$$W(X) = (W_1(X), W_2(X), \ldots W_n(X))$$

Векторная операция

$$X \in \Omega_x$$

Стратегия из области допустимых решений

$$\Omega_X^c \in \Omega_X$$

Область согласия

$$\Omega_X^K \in \Omega_X$$

Область компромиссов

Проблемы векторной оптимизации

- Определение области компромисса
- Выбор схемы компромисса
- Нормализация критериев
- Учет приоритета критериев

Сравнимость по Парето на примере задачи минимизации критериев векторной операции

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$$

i — Номер частного критерия

$$\min\{f(x) : x \in X\}$$

В качестве задачи оптимизации рассматривается минимизация векторной операции

$$f_i(x) < f_i(y), \quad i \in L(x,y),$$

Множество частных критериев для которых стратегия x лучше стратегии y

$$f_i(x) > f_i(y), \quad i \in G(x,y),$$

Множество частных критериев для которых стратегия x хуже стратегии y

$$f_i(x) = f_i(y), \quad i \in E(x,y).$$

Множество частных критериев для которых стратегия x равнозначна стратегии y

$G(x,y) = \emptyset$ — *X* не хуже по Парето чем *Y*

$G(x,y) = \emptyset$ и $L(x,y) \neq \emptyset$ — *X* лучше по Парето чем *Y*

$G(x,y) \neq \emptyset$ $L(x,y) \neq \emptyset$ — *X* и *Y* несравнимы по Парето

Очевидно что

$$\begin{cases} \Phi(x) \to \max \\ \Psi(x) \to \min \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(x) \to \max \\ -\Psi(x) \to \max \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Phi(x) \to \min \\ \Psi(x) \to \min \end{cases}$$

Оптимальность по Парето

$x \in X$

Оптимально по Парето если во множестве X нет другого решения, которое лучше по Парето

Определить оптимальные по Парето решения

$$\min \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

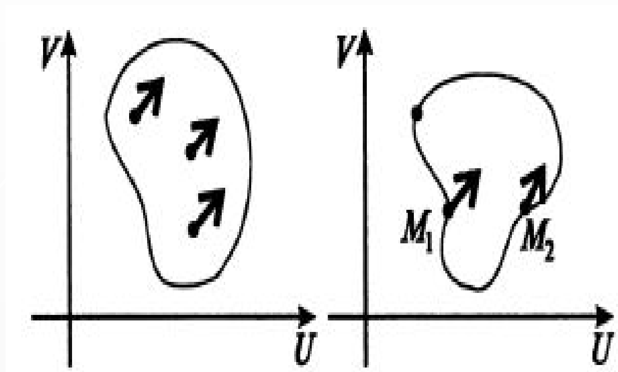
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Оптимальность по Парето и область компромиссов на примере задачи максимизации

$$\Omega_W^C \cap \Omega_W^K = 0$$

$$\Omega_X^C = \Omega_X \setminus \Omega_X^K$$

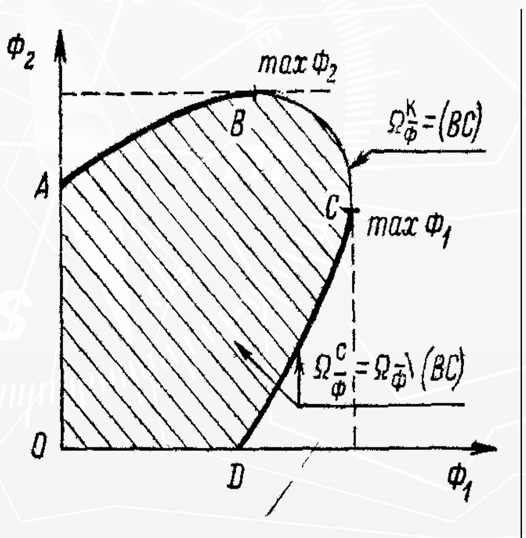
$$\Omega_W^C \cup \Omega_W^K = \Omega_W$$

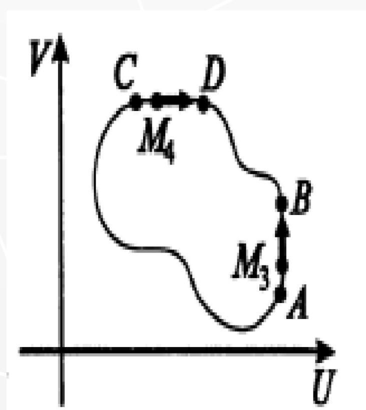


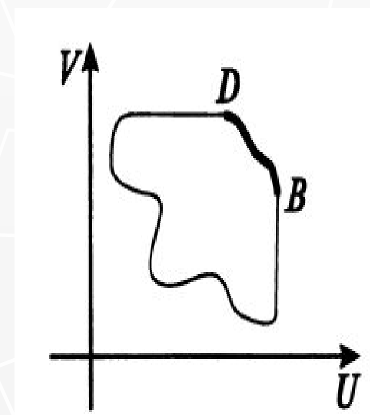
Оба решения можно улучшить

Одно решение можно улучшить при неизменности другого

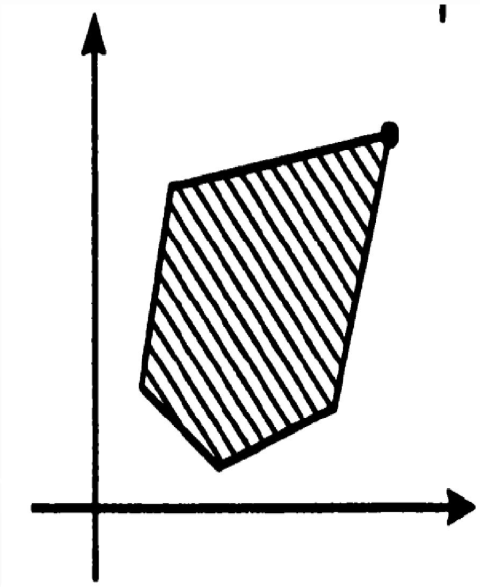
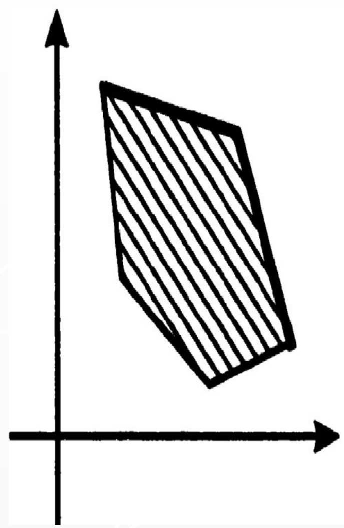
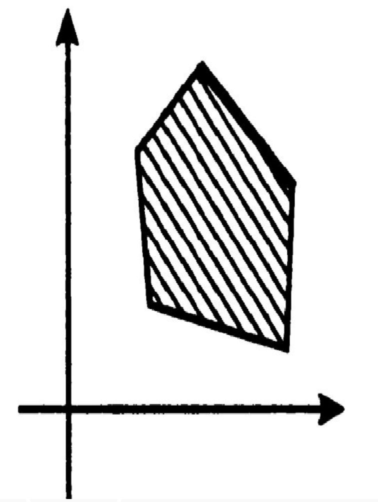
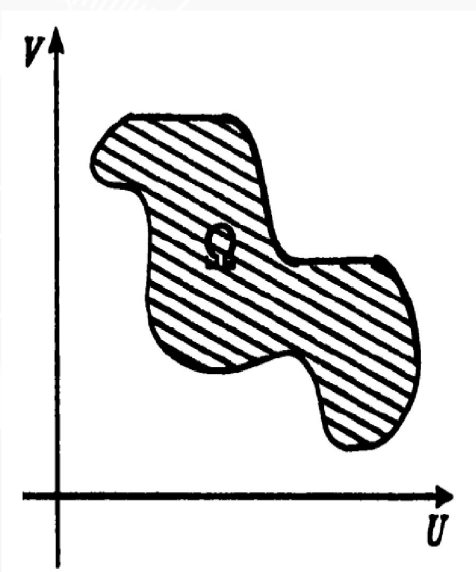
Одно решение улучшается при ухудшении другого

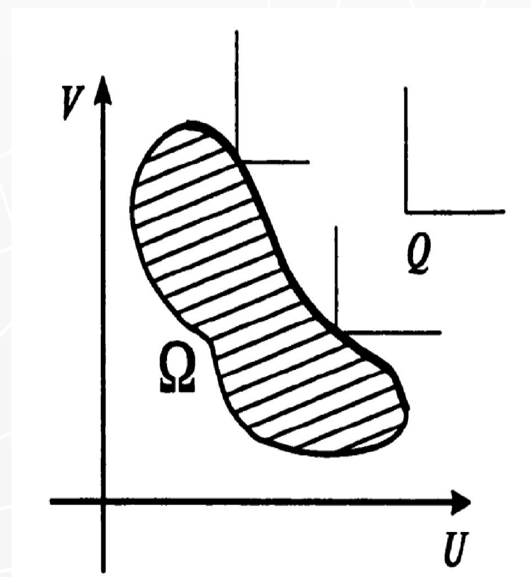






Примеры области компромиссов



Виды компромиссов

Метод уступок — Один или несколько критериев снижаются, в зависимости от совокупности других критериев или лицо, принимающее решения (руководитель), подводится к выбору решения путем постепенного ослабления первоначальных требований, как правило, одновременно невыполнимых.

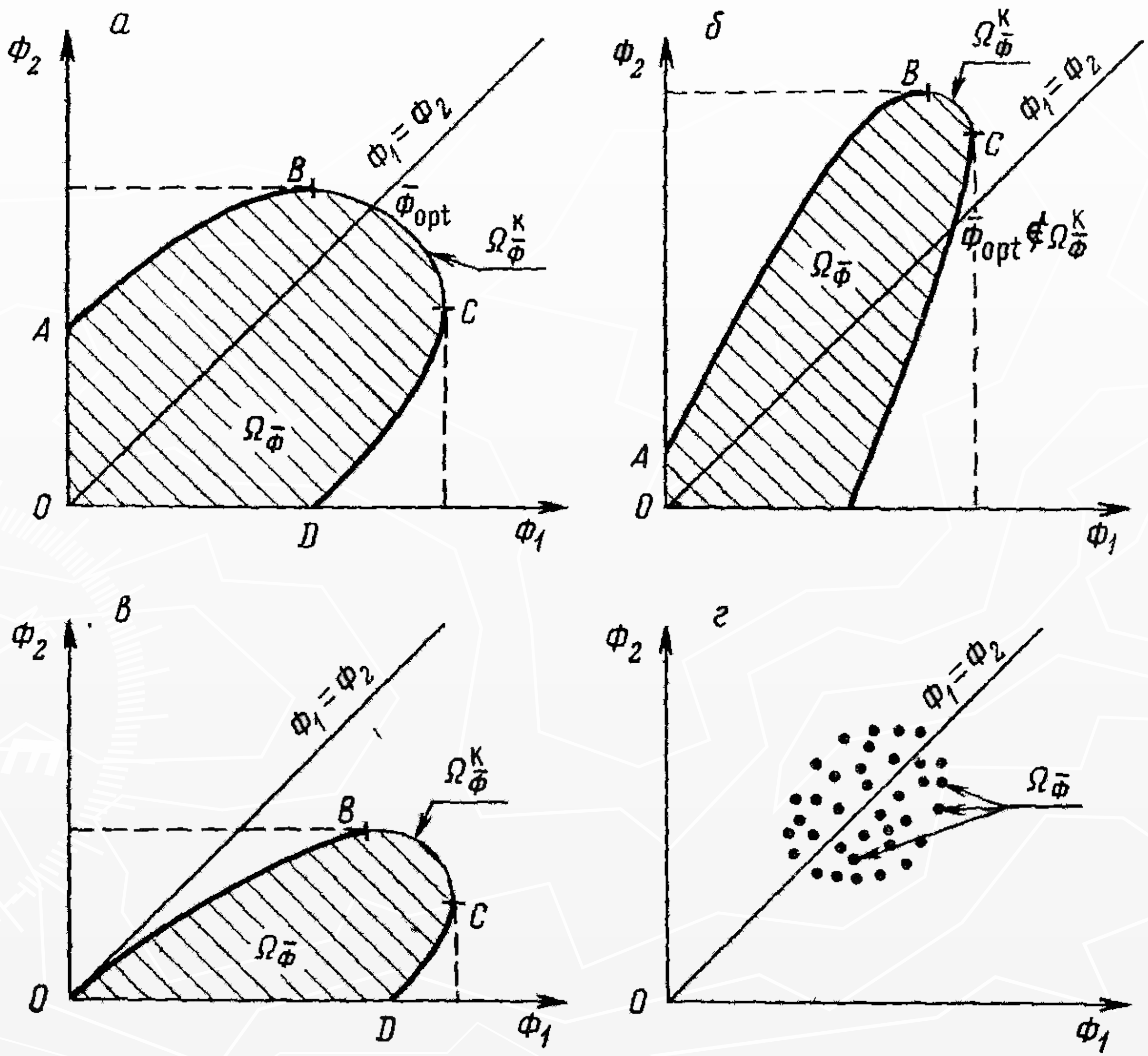
Метод идеальной точки — в области допустимых значений неизвестных ищется такая их совокупность, которая способна обеспечить набор значений критериев, в том или ином смысле ближайших к наилучшему, как правило, недосягаемому (в так называемой *точке утопии*).

Метод свертывания — лицо, принимающее решения (руководитель), сводит многокритериальную задачу к задаче с одним критерием.

Метод ограничений — множество допустимых значений неизвестных уменьшается путем осмысленного введения дополнительных ограничений на заданные критерии.

Метод анализа иерархий — на основании суждений экспертов оценивается вклад в общую оценку каждого критерия (приоритетный способ).

Метод равномерной уступки и его недостатки

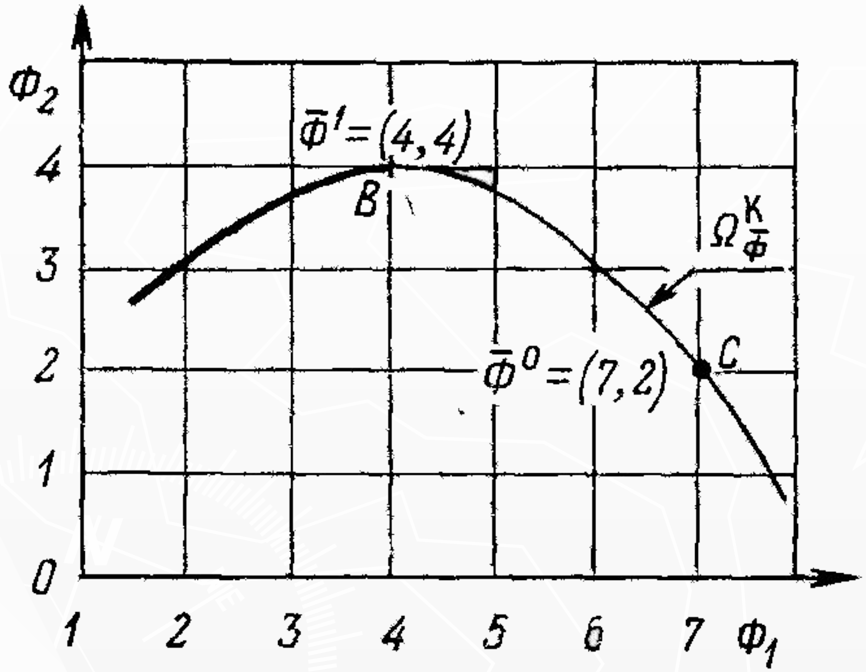


Принцип максимина

Выбирается наихудший из имеющихся критериев и по нему проводится максимизация

$$opt\,\vec{W} = \max_{\vec{W} \in \Omega_W} \min_{1 \le i \le k} W_i$$

Принцип справедливой абсолютной уступки



справедливым считается такой компромисс, при котором суммарный абсолютный уровень снижения одного или нескольких критериев не превосходит суммарного абсолютного уровня повышения других критериев

$$\Delta_{абс} = (W_1^1 - W_1^0) + (W_2^1 - W_2^0) =$$
$$= (4 - 7) + (4 - 2) = -1$$

Можно свести к:

$$\underset{\vec{W} \in \Omega_W^к}{opt} \vec{W} = \max_{\vec{W} \in \Omega_W^к} \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Ф(7,2) лучше

$$\Delta = W_1^1 + W_2^1 - (W_1^0 + W_2^0)$$

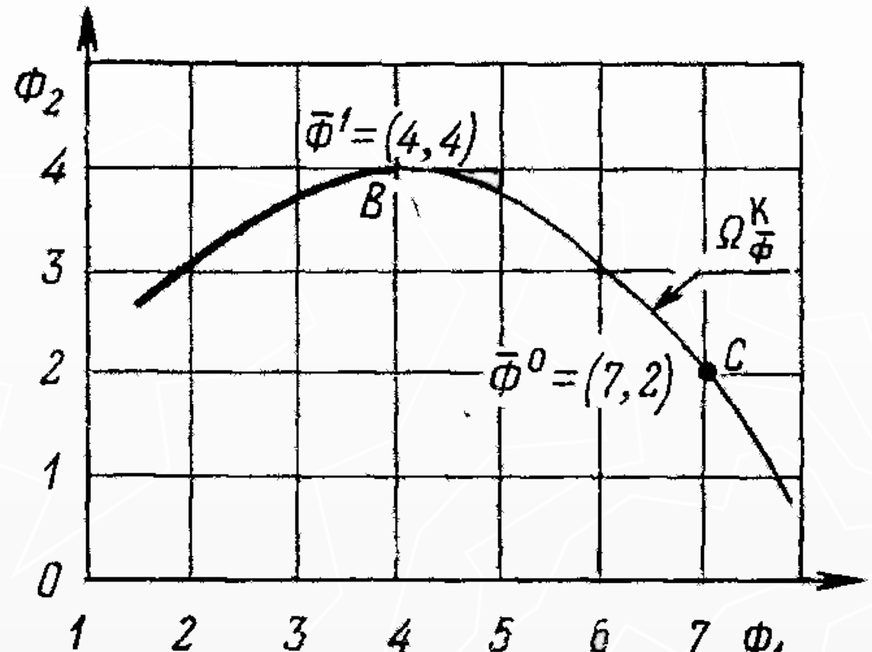
Принцип относительной справедливой

- *справедливым является такой компромисс, при котором суммарный относительный уровень снижения одного или нескольких локальных критериев не превосходит суммарного относительного уровня повышения эффективности по остальным критериям*
- ***Важным** преимуществом принципа является то, что он инвариантен к масштабу измерения критериев*

$$\Delta_{отн} = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i^1 - W_i^0}{W_i^0}$$

Можно свести к:

$$\underset{\vec{W} \in \Omega}{opt \vec{W}} = \max_{\vec{W} \in \Omega} \prod_{i=1}^{n} W_i$$



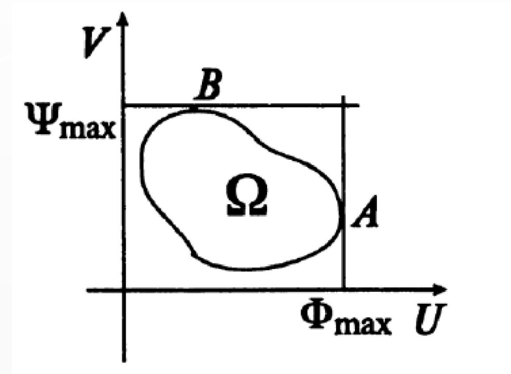
$$\Delta_{отн} = \frac{4-7}{7} + \frac{4-2}{2} = -\frac{3}{7} + 1 = \frac{4}{7}$$

Ф(7,2) хуже

$$d = \frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{i \in (1..n)} W_i^{1\ldots} . W^{0..1} . W_i^0 - n \prod_i W_i^0}{\prod_i W_i^0}$$

Метод (последовательных) уступок

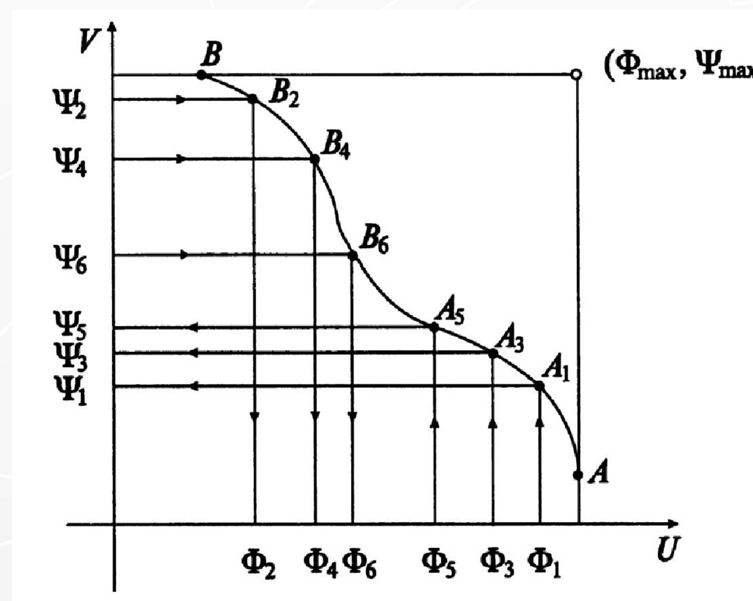
- Как видно из рисунка задача максимизации двух критериев решения не имеет, так как точка утопии находится вне области допустимых решений
- Метод состоит в том, что лицо, принимающее решения (ЛПР), работая в режиме диалога с аналитиком-специалистом, последовательно сужает множество точек на границе Парето и в конце концов соглашается остановиться на некоторой компромиссной паре значений критериев



$$\Phi(x,y) \to max$$
$$\Psi(x,y) \to max,$$
$$(x,y)\epsilon\omega$$

$$U = \Phi(x,y), V = \Psi(x,y), (x,y)\epsilon\omega.$$

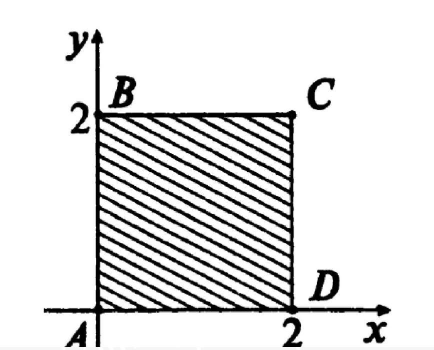
$$AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset A_5B_4 \supset \cdots$$

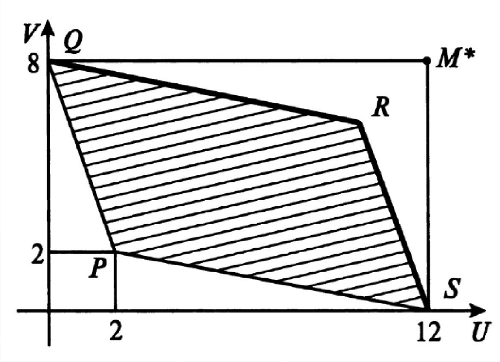


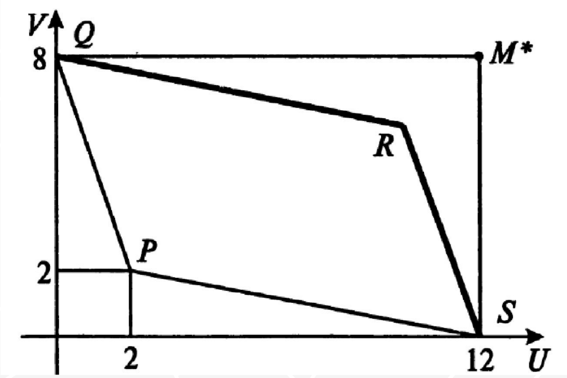
Метод идеальной точки

- состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии, задаваемой лицом, принимающим решения.
- Пусть на множестве *ω* плоскости *(x, y)*, определяемом системой неравенств заданы функции U и V, требуется решить задачу максимизации

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= 5x - y + 2 \\ V &= -x + 3y + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{U}(x,y) \to max \\ &\mathrm{V}(x,y) \to max, \end{aligned}$$







$$\alpha U + \beta V = \gamma$$

$$\begin{aligned} 8\beta &= \gamma \\ 10\alpha + 6\beta &= \gamma \end{aligned}$$

α, β и γ $\rightarrow$?

Продолжение решения

$$\beta = \frac{\gamma}{8} \qquad \alpha = \frac{\gamma}{40}$$

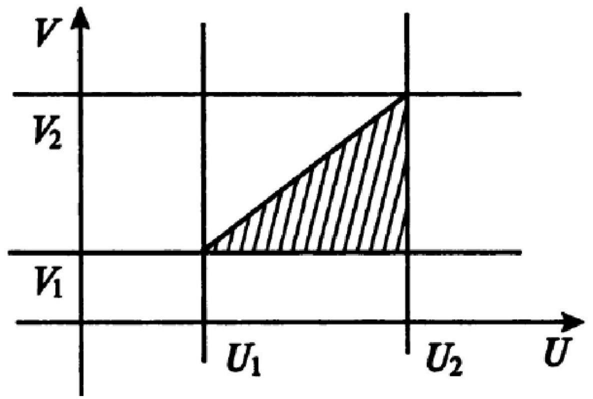


Рис. 13

Положим $\gamma=40$. Тогда $\alpha=1$, $\beta=5$ и $U+5V=40$

Искомое уравнение прямой