех сравнениях, выделяются в новое множество, называемое ядром. Размер ядра характеризуется количеством альтернатив. Если бинарное отношение является отношением доминирования одной альтернативы над другой, при котором одна альтернатива имеет по всем критериям не худшие, а хотя бы по одному из критериев лучшие оценки, то появившееся при этом ядро называется множеством Парето.

# Методы порогов несравнимости

- После выделения ядра - множества Парето элементы этого ядра объявляются несравнимыми. Однако эта несравнимость имеет временный характер. После первого бинарного отношения задается второе, более слабое. Ядро, соответствующее второму отношению, содержит в общем случае меньшее число несравнимых элементов. Потом задается третье отношение и т. д. Процесс получения ядер с уменьшающимся числом элементов продолжается до тех пор, пока количество элементов в ядре не достигнет требуемого значения. Эти элементы вместе с последним бинарным отношением предъявляются ЛПР как решение задачи. Наряду с этим ЛПР получает информацию о промежуточных этапах: о последовательности бинарных отношений, о совокупности ядер, об элементах, входящих в ядра (если их число невелико). Полученные в качестве решения элементы последнего ядра должны рассматриваться ЛПР двояко. С одной стороны, это “лучшие” элементы в смысле последнего бинарного отношения, с другой - эти элементы “крайне непохожи друг на друга”.

# Методы порогов несравнимости

- На изложенных идеях основаны известные французские методы ЭЛЕКТРА 1, 2, 3 (исключение и выбор в условиях реальности), а также некоторые другие.
- Методы данной группы дают возможность ЛПР вмешиваться в процесс выбора, однако обилие параметров, которыми он располагает, ставит под сомнение их эффективное использование. При применении данных методов следует учитывать, что вид бинарного отношения, а также их последовательность существенно определяют результат выбора.
- Кроме того, возникает вопрос: всегда ли множество предпочтительных альтернатив должно включать доминирующие и несравнимые элементы. Существуют проблемы, когда необходимо выбрать подмножество лучших альтернатив. Если взять безусловно лучший вариант и вариант, незначительно отличающийся от него в худшую сторону по одному критерию, то второй из них не войдет во множество Парето. Между тем в ряде ситуаций логика выбора, безусловно, требует его включения в группу лучших.



# Человеко-машинные процедуры принятия решений

- ЭВМ может использоваться при применении различных методов принятия решений для выполнения различных функций: как запоминающее устройство при большом числе альтернатив, при обработке информации (например, в аксиоматических методах), как средство наглядного представления информации ЛПР (на экране дисплея)
- Наряду с этим существует класс задач принятия решений, в которых ЭВМ играет особую роль, поскольку решение вырабатывается в результате неоднократного взаимодействия ЛПР и ЭВМ. Как правило, в этих задачах имеется частичная формализация проблемы, определены параметры модели и соотношения между ними. Качество процессов, протекающих в модели, оценивается по многим критериям. В то же время связь между критериями, степень компенсации изменения качества одного критерия изменением качества другого заранее неизвестны. Проблема состоит как раз в определении наилучшего для ЛПР соотношения между критериями, достигаемого при данной модели. Чаще всего в этой группе проблем рассматривается проблема математического программирования при нескольких критериях качества, которая решается следующим образом: ЛПР определяет какие-то первоначальные требования к соотношениям критериев, вводит их в ЭВМ, получает решение и реальные значения критериев, изменяет свои требования, снова вводит в ЭВМ и т. д.

# Человеко-машинные процедуры принятия решений

- В ходе таких итераций ЛПР учится, у него возникает понимание того, в какой степени область возможных решений допускает одновременное достижение экстремальных значений по всем критериям, насколько противоречивыми являются эти критерии и т. д. Это понимание способствует выработке разумного компромисса в требованиях ЛПР к значениям, достигаемым по разным критериям. Процесс заканчивается, когда ЭВМ выдает приемлемое решение, либо когда ЛПР убедится в нецелесообразности дальнейших попыток получить разумный компромисс при данной модели.
- Так как существенными элементами таких систем являются модель проблемы, заложенная в ЭВМ, и руководитель, определяющий некоторые параметры этой модели, то возникающую в итоге систему логично назвать человеко-машинной (используются также термины: диалоговая, интерактивная).
- Таким образом, человеко-машинные системы используются в случаях, когда имеется частичная формализация рассматриваемой проблемы.

# Человеко-машинные процедуры принятия решений

- Следует еще раз отметить, что ценность результатов, полученных при использовании человеко-машинных способов принятия решений, существенно зависит от адекватности модели реальной ситуации. Многие из методов изобретаются по прямой аналогии с известными методами поиска экстремума функций. Следуя по этому пути, можно изобрести еще немало новых методов, рассматривая ЛПР просто как датчик, обладающий определенными характеристиками.

# Контрольные вопросы

- Альтернативы. Критерии оценки альтернатив.
- Принцип последовательного уменьшения неопределенности: исходное множество альтернативных решений, множество допустимых решений, множество эффективных решений.
- Множество Эджворта-Парето.
- Аксиоматические методы.
- Методы порогов несравнимости (Методы Электра).
- Прямые методы.
- Методы компенсации.
- Человеко-машинные процедуры принятия решений

## Литература:

- Захарова А.А. Математическое и программное обеспечение стратегических решений об инновационном развитии региона [Текст] : Учебное пособие / А.А. Захарова , А.А. Григорьева. - Томск : Изд-во ТПУ, 2012. - 210 с.
- Маслов А.В. Математическое моделирование в экономике и управлении [Текст] : учеб.пос.для вузов / А.В.Маслов, А.А.Григорьева. - 2-е изд.,исправ.и доп. - Томск : Изд-во ТПУ, 2012. – 269 с.(Гриф УМО)
- Методы принятия управленческих решений : учебное пособие / Л.А. Трофимова, В.В. Трофимов. – СПб. : Изд-во СПбГУЭФ, 2012. – 101 с.
- Прохоров Ю.К., Фролов В. В. Управленческие решения: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 138 с.
- Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в Волшебных Странах: Учебник. - М.: Логос, 2000. - 296 с : ил.
- Балдин, К.В. Управленческие решения [Текст] : Учебник для вузов / К.В. Балдин , С.Н. Воробьев , В.Б. Уткин. - 7-е изд. - М. : "Дашков и К", 2010. - 496 с. (гриф УМО)

---

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**