

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

А.Я. Суханов

## **Исследование операций**

Учебное методическое пособие по лабораторным занятиям,  
самостоятельной и индивидуальной работе студентов направления  
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

**Томск 2022**

**Суханов А.Я.**

Исследование операций: Учебное методическое пособие по лабораторным занятиям, самостоятельной и индивидуальной работе студентов – 122 с.

Учебное методическое пособие содержит программу и задания для лабораторных занятий, а так же все необходимые формы документов для выполнения лабораторных заданий.

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>5</b>
<b>1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ .....</b>	<b>6</b>
1.1. Цели преподавания дисциплины .....	6
1.2. Задачи изучения исследования операций .....	6
1.3. Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо для изучения исследования операций. ....	6
<b>2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.....</b>	<b>7</b>
2.1 Лекции (28 часов) .....	7
2.2 Темы для самостоятельного изучения. Отчет в виде рефератов и докладов .....	8
2.3 Экзаменационные вопросы .....	8
<b>3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ .....</b>	<b>11</b>
3.1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 СВЕРТКА КРИТЕРИЕВ ВЕКТОРНОЙ ОПЕРАЦИИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И АНАЛИЗ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ПРИНЯТОЙ МОДЕЛИ .....	13
3.1.1 Векторная операция .....	13
3.1.2 Виды компромиссов .....	13
3.1.2.1 Метод уступок .....	14
3.1.2.2 Метод идеальной точки .....	15
3.1.2.3 Метод свертывания и метод ограничений .....	15
3.1.3 Теория по свертке векторной операции .....	15
3.1.4 Теорема о свертке .....	20
3.1.5 Теория по линейному программированию и решению задачи анализа на чувствительность .....	23
3.1.5.1 Основы анализа на чувствительность .....	23
3.1.5.2 Первая задача анализа на чувствительность .....	24
3.1.5.2 Вторая задача анализа на чувствительность. Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно? .....	27
3.1.5.3 Третья задача анализа на чувствительность .....	28
3.1.5.4 Условия Куна-Таккера .....	30
3.1.6 Задания по свертке векторной операции .....	30
3.1.7 Задание по линейному программированию .....	32
3.1.8 Пример решения задачи линейного программирования .....	33
3.1.9 Теоретические вопросы по первой лабораторной работе .....	40
3.2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ .....	41
3.2.1 Алгоритм метода динамического программирования .....	42
3.2.2 Постановка задачи распределения ресурсов .....	43
3.2.2.1 Распределение ресурсов по неоднородным этапам .....	43
3.2.2.2 «Классическая» задача распределения ресурсов .....	44
3.2.2.3 Задача резервирования ресурсов .....	45
3.2.2.4 Распределение ресурсов с вложением доходов в производство .....	46
3.2.2.5 Решение «классической» задачи распределения ресурсов .....	46
3.2.2.6 Связь различных типов задач распределения ресурсов .....	52
3.2.3 Задание по задаче динамического программирования о распределении ресурсов .....	53
3.2.4 Пример задачи динамического программирования о распределении нескольких ресурсов .....	53
3.2.5 Теоретические вопросы по динамическому программированию .....	55
3.3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО И ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ....	55
3.3.1 Метод численного моделирования (Метод Монте-Карло) .....	55
Общие сведения о методе Монте-Карло .....	55
Определение объема геометрической фигуры с помощью метода Монте-Карло .....	56
3.3.2 Моделирование случайных величин с равномерным распределением .....	57
3.3.2.1 Общие сведения о моделировании равномерного распределения .....	57
3.3.2.2 Псевдослучайные числа .....	58
3.3.2.3 Алгоритмы генераторов псевдослучайных чисел .....	62
3.3.3 Оценка точности результатов, полученных методом Монте-Карло .....	66
3.3.4 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения .....	68
3.3.4.1 Моделирование дискретных случайных величин .....	68
3.3.4.2 Моделирование случайных событий .....	69
3.3.4.3 Моделирование непрерывной случайной величины .....	69
3.3.5 Алгоритмы моделирования некоторых типов случайных величин .....	69
3.3.5.1 Экспоненциальное распределение .....	69
3.3.5.2 Пуассоновская случайная величина .....	70
3.3.5.3 Гауссовская случайная величина .....	70

3.3.5.4	Случайная величина с логнормальным распределением	72
3.3.5.5	Моделирование n-мерной случайной величины	72
3.3.5.6	Критерий согласия хи-квадрат Пирсона	73
3.3.6	Лабораторное задание по методу Монте-Карло и датчикам случайных чисел	75
3.3.6.1	Моделируемые самостоятельно датчики	77
3.3.6.2	Варианты заданий для второй части работы	78
3.3.6.3	Варианты фигур	80
3.4	ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)	81
3.4.1	Основы теории систем массового обслуживания	81
3.4.2	Лабораторное задание по ТМО	90
3.4.3	Контрольные вопросы	91
3.5	ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА	92
3.5.1	Теория игр	92
3.5.2	Типы игр	93
3.5.2.1	Кооперативная/некооперативная игра	93
3.5.2.2	С нулевой суммой и с ненулевой суммой	93
3.5.2.3	Параллельные и последовательные	94
3.5.2.4	С полной или неполной информацией	94
3.5.3	Решение матричной игры $n \times m$ по критерию Гурвица, Сэвиджа, Байеса и Вальда	94
3.5.3.1	Игры с природой	94
3.5.3.2	Критерий Вальда (максиминный)	95
3.5.3.3	Критерий максимума (максимаксный)	95
3.5.3.4	Критерий Гурвица	96
3.5.3.5	Критерий Сэвиджа (минимаксный)	96
3.5.3.6	Критерий Байеса	96
3.5.3.7	Задание №1 по теории игр, решение матричных игр, критерии Вальда, Гурвица, Байеса	97
3.5.4	Упрощение матричной игры. Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$ в смешанных стратегиях	97
	Чистые и смешанные стратегии	97
3.5.5	Решение матричной игры $(2 \times 2)$	100
3.5.6	Упрощение матричной игры	107
3.5.7	Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$	110
3.5.7.1	Задание №2. Упрощение игр и решение игр 2 на n или m на 2 в смешанных стратегиях	114
3.5.8	Решение коалиционных игр, нахождение ядра и вектора Шепли	114
3.5.8.1	Ядро	115
3.5.8.2	Вектор Шепли	117
3.5.8.3	Задание №3. Решение коалиционных игр	118
3.5.8.4	Пример решения коалиционной игры по заданию	118
3.5.9	Темы и контрольные вопросы по теории игр	120

ЛИТЕРАТУРА	122
------------	-----

## **ВВЕДЕНИЕ**

Методическое пособие предназначено для студентов направления 230100 очной формы обучения и содержит рабочую программу дисциплины «Исследование операций», руководство для выполнения лабораторных работ, задания для контрольной работы по вариантам, экзаменационные вопросы по дисциплине. Выполнение заданий поможет лучше усвоить теоретический материал и получить практические навыки при работе с базами данных и экспертными системами.

Лабораторные работы по дисциплине «Исследование операций» у студентов направления бакалавриата 09.03.01 «Информатики и вычислительная техника» проводятся в шестом семестре четырехлетнего учебного цикла.

# 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

## 1.1. Цели преподавания дисциплины

Целью дисциплины «Исследование операций» является овладение методикой операционного исследования, усвоение вопросов теории и практики построения и анализа операционных моделей в системах различного назначения.

## 1.2. Задачи изучения исследования операций.

Основной задачей изучения дисциплины является обучение приемам и методам исследования операций, математическим методам оптимизации, а также методам математического моделирования операций и теории игр.

## 1.3. Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо для изучения исследования операций.

Дисциплина «Исследование операций» относится к числу дисциплин профессионального цикла. Успешное овладение дисциплиной предполагает предварительные знания, полученные в предыдущих дисциплинах: «Математика», «Дополнительные главы математики», «Информатика», «Программирование», «Теория вероятностей и математическая статистика»; знакомство с пакетами прикладных программ Mathcad и Matlab. Знания, полученные студентами по этой дисциплине, будут использоваться при выполнении учебно-исследовательской работы, при подготовке выпускной квалификационной работы.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

### 2.1 Лекции (28 часов)

Наименование разделов	Содержание разделов	Трудоемкость (час.)
Введение	Цели и задачи курса, его взаимосвязь с другими дисциплинами специальности, значение курса в подготовке бакалавров направления Информатика и вычислительная техника. История предмета, основные понятия и определения. Рекомендуемая литература.	2
Общая постановка задачи исследования операций	Математические модели операций. Принципы построения математических моделей и их классификации. Общая постановка задачи: детерминированный случай и оптимизация в условиях неопределенности. Оценка операций по нескольким показателям (понятие векторной оптимизации, мультикритериальные задачи). Способы свертки критериев. Оптимальность по Парето.	4
Задачи математического программирования	Постановка и классификация задач математического программирования. Линейное программирование. Симплекс метод. Анализ решения задачи линейного программирования на чувствительность к принятой модели. Пример анализа на чувствительность на основе графического решения задачи. Анализ на чувствительность задачи линейного программирования с помощью двойственной задачи. Задачи динамического программирования: общая постановка и схема решения. Смешанно-целочисленное программирование. Задачи стохастического программирования (задачи с неопределенными параметрами).	6
Нелинейная оптимизация с ограничениями	Необходимые условия оптимальности (Куна-Такера). Экономическая интерпретация множителей Куна-Такера. Достаточные условия оптимальности. Седловые точки и функции Лагранжа. Примеры задач нелинейного программирования.	4
Моделирование операций по схеме марковских случайных процессов	Марковские случайные процессы. Потоки событий. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Предельные вероятности состояний. Процессы гибели и размножения.	4
Основы теории систем массового обслуживания	Основные определения и понятия. Простейшие системы массового обслуживания и их характеристики. Метод численного моделирования (метод Монте-Карло) Датчики случайных чисел в интервале (0,1). Моделирование событий, дискретных и непрерывных случайных величин. Оценка точности характеристик полученных методом численного моделирования. Моделирование систем массового обслуживания.	4

Основы теории игр	Основные понятия теории игр. Формы представления игр. Равновесие Нэша. Антагонистические игры: определение матричной игры, решение матричных игр в чистых и смешанных стратегиях, решение игр $m \times n$ сведением к задаче линейного программирования. Бесконечные антагонистические игры и их решение. Игры многих лиц: общие понятия, конечные бескоалиционные игры, кооперативные игры.	4
-------------------	---	---

## **2.2 Темы для самостоятельного изучения. Отчет в виде рефератов и докладов.**

1. Динамическое программирование: задача распределения ресурсов с вложением доходов в производство;
2. Позиционные игры – основные понятия и методы их решения.
3. Задачи стохастического программирования. Примеры задач.
4. Дилемма заключенного.
5. Примеры игр и оптимальных стратегий в природе.
6. Экстенсивная форма представления игры.
7. Задачи смешанно-целочисленного программирования.
8. Современные способы решения задач планирования в условиях неопределенности.

## **2.3 Экзаменационные вопросы**

1. Определения и примеры: операции, оперирующей стороны, стратегии оперирующей стороны, действующих факторов операции, критерия эффективности операции, состояния операции.
2. Понятие математической модели операции, классификация моделей и их построение.
3. Общая постановка задачи исследования операций, детерминированный случай.
4. Общая постановка задачи исследования операций, оптимизация решения в условиях неопределенности.
5. Основные проблемы векторной оптимизации и подходы к их решению: принцип равномерности, принципы абсолютной и относительной справедливой уступки. Оптимальность по Парето.
6. Способы свертки критериев.
7. Постановка и классификация задач математического программирования.
8. Графическое решение задачи линейного программирования.
9. Анализ решения задачи линейного программирования на чувствительность к принятой модели (три задачи анализа на чувствительность).



10. Решение задач нелинейного программирования.
11. Решение задач смешанно целочисленного программирования. Примеры задач. Способы приведения к задачам СЦП.
12. Решение задач стохастического программирования.
13. Симплекс метод.
14. Динамическое программирование как метод оптимизации. Общая характеристика метода, примеры. Преимущества и недостатки.
15. Процедура построения оптимального управления методом динамического программирования.
16. Задача распределения ресурсов.
17. Задача динамического программирования с мультипликативным критерием.
18. Понятие марковского случайного процесса с дискретным и непрерывным временем.
19. Поток событий, простейший поток событий.
20. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.
21. Предельные вероятности состояний.
22. Процесс «гибели и размножения» и предельные вероятности для него.
23. Основные понятия и определения теории массового обслуживания.
24. Классификация систем массового обслуживания. Характеристики эффективности систем массового обслуживания.
25. Одноканальная система массового обслуживания и ее основные характеристики.
26. Многоканальная система массового обслуживания и ее основные характеристики.
27. Метод численного моделирования.
28. Моделирование равномерного распределения в интервале  $(0,1)$ .
29. Моделирование дискретных и непрерывных случайных величин.
30. Оценки точности характеристик, полученных методом Монте-Карло.
31. Основные понятия и определения теории игр.
32. Позиционная форма игры.
33. Матричная форма игры.
34. Решение матричных игр двух лиц с нулевой суммой. Принцип минимакса. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица.
35. Равновесие Нэша.
36. Решение матричных игр в смешанных стратегиях.
37. Упрощение игр.
38. Решение и геометрическая интерпретация игр  $2 \times 2$ .
39. Решение игр  $2 \times m$ .

40. Решение игр  $n \times m$ .

### 3. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

**Исследование операций(ИО)** – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением математических и количественных методов для нахождения оптимальных решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

**Решение** – выбор из ряда возможностей, имеющихся у организатора.

**Операция** – всякое мероприятие или система действий, объединённые единым замыслом и направленные на достижение какой-то цели, существующее во времени, проходящее различные этапы(фазы) развития и завершающийся получением конечного результата, сопоставимого с исходной целью.

**Оперирующие стороны** – отдельные лица и коллективы, объединённые организационным руководством и активно стремящиеся к достижению поставленной цели.

**Активные средства проведения операции** – совокупность материальных, энергетических, денежных, трудовых и других ресурсов, а также организационных возможностей, используемых оперирующей стороной для обеспечения успешного хода *операции* и достижения её цели.

**Стратегии оперирующей стороны в данной операции** – допустимые (не выходящие за пределы технических, организационных, физических возможностей) способы расходования ею имеющихся *активных средств*. Среди допустимых находятся и *оптимальные стратегии*.

**Действующие факторы операции** – объективные условия и обстоятельства, определяющие её особенности и непосредственно влияющие на её исход. Различают *факторы*:

- Определённые (точно известные)
- Неопределённые (имеющие вероятностную природу или проявляющиеся беспорядочно)

Все они разделяются на:

- Контролируемые *оперирующей стороной*
- Неконтролируемые *оперирующей стороной*

**Пример определённого неконтролируемого фактора** – сменить президента (мы знаем, кто президент в данный момент, но не можем на это повлиять) или количество минут в часах.

**Пример неопределённого контролируемого фактора** – блокировки РКН-ом телеграмма (они не знают, получится ли, но могут влиять на сам процесс) или температура в помещении при затопке камина при отсутствии термометра.

**Пример определённого контролируемого фактора** – количество войск в твоей

армии (ты знаешь сколько человек в твоей армии и можешь поменять это количество).

**Пример неопределённого неконтролируемого фактора** – наступление революции (ты не знаешь наступит ли она и никак на это не влияешь).

**Критерий эффективности операции (целевая функция)** – показатель требуемого, или ожидаемого, или достигнутого соответствия между результатом предпринимаемых действий и целью *операции*. Важнейшая функция *критерия* – возможность сравнительной оценки различных *стратегий* до начала их реализации.

**Математическая модель** – формальные соотношения, устанавливающие связь принятого *критерия эффективности с действующими факторами операции*. Она должна быть достаточно полной (т.е. учитывать все важные *факторы*), но достаточно простой и исключать второстепенные *факторы* (чтобы можно было установить обозримые зависимости).

- Аналитические (детерминированные)
- Статистические и игровые

#### Оптимизация:

##### Детерминированный случай:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \dots; x_1, x_2, \dots) \quad (3.1)$$

Когда все факторы заданы заранее: условия(a) и решения(x).

##### Недетерминированный случай:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \dots, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots) \quad (3.2)$$

Добавляются неизвестные факторы (y).

Задача поиска оптимального решения теряет определённости, т.к. нельзя максимизировать неизвестную величину. Это превращает её в *задачу принятия решения в условиях неопределённости*. Оптимизация в среднем:

$$\bar{W} = M[W] = \int \int \dots \int W(\alpha_1, \alpha_2, \dots; y_1, y_2, \dots; x_1, x_2, \dots) f(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots \quad (3.3)$$

Выше – функция распределения критериальной функции.

Показатель эффективности – математическое ожидание. Можно решать максимизируя среднее значение критериальной функции.

a – константы – определённые неконтролируемые факторы.

x – переменные – неопределённые контролируемые факторы.

y – случайные величины, а f(y...) – плотность вероятности т.е. неопределённые неконтролируемые факторы. Плотность вероятности – усреднённое значение критерия и максимизируем или минимизируем.

Оптимизация в среднем- берётся значение фактора, попадающее в среднее значение.

### 3.1 Лабораторная работа №1 Свертка критериев векторной операции.

#### Решение задачи линейного программирования и анализ на чувствительность к принятой модели

##### 3.1.1 Векторная операция

Векторная операция представляет собой вектор частных критериев эффективности, каждый из которых зависит от действующих факторов операции. Здесь  $X$  представляют собой контролируемые факторы.

$$W(X) = (W_1(X), W_2(X), \dots, W_n(X)) \quad (3.1.1)$$

$X \in \Omega_x$  - область допустимых решений – когда допустимое множество всех возможных точек, которые удовлетворяют ограничениям задачи.

$\Omega_x^* \in \Omega_x$  - область согласия – когда возможно улучшение качества одновременно всех критериев или, по крайней мере, не ухудшение одного при увеличении другого.

$\Omega_x^k \in \Omega_x$  - область компромиссов – когда существуют противоречия между некоторыми критериями.

В область согласия входят решения, для любого из которого можно найти решение из области компромиссов, превосходящее его по всем критериям.

Нормализация вектора на основе введения вектора идеального качества операции

$$W_i = (W_1/W_{i1}, W_2/W_{i2} \dots W_n/W_{in})$$

Или, в качестве идеального вектора принимается такой, компонентами которого являются максимумы локальных критериев.

Проблемы *векторной оптимизации*:

- Определение *области компромисса*
- Выбор *схемы компромисса*
- Нормализация *критериев*
- Учёт приоритета *критериев*

##### 3.1.2 Виды компромиссов

1. **Метод уступок** – один или несколько критериев снижаются, в зависимости от совокупности других критериев (постепенно ослабляют первоначальные требования, невыполнимые совместно).

2. **Метод идеальной точки** – в области допустимых значений неизвестных ищется такая их совокупность, которая способна обеспечить набор значений критериев, в том или ином смысле ближайших к наилучшему, но недостижимому (точки утопии).

3. **Метод свёртывания** – сведение многокритериальной задачи к задаче с одним критерием.

4. **Метод ограничений** – множество допустимых значений неизвестных уменьшается путём осмысленного введения дополнительных ограничений.

5. **Метод анализа иерархий** – на основании суждений экспертов оценивается вклад в общую оценку каждого критерия.

### 3.1.2.1 Метод уступок

Принцип равномерной уступки.

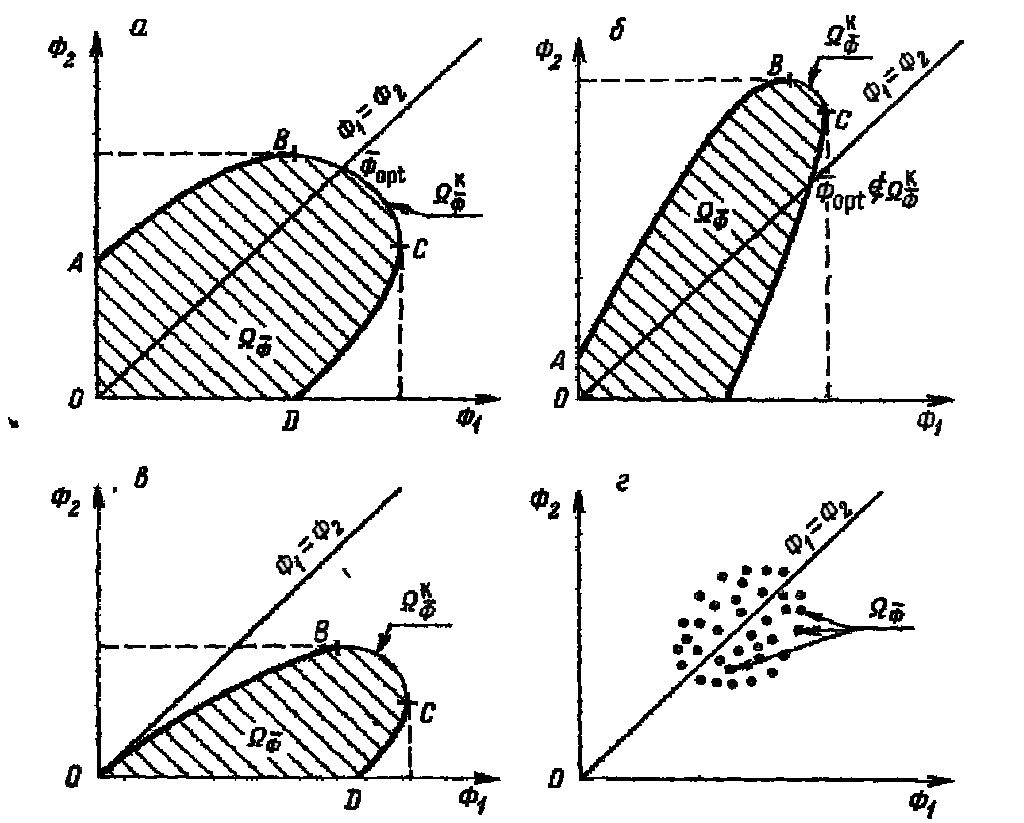


Рисунок 3.1.1 – Принцип равномерной уступки

Недостаток – при равномерных уступках найденное оптимальное решение может просто не попасть в область компромиссов.

Принцип максимина.

Выбирается наихудший из имеющихся критериев и по нему проводится максимизация. Суть в отыскании наибольшей точки, находящейся на границе Парето.

$$\max_{\vec{W}} \min_{1 \leq i \leq k} W_i \quad (3.1.2)$$

Принцип справедливой абсолютной уступки

Справедливым считается такой компромисс, при котором суммарный абсолютный уровень снижения одного или нескольких критериев не превосходит суммарного

абсолютного уровня повышения других критериев.

$$\text{opt} \vec{W} = \max_{\vec{W} \in \Omega_K} \sum_{i=1}^n W_i \quad (3.1.3)$$

Принцип относительной справедливой уступки

Справедливым является такой компромисс, при котором суммарный относительный уровень снижения одного или нескольких локальных критериев не превосходит суммарного относительного уровня повышения эффективности по остальным критериям. Важным преимуществом принципа является то, что он инвариантен к масштабу измерения критериев.

$$\text{opt} \vec{W} = \max_{\vec{W} \in \Omega} \prod_{i=1}^n W_i \quad (3.1.4)$$

Принцип последовательных уступок

Суть в последовательном сужении множества точек на границе Парето и выбора компромиссной пары критериев. Задача максимизации обоих критериев решения не имеет – точка утопии вне области допустимых решений.

$$U = \Phi(x, y), V = \Psi(x, y), (x, y) \in \omega. \quad AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset A_5B_4 \supset \dots \quad (3.1.5)$$

### 3.1.2.2 Метод идеальной точки

Состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии. На области определения заданы функции U и V, требуется решить задачу их максимизации.

### 3.1.2.3 Метод свёртывания и метод ограничений

Относятся к линейным многокритериальным задачам, когда у критериев есть свой вес, зависимо от степени важности. Данный метод подробно рассматривается в лекциях.

### 3.1.3 Теория по свертке векторной операции.

При формализации многокритериальных задач в теории исследования операций выделены некоторые часто использующиеся приемы. О них и пойдет речь ниже. Но подчеркнем, что выбор такого приема каждый раз должен определяться из содержательного анализа моделируемой операции, тем более, что приведенные ниже примеры далеко не исчерпывают всех возможностей.

Причины появления многокритериальности могут быть различными. Например, оперирующая сторона может представлять собой группу лиц, каждое из которых имеет, вообще говоря, свои цели.

Часто многокритериальность появляется при рассмотрении динамических процессов. Например, если коммерческая фирма стремится к увеличению прибыли, и ее

функционирование рассматривается на достаточно длинном временном интервале, то возникает целый ряд показателей, характеризующих прибыль в каждый из моментов времени.

Иногда удобно чисто формально рассматривать как многокритериальную задачу обычную модель операции, в которой имеется неопределенный фактор, рассматривая в качестве частных критериев значения общего критерия операции при конкретных значениях неопределенных факторов.

В ряде случаев задачу с неопределенными факторами преобразуют в двухкритериальную модель, формулируя задачу минимум и задачу максимум.

Очень часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда оперирующая сторона просто не может сформулировать свои предпочтения на вербальном уровне, как в приведенном выше примере.

Пример: диверсификация заявки на аукцион

Иногда происходит путаница, и в качестве критерия задаются ограничения, которые должны соблюдаться в данной задаче. Так, например, формулируя задачу на создание межпланетного космического корабля, С.П. Королев писал, что Марс должен быть достигнут а) за минимальное время и б) с минимальной затратой средств. Понятно, что если речь идет о пилотируемом полете, то его длительность должна быть не слишком большой (ограничение!). Но вряд ли кто то станет стремиться к сокращению этого времени на несколько минут, или даже часов, за счет ухудшения других характеристик полета.

Отметим, что критерий в любой модели операции должен выражаться через управления оперирующей стороны и, быть может неопределенные факторы. Например, стремление выйти замуж за миллионера может быть лишь благим пожеланием, а не целью, если у оперирующей стороны нет реальных возможностей встретить хотя бы одного миллионера. Точно так же лозунг «Наша цель – коммунизм» нельзя рассматривать как формулировку цели операции, поскольку совершенно не ясно, ведет ли к достижению этой цели выращивание кукурузы в приполярных районах, или нет.

Данные соображения приводят к следующим определениям.

**Определение.** Многокритериальной задачей называется набор  $\langle U, g^1, g^2, \dots, g^m \rangle$ , где  $U$  – множество, а  $g^i$  – функции, отображающие  $U$  в множество действительных чисел.

Целью данной лекции будет рассмотрение способов построения на основе многокритериальной задачи  $\langle U, g^1, g^2, \dots, g^m \rangle$  модели операции вида  $\langle U, g \rangle$ .

Часто такую операцию строят, задавая функцию  $F$ , и полагая, что  $g(u) = F(g^1(u), g^2(u), \dots, g^m(u))$ . Функцию  $F$  в таком случае называют функцией свертки (или



просто сверткой) критериев.

### Примеры сверток

По техническим причинам удобно разделить цели операций на два класса: количественные и качественные. К первым относятся те, которые могут быть либо достигнуты, либо нет. Ко вторым – те, степень достижения которых может быть выражена числом.

Разумеется, качественная цель может быть описана количественным критерием, который, например, принимает значение 1, если цель достигнута, и значение 0 в противном случае.

**Экономический способ свертки.** Свертка частных критериев  $g^1, \dots, g^m$  представляет собой взвешенную сумму  $\sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$ .

В экономических моделях данный способ свертки часто используется при агрегировании абсолютно взаимозаменяемых продуктов.

- «Слон больше серый, чем ушастый, потому, что ушастый он только местами, а серый – везде»

**Пример.** Предприятие выпускает  $m$  видов продукции. Критерии  $g^1, \dots, g^m$  выражают количества продукции каждого из видов, выпущенных предприятием. Доходы предприятия от реализации продукции выражаются сверткой  $\sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$ . Коэффициенты свертки в этом случае имеют смысл цен.

**Пример.** Рассмотрим деятельность фирмы за  $m$  лет. Критерии  $g^1, \dots, g^m$  выражают прибыль фирмы в соответствующие годы. Свертка  $\sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$  оценивает суммарную прибыль за весь период. Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  в этом случае имеют смысл коэффициентов дисконтирования.

**Пример.** В классической биатлонной гонке имеется два критерия: количество промахов  $g^1$  и время прохождения дистанции  $g^2$ . Результат спортсмена оценивается по линейной свертке  $60 \frac{\text{секунд}}{\text{промах}} g^1 + 1 \cdot g^2$  (если время измерять в секундах).

**Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные.** Пусть имеется количественный критерий  $g$  и число  $\gamma$ . Свертка задает качественный критерий

$$h = \begin{cases} 1, & \text{если } g \geq \gamma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Пример.** Знания студента на экзамене оценивается количественным критерием  $g$ , принимающим значения от двух до пяти. Качественная цель сдать экзамен описывается

критерием  $h = \begin{cases} 1, & \text{если } g \geq 3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

**Пример.** При выборе работы люди часто ориентируются на два критерия: размер заработной платы и удовлетворение от работы. Во многих случаях нет стремления к максимизации заработной платы, гораздо важнее, чтобы она обеспечивала некоторый приемлемый уровень жизни. Например, не секрет, что в предперестроечные годы уровень реальных доходов работников торговли заметно превышал аналогичный показатель у врачей, учителей и инженеров, однако, заметного перетока кадров в торговлю не наблюдалось. Когда в годы реформ уровень жизни бюджетников заметно упал, многие из них занялись розничной торговлей, чтобы обеспечить себе тот самый приемлемый уровень жизни.

**Пример.** В одной из телевизионных программ 28.11.07 был сформулирован следующий тезис: «Женщина должна стремиться к тому, чтобы объем талии не превышал объема бедер». Здесь налицо замена двух количественных критериев (объем талии и объем бедер) одним качественным.

**Лексикографическая свертка.** Пусть даны критерии  $g^1, \dots, g^m$ , ранжированные в порядке возрастания номеров. Сначала находятся все точки максимума критерия  $g^1$ , из них выбираются те, которые доставляют максимум критерию  $g^2$  и так далее. Наконец, из уже отобранных, выбираются те, которые доставляют максимум критерию  $g^m$ . Выбранные на последнем этапе стратегии называются точками лексикографического максимума.

**Пример.** При формировании структуры государственных расходов самыми важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, на содержание силовых структур, и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

**Дизъюнкция.** Пусть есть  $m$  качественных критериев  $g^1, \dots, g^m$ . Цель, состоящая в достижении, по крайней мере, одной из частных целей описывается критерием

$$g = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i).$$

**Пример.** Каждый правоверный мусульманин должен хотя бы раз в жизни совершить хадж. Если годы его жизни пронумерованы числами от 1 до  $m$  и критерии  $g^1, \dots, g^m$  описывают совершение хаджа в конкретном году, то их свертка  $g = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i)$  описывает выполнения этого обязательства перед Богом.

**Конъюнкция.** Пусть есть  $m$  качественных критериев  $g^1, \dots, g^m$ . Цель, состоящая в

достижении, сразу всех частных целей описывается критерием  $g = \prod_{i=1}^m g^i$ .

**Пример.** Если за сессию студенту предстоит сдать  $m$  экзаменов и каждый из критериев  $g^1, \dots, g^m$  описывает сдачу одного из них, то цель, состоящая в успешной сдаче сессии, описывается критерием  $g = \prod_{i=1}^m g^i$ .

**Отрицание.** Пусть имеется качественный критерий  $g$ . Критерий  $1-g$  описывает цель, состоящую в не достижении исходной.

**Пример.** Если исходная цель  $g$  состоит в том, чтобы избежать скандала, то цель, состоящая в попадании в скандальную хронику, описывается критерием  $1-g$ .

**Обобщенная дизъюнкция.** Часто используется следующий способ свертки. Пусть есть  $m$  количественных критериев  $g^1, \dots, g^m$ . Результирующий критерий образуется по правилу  $g(u) = \max_{1 \leq i \leq m} \lambda_i g^i(u)$ .

**Пример.** Пусть в шоссейной велогонке принимают участие  $m$  спортсменов из одной команды и критерии  $g^1, \dots, g^m$  задают места, занятые ее членами. Очень часто все члены команды работают на одного лидера, то есть критерий команды есть  $g(u) = \max_{1 \leq i \leq m} g^i(u)$ .

**Обобщенная конъюнкция.** Это свертка, при которой количественные критерии  $g^1, \dots, g^m$  заменяются общим критерием  $g(u) = \min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i g^i(u)$ .

В экономических моделях такой способ свертки применяется при агрегировании абсолютно не взаимозаменяемых продуктов.

**Пример.** Пусть для производства изделия требуются комплектующие  $m$  видов и количества произведенных деталей описываются числами  $g^1, \dots, g^m$ . Критерий  $g(u) = \min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i g^i(u)$  описывает количество готовых изделий, которое из них можно собрать.

Числа  $\frac{1}{\lambda_i}$  имеют при этом смысл количества деталей  $i$ -го вида, необходимых для сборки одного готового изделия.

**Пример.** По понятным физическим причинам, скорость каравана судов определяется скоростью самого тихоходного судна. Это обстоятельство нашло свое отражение даже в морском уставе.

**Случайная свертка.** В литературе встречается и такой способ свертки критериев. На множестве критериев задается вероятностная мера, и критерий операции выбирается случайным образом в соответствии с этой мерой. Понятно, что если при этом оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание, то получается способ свертки,

формально совпадающий с экономическим.

Приведенные выше примеры являются наиболее простыми, и потому наиболее часто встречающимися. Но, разумеется, бывают и более экзотические способы.

**Принцип наименьшего сожаления.** Это свертка, при которой количественные критерии  $g^1, \dots, g^m$  заменяются общим критерием  $g(u) = \max_{1 \leq i \leq m} \left[ \max_{v \in U} g^i(v) - g^i(u) \right]$ , который нужно минимизировать.

**Принцип принятия решений в ЕЭС.** По новым законам решение принимается по правилу двойного большинства: решение считается принятым, если за него проголосовало 55% стран население которых составляет 65%. В этом случае можно считать, что имеется столько качественных критериев, сколько стран принимает участие в голосовании. Из них делается два количественных критерия, которые в свою очередь сворачиваются в один качественный.

**Старый способ судейства в фигурном катании.** Каждый из девяти судей выставял две оценки от 0 до 6.0 (с шагом 0.1). Затем все участники ранжировались в соответствии с суммой этих оценок (в случае равенства сумм выше ставился участник, у которого выше оценка за артистизм). Затем вычислялась сумма мест за выполнение данной программы (короткой или произвольной). Потом участники ранжировались в соответствии с взвешенной суммой показателей за короткую и произвольную программу, что и давало результирующее место участника.

**Способ судейства в прыжках в длину.** Сравнение результатов двух участников производится по самому дальнему прыжку каждого из них. Если эти прыжки одинаковы, то во внимание принимается следующий по дальности и так далее.

**Лексимин.** Во многих социальных моделях и в теоретической математике полезен следующий способ свертки. При сравнении двух решений многокритериальной задачи прежде всего сравниваются самые маленькие значения критериев (возможно, свои у каждого варианта). Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

Разумеется, не существует и не может существовать идеального способа свертки, пригодного на все случаи жизни. Если уж правилами предусмотрен такой способ подведения итогов, как в предыдущем примере, то в соответствующей модели надо пользоваться именно им. Но совсем глупо было бы использовать его в задаче о караване судов.

### 3.1.4 Теорема о свертке

**Теорема.** Пусть каждый из критериев  $g^1, \dots, g^m$  принимает лишь два значения 0 и 1, а

$F: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$  – произвольная функция. Тогда критерий  $g$ , определенный условием  $g(u) = F(g^1(u), \dots, g^m(u))$ , может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. конъюнкция:  $g^1, \dots, g^m \rightarrow \prod_{i=1}^m g^i$ ;
2. дизъюнкция:  $g^1, \dots, g^m \rightarrow 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i)$ ;
3. отрицание:  $g^i \rightarrow 1 - g^i$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = (y_1, \dots, y_m)$  – произвольный булев вектор размерности  $m$  (здесь  $y_i$  равны 0 или 1 при любом  $i = 1, \dots, m$ ). Рассмотрим функцию  $F_y: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}$ , определенную условием  $F_y(x) = \prod_{i=1}^m z_i$ , где  $z_i = x_i$ , если  $y_i = 1$ , и  $z_i = 1 - x_i$ , если  $y_i = 0$ .

Непосредственно проверяется, что  $F_y(y) = 1$ , и  $F_y(x) = 0$  для любого  $x \neq y$ .

**Пример.** На референдуме о сохранении Союза советских социалистических республик гражданам предлагалось ответить на четыре вопроса. Власти предлагали своим сторонникам ответить «да, да, нет, да». Таким образом, есть, четыре вспомогательных качественных критерия  $g^i$  (ответ на  $i$ -ый вопрос). Если общая цель  $g$  состоит в лояльности власти, то она выражается через частные с помощью свертки  $g = g^1 g^2 (1 - g^3) g^4$ .

Для заданной нам функции  $F$ , обозначим  $Y = \{y: F(y) = 1\}$ . Покажем, что интересующий нас критерий  $g$  представляется в виде

$$g(u) = 1 - \prod_{y \in Y} (1 - F_y(g^1(u), \dots, g^m(u))). \quad (3.1.6)$$

В самом деле, если  $g(u) = 1$ , то по определению вектор  $t = (g^1(u), \dots, g^m(u))$  принадлежит множеству  $Y$ . Значит, произведение в формуле (3.1.6) содержит множитель  $(1 - F_y(g^1(u), \dots, g^m(u)))$ , равный нулю. Следовательно, и все произведение равно нулю, а вся правая часть формулы (3.1.6) равна 1.

Если же  $g(u) = 0$ , то вектор  $t = (g^1(u), \dots, g^m(u))$  не принадлежит множеству  $Y$ , и для всех  $y \in Y$  имеем  $F_y(g^1(u), \dots, g^m(u)) = 0$ . Значит, для этого  $u$  все сомножители в формуле (3.1.6) равны 1, а тогда и произведение в правой части равенства (3.1.6) равно 1, а сама правая часть равна нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что при построении функций  $F_y$  мы пользовались лишь операциями отрицания и конъюнкции, а в формуле (3.1.6) использовалась еще и дизъюнкция.

**Замечание.** Легко видеть, что сама операция дизъюнкции может быть выражена через конъюнкцию и отрицание, то есть список «элементарных» операций может быть сокращен.

**Теорема.** Пусть каждый из критериев  $g^1, \dots, g^m$  принимает лишь конечное число

значений, а  $F$  – произвольная функция. Тогда критерий  $g$ , определенный условием  $g(u)=F(g^1(u),\dots,g^m(u))$ , может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. экономическая свертка:  $g^1,\dots,g^m \rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i g^i$ ;
2. разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные:  
 $g^i \rightarrow \begin{cases} 1, \text{ если } g^i \geq \gamma^i, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$
3. конъюнкция:  $g^1,\dots,g^m \rightarrow \prod_{i=1}^m g^i$ ;
4. дизъюнкция:  $g^1,\dots,g^m \rightarrow 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g^i)$ ;
5. отрицание:  $g^i \rightarrow 1 - g^i$ .

**Доказательство.** Значения, которые может принимать критерий  $g^i$ , обозначим в порядке возрастания символами  $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$ . При сформулированных условиях критерий  $g$  может тоже принимать лишь конечное число значений. Обозначим их в порядке возрастания символами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ . Дальнейшие рассуждения разобьем на шесть шагов.

1. Для каждого  $i=1,\dots,m$  и каждого  $\gamma \in \{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{k_i}^i\}$  с помощью элементарной операции второго типа образуем вспомогательный критерий  $g_\gamma^i(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } g^i(u) \geq \gamma, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Разумеется, критерий  $g_\gamma^i$  может быть выражен как функция критерия  $g^i$ .

2. Верно и обратное: критерий  $g^i$  может быть представлен как функция критериев  $g_\gamma^i$ . Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$g^i(u) = \sum_{j=1}^{k_i} (\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i) g_{\gamma_j^i}^i(u), \quad (3.1.7)$$

где положено  $\gamma_0^i = 0$ .

В самом деле, если  $g^i(u) = \gamma_l^i$ , то для всех  $j > l$  справедливо равенство  $g_{\gamma_j^i}^i(u) = 0$ , а для всех  $j \leq l$  будем иметь  $g_{\gamma_j^i}^i(u) = 1$ . Поэтому для такого  $u$  правая часть равенства (3.1.7) может быть переписана в виде  $\sum_{j=1}^l (\gamma_j^i - \gamma_{j-1}^i)$ . Эта сумма, очевидно, равна  $\gamma_l^i - \gamma_0^i = \gamma_l^i$ , то есть равенство (3.1.7) справедливо.

3. Рассмотрим вспомогательные критерии  $g_\gamma(u)$ , определенные условиями

$$g_{\gamma}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(u) \geq \gamma, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(здесь  $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ ). Каждый из этих критериев является функцией критерия  $g$ .

4. Тогда по условию теоремы, тогда критерий  $g_{\gamma}^i$  может быть представлен, как функция критериев  $g^1, \dots, g^m$ . Значит, в силу утверждения п. 2 он может быть представлен и как функция вспомогательных критериев  $g_{\gamma}^i$ .

5. Но каждый из критериев  $g_{\gamma}$  и  $g_{\gamma}^i$  принимает лишь значения 0 и 1, поэтому в силу предыдущей теоремы, каждый из критериев  $g_{\gamma}$  может быть выражен через критерии  $g_{\gamma}^i$  с использованием лишь элементарных операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

6. Аналогично формуле (3.1.7) доказывается равенство

$$g(u) = \sum_{j=1}^k (\gamma_j - \gamma_{j-1}) g_{\gamma_j}(u), \quad (3.1.8)$$

где  $\gamma_0=0$ .

Для завершения доказательства остается заметить, что критерии  $g_{\gamma}^i$  мы получили, пользуясь только сверткой типа 2, на шаге 4 для получения критериев  $g_{\gamma}$  использовались свертки типов 3,4,5, и, наконец, на шаге 6 использовалась свертка типа 1. Теорема доказана.

### 3.1.5 Теория по линейному программированию и решению задачи анализа на чувствительность.

#### 3.1.5.1 Основы анализа на чувствительность.

*Анализ моделей на чувствительность проводится после получения оптимального решения задачи. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.* В задаче о производстве красок, например, может представить интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение и уменьшение спроса или изменения запасов исходных продуктов. Можно проанализировать влияние на оптимальное решение изменения рыночных цен.

При таком анализе рассматривается некоторая совокупность оптимизационных моделей. Это придает модели определенную динамичность, позволяющую провести анализ влияния возможных изменений исходных условий на полученное оптимальное решение.

*Динамические* характеристики модели фактически отображают аналогичные характеристики, свойственные реальным процессам. Отсутствие анализа, позволяющего выявить влияние возможных изменений параметров модели на оптимальное решение, может привести к тому, что полученное статическое решение устареет еще до своей реализации.

Для проведения анализа модели на чувствительность будем использовать графический метод.

### 3.1.5.2 Первая задача анализа на чувствительность.

На сколько можно сократить или увеличить запасы ресурсов?

После нахождения оптимального решения представляется вполне логичным выяснить, как отразится на оптимальном решении изменение запасов ресурсов. Особенно важно проанализировать следующие два аспекта.

1. *На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции  $z$ ?*
2. *На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?*

Так как величина запаса каждого из ресурсов фиксируется в правых частях ограничений, этот вид анализа обычно идентифицируется как анализ модели на чувствительность к правой части (ограничений). Прежде чем ответить на поставленные вопросы, классифицируем ограничения линейной модели как **связывающие (активные)** и **несвязывающие (неактивные)** ограничения. Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку. В противном случае соответствующее ограничение будет не связывающим. На рисунке 1 связывающими ограничениями являются только ограничения (1) и (2), которые лимитируют запасы исходных продуктов (ресурсов) А и В.

Если некоторое ограничение является связывающим, логично отнести соответствующий ресурс к **разряду дефицитных ресурсов**, так как он используется полностью. Ресурс, с которым ассоциировано *несвязывающее* ограничение, следует отнести к **разряду недефицитных ресурсов** (т. е. имеющих в некотором избытке). Таким образом, при анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

1. **предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение**
2. **предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции.**

Информация, полученная в последнем случае, особенно полезна в тех ситуациях, когда излишки недефицитного ресурса могут быть использованы для других целей. Отметим, что увеличение избыточного ресурса не скажется на оптимальном решении (избыточный ресурс станет еще более избыточным). Очевидно, что сокращение дефицитного



ресурса не улучшит значения целевой функции.

Вернемся к примеру о производстве красок. В рассмотренном примере используемые продукты А и В (ограничения (1) и (2)) являются дефицитными ресурсами. Рассмотрим сначала ресурс А. Из рис. 2 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) (или отрезок CD) перемещается вверх параллельно самой себе, постепенно "стягивая" в точку треугольник CDK. (Стороны CK и DK этого треугольника представляют собой продолжения прямых, соответствующих ограничениям (2) и (4).)

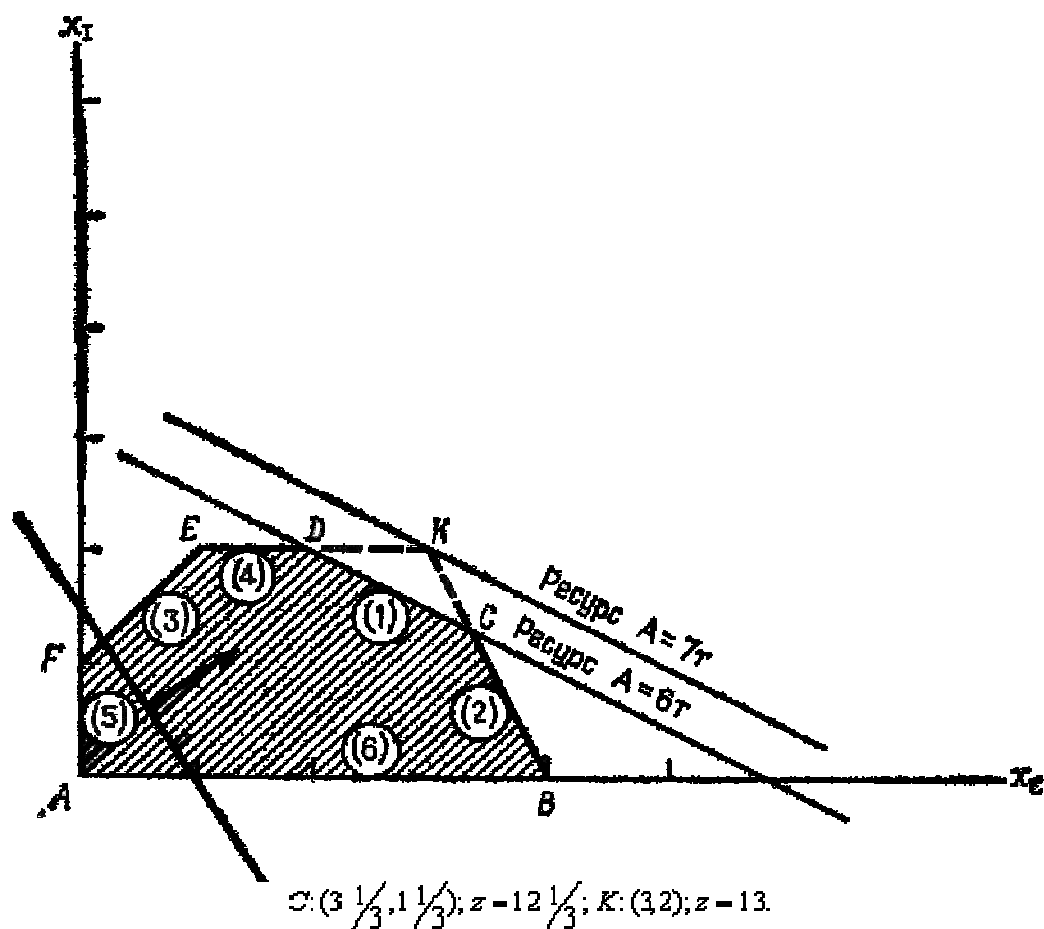


Рисунок 3.1.2 – Графическое решение задачи

В точке К ограничения (2) и (4) становятся связывающими; оптимальному решению при этом соответствует точка К, а пространством (допустимых) решений становится многоугольник ABKEF. В точке К ограничение (1) (для ресурса А) становится избыточным, так как любой дальнейший рост запаса соответствующего ресурса не влияет ни на пространство решений, ни на оптимальное решение. Таким образом, объем ресурса А не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение (1) становится избыточным, т. е. прямая (1) проходит через новую оптимальную точку К. Этот предельный уровень определяется следующим образом. Сначала нужно найти координаты точки К, в которой пересекаются прямые (2) и (4),



можно уменьшать до тех пор, пока прямая (3) (EF) не достигнет точки С. При этом правая часть ограничения (3) станет равной

$$-x_E + x_I = (-3 \frac{1}{3}) + 1 \frac{1}{3} = -2,$$

что позволяет записать это ограничение в виде  $-x_E + x_I \leq -2$  или в эквивалентной форме:  $x_E - x_I \geq 2$ . Этот результат показывает, что ранее полученное оптимальное решение не изменится, если спрос на краску Е превысит спрос на краску I не более чем на 2т.

Результаты проведенного анализа можно свести в следующую таблицу.

Таблица 3.1.1 – Изменение запасов и доходов

Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, т	Максимальное изменение дохода от реализации z, тыс. долл
1	Дефицитный	7-6=+1	$13 \cdot 12 \frac{2}{3} = +1 \frac{1}{3}$
2	Дефицитный	12-8=+4	$18 - 12 \frac{2}{3} = +5 \frac{1}{3}$
3	Недефицитный	-2-1=-3	$12 \frac{2}{3} - 12 \frac{2}{3} = 0$
4	Недефицитный	$1 \frac{1}{3} - 2 = -1 \frac{1}{3}$	$12 \frac{2}{3} - 12 \frac{2}{3} = 0$

### 3.1.5.2 Вторая задача анализа на чувствительность. Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?

В первой задаче анализа на чувствительность мы исследовали влияние на оптимум увеличения объема дефицитных ресурсов (т. е., изменения связывающих ограничений). При ограничениях на затраты, связанные с дополнительным привлечением ресурсов, естественно задать вопрос: какому из ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств? С помощью методов линейного программирования удастся ответить и на такой вопрос.

Для этого вводится характеристика ценности каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса, выражаемая через соответствующее приращение оптимального значения целевой функции. Такую характеристику для рассматриваемого примера можно получить непосредственно из таблицы, в которой приведены результаты решения первой задачи анализа на чувствительность.

Обозначим ценность дополнительной единицы ресурса i через  $u_i$ . Величина  $u_i$ , определяется из соотношения

$$u_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } z}{\text{Максимально допустимый прирост объема ресурса } i} \quad (3.1.10)$$

Воспользовавшись данными указанной таблицы, для ограничения (1) (продукт А) получим

$$y_1 = \frac{13 - 12\frac{2}{3}}{7 - 6} = \frac{1}{3} \text{ тыс. долл./тонна А.} \quad (3.1.11)$$

Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице: Аналогичным образом можно определить ценность единицы каждого из ресурсов и представить результаты в следующей таблице:

Таблица 3.1.2 – Изменение дохода в зависимости от изменения ресурса на 1 единицу

Ресурс	Тип ресурса	Значение $y_i$ , тыс. долл./тонна
1	Дефицитный	$y_1 = \frac{1}{3}$
2	Дефицитный	$y_2 = \frac{4}{3}$
3	Недефицитный	$y_3 = 0$
4	Недефицитный	$y_4 = 0$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дополнительные вложения в первую очередь следует направить на увеличение ресурса 2 (продукт В) и лишь затем на увеличение ресурса 1 (продукт А). Что касается недефицитных ресурсов, то, как и следовало ожидать, их объем увеличивать не следует.

### 3.1.5.3 Третья задача анализа на чувствительность.

*В каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции?*

Изменение коэффициентов целевой функции, которые определяются ценами на готовую продукцию, оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Очевидно, что идентификация конкретной угловой точки в качестве оптимума зависит прежде всего от наклона этой прямой.

Это означает, что вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т. е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот). Таким образом, в рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие вопросы.

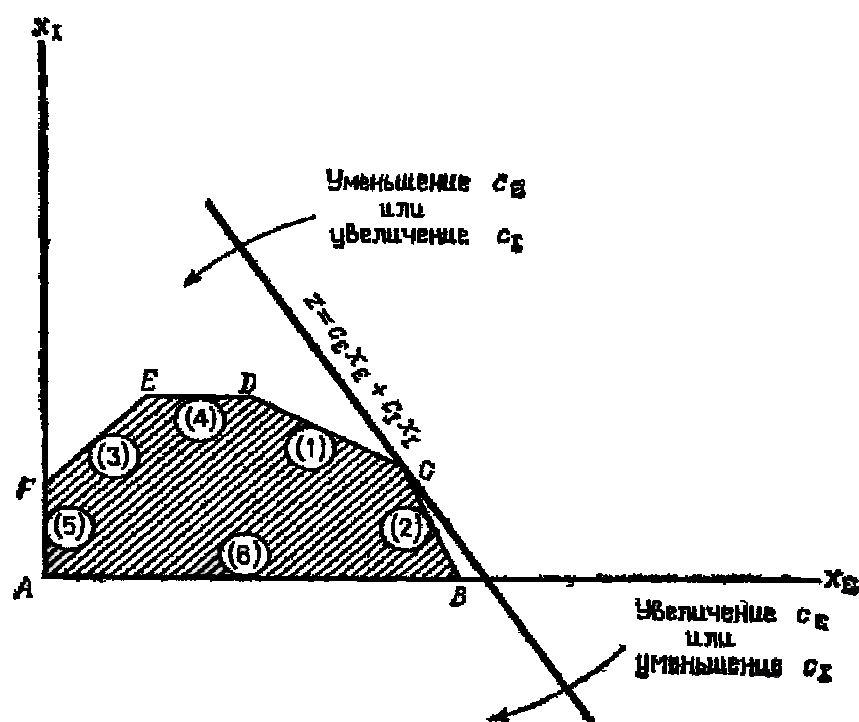


Рисунок 3.1.4 – Изменение коэффициентов целевой функции

Каков диапазон изменения (увеличения или уменьшения) того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

**Обсудим эти вопросы на нашем примере.** Рассматривая первый вопрос, обозначим через  $c_E$  и  $c_I$  доходы фирмы от продажи 1 т краски E и 1 т краски I соответственно. Тогда целевую функцию можно представить в следующем виде:  $z = c_E x_E + c_I x_I$ . Из рисунка 4 видно, что при увеличении  $c_E$  или уменьшении  $c_I$  прямая, представляющая целевую функцию  $z$ , вращается (вокруг точки C) по часовой стрелке.

Если же  $c_E$  уменьшается или  $c_I$  увеличивается, эта прямая вращается в противоположном направлении - против часовой стрелки. Таким образом, точка C будет оставаться оптимальной точкой до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых, соответствующих ограничениям (1) и (2). Когда наклон прямой  $z$  станет равным наклону прямой для ограничения (1), получим две альтернативные оптимальные угловые точки C и D. Аналогично, если наклон прямой  $z$  станет равным наклону прямой для ограничения (2), будем иметь альтернативные оптимальные угловые точки B и C. (Наличие альтернативных оптимумов свидетельствует о том, что одно и то же

оптимальное значение  $z$  может достигаться при различных значениях переменных. Как только наклон прямой  $z$  выйдет за пределы указанного выше интервала, получим некоторое новое оптимальное решение (точка В или точка D).

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим, каким образом можно найти допустимый интервал изменения  $c_E$ , при котором точка С остается оптимальной. Исходное значение коэффициента  $c_I=2$  оставим неизменным. Из рисунка 8 видно, что значение  $c_E$  можно увеличивать до тех пор, пока прямая  $z$  не совпадет с прямой (2), или уменьшать, пока прямая  $z$  не совпадет с прямой (1). Эти крайние значения коэффициента  $c_E$  можно определить из равенства наклонов прямой  $z$  и прямой (2) (максимальное значение  $c_E$ ) и равенства наклонов прямой  $z$  и прямой (1) (минимальное значение  $c_E$ ). Так как тангенс угла наклона для прямой  $z$  равен  $c_E/2$ , а для прямых (1) и (2) соответственно  $1/2$  и  $2/1$ , минимальное значение  $c_E$  определяем из равенства  $c_E/2 = 1/2$ , откуда  $\min c_E = 1$ , а максимальное значение  $c_E$  находим из равенства  $c_E/2 = 2/1$ , откуда  $\max c_E = 4$ .

Интервал изменения  $c_E$ , в котором точка С по-прежнему остается единственной оптимальной точкой, определяется неравенством  $1 < c_E < 4$ .

### 3.1.5.4 Условия Куна-Таккера

Для задачи нелинейного программирования в общем виде:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ g_i(x) &\leq 0, i = 1..m \\ x &\in R^n \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

можно записать условия Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \nabla g_i(x) &= 0, i = 1..m, \\ \lambda_i g_i(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Если решить данную задачу при известных значениях  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то найденные значения  $\lambda$  будут иметь смысл увеличения дохода при увеличении ресурса на 1 единицу, при равенстве 0 данных коэффициентов это укажет на недефицитные ресурсы, то есть фактически, таким образом, можно решить первую и вторые задачи анализа на чувствительность. Далее будет приведен пример.

### 3.1.6 Задания по свертке векторной операции

Для своих вариантов записать свертку критериев с помощью элементарных функций.

1. Мнение ученого совета по любому вопросу складывается из мнений каждого из  $m$  его членов по правилу большинства голосов. Выразите соответствующую свертку через элементарные операции, если число членов совета нечетно.

2. Мнение ученого совета по любому вопросу складывается из мнений каждого из  $m$  его членов по правилу большинства голосов. Выразите соответствующую свертку через элементарные операции, если число членов совета четно и в случае равенства голосов решающим является мнение председателя совета.

3. Студенту за сессию предстоит сдать пять экзаменов, на каждом из которых он может получить оценку от 2 до 5. Для получения стипендии необходима сдать все экзамена как минимум на удовлетворительно, и при этом получить не более одной тройки. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

4. В биатлонной гонке принимают участие 7 спортсменов от каждой страны. По ее итогам каждый из них получает целое число очков от 0 до 30. В командный зачет идет сумма результатов трех лучших гонщиков. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

5. В каждой гонке, входящей в зачет кубка мира спортсмен получает целое число очков от 0 до 50. В общий зачет идет сумма очков, набранных в 30 гонках, за исключением трех худших. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

6. В командной гонке конькобежцев принимают участие три спортсмена. Результат команды равен времени третьего из финишировавших. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции (время измеряется с точностью до сотых долей секунды).

7. Качество прыжка в соревнованиях по прыжкам с трамплина оценивают пять арбитров. Каждый из них выставляет оценку от 0 до 20 баллов с шагом 0.5 балла. Самая высокая и самая низкая оценка отбрасываются, а сумма трех оставшихся идет в зачет соревнования. Выразите соответствующую свертку критериев через элементарные операции.

8. Ведется война и осуществляется продажа оружия страной ведущей войну, как записать свертку критериев выигрыш в войне и получение максимальной прибыли от продажи оружия.

Для примера решения задачи по свертке векторной операции обратитесь к теоретическому материалу выше, а так же рассмотрим одну задачу: цель операции заработать больше 200 тыс рублей за год, при этом за каждый месяц указывается заработок, сдать сессию на оценки выше 3 при известных критериях показывающих оценку за 5 экзаменов от 2 до 5, поехать на каникулы отдыхать.

Итак, введем критерии заработка в месяц:

$$z_i \in R, i = \{1..12\}$$

$$z^* = \begin{cases} 1, & \sum_1^{12} z_i \geq 200000 \\ 0 & \end{cases}$$

Введем критерии сдачи сессии на хорошие оценки:

$$g_j \in \{2,3,4,5\}, j = \{1..5\}.$$

$$g_j^* = \begin{cases} 1, & g_j \geq 4 \\ 0 & \end{cases}$$

Поехать отдыхать качественный критерий:

$$f \in \{0,1\}$$

Итоговый максимизируемый критерий будет выглядеть следующим образом:

$$h = f \cdot z^* \prod_1^5 g_j^*$$

### 3.1.7 Задание по линейному программированию

Решить задачу линейного программирования в соответствии со своим вариантом задания и провести анализ на чувствительность к принятой модели (три задачи анализа на чувствительность). Записать для математической модели задачи условия Куна-Такера, проинтерпретировать полученные коэффициенты.

Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем первой линии – **A** изделий, второй линии – **B** изделий. На радиоприемник первой модели расходуется **C** однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – **D** таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен **E** единиц. Прибыли от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равны **Q** и **P** ед. соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей на основе графического решения задачи.



Таблица 3.1.3 – Варианты заданий для задачи о производстве приемников

№ варианта	A	B	E	C	D	Q	P
1.	50	60	800	12	8	30	15
2.	65	45	700	10	7	20	12
3.	60	80	950	15	10	40	20
4.	45	40	750	15	10	45	20
5.	40	60	650	12	10	15	10
6.	50	35	825	16	12	20	15
7.	80	45	900	18	14	30	20
8.	55	55	875	14	12	20	10
9.	75	65	680	10	6	15	10
10.	45	75	800	14	7	40	12

1. Фабрика производит два вида лака для внутренних и наружных работ. Для производства лаков используется два исходных продукта нефть и кислота. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов определяются емкостями их хранения и равны  $A=6$  и  $B=8$  тонн (т), соответственно. Для производства 1 т лака для внутренних работ расходуется  $C=1$  т нефти и  $D=2$  т кислоты, а для производства 1 т лака для наружных работ расходуется  $E=2$  т нефти и  $F=1$  т кислоты. Суточный спрос на лак для наружных работ не превышает  $G=2$  т. Спрос на лак для внутренних работ неограничен. Доход от реализации 1 т лака для внутренних работ равен  $H=3$  млн рублей, а доход от реализации 1 т лака для наружных работ  $I=2$  млн рублей. Необходимо определить, какое количество лака каждого вида должна производить фабрика в сутки, чтобы доход от его реализации был максимальным. Решить графически. Провести анализ задачи на чувствительность.

Таблица 3.1.4 – Варианты заданий для задачи о производстве лака

Вар-т	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	8	6	2	1	1	2	3	2	3
3	8	8	2	2	2	2	2	3	1
4	6	6	1	1	3	2	3	3	2
5	7	7	2	2	2	3	3	2	4
6	8	7	3	2	1	2	4	1	3

### 3.1.8 Пример решения задачи линейного программирования

Рассмотрим в качестве примера 6 вариант. Запишем математическую модель при заданных данных:

$$A=50,$$

$$C=16$$

$$E=825$$

$$Q=20$$

$$B=35$$

$$D=12$$

$$P=15$$

Целевая функция:

$$\mathcal{F} = Qx_1 + Px_2 \rightarrow \max$$

Ограничения задачи:

$$Cx_1 + Dx_2 \leq E$$

$$0 \leq x_1 \leq A$$

$$0 \leq x_2 \leq B$$

**Нахождение оптимального решения задачи**

Подставим наши значения в целевую функцию:

$$\mathcal{F} = 20x_1 + 15x_2 \rightarrow \max$$

Построим график с помощью неравенства

$$16x_1 + 12x_2 \leq 825$$

Учитывая ограничения

$$0 \leq x_1 \leq 50$$

$$0 \leq x_2 \leq 35$$

При  $x_2 = 35$

$$x_1 = \frac{825 - (12 \cdot 35)}{16} = 25,31$$

При  $x_1 = 50$

$$x_2 = \frac{825 - (16 \cdot 50)}{12} = 2,08$$

При  $x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{825}{12} = 68,7$$

При  $x_2 = 0$

$$x_1 = \frac{825}{16} = 51,5$$

$x_1$	0	25,31	50	51,5
$x_2$	68,7	35	2,08	0

Построим целевую функцию проведя ее через соответствующие координаты.

$$F = 20x_1 + 15x_2 \rightarrow \max$$

$x_1$	5	-3,75
$x_2$	-6,66	5

Мы получим следующую область допустимых значений (Рис 3.1.5)

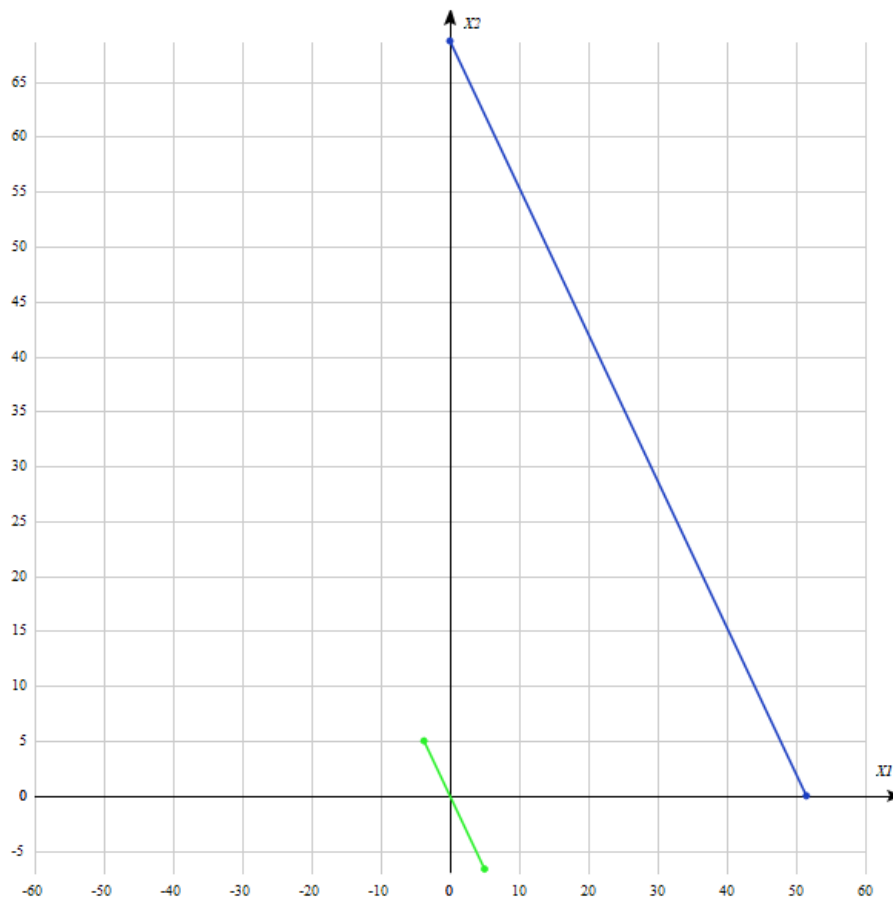


Рисунок 3.1.5 – Графики

Далее второй график необходимо аккуратно перенести на первый, покажем перенесенный график красной линией (Рис 3.1.6). Видно, что графики оказались друг-другу параллельны.

На графике также отметим ограничения.

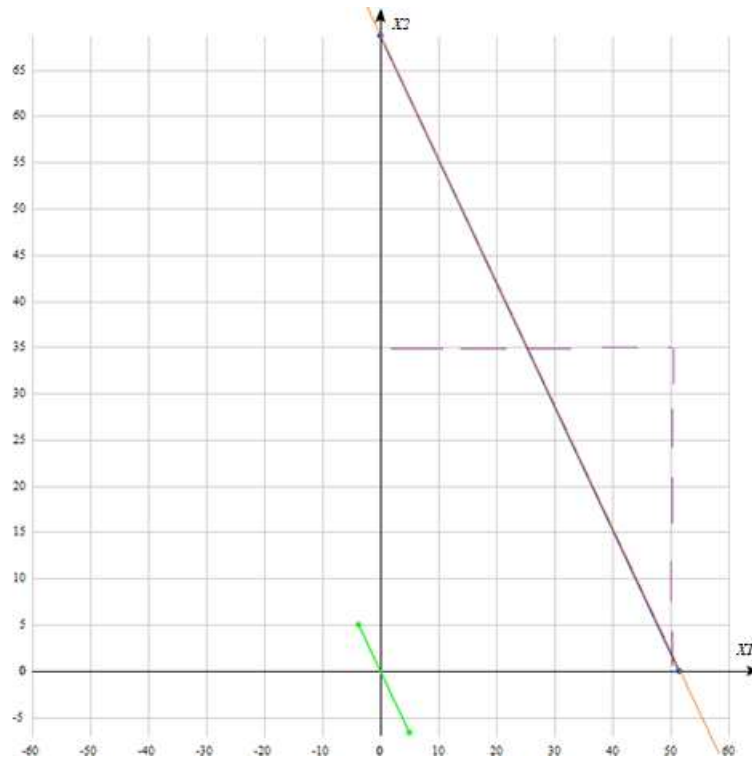


Рисунок 3.1.6 – Графики с ограничениями

Теперь необходимо найти точку, в которой будет оптимальное решение (Рис 3.).

Точка A' (0; 15) =  $20 \cdot 0 + 35 \cdot 15 = 525$  у.е.

Точка B' (25,31; 35) =  $20 \cdot 25,31 + 15 \cdot 35 = 1031,2$  у.е.

Точка C' (50; 2,08) =  $20 \cdot 50 + 15 \cdot 2,08 = 1031,2$  у.е.

Точка D' (50; 0) =  $20 \cdot 50 + 35 \cdot 0 = 1000$  у.е.

Наибольшее значение у.е. наблюдается в двух точка B' и C', т.к. прямая была параллельна, все точки, лежащие на ней, будут являться оптимальным решением, но выбираем одну точку – B'.

Теперь считаем, что оптимальное решение найдено в точке B', общая прибыль (P) составляет 1031 у.е. Оптимальный объем производства  $x_1 = 25$  изделий, а  $x_2 = 35$  изделий.

Запомним эти значения, дальше они нам пригодятся:

$$F1 = 1031,25$$

$$E1 = 825$$

### Исследование модели на чувствительность

Определим какие ресурсы являются дефицитными и недефицитными. Напомним, что дефицитный ресурс приводит к изменению (уменьшению) оптимального решения и расходуется полностью, в отличие от недефицитных (Рис 3.1.7).

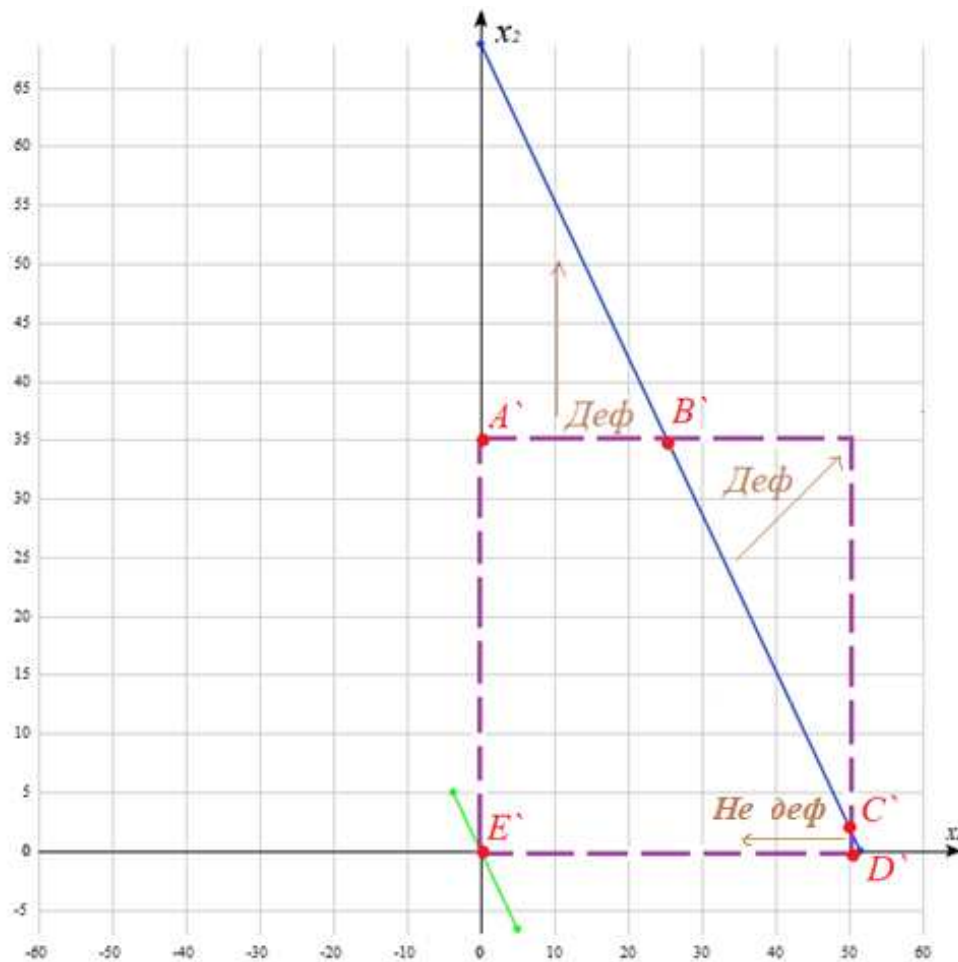


Рисунок 3.1.7 – Графики с ресурсами

Имеется два дефицитных ресурса и один недефицитный ресурс.

1. Самое большое ограничение накладывается при максимальном запасе деталей, т.е. увеличиваем  $16x_1 + 12x_2 \leq 825$  до  $16x_1 + 12x_2 \leq 1220$  при  $x_1 = 50$  изделий, а  $x_2 = 35$  изделий.

$F2 = 20 \cdot 50 + 15 \cdot 35 = 1525$  у.е. Это на 494 у.е. больше оптимального.

$E2 = 1220$

$$\Delta_i = \frac{F_i - F_1}{E_i - E_1}$$

$$\Delta_1 = \frac{1525 - 1031,25}{1220 - 825} = 1,25$$

Это выгодней для получения лучших результатов.

2. Увеличиваем ограничение  $x_2 \leq 35$  до  $x_2 \leq 68.7$ , тогда  $x_1 = 0$

По аналогии делим разность доходов на разность ресурсов. Здесь очевидно в качестве ресурса выступает уже производительность линии, а не количество элементов. При этом повышая производительность до  $x_2 = 68.7$  мы получаем, что оптимальная точка находится на той же прямой целевой функции, что не изменит нам доход, таким образом, мы получим дельта равное 0.

3. Уменьшим недефицитный ресурс с  $x_1 \leq 50$  до  $x_1 \leq 25,31$ . Заметим, что точка оптимума не меняется.

**Расчет для условий Куна-Такера**

Запишем целевую функцию:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = -(20x_1 + 15x_2) \rightarrow \min$$

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = -20x_1 - 15x_2 \rightarrow \min$$

Запишем граничные условия:

$$g1(x_1, x_2) = 16x_1 + 12x_2 - 825 \leq 0$$

$$g2(x_1, x_2) = x_1 - 50 \leq 0$$

$$g3(x_1, x_2) = x_2 - 35 \leq 0$$

$$g4(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

$$g5(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0$$

**Составим систему уравнений:**

Для этого нужно взять производную сначала по  $x_1$  потом  $x_2$ .

Запишем первую строчку – производная от  $-20x_1 - 15x_2$  по  $x_1$  равна -20. Далее берем производную от первого граничного условия  $16x_1 + 12x_2 - 825 \leq 0$ , оно равно 16, домножим на  $\lambda_1$ . Берем следующее граничное условие  $x_1 - 50 \leq 0$ , оно равно 1\*  $\lambda_2$ ;

$x_2 - 35 \leq 0$ , равно 0\*  $\lambda_3$ ;  $-x_1 \leq 0$  равно -1\*  $\lambda_4$ ,  $-x_2 \leq 0$ , равно 0\*  $\lambda_5$ .

В итоге получится строка:

$$-20 + 16\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0$$

Вторую строчку запишем аналогично первой, но производную брать будем по  $x_2$ .

В итоге получим систему:

$$\begin{cases} -20 + 16\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ -15 + 12\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

Ограничения:

$$\lambda_1(16x_1 + 12x_2 - 825) = 0$$

$$\lambda_2(x_1 - 50) = 0$$

$$\lambda_3(x_2 - 35) = 0$$

$$\lambda_4(-x_1) = 0$$

$$\lambda_5(-x_2) = 0$$

Оптимальное решение найдено в точке с координатами  $x_1 = 25,31$  и  $x_2 = 35$ .

Подставим их.

Найдем  $\lambda$ :

$\lambda_3(35 - 35) = 0$ , отсюда следует что  $\lambda_3$  любое число.

$$\lambda_2(25,31 - 50) = 0$$

Из данного условия дополняющей нежесткости следует  $\lambda_2 = 0$ .

Из остальных условий следует  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ .

Из условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_1(16 * 25,31 + 12 * 35 - 825) = 0$$

следует что  $\lambda_1$  – любое число .

Решая систему уравнений из двух неизвестных получаем:

$$\begin{cases} -20 + 16\lambda_1 = 0 \\ -15 + 12\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{20}{16} = 1,25$$

$$-15 + 12 * 1,25 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = 0$$

Чтобы убедиться, что решение верно, сравним наши  $\lambda$  с  $\Delta$ , они должны быть равны, если ограничение при расчете  $\Delta$  не перешло в другое, по крайней мере одно из  $\Delta$  должно совпасть с соответствующей  $\lambda$ .

$\Delta_1 = \lambda_1$  – соответствует первому ограничению

$\Delta_2 = \lambda_3$  – соответствует второму ограничению

Остальные соответствуют недефицитным ресурсам.

### **Изменение коэффициентов целевой функции**

Изменение коэффициентов целевой функции, которые определяются ценами на готовую продукцию, оказывает влияние на наклон прямой, которая представляет эту функцию в принятой системе координат. Очевидно, что идентификация конкретной угловой точки в качестве оптимума зависит прежде всего от наклона этой прямой.

Это означает, что вариация коэффициентов целевой функции может привести к изменению совокупности связывающих ограничений и, следовательно, статуса того или иного ресурса (т. е. сделать недефицитный ресурс дефицитным, и наоборот). Таким образом, в рамках анализа модели на чувствительность к изменениям коэффициентов целевой функции могут исследоваться следующие вопросы.

1)

$$\begin{cases} 20x_1 + bx_2 = 0 \\ 16x_1 + 12x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = -\frac{20x_1}{b} = -\frac{16x_1}{12}$$

$$b = \frac{20x_1 * 12}{16x_1} = 15$$

2)

$$\begin{cases} ax_1 + 15x_2 = 0 \\ 16x_1 + 12x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{15x_2}{a} = -\frac{12x_2}{16}$$

$$a = \frac{15x_2 * 16}{12x_2} = 20$$

1)

$$\begin{cases} 20x_1 + bx_2 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = -\frac{20x_1}{b} = \frac{x_1}{0}$$

$$b = 0$$

2)

$$\begin{cases} ax_1 + 15x_2 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{ax_1}{15} = \frac{x_1}{0}$$

$$a = \infty$$

1)

$$\begin{cases} 20x_1 + bx_2 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = -\frac{20x_1}{b} = \frac{0}{1x_1}$$

$$b = \infty$$

2)

$$\begin{cases} ax_1 + 15x_2 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = -\frac{ax_1}{15} = \frac{0x_1}{1}$$

$$a = 0$$

### 3.1.9 Теоретические вопросы по первой лабораторной работе

1. Определения: Исследование операций, операция(О), оперирующая сторона(ОС), активные средства проведения операций, действующие факторы (определенные, неопределенные, контролируемые, неконтролируемые), критерий эффективности операции, целевая функция, стратегии ОС, математическая модель О.
2. Общая запись задачи ИО в детерминированном и недетерминированном случае, оптимизация в среднем.
3. Векторная операция, область согласия, область компромиссов.
4. Оптимальность по Парето.
5. Метод абсолютной и относительной справедливой уступки.



6. Метод идеальной точки.
7. Метод свертки.
8. Метод уступок.
9. Метод ограничений.

### 3.2 Лабораторная работа №2 Решение задач динамического программирования. Задача о распределении ресурсов.

**Цель работы:** Изучить метод динамического программирования.

**Основные сведения:**

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический метод, заслуга создания и развития которого принадлежит, прежде всего, Беллману. Метод можно использовать для решения весьма широкого круга задач, включая задачи распределения ресурсов, замены и управления запасами, задачи о загрузке. Характерным для динамического программирования является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Фундаментальным принципом, положенным в основу теории ДП и лежащим в основе решения всех задач динамического программирования, является принцип оптимальности: «Каково бы ни было состояние системы  $S$  перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным».

Динамическое программирование – это поэтапное планирование многошагового процесса, при котором на каждом этапе оптимизируется только один шаг. Управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем.

**Основные термины и определения:**

**Отрасль** - отрасль производства, в которое вкладываются исследуемые ресурсы.

**Функция дохода** показывает зависимость величины дохода, производимого отраслью, от количества вложенных средств. Общий вид функции дохода:  $f(x) = I - e^{-Ax}$ .

$A$  – коэффициент функции дохода (задается для каждой отрасли отдельно)

**Функция траты (амортизации)** показывает, какое количество средств, вложенных в производство, расходуется. Общий вид функции траты:  $\varphi(x) = Kx$

$K$  – коэффициент функции траты (задается для каждой отрасли отдельно)

$Z_i(Q)$  - условный оптимальный выигрыш, получаемый на всех последующих шагах, начиная с  $i$ -го и до конца

### 3.2.1 Алгоритм метода динамического программирования

При решении любой задачи динамического программирования удобно придерживаться раз и навсегда установленного, стандартного порядка действий. Этот порядок можно установить в следующей форме:

1. Выбрать способ описания процесса, т.е. параметры (фазовые координаты), характеризующие состояние  $S$  управляемой системы перед каждым шагом.

2. Разбить операцию на этапы (шаги).

3. Выяснить набор шаговых управлений  $x_i$  для каждого шага и налагаемые на них ограничения.

4. Определить какой выигрыш приносит на  $i$ -ом шаге управление  $x_i$ , если перед этим система была в состоянии  $S$ , т.е. записать «функцию выигрыша»:

$$W_i = f_i(S, x_i) \quad (3.2.1)$$

5. Определить, как изменяется состояние системы  $S$  под влиянием управления  $x_i$  на  $i$ -ом шаге: оно переходит в новое состояние:

$$S' = \varphi_i(S, x_i) \quad (3.2.2)$$

6. Записать основное функциональное уравнение динамического программирования, выражающее условный оптимальный выигрыш  $W_i(S)$  (начиная с  $i$ -го шага и до конца) через уже известную функцию  $W_{i+1}(S)$ :

$$W_i(S) = \max_{x_i} \{f_i(S, x_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\} \quad (3.2.3)$$

Этому выигрышу соответствует условное оптимальное управление на  $i$ -м шаге  $x_i(S)$  (причем в уже известную функцию  $W_{i+1}(S)$ : надо вместо  $S$  подставить измененное состояние  $S' = \varphi_i(S, x_i)$ )

Произвести условную оптимизацию последнего ( $m$ -го) шага, задаваясь гаммой состояний  $S$ , из которых можно за один шаг дойти до конечного состояния, вычисляя для каждого из них условный оптимальный выигрыш по формуле:

$$W_m(S) = \max_{x_m} \{f_m(S, x_m)\} \quad (3.2.4)$$

8. Произвести условную оптимизацию  $(m-1)$ -го,  $(m-2)$ -го и т.д. шагов по формуле (3.2.3), полагая в ней  $i = (m-1), (m-2), \dots$ , и для каждого из шагов указать условное оптимальное управление  $X_i(S)$ , при котором максимум достигается.

Заметим, что если состояние системы в начальный момент известно (а это обычно бывает так), то необходимо найти оптимальный выигрыш по формуле:

$$W^* = W_1(S_0) \quad (3.2.5)$$

9. Далее найти безусловные оптимальные управления (и, если надо, конечное состояние  $S_m^*$ ) по цепочке:

$$S_0 \rightarrow x_1(S_0) \rightarrow S_1^* \rightarrow x_2(S_1^*) \rightarrow \dots \rightarrow S_{m-1}^* \rightarrow x_m(S_{m-1}^*) \rightarrow S_m^*. \quad (3.2.6)$$

В дальнейшем при решении задач распределения ресурсов будем придерживаться вышеизложенной схемы: условные оптимальные управления находятся в обратном порядке, от последнего шага к первому, а безусловные – в прямом порядке, от первого шага к последнему.

### 3.2.2 Постановка задачи распределения ресурсов:

#### 3.2.2.1 Распределение ресурсов по неоднородным этапам

##### Входные данные

$K_0$  – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени  $n$ , где  $n$  – количество лет, в течение которых производится оптимизация

$A1_i, A2_i$  – коэффициенты функций дохода на  $i$ -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$K1_i, K2_i$  – коэффициенты функций траты на  $i$ -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

##### Схема решения

Рассматривается **система** – две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами  $X$  и  $Y$ , выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед  $i$ -ым шагом характеризуется количеством средств  $K$ , сохранившихся после предыдущих  $i-1$  шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на  $i$ -ом шаге характеризуется количеством средств  $X_i$  и  $Y_i$ , вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход  $Z = \sum_{i=1}^n z_i$  будет максимальным.

Управление на  $i$ -ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме  $X_i$ ,  $Y_i = K - X_i$ . Выигрыш на  $i$ -ом шаге описывается уравнением:

$$z_i(K, X_i) = f_i(X_i) + g_i(K - X_i) \quad (3.2.7)$$

Под влиянием управления  $X_i$  на  $i$ -ом шаге система переходит в новое состояние:

$$K' = \varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) \quad (3.2.8)$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f_i(X_i) + g_i(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i))\} \quad (3.2.9)$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем  $n$ -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \{z(K, X_n)\} = f_n(X_n) + g_n(K - X_n) \quad (3.2.10)$$

Произвести условную оптимизацию для  $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$  в соответствии с рекуррентной формулой 3.2.9.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме  $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$ .  
Изменение состояния системы производится по формуле 3.2.8.

### 3.2.2.2 «Классическая» задача распределения ресурсов

Задача является частным случаем задачи распределения ресурсов по неоднородным этапам (функции дохода и траты одинаковы для всех этапов).

#### Входные данные

**$K_0$**  – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени  $n$

**$n$**  – количество лет, в течение которых производится оптимизация

**$A_1, A_2$**  – коэффициенты функций дохода для первой и второй отраслей соответственно.

**$K_1, K_2$**  – коэффициенты функций траты для первой и второй отраслей соответственно.

#### Схема решения

В нашем случае **система** – это две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами  $X$  и  $Y$ , выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед  $i$ -ым шагом характеризуется количеством средств  $K$ , сохранившихся после предыдущих  $i-1$  шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на  $i$ -ом шаге характеризуется количеством средств  $X_i$  и  $Y_i$ , вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход  $Z = \sum_{i=1}^n z_i$  будет максимальным.

Управление на  $i$ -ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме  $X_i$ ,  $Y_i = K - X_i$ . Выигрыш на  $i$ -ом шаге описывается уравнением

$$z_i(K, X_i) = f(X_i) + g(K - X_i) \quad (3.2.11)$$

Под влиянием управления  $X_i$  на  $i$ -ом шаге система переходит в новое состояние

$$K' = (X_i) + \psi(K - X_i). \quad (3.2.12)$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f(X_i) + g(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi(X_i) + \psi(K - X_i))\} \quad (3.2.13)$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем  $m$ -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \{z(K, X_n)\} = f(X_n) + g(K - X_n) \quad (3.2.14)$$

Произвести условную оптимизацию для  $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$  в соответствии с рекуррентной формулой 3.2.13.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме  $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$ .  
Изменение состояния системы производится по формуле (3.2.12) настоящего документа.

### 3.2.2.3 Задача резервирования ресурсов

**Задача с резервированием ресурсов заключается в следующем:** требуется найти такой способ управления ресурсами, при котором максимизируется доход за  $m$  лет при резервировании части средств на каждом шаге.

Задача о резервировании ресурсов сводится к классической задаче, когда  $g(Y) = 0$ , а  $\psi(Y) = Y$ . Т.е. вводится некая фиктивная отрасль, которая при вложении в нее средств, не приносит дохода, но и не тратит их.

#### Входные данные

**$K_0$**  – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени  $n$

**$n$**  – количество лет, в течение которых производится оптимизация

**$A1$**  – коэффициент функции дохода для первой отрасли. Коэффициент  **$A2$**  полагается равным 0.

**$K1$**  – коэффициент функции траты для первой отрасли. Коэффициент  **$K2$**  полагается равным 1.

#### Ограничения

По истечении года, оставшиеся от  $K_0$  средства можно вкладывать не целиком, а часть их резервировать.

Новых средств извне не поступает.

Доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно.

#### Схема решения

Схема решения задачи резервирования идентична схеме решения «классической» задачи распределения ресурсов.

### 3.2.2.4 Распределение ресурсов с вложением доходов в производство.

В данной задаче помимо заданных функций дохода и траты, дополнительно, вводятся «функции отчислений»  $r_i(D) \leq D, i = 1, \dots, n$ , показывающие, какая часть дохода  $D$ , полученного на  $i$ -м шаге, не вкладывается в производство на следующем  $(i+1)$ -м шаге, а отчисляется.

#### Входные данные

$K_0$  – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени  $n$ .

$n$  – количество лет, в течение которых производится оптимизация.

$A1_i, A2_i$  – коэффициенты функций дохода на  $i$ -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$K1_i, K2_i$  – коэффициенты функций траты на  $i$ -м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$K3_i$  – коэффициент функций отчислений на  $i$ -м шаге оптимизации

#### Схема решения

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление  $X_i$  на  $i$ -ом шаге – вложение средств  $X_i$  в отрасль I, а остальных средств – в отрасль II ( $Y_i = K - X_i$ ). Выигрыш на  $i$ -ом шаге описывается уравнением  $z_i(K, X_i) = r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

Под влиянием управления  $X_i$  на  $i$ -ом шаге система переходит в новое состояние

$$K' = f_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \left\{ r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)) + Z_{i+1}(f_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))) \right\}$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем  $n$ -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \{ f_n(X_n) + g_n(K - X_n) + \psi_n(X_n) + \psi_n(K - X_n) \}$$

Произвести условную оптимизацию для  $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$  в соответствии с рекуррентной формулой.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме  $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$ . Изменение состояния системы производится по формуле, описанной в п.1.2.5 настоящего документа.

### 3.2.2.5 Решение «классической» задачи распределения ресурсов

Планируется деятельность двух отраслей производства I и II сроком на 3 года ( $N=3$ ).

Заданы функции дохода для первой и второй отраслей соответственно:

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

$$g(x) = 1 - e^{-2x}$$

Так же заданы функции траты:

$$\varphi(x) = 0.75 x \text{ и}$$

$$\psi(y) = 0.3 y \text{ для первой и второй отраслей соответственно.}$$

Требуется распределить имеющиеся средства в размере  $Q = 2$  между отраслями, исходя из условия максимума дохода.

Задачу условной оптимизации на всех этапах будем решить численно.

Условный оптимальный выигрыш на последнем **3-ом** шаге равен:

$$Z_3(Q) = \max_{0 \leq X_3 \leq K} \{z(Q, X_3)\} = \max_{0 \leq X_3 \leq Q} \left\{ 2 - \left[ e^{-X_3} + e^{-2(Q-X_3)} \right] \right\}$$

Здесь,  $z(K, X_3)$  — выигрыш на 3-м шаге.

Выясним, в каких пределах может находиться  $Q$ , т.е.  $Q_{max}$  и  $Q_{min}$ .

Значение  $Q_{max}$  можно найти, считая, что на первых двух шагах все средства будут вложены в первую отрасль, в которой затраты минимальны. Тогда после двух лет получим:  
 $Q_{max} = K_0 * (0.75)^2 \approx 1.12$ .

Величину  $Q_{min}$  можно найти, если на первых четырех шагах все средства вкладывать во вторую отрасль  $Q_{min} = K_0 * (0.3)^2 \approx 0.18$ . То есть,  $Q$  принадлежит интервалу  
 $[0.18; 1.12]$ .

Возьмем опорные значения  $Q = 0.28; 0.38; \dots; 1.08$  и для каждого из них найдем условное оптимальное управление  $x_3(Q)$  и условный максимальный доход на двух последних шагах  $Z_3(Q)$ . Для этого построим зависимости  $z(Q, X_3)$  от  $X_3$  для всех значений  $Q$  (см. рис. 3.2.1).

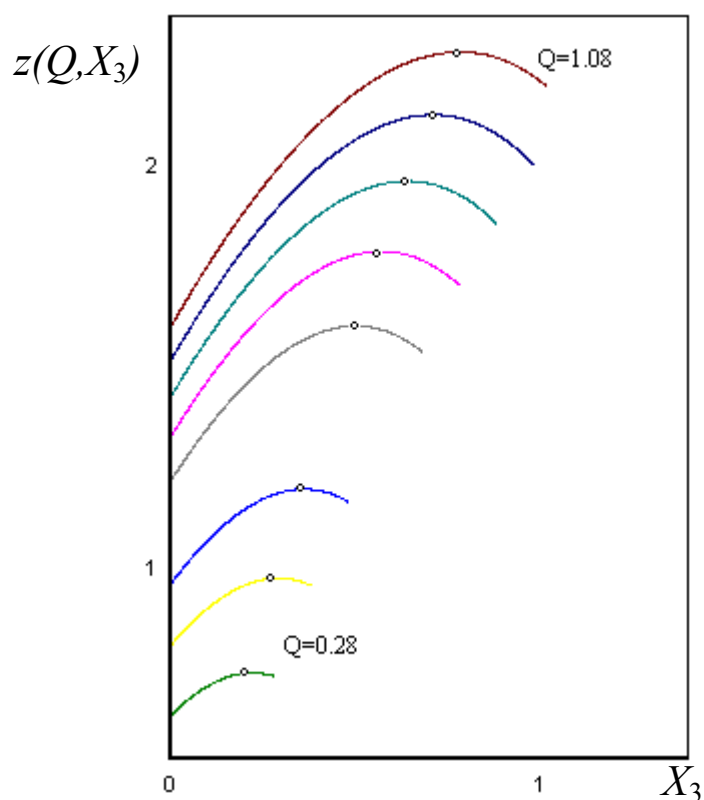


Рисунок 3.2.1 – Зависимость  $z(Q, X_3)$  от  $X_3$  для значений  $Q$

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на двух последних шагах  $Z_3(Q)$  и соответствующее оптимальное управление  $X_3(Q)$ . Результаты вычисления координат максимального значения каждой кривой сведены в таблицу 3.2.1.

Таблица 3.2.1 – Результаты вычисления

$Q$	$z(Q, X_3)$	$X_3$
0.18	0.302	0.000
0.28	0.429	0.000
0.38	0.533	0.022
0.48	0.628	0.089
0.58	0.716	0.156
0.68	0.799	0.222
0.78	0.876	0.289
0.88	0.949	0.356
0.98	1.017	0.422
1.08	1.080	0.489

С помощью полученных значений построим зависимости, показанные на рис. 3.2.2



Кривая  $Z_3(Q)$  строится путем линейной интерполяции на сетке значений  $Q$  и  $z(Q, X_3)$ , представленных в Таблице 3.2.1. Кривая  $X_3(Q)$  -  $Q$  и  $X_3$ .

Таким образом, оптимизация последнего шага завершена.

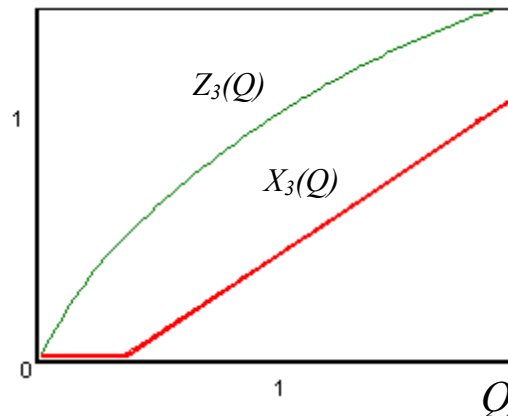


Рисунок 3.2.2 – Зависимости  $Z_3(Q)$  и  $X_3(Q)$

Рассмотрим 2-й шаг. Задачу условной оптимизации так же решается численно:

$Z_2(Q, X_2) = \max \{ \tilde{Z}_2(Q, X_2) \}$ , где условный полуоптимальный выигрыш равен

$$\tilde{Z}_2(Q, X_2) = z_2(Q, X_2) + Z_3(0.75X_2 + 0.3(Q - X_2))$$

$$z_2(Q, X_2) = 2 - \left[ e^{-X_2} + e^{-2(Q-X_2)} \right] - \text{выигрыш на 2-ом шаге. Аналогично третьему шагу}$$

выясним пределы  $Q$ :  $Q_{\max} = K_0 \cdot (0.75)^1 \approx 1.5$ , а  $Q_{\min} = K_0 \cdot (0.3)^1 \approx 0.6$ . То есть,  $Q$  принадлежит интервалу  $[0.6; 1.5]$ .

Возьмем опорные значения  $Q = 0.6; 0.8; \dots; 1.5$  и для каждого из них найдем условное оптимальное управление  $X_2(Q)$  и условный максимальный доход на последнем шаге  $Z_2(Q)$ . Для этого построим зависимости  $\tilde{Z}_2(Q, X_2)$  от  $X_2$  для всех значений  $Q$  (см. рис. 3.2.3).

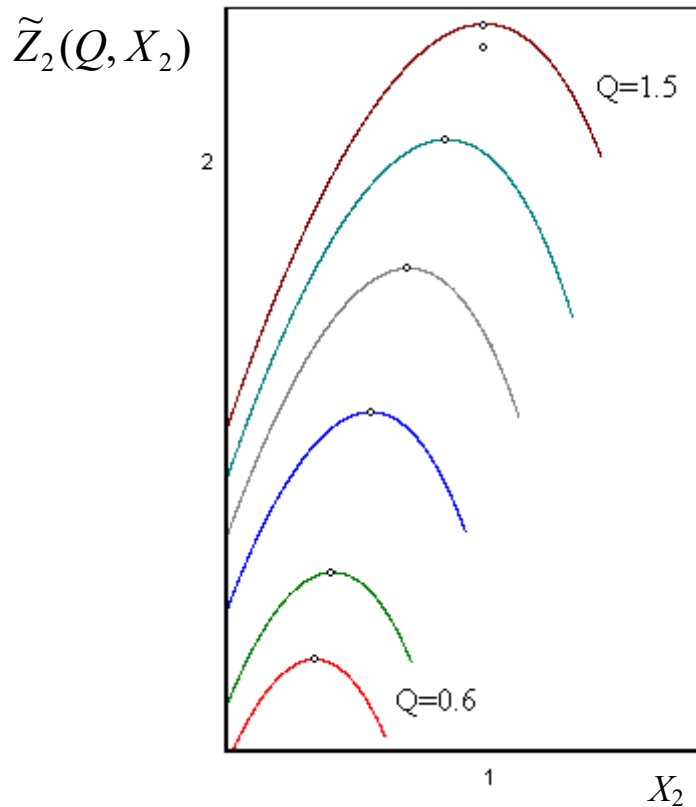


Рисунок 3.2.3 – Зависимость  $\tilde{Z}_2(Q, X_2)$  от  $X_2$  для значений  $Q$

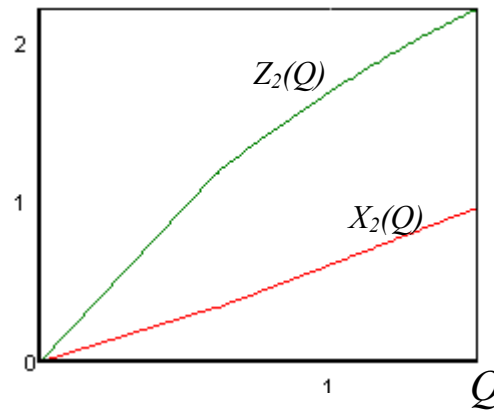
При этом второе слагаемое в формуле для полуоптимального выигрыша определяется по рис. 3.2.2 для аргумента  $0.75X_2 + 0.3(Q - X_2)$ .

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на последнем шаге  $Z_2(Q)$  и соответствующее оптимальное управление  $X_2(Q)$ . Сведем результаты в таблицу 3.2.2.

Таблица 3.2.2 – Результаты вычислений на втором шаге.

$Q$	$z(Q, X_2)$	$X_2$
0.6	1.180	0.335
0.8	1.460	0.474
1.0	1.710	0.622
1.2	1.934	0.756
1.4	2.135	0.899
1.5	2.228	0.970

Аналогично третьему шагу, с помощью полученных значений строятся зависимости, показанные на рис. 3.2.4.

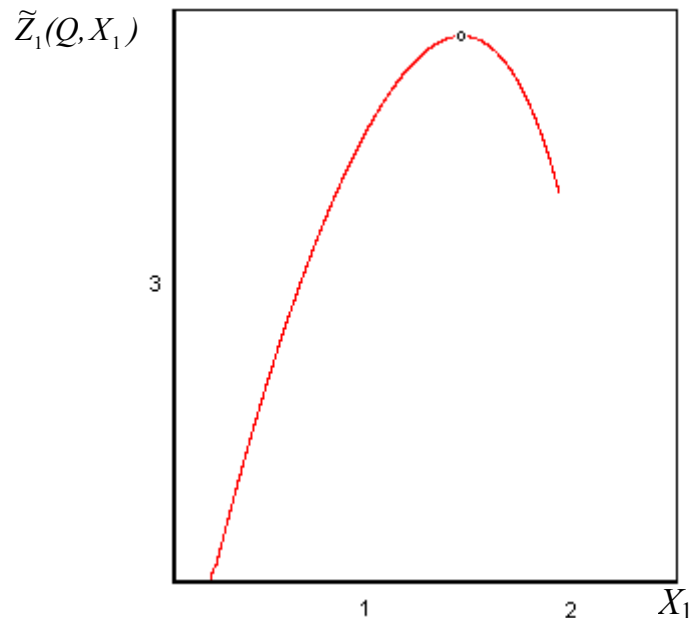
Рисунок 3.2.4 – Зависимости  $Z_2(Q)$  и  $X_2(Q)$ 

Теперь остается оптимизировать первый шаг.

Начальное состояние системы  $Q_0 = 2$  и нужно построить зависимость  $\tilde{Z}_1(Q_0, X_1)$  от  $X_1$ :

$$\tilde{Z}_1(Q_0, X_1) = z_1(Q_0, X_1) + Z_2(Q') = 2 - \left[ e^{-X_1} + e^{-2(Q_0 - X_1)} \right] + Z_2(0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)).$$

Второе слагаемое определяется по рис. 3.2.4 для аргумента  $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$ . Определяя на единственной кривой (см. рис. 3.2.5) максимум, найдем окончательное (уже не условное) значение максимального дохода за весь период  $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$  и соответствующее оптимальное управление на первом шаге  $X_1 = 1.47$ .

Рисунок 3.2.5 – Зависимость  $\tilde{Z}_1(Q, X_1)$  от  $X_1$ 

Найдем безусловные оптимальные управления по схеме:

$$x_1 \rightarrow Q_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow Q_3^* \rightarrow x_3.$$

Остаток средств после первого определяется следующим образом:

$$Q_2^* = 0.75x_1 + 0.3(Q_0 - x_1) = 1.26.$$

По рис. 3.2.4 определяем  $x_2 = 0.8$ . Остаток средств после второго шага:

$$Q_3^* = 0.75x_2 + 0.3(Q_2 - x_2) = 0.73. \text{ По этому значению из рис. 3.2.2 определим } x_3 = 0.26.$$

Полученные результаты сведены в таблице 3.2.3

Таблица 3.2.3

Отрасли	Год		
	1	2	3
I	1.469	0.801	0.261
II	0.531	0.460	0.477

Вид оптимальной кривой в фазовом пространстве показан на рис. 3.2.6.

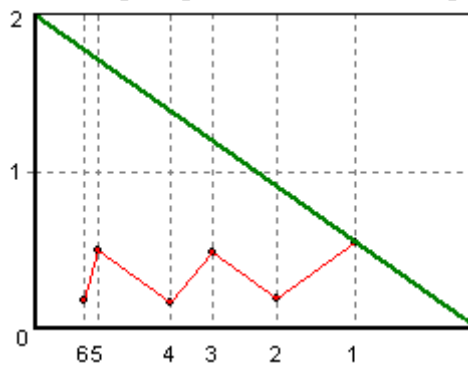


Рисунок 3.2.6 – Оптимальная кривая в фазовом пространстве

### 3.2.2.6 Связь различных типов задач распределения ресурсов

На рис. 3.2.7 показана зависимость между задачами распределения ресурсов.

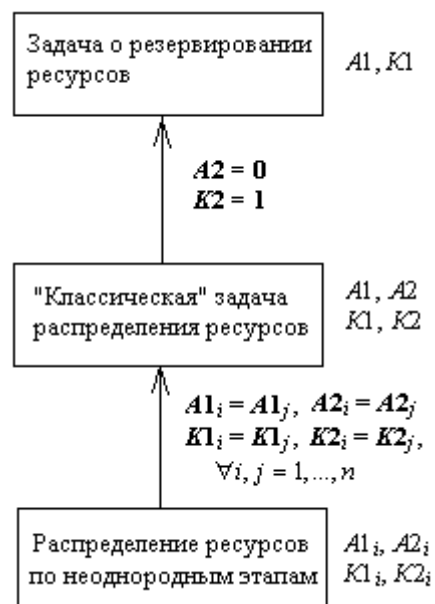


Рисунок 3.2.7 – Связь между различными типами задач распределения ресурсов

### 3.2.3 Задание по задаче динамического программирования о распределении ресурсов

Записать функцию Беллмана на последнем шаге и на предпоследнем шаге, объяснить, как решается задача.

Распределить ресурсы между производствами на  $n$  лет. Рассматривается система с *несколькими* отраслями производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется *несколькими* параметрами, выражающими количество средств в отраслях соответственно. Состояние системы перед  $i$ -ым шагом характеризуется количеством средств  $K$ , сохранившихся после предыдущих  $i-1$  шагов.

#### Варианты:

1. 2 производства, 2 ресурса
2. 2 производства, 3 ресурса
3. 2 производства, 4 ресурса
4. 3 производства, 3 ресурса
5. 3 производства, 4 ресурса
6. 4 производства, 1 ресурс
7. 4 производства, 2 ресурса
8. 4 производства, 3 ресурса
9. 4 производства, 4 ресурса
10. 5 производств, 1 ресурс

### 3.2.4 Пример задачи динамического программирования о распределении нескольких ресурсов

Задача распределения ресурсов решается по следующему алгоритму:

#### Входные данные

$K_0$  — начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени  $n$

$n$  — количество лет, в течение которых производится оптимизация

$A_1, A_2$  — коэффициенты функций дохода для первой и второй отраслей соответственно.

$K_1, K_2$  — коэффициенты функций траты для первой и второй отраслей соответственно.

#### Схема решения

В нашем случае система — это две отрасли производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется двумя параметрами  $X$  и  $Y$ , выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед  $i$ -ым шагом характеризуется количеством средств  $K$ , сохранившихся после предыдущих  $i-1$  шагов.

В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

Управление на  $i$ -ом шаге характеризуется количеством средств  $X_i$  и  $Y_i$ , вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход  $Z = \sum_{i=1}^n z_i$  будет максимальным.

Управление на  $i$ -ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме  $X_i$ ,  $Y_i = K - X_i$ . Выигрыш на  $i$ -ом шаге описывается уравнением  $z_i(K, X_i) = f_i(X_i) + g_i(K - X_i)$ .

Под влиянием управления  $X_i$  на  $i$ -ом шаге система переходит в новое состояние

$$K' = \varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i).$$

Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \leq X_i \leq K} \{f_i(X_i) + g_i(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i))\}$$

Условный оптимальный выигрыш на последнем  $m$ -м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \leq X_n \leq K} \{z(K, X_n)\} = f_n(X_n) + g_n(K - X_n)$$

Произвести условную оптимизацию для  $i = (n-1), (n-2), \dots, 1$  в соответствии с рекуррентной формулой.

Найти безусловные оптимальные управления по схеме  $x_1 \rightarrow K_2^* \rightarrow x_2 \rightarrow K_3^* \rightarrow \dots$ . Изменение состояния системы производится по формуле.

Рассмотрим пример с 3-мя производствами и 2-мя ресурсами. Задача распределить ресурсы между производствами на  $n$  лет. Рассматривается система с 3 отраслями производства с вложенными в них средствами. Система характеризуется 2 параметрами, выражающими количество средств в отраслях соответственно.

Таблица 3.2.4- функции трат

Производство		1	2	3
Ресурс	1	$\varphi_{11}(x, y)$	$\varphi_{12}(x, y)$	$\varphi_{13}(x, y)$
	2	$\varphi_{21}(x, y)$	$\varphi_{22}(x, y)$	$\varphi_{23}(x, y)$

Функция Беллмана на последнем ( $n$ ) шаге в соответствии с формулой будет иметь вид:

$$Z_n(K_{1n}, K_{2n}) = \max \{f_{1n}(x_{1n}, y_{1n}) + f_{2n}(x_{2n}, y_{2n}) + f_{3n}(K_{1n} - x_{1n} - x_{2n}, K_{2n} - y_{1n} - y_{2n})\}$$

Функция Беллмана на предпоследнем ( $n-1$ ) шаге будет иметь вид:

$$Z_{n-1}(K_{1n-1}, K_{2n-1}) = \max \{f_{1n-1}(x_{1n-1}, y_{1n-1}) + f_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1}) + f_{3n-1}(K_{1n-1} - x_{1n-1} - x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1} - y_{2n-1}) + Z_n(K_{1n}, K_{2n})\}$$

Где  $Z_n(K_{1n}, K_{2n})$  - Функция Беллмана на последнем шаге, полученная нами ранее, а  $K_{1n}$  и  $K_{2n}$  в соответствии с формулой равны:

$$K_{1n} = \varphi_{11}(x_{1n-1}, y_{1n-1}) + \varphi_{12}(x_{2n-1}, y_{2n-1}) + \varphi_{13}(K_{1n-1} - x_{1n-1} - x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1} - y_{2n-1});$$

$$K_{2n} = \varphi_{21}(x_{1n-1}, y_{1n-1}) + \varphi_{22}(x_{2n-1}, y_{2n-1}) + \varphi_{23}(K_{1n-1} - x_{1n-1} - x_{2n-1}, K_{2n-1} - y_{1n-1} - y_{2n-1});$$

где  $\varphi_{ij}$  – функции трат приведенные в таблице 3.2.3.

### 3.2.5 Теоретические вопросы по динамическому программированию

1. Мультипликативная задача динамического программирования.
2. Сведение мультипликативной задачи к аддитивной.
3. Функция Беллмана в общем виде.
4. Задача о производстве.
5. Условная и безусловная оптимизация.
6. Принцип оптимальности и принцип вложения.

## 3.3 Лабораторная работа №3 Метод Монте-Карло и генерация случайных величин с заданным законом распределения.

Цель работы: ознакомиться со встроенными датчиками псевдослучайных чисел в приложениях MathCad, Excel и на языке Pascal; научиться вычислять площадь заданной фигуры или объем тела методом Монте-Карло. Научиться моделировать случайные величины с заданным законом распределения

### 3.3.1 Метод численного моделирования (Метод Монте-Карло)

#### Общие сведения о методе Монте-Карло

В последнее время область приложений метода численного моделирования или метода Монте-Карло существенно расширилась в связи с бурным развитием вычислительной техники. Особо следует отметить значительный прогресс, связанный с увеличением быстродействия вычислительных машин, что особенно важно при использовании метода Монте-Карло.

**Определение.** Методом Монте-Карло (ММК) называется численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Необходимо отметить, что ММК используется для решения любых математических задач, а не только задач вероятностного происхождения. Название «Монте-Карло» произошло от города Монте-Карло, известного своими казино, т. к. простейшим прибором для генерирования случайных чисел служит игральная рулетка. Возникновение метода Монте-Карло связывают с именами Дж. Неймана, С. Улама, Н. Метрополиса, Г. Канна

и Э. Ферми, которые в 40-х годах работали в Лос-Аламосе. Официальной датой рождения ММК считают 1949 год, когда появилась статья под заглавием «Метод Монте-Карло» (Metropolis N., Ulam S.M. The Monte Carlo method. J. Amer. Statist. Assoc., 1949, 44, №247. P. 335–341).

Построение алгоритмов ММК основано на сведении задач к расчету математических ожиданий. Это означает, что для вычисления скалярной величины  $A$  нужно придумать такую случайную величину  $\xi$ , для которой ее математическое ожидание  $m_1(\xi) = A$ . Тогда, получив в численном эксперименте  $N$  независимых значений  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , можно найти, что

$$A \approx \frac{1}{N} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N).$$

### Определение объема геометрической фигуры с помощью метода Монте-Карло.

Требуется оценить объем  $V_G$  некоторой ограниченной пространственной фигуры  $G$ , показанной на рис. 3.3.1.

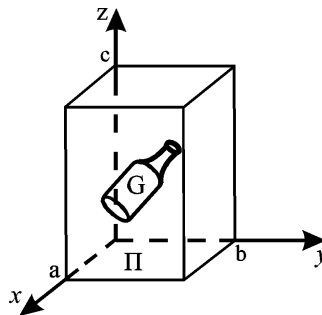


Рисунок 3.3.1 – Графическое отображение задачи

Возьмем прямоугольный параллелепипед  $\Pi$ , содержащий область  $G$ . Объем параллелепипеда  $\Pi$  известен и равен  $V_{\Pi} = a \times b \times c$ . Разыграем координаты  $N$  случайных точек, равномерно распределенных в области  $\Pi$ , и обозначим через  $N_G$  количество точек, попавших в область  $G$ . При большом  $N$  будет приближенно выполняться соотношение

$$N_G / N \approx V_G / V_{\Pi},$$

из которого найдем

$$V_G \approx V_{\Pi} (N_G / N).$$

В нашем примере случайная величина



$$\xi = \begin{cases} V_{\Pi}, & \xi \in G, \\ 0, & \xi \notin G, \end{cases}$$

а среднее арифметическое равно

$$\frac{1}{N} \sum \xi_i = V_{\Pi}(N_G / N).$$

При решении задач ММК следует:

1. Удобно выбрать случайную величину (СВ)  $\xi$  для решения конкретной задачи;
2. Научиться находить значения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  произвольной СВ  $\xi$ . Решение второй

проблемы связано с получением значений некоторой стандартной СВ, имеющей равномерное распределение в интервале  $[0; 1]$ .

### 3.3.2 Моделирование случайных величин с равномерным распределением

#### 3.3.2.1 Общие сведения о моделировании равномерного распределения

Плотность вероятности  $f(\alpha)$  СВ  $\alpha$ , равномерно распределенной в интервале  $[0; 1]$ , равна

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in [0; 1], \\ 0, & \alpha \notin [0; 1]. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(\alpha') d\alpha' = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ \alpha, & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ 1, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Математическое ожидание  $m_{\alpha} = 0,5$ , а дисперсия  $D(\alpha) = 1/12$ . Иногда в качестве стандартной используют дискретную СВ  $\varepsilon$ , ряд распределения вероятности  $P$  которой имеет вид

Таблица 3.3.1 – Равномерное распределение

$\varepsilon$	0	1	2	...	9
$P$	0,1	0,1	0,1	.	0,1

Будем называть  $\alpha$  – случайным числом, а  $\varepsilon$  – случайной цифрой. Установим связь между  $\alpha$  и  $\varepsilon$ . Представим число  $\alpha$  в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cdot 10^{-k} \quad (3.3.3)$$

Можно доказать следующую **теорему**: десятичные цифры  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$  случайного числа  $\alpha$  представляют собой независимые случайные цифры. Наоборот, если  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$

независимые случайные цифры, то формула (3.3.3) определяет случайное число.

**Замечание.** В вычислениях всегда используют числа с конечным числом десятичных знаков, поэтому случайные числа  $\alpha$  заменяют на случайные конечные дроби  $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ .

**Таблица случайных чисел.** Предположим, что осуществлено  $N$  независимых опытов, в результате которых получено  $N$  случайных цифр  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ . Записав эти цифры в порядке появления, получим таблицу случайных цифр. При проведении расчетов можно использовать как сами цифры, так и конструировать из них случайные числа  $\alpha = 0, \varepsilon_s \varepsilon_{s+1} \dots \varepsilon_{s+N}$ .

Существуют физические датчики случайных чисел. Для их построения используют шумящие радиоэлектронные приборы. Они применяются довольно редко, т. к. являются неудобными для практического использования и требуют постоянного контроля качества случайных чисел. Кроме этого нет возможности повторно воспроизвести выборочную последовательность необходимую на стадии отладки программ и повторения расчетов.

### 3.3.2.2 Псевдослучайные числа

Пригодность случайных чисел определяется не процессом их получения, а тем, что они должны обладать интересующими нас свойствами независимых, равномерно распределенных СВ.

**Определение.** Последовательность чисел  $\{\alpha_i\}$ , которые вычисляются по какой-либо заданной формуле и могут быть использованы вместо случайных чисел при решении задач численным методом, называются **псевдослучайными числами**.

Из сказанного следует, что оказываются тождественными те свойства случайных и псевдослучайных чисел, которые требуются для решения широкого круга задач. По отношению к этим задачам разница между физически генерируемыми случайными числами и псевдослучайными практически отсутствует. К преимуществам псевдослучайных чисел можно отнести:

- небольшие затраты машинного времени для их получения;
- возможность многократного повторного воспроизведения одной и той же последовательности чисел при необходимости;
- большой период повторения;
- равномерность распределения, независимость, соответствие проверкам на d-размерность и k распределение.
- необходимость однократного тестирования алгоритмов вычисления псевдослучайных чисел.

Из последнего утверждения следует, что разрабатываемые датчики случайных чисел

необходимо подвергать проверке с помощью специальных тестов, которые должны подтверждать их независимость и равномерность распределения. Важной характеристикой последовательности случайных чисел является ее периодичность. Это означает, что имеется некоторый достаточно большой номер  $L$ , начиная с которого случайные числа начинают повторяться. Очевидно, что использование при моделировании «большого» отрезка последовательности  $\{\alpha_i\}$ , чем период повторения, приведет к бессмысленному повторению испытаний в одних и тех же условиях.

Приведем на языке python пример моделирования случайных чисел равномерного распределения и проверки его на d-размерность 2.

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d, Axes3D
print("Start")
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
#задаем массивы из 10000 случайных координат точек
x = np.random.random(10000)
y = np.random.random(10000)
z = np.random.random(10000)
#рисуем график
ax.scatter3D(x,y,z)
ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")

#создать два графика размещенных друг над другом (в так называемой сетке)
#можно задавать различное число ячеек, потом указывает какие из них
#будут заняты данным графиком
gridsize = (2, 1)
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))
#первый график занимает одну ячейку (правда здесь и второй тоже)
ax1 = plt.subplot2grid(gridsize, (0, 0), colspan=1, rowspan=1)
ax2 = plt.subplot2grid(gridsize, (1, 0))
#автоматическое построение гистограммы автоматическим заданием
```

```

#количества интервалов
ax1.hist(x, bins='auto')
ax2.hist(x, bins=10)
ax1.set_title(u'Автоматически заданное количество диапазонов')
ax2.set_title(u'Количество диапазонов равно 10')

#получение массива гистограммы самостоятельное
nhist = 10
hist = np.zeros(nhist)
for i in range(len(x)):
    j = int(x[i]/(1.0/nhist))
    hist[j]=hist[j]+1
gridsize = (2, 1)
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))

#первый график занимает одну ячейку (правда здесь и второй тоже)
ax3 = plt.subplot2grid(gridsize, (0, 0), colspan=1, rowspan=1)
ax4 = plt.subplot2grid(gridsize, (1, 0))
ind = np.array([i for i in range(nhist)])
ax3.bar(ind, hist)
zz = np.zeros((nhist,nhist))
for i in range(len(x)):
    i1 = int(x[i]/(1.0/nhist))
    i2 = int(y[i]/(1.0/nhist))
    zz[i1][i2]=zz[i1][i2]+1

from mpl_toolkits.axes_grid1.axes_divider import make_axes_locatable
#Цветовой график
axp = ax4.matshow(zz, cmap='copper', vmin = 0.0)

#размещение цветовой легенды рядом с графиком
divider = make_axes_locatable(ax4)
cax = divider.append_axes("right", size='5%', pad=0)
plt.colorbar(axp, cax = cax, ax=ax4)

```

```
print(zz)
plt.show()
```

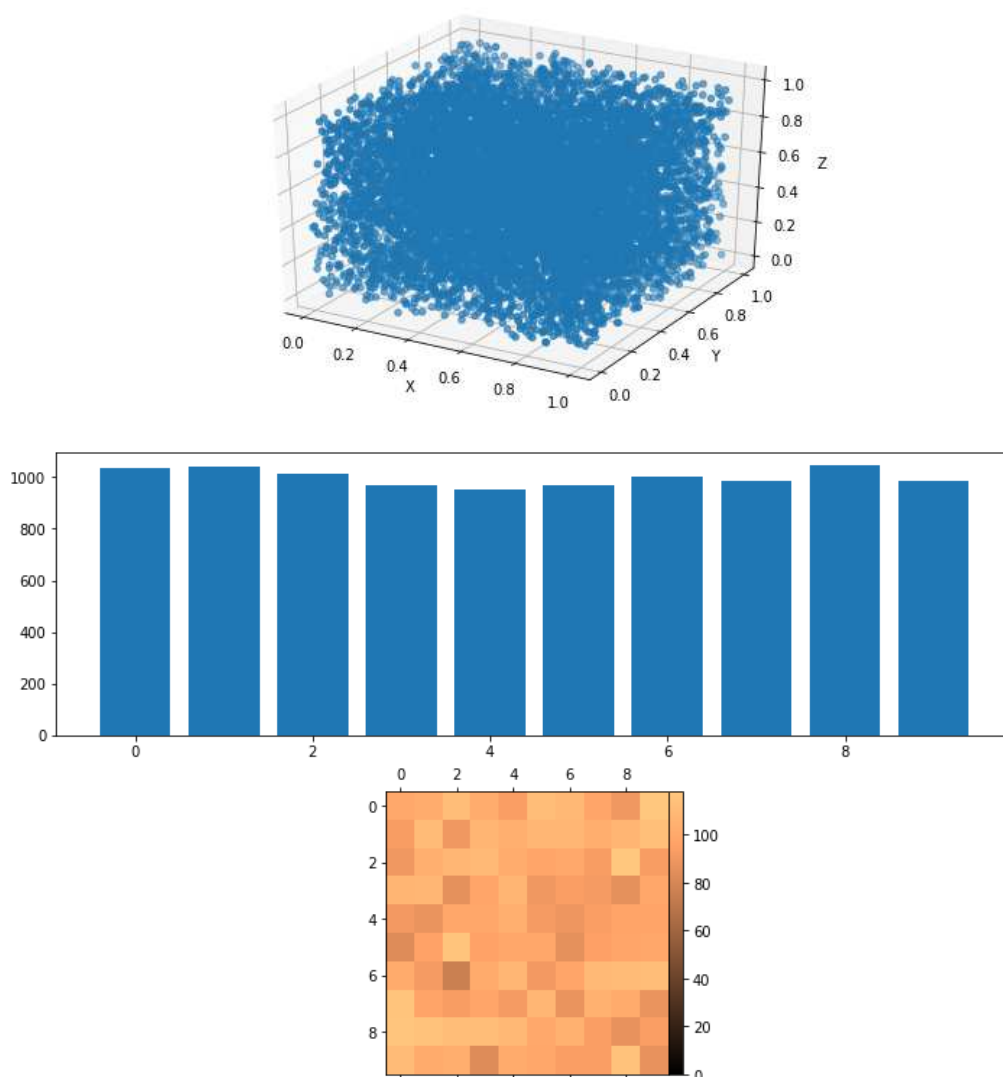


Рисунок 3.3.2 – Разброс точек и гистограммы 1d и цветовая 2d.

Приведем пример построения гистограммы на MathCad.

Основные приемы с MathCad связаны с использованием форм со специальными элементами. Так, например форма Matrix содержит в себе возможности создания векторов и матриц. Выбрав, например элемент  $m.n$ , можно задать диапазон и используя элемент  $X_n$  заполнить вектор значениями, что и сделано в примере. В данном случае идет заполнение случайными значениями равномерного распределения от 0 до 1. Для расчета среднего и дисперсии используется форма Calculus и значки сумма, все нужные поля значка можно заполнить непосредственно в окне MathCad. Построить график, можно выбрав элемент график и соответственно заполнить ось  $x$  и  $y$  соответствующими перебираемыми значениями. Так же здесь используется функция MathCad hist для расчета гистограммы.

Когда мы нажимаем после выражение значок равно, MathCad автоматически рассчитывает выражение. Если нажать Ctrl+= можно реализовать символьные вычисления,  $y + y \rightarrow 2 \cdot y$ .

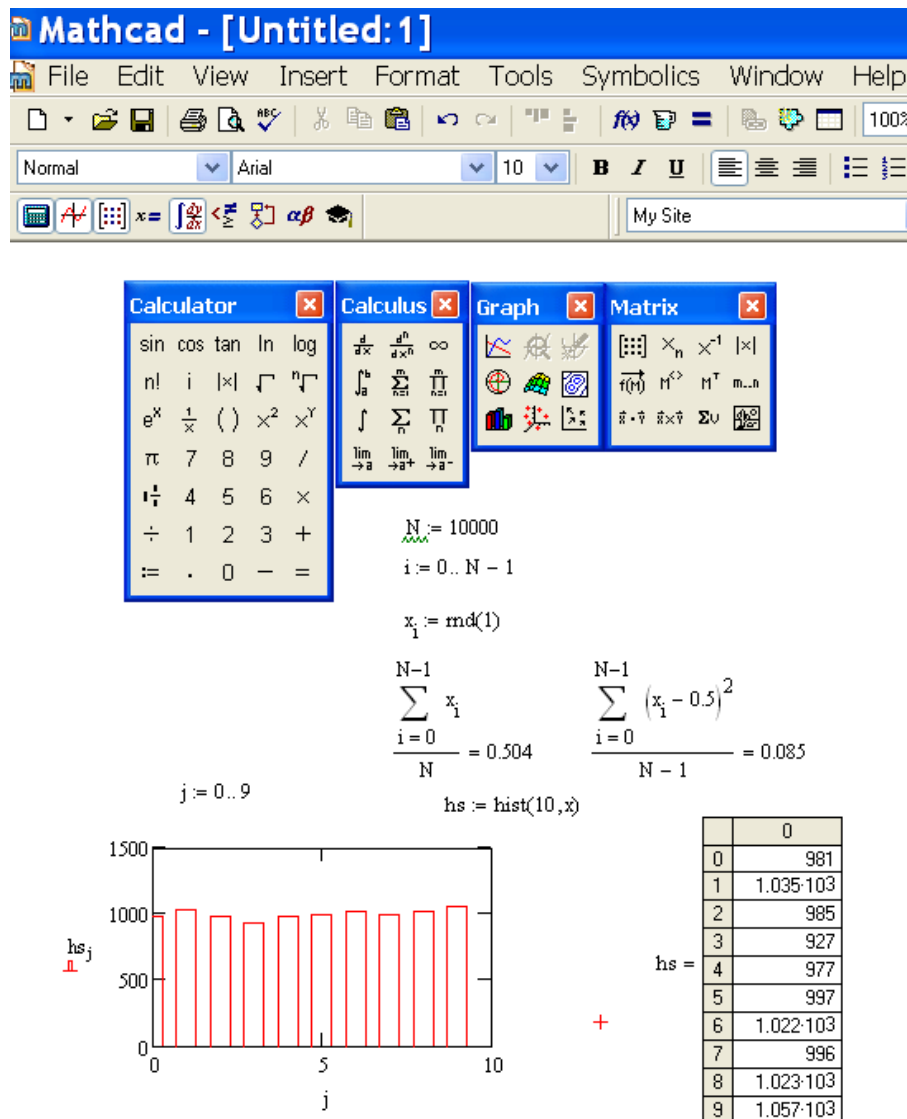


Рисунок 3.3.3 – Пример реализации задачи на MachCad

### 3.3.2.3 Алгоритмы генераторов псевдослучайных чисел

Во всех языках программирования (Pascal, C/C++, Java и т. д.) и в приложениях Excel, MathCad, MathLab и др. есть стандартная функция, возвращающая случайное число. При этом существует возможность повторения одной и той же последовательности случайных чисел, например, в C++, Java. Наиболее распространенные алгоритмы, используемые в генераторах псевдослучайных чисел:

1. Линейный конгруэнтный метод (ЛКМ) – языки C, C++, Java;
2. Алгоритм Вичманна–Хилла (Wichmann–Hill) или AS 183 – языки Prolog, Python (версии 2.2 и предыдущие), Excel;

3. Алгоритм «Виток Мерсенна» (Mersenne Twister) или MT19937–Python (версии 2.3 и последующие);
4. Алгоритм Парка–Миллера;
5. Метод Фибоначчи с запаздыванием (Subtract-with-borrow Generators SWBG) –Mathematica, MatLab.

Рассмотрим эти алгоритмы.

#### **Линейный конгруэнтный метод (ЛКМ)**

В стандарте ANSI-C имеется функция `rand()`, выдающая равномерно распределенные числа в интервале от 0 до `RAND_MAX`, и связанная с ней функция `srand()`, выполняющая начальную установку счетчика. Почти все подобные генераторы используют рекуррентную последовательность

$$I_{n+1} = (a \cdot I_n + c) \bmod m.$$

Здесь  $I_{n+1}$  равно остатку от деления  $(aI_n + c)$  на  $m$  (или другими словами  $I_{n+1}$  – это наименьший положительный вычет  $(aI_n + c)$  по модулю  $m$ ). Число  $a$  называется мультипликатором, число  $c$  – инкрементом, а число  $m$  – модулем. Ниже приведена реализация генератора ANSI-C, опубликованного в качестве «примера».

```
/* (в модуле stdlib.h) */
#define RAND_MAX 32767

/* "пример" от комитета ANSI-C */
unsigned long next=1;

int rand(void) {
    next=next*1103515245+12345;
    return((unsigned int)(next/65536)%32768);
}

void srand(unsigned int seed) {
    next=seed;
}
```

Значение мультипликатора и инкремента в этом примере не являются оптимальными.

#### **Алгоритм Вичманна–Хилла (Wichmann–Hill или AS183)**

Псевдослучайные числа вычисляются по формуле

$$U_i = \left( \frac{X_i}{30269} + \frac{Y_i}{30307} + \frac{Z_i}{30323} \right) \bmod 1,0,$$

где функция  $\bmod 1,0$  возвращает десятичную часть получившейся суммы.

Рекуррентные формулы для вычисления  $X_i$ ,  $Y_i$  и  $Z_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= (171 \times X_i) \bmod 30269, \\ Y_{i+1} &= (172 \times Y_i) \bmod 30307, \\ Z_{i+1} &= (170 \times Z_i) \bmod 30323, \end{aligned}$$

где функция  $\bmod()$  возвращает целое число, равное остатку от деления. По сути, этот алгоритм есть линейная комбинация трех конгруэнтных генераторов. При этом требуется задание трёх начальных значений. Алгоритм обладает периодом  $6,95 \times 10^{12}$  ( $\approx 2^{43}$ ), что недостаточно для современных нужд.

#### **Алгоритм «Виток Мерсенна» (Mersenne Twister или MT19937)**

Алгоритм разработан в 1997 году японскими учеными Макото Мацумото и Такудзи Нишимура. Обладает огромным периодом  $2^{19937} - 1$  (создатели алгоритма доказали это свойство), имеет хорошее быстродействие и проходит все статистические тесты.

#### **Алгоритм Парка–Миллера (Park, Miller)**

Самая простая рекуррентная последовательность, которую можно предложить для реализации генератора равномерного распределения, имеет вид:

$$I(j+1) = a \times (I(j) \bmod m).$$

Значения констант

$$a = 7^5 = 16807, \quad m = 2^{31} - 1 = 2147483647$$

были предложены Park, Miller и протестированы в исследованиях Lewis, Goodman, Miller. Прямое использование этого метода возможно на языке ассемблер, но языки высокого уровня могут при этом зафиксировать переполнение. Для обхода этого Schrage предложил метод частичной факторизации модуля. Для этого модуль записывается в виде:

$$\bmod = a \times q + r.$$

Если  $r < q$  и  $0 < z < m - 1$ , то при этом величины  $a \times (z \bmod q)$  и  $r \times [z / q]$  всегда лежат в интервале  $0, \dots, m - 1$ . Для вычисления  $a \times (z \bmod q)$  используется алгоритм:

$$t = a(z \bmod q) - r[z/q]$$

если  $t < 0$ , то  $t += m$ .

$$(a * z) \bmod m = t.$$

В случае констант Парка–Миллера можно использовать значения  $q = 12773$  и  $r = 2836$ .



Если требуется число вызовов, превышающее по порядку  $10^8$ , то для этого случая L'Esuyer рекомендует комбинировать две последовательности с близкими, но отличающимися константами. В его исследованиях хороший результат был получен для значений:

$$m1 = 2147483563, a1 = 40014, q1 = 53668, r1 = 12211;$$

$$m2 = 2147483399, a2 = 40692, q2 = 52774, r2 = 3791.$$

При этом для современных компьютеров период повторения генерируемой последовательности оценивается по порядку примерно как  $10^{18}$ .

### Метод Фибоначчи с запаздыванием

Статистические свойства чисел, генерируемых линейным конгруэнтным алгоритмом, делают невозможным их использование для решения задач, чувствительных к качеству случайных чисел. В связи с этим линейный конгруэнтный алгоритм постепенно потерял свою популярность. Его место заняло семейство фибоначчиевых алгоритмов, позволяющих получать более качественные последовательности псевдослучайных чисел. В англоязычной литературе фибоначчиевы датчики называют обычно «Subtract-with-borrow Generators» (SWBG).

Один из фибоначчиевых датчиков основан на следующей итеративной формуле:

$$X(k) = \begin{cases} X(k-a) - X(k-b), & \text{если } X(k-a) \geq X(k-b), \\ X(k-a) - X(k-b) + 1, & \text{если } X(k-a) < X(k-b), \end{cases}$$

где  $X(k)$  – вещественные числа из интервала  $[0; 1]$ ,  $a, b$  – целые положительные числа, называемые лагами. Для работы фибоначчиеву датчику требуется знать максимальные значения предыдущих сгенерированных случайных чисел. При программной реализации для хранения полученных чисел используется конечная циклическая очередь на базе массива. Для старта фибоначчиевому датчику требуется  $\max(a, b)$  случайных чисел, которые могут быть сгенерированы простым конгруэнтным датчиком. Лаги  $a$  и  $b$  не следует выбирать произвольно. Рекомендуются следующие пары значений лагов:  $a = 55, b = 24$ ;  $a = 17, b = 5$ ;  $a = 97, b = 33$ . Качество получаемых случайных чисел зависит от значения константы  $a$ , чем оно больше, тем выше размерность пространства, в котором сохраняется равномерность случайных векторов, образованных из полученных случайных чисел. В то же время с увеличением величины константы  $a$  возрастает объём используемой алгоритмом памяти.

Получаемые случайные числа обладают хорошими статистическими свойствами, причём все биты случайного числа равнозначны по статистическим свойствам. Период фибоначчиева датчика может быть оценен по следующей формуле:

$$T = (2^{\max(a, b)} - 1) \times 2^j,$$

где  $j$  – число битов в мантиссе вещественного числа.

### Функция random() в различных приложениях

1. **Pascal** – random( $x$ ) возвращает псевдослучайное число типа word из интервала  $[0; x]$ . Переменная  $x$  должна быть типа word;
2. **C, C++** – rand(void) возвращает псевдослучайное целое типа int число из интервала  $[0; 32767]$ ; RAND\_MAX – максимальное значение.
3. **MathCad** – rnd( $x$ ) возвращает псевдослучайное число из интервала  $[0; x]$ ;
4. **Excel** – (СЛЧИС() – для русской версии) возвращает псевдослучайное число из интервала  $[0; 1,0]$ ;
5. **Mathematica** – Random[] возвращает псевдослучайное число типа Real из интервала  $[0; 1,0]$ ;
6. **MatLab** – rand возвращает случайное псевдослучайное число из интервала  $[0; 1,0]$ ;
7. **Python** – import random; print random.random( ) – возвращает псевдослучайное число из интервала  $[0; 1,0]$ ;
8. **Java** – Math.random( ) возвращает псевдослучайное число типа double из интервала  $[0; 1,0]$ .

### 3.3.3 Оценка точности результатов, полученных методом Монте-Карло

Оценка точности результатов, полученных методом Монте-Карло, основана на центральной предельной теореме теории вероятностей, теореме Чебышева и ее следствиях. Из которых следует, что при большом объеме выборки  $N$  относительная частота события  $A$  сходится по вероятности к вероятности события  $p_A$ , а среднее арифметическое выборочных данных сходится по вероятности к их математическому ожиданию. Используя ММК, можно провести большое число независимых опытов и с заданной точностью найти оценки искомых величин. При расчетах ММК возникает вопрос оценки точности полученных результатов. Ответ на этот вопрос можно получить на основе центральной предельной теоремы, из которой следует, что при большом объеме выборки плотность вероятности выборочного среднего приближается к нормальному распределению.

Пусть производится большое число  $N$  независимых опытов, в каждом из которых событие  $A$  появляется с вероятностью  $p_A$ . Введем СВ

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если } A, \\ 0, & \text{если } \overline{A}, \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Оценка вероятности  $p_A$  события  $A$  определяется формулой

$$\bar{p}_A = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{N_A}{N}, \quad (3.3.5)$$

где  $N_A$  – число опытов, в которых появилось событие  $A$ . Отношение  $N_A/N$  определяет относительную частоту события  $A$ . Распределение  $\bar{p}_A$  при большом значении  $N$  близко к нормальному с математическим ожиданием  $m_1(\bar{p}_A) = p_A$  и среднеквадратическим отклонением

$$\sigma(\bar{p}_A) = \sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{N}}. \quad (3.3.6)$$

Если СВ  $X$  является непрерывной, то оценка математического ожидания имеет вид

$$\bar{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad (3.3.7)$$

где  $\{x_i\}$  – выборочные данные. Оценка (3.3.7) при большом значении  $N$  является приближенно нормальной СВ со средним  $m_1[\bar{m}_x] = m_1[X]$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma(\bar{m}_x) = \sigma_x / \sqrt{N}$ .

Рассмотрим два примера по определению точности результатов расчетов, полученных ММК.

**Пример 1.** Проведено  $N$  независимых опытов, в каждом из которых событие  $A$  появляется с некоторой неизвестной нам вероятностью  $p$ . В результате этих опытов получена оценка  $\hat{p}_A$  по формуле (3.3.5). Найти вероятность  $P(|\bar{p}_A - p_A| < \varepsilon)$  того, что  $\hat{p}_A$  отличается от вероятности  $p_A$  не больше чем на заданную величину  $\varepsilon > 0$ . Т. к. оценка  $\bar{p}_A$  – при большом  $N$  нормальная СВ с математическим ожиданием  $p_A$  и среднеквадратическим отклонением (3.3.6), то искомая вероятность равна

$$P(|\bar{p}_A - p_A| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p_A(1-p_A)}}\right). \quad (3.3.8)$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (3.3.9)$$

– функция Лапласа. Как пользоваться формулой (3.3.8), если вероятность  $p_A$  нам неизвестна и мы ее находим? В выражение (3.3.8)  $p_A$  нужно заменить на  $\bar{p}_A$ . Задавая достаточно

большую величину вероятности, например, равную 0,95, 0,98, можно найти необходимое значение  $N$  для достижения заданной точности.

**Пример 2.** Проведено  $N$  независимых опытов, в каждом из которых наблюдается значение СВ  $X$ . Вычисляется оценка среднего значения  $\bar{m}_x$  по формуле (3.3.7). Найти вероятность  $P(|\bar{m}_x - m_x| < \varepsilon)$  того, что оценка  $\bar{m}_x$  отклоняется от математического ожидания  $m_x$  не больше чем на заданную величину  $\varepsilon > 0$ . Как и в предыдущем примере

$$P(|\bar{m}_x - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\bar{m}_x)}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right), \quad (3.3.10)$$

где  $\sigma_x$  – среднеквадратичное отклонение СВ  $X$ . Если величина  $\sigma_x$  неизвестна, то вместо нее можно использовать соответствующую оценку

$$\hat{\sigma}_x \approx \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{m}_x)^2}. \quad (3.3.11)$$

Обычно на практике точность характеризуют величиной относительной среднеквадратической ошибки  $\delta = \sigma_x / \bar{m}_x$ , которая уменьшается с ростом  $N$  как  $1/\sqrt{N}$ .

### 3.3.4 Моделирование случайных величин с заданным законом распределения

#### 3.3.4.1 Моделирование дискретных случайных величин

Рассмотрим дискретную СВ  $X$  с рядом распределения

$$\begin{pmatrix} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad (3.3.12)$$

где  $p_i = P(X = x_i)$ . Для того чтобы моделировать эту величину, разделим интервал  $[0; 1]$  на интервалы  $\{\Delta_i\}$  (рис. 3.3.4) такие, что длина  $\Delta_i$  равна вероятности  $p_i$ . Можно доказать следующую теорему.

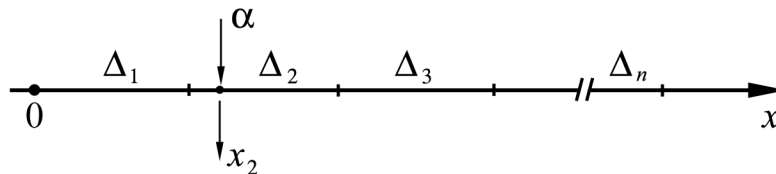


Рисунок 3.3.4 - Разбиение на интервалы диапазонов от 0 до 1

**Теорема.** Случайная величина  $X$ , определенная выражением  $X = x_i$ , если  $\alpha \in \Delta_i$ , имеет ряд распределения вероятностей (3.3.12). Схема моделирования: разыгрываем случайное число  $\alpha$  и определяем интервала  $\Delta_i$ , в который оно попало. В результате получим

соответствующее значение СВ  $X = x_i$  (для показанной на рис. 3.3.3 реализации  $X = x_2$ ).

### 3.3.4.2 Моделирование случайных событий

Рассмотрим полную группу несовместных событий  $\{A_i\}$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ( $\sum p_i = 1$ ). Разделим интервал  $[0; 1]$  на  $n$  интервалов  $\{\Delta_i\}$  таких, что длина интервала  $\Delta_i$  равна вероятности  $p_i$ . В результате получаем рассмотренную выше схему моделирования дискретной случайной величины.

**Замечание.** Если есть одно случайное событие  $A$  с вероятностью  $P(A) = p$ , то до полной группы событий его дополняет  $\bar{A}$  с вероятностью  $P(\bar{A}) = 1 - p$ .

### 3.3.4.3 Моделирование непрерывной случайной величины

Рассмотрим непрерывную СВ  $X$  с плотностью вероятности  $f(x)$  (функция распределения вероятностей  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$ ). Можно доказать, что СВ  $X$ , удовлетворяющая уравнению  $F(x) = \alpha$ , имеет плотность вероятности  $f(x)$ . Таким образом, розыгрыш значения  $x$  непрерывной СВ  $X$  с заданной плотностью вероятности  $f(x)$  сводится к процедуре розыгрыша случайного числа  $\alpha \in [0; 1]$ . Значение  $x$  находится из уравнения (рис. 3.3.5)

$$x = F^{-1}(\alpha). \quad (3.3.13)$$

Здесь  $F^{-1}$  обозначает обратную функцию по отношению к  $F$ . Рассмотренный метод моделирования непрерывной СВ называется **методом обратных функций**.

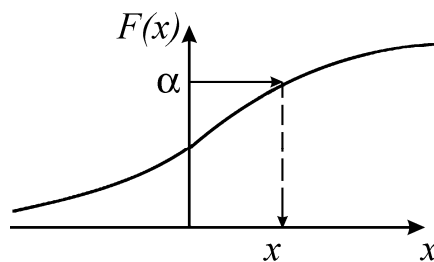


Рисунок 3.3.5 – Моделирование методом обратных функций

## 3.3.5 Алгоритмы моделирования некоторых типов случайных величин

### 3.3.5.1 Экспоненциальное распределение

Случайной величине  $X$  с экспоненциальной плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (3.3.14)$$

где  $\lambda$  – параметр распределения, соответствует функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0) \quad (3.3.15)$$

На основании метода обратных функций найдем (см. рис. 3.3.5):

$$\alpha = 1 - e^{-\lambda x} \quad (3.3.16)$$

Решая относительно  $x$ , получим

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha) \quad (3.3.17)$$

Так как  $\alpha$  – СВ с равномерным распределением в интервале  $[0; 1]$ , то  $(1 - \alpha)$  также СВ с равномерным распределением в интервале  $[0; 1]$ . Окончательно получим

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(\alpha) \quad (3.3.18)$$

### 3.3.5.2 Пуассоновская случайная величина

Распределение вероятностей числа событий  $N$  на интервале времени  $\Delta t$  для пуассоновской СВ с параметром  $\lambda$  определяется выражением

$$P(N = n, \Delta t) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^n}{n!}. \quad (3.3.19)$$

Пуассоновский поток событий является простейшим потоком, для которого интервалы времени  $\tau$  между соседними событиями являются независимыми СВ с экспоненциальной плотностью вероятности (3.3.14). Моделирование выполняется по следующей схеме: последовательно разыгрываем значения  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  СВ с экспоненциальной плотностью вероятности до тех пор, пока не выйдем за пределы временного интервала  $\Delta t$  (рис. 3.3.6). Число точек на интервале  $\Delta t$  и есть значение пуассоновской случайной величины  $N$ . Для реализации, показанной на рис. 3.3.6,  $N = 3$ .

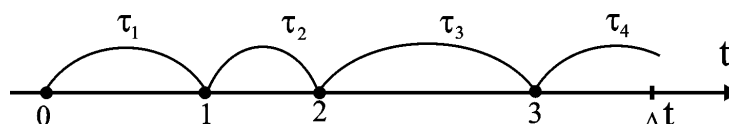


Рисунок 3.3.6 – Моделирование экспоненциального распределения

### 3.3.5.3 Гауссовская случайная величина

Гауссовская (нормальная) СВ  $X$  имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.3.20)$$

Здесь  $m_x$  – среднее значение,  $\sigma_x^2$  – дисперсия СВ  $X$ . Используя метод обратных функций, можно показать, что значение СВ  $X$  вычисляется по формуле

$$x = \sigma_x \Phi^{-1}(\alpha - 0,5) + m_x,$$

где  $\Phi^{-1}$  – обратная функция по отношению к функции Лапласа  $\Phi$ , определенной выражением (3.3.9).

Однако этот алгоритм на практике не применяют из-за больших затрат машинного времени. Это связано с тем, что при использовании ММК необходимо получать достаточно много значений СВ для вычисления результата с приемлемой точностью. Поэтому распространен другой алгоритм, позволяющий получать сразу два независимых значения гауссовской СВ  $x'_1$  и  $x'_2$  с нулевыми средними и  $\sigma_x = 1$ :

$$x'_1 = \omega_1 \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \quad x'_2 = \omega_2 \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \quad (3.3.21)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – координаты изотропного вектора  $\vec{\omega}$  на плоскости. Это означает, что точка  $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$  имеет равномерное распределение на окружности с единичным радиусом. Моделирование  $\omega_1, \omega_2$ :

- 1)  $\gamma_1 = 1 - 2\alpha_2, \quad \gamma_2 = 1 - 2\alpha_3, \quad d^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$
- 2) если  $d^2 > 1$ , то повторяем 1) и т. д., иначе
- 3)  $\omega_1 = \gamma_1 / d, \quad \omega_2 = \gamma_2 / d.$

Заданные значения  $m_x$  и  $\sigma_x$  можно учесть с помощью линейного преобразования

$$x = \sigma_x x' + m_x. \quad (3.3.22)$$

Другой способ моделирования гауссовской СВ основан на центральной предельной теореме, согласно которой сумма большого числа независимых СВ имеет приближенно гауссовское распределение. Чем больше слагаемых, тем точнее аппроксимация распределения суммы гауссовской плотностью вероятности. Например, сумма

$$Z = \sum_{i=1}^K \alpha_i \quad (3.3.23)$$

уже при значении  $K = 6$  с хорошей степенью точности может считаться гауссовской СВ, пригодной для решения многих прикладных задач. Так как  $m_\alpha = 0,5$  и  $D_\alpha = 1/12$ , то СВ  $Z$  необходимо пронормировать

$$X' = \frac{Z - K \times 0,5}{\sqrt{K \times (1/12)}}. \quad (3.3.24)$$

В результате получим СВ  $X'$  с нулевым средним и единичной дисперсией. Далее необходимо выполнить линейное преобразование (3.3.22) для перехода к СВ  $X$  с заданными значениями среднего и дисперсии.

#### 3.3.5.4 Случайная величина с логнормальным распределением

Плотность вероятности СВ  $X$  с логнормальным распределением имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2 \right\}. \quad (3.3.25)$$

Здесь параметры  $\mu$  и  $\sigma^2$  равны среднему и дисперсии  $\ln X$ . При этом математическое ожидание  $m_x$  и дисперсия  $D_x$  равны

$$m_x = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad D_x = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Если  $Y$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_y = 0$  и  $\sigma_y = 1$ , то СВ

$$X = \exp(\sigma Y + \mu)$$

имеет логнормальное распределение с параметрами  $(\mu, \sigma^2)$ , средним  $m_x$  и дисперсией  $D_x$ .

Таким образом, моделирование СВ  $X$  с логнормальным распределением можно свести к моделированию гауссовской СВ  $Y$  с  $m_y = 0$ ,  $\sigma_y = 1$  и последующему преобразованию

$$X' = \exp(Y).$$

При этом  $m_{x'} = e^{1/2}$ ,  $D_{x'} = e(e-1)$ . Если заданы среднее  $m_x$  и дисперсия  $D_x$  СВ  $X$  с логнормальным распределением, то ее значение можно найти с помощью линейного преобразования

$$X = \sqrt{D_x} \frac{\exp(Y) - e^{1/2}}{\sqrt{e(e-1)}} + m_x. \quad (3.3.26)$$

#### 3.3.5.5 Моделирование $n$ -мерной случайной величины

Рассмотрим непрерывную  $n$ -мерную СВ  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  с совместной плотностью вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2 | x_1) f_3(x_3 | x_2, x_1) \dots \quad (3.3.27)$$

Для ее моделирования сначала разыгрывают значение  $x_1$  СВ  $X_1$ . Это значение берется в качестве аргумента условной плотности вероятности  $f(x_2 | x_1)$ , и разыгрывается значение  $x_2$



СВ  $X_2$ . Значения  $x_1, x_2$  берутся в качестве аргументов условной плотности вероятности  $f_3(x_3|x_1, x_2)$  и т. д.

### 3.3.5.6 Критерий согласия хи-квадрат Пирсона

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения, полученного на основе выборочных данных. Для этого вводится количественная мера соответствия  $\Delta(F_1^*, F_1)$  гипотетической  $F(x)$  и эмпирической  $F^*(x)$  функций распределения, полученная на основе выборочных данных  $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$ . Рассматривается гипотеза  $H_0$  о том, что  $F^*(x)$  можно аппроксимировать функцией распределения  $F(x)$ . Гипотеза  $H_0$  принимается, если выполняется условие  $\Delta(F_1^*, F_1) < \Delta_0$ , в противном случае гипотезу  $H_0$  следует отвергнуть. Величина порога  $\Delta_0$  зависит от выбранного критерия. Существуют различные критерии согласия: Пирсона, Колмогорова, Фишера, Смирнова и др. Рассмотрим наиболее часто употребляемый критерий Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения выборочных данных.

Разобьем всю область значений случайной величины  $X$  на конечное число  $l$  неперекрывающихся интервалов  $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, l$ . Обозначим  $p_i = P(X \in \Delta_i) = F(\beta_i) - F(\alpha_i)$ . Пусть в выборке  $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$  число выборочных данных, попадающих в интервал  $\Delta_i$ , равно  $v_i$ . Примем в качестве критерия согласия величину

$$\delta = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^l \frac{v_i^2}{np_i} - n, \quad (3.3.28)$$

которая является случайной. Ее конкретное значение будем обозначать  $\delta^*$ . Пирсон показал, что распределение случайной величины  $\delta^*$  при  $n \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к  $\chi^2$ -распределению с  $k = l - r - 1$  степенями свободы и плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{2\Gamma(n/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad (3.3.29)$$

где  $r$  – число параметров гипотетического распределения,  $\Gamma(n/2)$  – гамма-функция. Например, если в качестве гипотетического распределения выбрано экспоненциальное, то  $r = 1$ , для гауссовского  $r = 2$ . По имеющимся таблицам находим величину  $\chi_\alpha^2$ , определяемую уравнением

$$P(\delta^* > \chi_\alpha^2) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} f_{\chi_\alpha^2}(x) dx. \quad (3.3.30)$$

Вероятность  $P(\delta^* > \chi_\alpha^2) = \alpha$  называют уровнем значимости критерия или доверительной вероятностью. Ее величина характеризует частоту отклонения истинной гипотезы в длинной последовательности принятия решений. Найденная величина  $\chi_\alpha^2$  называется доверительной границей.

При достаточно малой величине вероятности  $\alpha$  получаем хорошее правило проверки гипотезы об истинности гипотетического распределения  $F(x)$ : если полученное значение  $\delta^* > \chi_\alpha^2$ , то гипотетическое распределение считают несогласующимся с экспериментальными данными, в противном случае, при  $\delta^* < \chi_\alpha^2$ , гипотетическое распределение не противоречит экспериментальным данным и гипотеза принимается. В таблице приведены значения  $\chi_\alpha^2$  для различных значений числа степеней свободы  $k$  и вероятностей  $\alpha$ . Следует отметить, что, получив для данной выборки  $\delta^* < \chi_\alpha^2$ , мы не делаем определенного вывода о том, что выбранная гипотеза о распределении справедлива, а говорим лишь о том, что гипотеза не противоречит полученным результатам опытов, что она согласуется с ними и ее можно принять.

Таблица 3.3.2 - Значения процентных точек хи-квадрат распределения

$k$	Уровень значимости $\alpha$					
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
1	1,642	2,706	3,841	6,635	7,879	10,827
2	3,219	4,605	5,991	9,210	10,597	13,815
3	4,642	6,251	7,815	11,345	12,838	16,268
4	5,989	7,779	9,488	13,277	14,860	18,465
5	7,289	9,236	11,070	15,086	16,750	20,517
6	8,558	10,645	12,592	16,812	18,548	22,457
7	9,803	12,017	14,067	18,475	20,278	24,322
8	11,030	13,362	15,507	20,090	21,955	26,125
9	12,242	14,684	16,919	21,666	23,589	27,877
10	13,442	15,987	18,307	23,209	25,188	29,588
11	14,631	17,275	19,675	24,725	26,757	31,264
12	15,812	18,549	21,026	26,217	28,300	32,909
13	16,985	19,812	22,362	27,688	29,819	34,528
14	18,151	21,064	23,685	29,141	31,319	36,123
15	19,311	22,307	24,996	30,578	32,801	37,697
16	20,465	23,542	26,296	32,000	34,267	39,252
17	21,615	24,769	27,587	33,409	35,718	40,790
18	22,760	25,989	28,869	34,805	37,156	42,312
19	23,900	27,204	30,144	36,191	38,582	43,820
20	25,038	28,412	31,410	37,566	39,997	45,315
21	26,171	29,615	32,671	38,932	41,401	46,797
22	27,301	30,813	33,924	40,289	42,796	48,268
23	28,429	32,007	35,172	41,638	44,181	49,728
24	29,553	33,196	36,415	42,980	45,558	51,179
25	30,675	34,382	37,652	44,314	46,928	52,620
26	31,795	35,563	38,885	45,642	48,290	54,052
27	32,912	36,741	40,113	46,963	49,645	55,476
28	34,027	37,916	41,337	48,278	50,993	56,893
29	35,139	39,087	42,557	49,588	52,336	58,302
30	36,250	40,256	43,773	50,892	53,672	59,703

### 3.3.6 Лабораторное задание по методу Монте-Карло и датчикам случайных чисел

1. Для датчиков псевдослучайных чисел в приложениях MathCad, и языках Python, C вычислить оценки среднего, дисперсии и построить гистограммы относительных частот. Сравнить полученные оценки с точными значениями математического ожидания  $m_\alpha = 0,5$  и дисперсии  $D(\alpha) = 1/12$ . На языке python или на MathCad в соответствии со своим вариантом промоделировать свой датчик случайных чисел равномерного распределения, рассчитать среднее, дисперсию и построить гистограмму. Чисел должно быть порядка 10000-100000.

2. Промоделировать на языке Python или C или MathCad случайные числа в соответствии с заданным законом распределения, полученным из своего варианта. Параметры распределения задать самостоятельно, рассчитать статистические значения

среднего и дисперсии, сравнить их с аналитическими. Построить гистограмму распределения сравнить с плотностью вероятности моделируемой случайной величины, пронормировать функцию плотность вероятности к распределению вероятностей и сравнить со статистически полученной гистограммой на одном графике.

3. Разработать алгоритм вычисления площади (объема) заданной фигуры методом Монте-Карло и написать для него программу на ЭВМ. Определить величину относительной средне-квадратичной ошибки вычисленной оценки для различных прямоугольных областей  $\Pi$ , содержащих заданную фигуру  $G$  (3.3.6). Найти точное значение площади (объема) заданной фигуры и сравнить полученные результаты. Фигуры взять в соответствии с вариантом.

4. Оформить в электронном виде отчет по результатам лабораторной работы, включив в него: цель работы, результаты исследования датчиков случайных чисел, алгоритм вычисления площади (объема) заданной фигуры и результаты расчетов. Отчет должен содержать обсуждение полученных результатов.

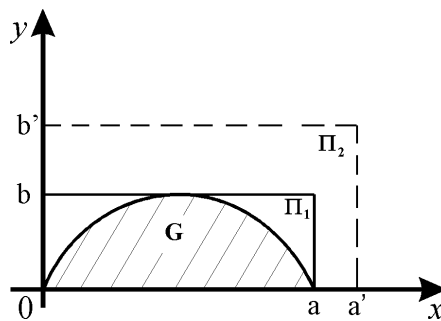


Рисунок 3.3.7 – Графическая интерпретация метода Монте-Карло

**Указания.** Для вычисления объема  $V_G$  (площади  $S_G$ ) заданной геометрической фигуры  $G$  необходимо разыграть координаты  $N$  случайных точек с равномерным распределением в прямоугольной области  $\Pi$  (см. рис. 3.3.7). Тогда оценки величины объема  $\bar{V}_G$  (площади  $\hat{S}_G$ ) можно вычислить по формулам:

$$\bar{V}_G \approx a \times b \times c \times (N_G / N),$$

$$\hat{S}_G \approx a \times b \times (N_G / N),$$

где  $N_G$  – число точек, попавших в область  $G$ . Значение СВ  $X$  с равномерной плотностью вероятности в заданном интервале  $[p; q]$  можно получить с помощью линейного преобразования

$$X = p + \alpha(q - p). \quad (3.3.31)$$

Здесь и далее  $\alpha$  обозначает СВ с равномерной плотностью вероятности в интервале

[0; 1]. Величину относительной среднеквадратической погрешности оценок объема  $\hat{V}_G$  (площади  $\hat{S}_G$ ) можно вычислить по формуле:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{N - N_G}{NN_G}}. \quad (3.3.32)$$

1. Реализовать на ЭВМ алгоритм моделирования СВ с заданной плотностью вероятности. Параметры распределений задать самостоятельно. Величину константы  $A$  определить из условия нормировки.
2. Получить выборку размером  $N$  и построить по ней гистограмму, найти оценки среднего и дисперсии СВ, сравнить их с точными значениями. Определить величину относительной среднеквадратической погрешности полученных оценок.
3. В заданиях, где это указано, по критерию согласия Пирсона (см. приложение 4) определить меру отклонения исходной плотности вероятности и полученной гистограммы.
4. Оформить в электронном виде отчет по результатам лабораторной работы, включив в него: цель работы, алгоритм моделирования заданной СВ и результаты расчетов. Также отчет должен содержать обсуждение полученных результатов.

### 3.3.6.1 Моделируемые самостоятельно датчики

1.  $z_{i+1} = \exp(z_i + b) - \text{int}[\exp(z_i + b)]$ ,  $b > 2$
2. Алгоритм Парка-Миллера.
3. Алгоритм Вичманна-Хилла.
4. Линейный конгруэнтный алгоритм.
5. Метод Фибоначчи с запаздыванием.
6. Алгоритм на основе плохо-обусловленной обратной матрицы.  $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b + e \cdot i \end{bmatrix}$ , где  $e$  - малая величина,  $i$  - инкрементируемая величина. Берется обратная матрица и дробная часть от какого-либо элемента матрицы.
7. На основе данных из сжатого файла. Берем какой-либо байт с лагом из большого сжатого файла, например видео-файла.
8. Конкатенация двух случайных байт стандартного датчика. Получаем один случайный байт (0..255), второй, получаем слово и нормируем на 1.
9.  $z_{i+1} = 2^{(z_i + b + a)} - \text{int}[2^{(z_i + b + a)}]$ ,  $b > 4$ ,  $b$  - дробное число. Проверить. Что будет если степень окажется целой, как этого избежать.
10.  $z_{i+1} = 3^{(z_i + b)} - \text{int}[3^{(z_i + b)}]$ ,  $b > 4$ ,  $b$  - дробное число. Проверить.

### 3.3.6.2 Варианты заданий для второй части работы

1. СВ с логнормальной плотностью вероятности.
2. Реализовать три алгоритма моделирования гауссовской СВ и по критерию согласия Пирсона сравнить их эффективность.

3. Пуассоновская СВ.

4. СВ с биномиальным распределением вероятностей:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где  $C_n^m$  – число сочетаний из  $n$  по  $m$ ;  $0 < p < 1$ ,  $0 \leq m \leq n$ . Выполнить задание 3. При моделировании СВ учесть, что биномиальное распределение является моделью случайных экспериментов, состоящих из  $n$  независимых однородных испытаний, в каждом из которых вероятность положительного исхода равна  $p$ .

5. СВ  $X$  с плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} A \sin(x), & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

6. СВ  $X$  с плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} A \cos(x), & x \in (0, \pi/2), \\ 0, & x \in (0, \pi/2). \end{cases}$$

7. СВ  $X$  с плотностью вероятности (распределение Лапласа или двойное экспоненциальное распределение):

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

8. СВ  $X$  с плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2} \ln \frac{x}{a^2}, & a^2 \leq x \leq ab, \\ \frac{1}{(b-a)^2} \ln \frac{b^2}{x}, & a^2 \leq x \leq ab, \end{cases}$$

где  $a, b$  ( $0 < a < b$ ) – параметры распределения.

9. СВ  $X$  с плотностью вероятности (распределение Коши):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2},$$

где  $\alpha, \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) – параметры распределения.

СВ  $X$  с плотностью вероятности (распределение Максвелла):

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{16}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где  $a$  – параметр распределения. Выполнить задание 3.

10. СВ  $Z = X \cos \Omega$ , где  $X$  и  $\Omega$  независимые случайные величины. СВ  $X$  имеет распределение Релея:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где  $a \geq 0$  параметр распределения. СВ  $\Omega$  имеет равномерное распределение на интервале  $|\omega| \leq \pi$ .

11. Случайная величина  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , где  $X$  и  $Y$  независимые гауссовские СВ с различными параметрами.

12. Случайная величина  $Z = XY$ , где  $X$  и  $Y$  независимые гауссовские СВ с различными параметрами.

13. Случайная величина  $Z = X/Y$ , где  $X$  и  $Y$  независимые релеевские СВ с различными параметрами (см. вариант 11).

14. Случайная величина  $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , где  $X_i$  независимые случайные величины с равномерным распределением в интервале  $[p, q]$ . При различных значениях параметра  $n$  по критерию согласия Пирсона определить степень отклонения полученной гистограммы СВ  $Z$  от гауссовской плотности вероятности.

**Указания.** При вычислении среднего и дисперсии СВ  $Y = \varphi(X)$  можно воспользоваться формулами:

$$m_1[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) f(x) dx,$$

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x) - m_1[Y]\}^2 f(x) dx.$$

Также следует учитывать, что для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  выполняются следующие соотношения:

$$m_1[X + Y] = m_1[X] + m_1[Y],$$

$$m_1[X \cdot Y] = m_1[X] \cdot m_1[Y],$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y),$$

$$D(X \cdot Y) = m_1^2[X] \cdot D(Y) + m_1^2[Y]D(X).$$

### 3.3.6.3 Варианты фигур

Объемы фигур для сравнения:

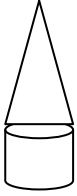
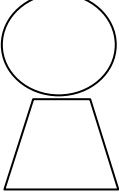
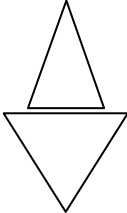
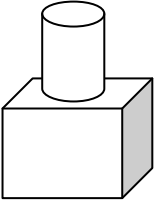
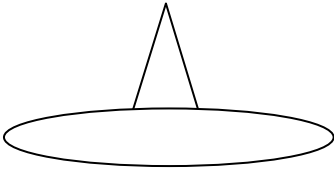
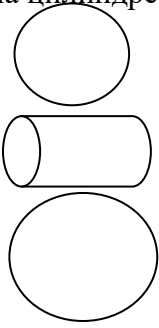
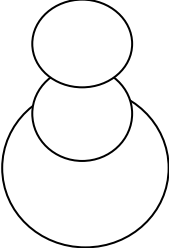
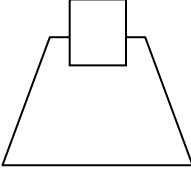
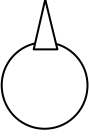
Цилиндр -  $\pi r^2 h$ .

Конус -  $\pi r^2 h \frac{1}{3}$ .

Усеченный конус  $\frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 * r_2 + r_2^2)$ .

Различные варианты для подсчета объемов методом Монте-Карло. Подсчет каждого варианта для двух случаев, когда объемы фигур в пространстве не пересекаются и когда объемы фигур пересекаются.

Таблица 3.3.3 – Задания по методу Монте-Карло

1) Пирамида на цилиндре 	2) Шар на урезанной пирамиде 	3) Конус на перевернутой пирамиде 
4) Цилиндр на кубе 	5) Тетраэдр на эллипсоиде 	6) Цилиндра на шаре, шар на цилиндре 
7) Три шара 	8) Куб на усеченной пирамиде 	9) Конус на шаре 
10) Шар и тор	9) Тор и эллипсоид	10) Тор и цилиндр



### 3.4 Лабораторная работа №4 Моделирование Систем Массового Обслуживания (СМО)

Цель работы: научиться определять основные характеристики системы массового обслуживания с помощью метода численного моделирования

#### 3.4.1 Основы теории систем массового обслуживания

При решении различных задач часто приходится сталкиваться с анализом эффективности работы систем массового обслуживания (СМО). Примеры СМО: телефонная станция, ремонтные мастерские, билетные кассы, автомобильные заправочные станции, железнодорожные сортировочные станции и т. п. Заявки поступают в СМО случайно, образуя поток заявок. Обслуживание заявок также выполняется в течение случайного времени. Это приводит к тому, что в некоторые моменты времени в СМО скапливается большое количество заявок, а в другие моменты заявок мало или они вообще отсутствуют. Обычно предполагается, что известен вероятностный закон, управляющий поступлением заявок. Впервые такая задача была решена датским математиком А.К. Эрлангом в начале XX века для анализа работы телефонной станции. В теории массового обслуживания понятие очереди является одним из основных.

**Определение.** Очередью называется линейная цепочка выстроившихся один за другим объектов, нуждающихся в обслуживании.

Все СМО характеризуются следующими основными элементами:

**Входной поток** – поток поступающих требований или заявок на обслуживание. Если поступление требований или заявок на обслуживание и процедура обслуживания выполняются строго по графику, то очереди можно избежать. На практике эти процессы носят случайный характер, и для построения их моделей следует привлекать методы теории вероятностей. Обычно требования в СМО поступают по одному. Такие системы называются системами с единичным поступлением. Однако бывают ситуации, когда требования поступают группами. Причем число требований в группе может быть фиксированным или случайным (число вагонов в железнодорожном составе, поступающих на сортировочную станцию). В этом случае речь идет о системе с *групповым поступлением требований*. Возможны ситуации, когда поступившие требования могут отказываться от обслуживания и покидать систему (система с потерями). Система, в которой обслуживаются все поступающие требования, называется СМО с ожиданием.

**Механизм обслуживания.** СМО различаются числом обслуживающих приборов, количеством обслуживаемых одновременно требований, продолжительностью

обслуживания. Здесь также есть характеристики, которые носят случайный характер, например время обслуживания. Процесс обслуживания требований может состоять из нескольких этапов, выполняемых последовательно на различных обслуживающих устройствах. Такую систему называют многофазовой.

***Дисциплина очереди или правила поведения в очереди,***

в соответствии с которыми обслуживающий механизм принимает поступившую заявку на обслуживание. Различают следующие виды дисциплины очереди:

- «живая очередь» – первый пришел и первым обслуживаешься;
- пришел последним, а обслуживаешься первым. Такая дисциплина очереди может быть использована, например, при выходе из лифта, идущего вниз, или когда в очереди стоят не люди, а некоторые объекты: вагоны, автомобили (без водителей);
- обслуживание по степени срочности. Например, телеграф, междугородные переговоры. Причем требование с более высоким приоритетом в момент своего поступления могут прервать процесс обслуживания требований с более низким приоритетом. В этом случае говорят о *СМО с абсолютным приоритетом*. Если прерывание недопустимо, то это *СМО с относительным приоритетом*;
- обслуживание по приоритетам. Например, обслуживание ветеранов или ликвидация аварий;
- случайный порядок обслуживания, который используют, например, педагоги при опросе учащихся.

***Выходящий поток*** – поток требований, покидающих СМО после обслуживания. Этот поток играет важную роль, так как может быть входным потоком для других СМО. Часто обслуженные требования возвращаются в эту же систему. В этом случае имеют место замкнутые СМО. Примером может быть организация ремонта станочного парка предприятия, когда отремонтированные станки возвращаются в систему, образуя входящий поток.

Предмет теории массового обслуживания связан с установлением зависимости между характеристиками потока заявок, числом каналов, их производительностью, правилами работы СМО и эффективностью обслуживания.

Эффективность работы СМО определяется следующими параметрами:

- среднее число обслуживаемых заявок СМО в единицу времени;
- среднее число заявок в единицу времени, покидающих СМО необслуженными;
- среднее время ожидания в очереди и т. п.

Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания приводит к тому, что в СМО протекает случайный процесс. Если случайный процесс марковский, то удастся

описать работу СМО с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и выразить характеристики обслуживания через параметры СМО и потоки заявок.

Для того чтобы протекающий в системе процесс был марковский, нужно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из одного состояния в другое, были пуассоновскими, или простейшими. Если потоки не пуассоновские, тогда для исследования основных характеристик такой системы используется метод Монте-Карло.

При изучении СМО можно выделить три класса рассматриваемых задач: задачи анализа систем, статические задачи и операционные задачи.

**Задачи анализа** поведения системы заключаются в том, чтобы на основе математических моделей, адекватно отражающих свойства СМО, выявить основные операционные характеристики, определяющие поведение этих систем в процессе их функционирования. К таким характеристикам относятся:

1)  $Q(t)$  – число требований, находящихся в очереди в момент времени  $t$ ;

2)  $W(t)$  – продолжительность ожидания в очереди требования, поступившего в СМО в момент времени  $t$ ;

3)  $I_n$  – продолжительность  $n$ -го периода простоя системы.

На практике часто используется показатель, который называется степенью загруженности обслуживающего прибора или коэффициентом нагрузки:

$$\rho = \frac{\text{интенсивность входного потока заявок}}{\text{интенсивность обслуживания}}. \quad (3.4.1)$$

**Статистические задачи** возникают при исследовании систем массового обслуживания и связаны с оценкой характеристик случайных процессов, протекающих в системе. При этом общая модель приводится в количественное соответствие с рассматриваемой СМО на основе статистического анализа эмпирических данных. Это позволяет оценить фигурирующие в модели характеристики потоков и их параметры.

**Операционные задачи** возникают при проектировании СМО, управлении системами и для оценки их эффективности. Некоторые из этих задач по своей природе относятся к разряду статистических.

При рассмотрении СМО часто используются обозначения, предложенные Кендаллом. Они позволяют описать систему с помощью следующих трех характеристик: вид входного потока, распределение продолжительности обслуживания, число обслуживающих приборов.

Используются следующие обозначения:

$M$  – пуассоновское, или экспоненциальное распределение;

$D$  – постоянная величина;

$E_k$  – распределение Эрланга;

$G$  – произвольное распределение;

$GI$  – распределение в случае независимых событий.

Например, обозначение  $M/D/s$  – означает, что имеется СМО с  $s$  приборами, обслуживающая поступающие требования за строго определенный интервал времени, входной поток – пуассоновский.

**Замечание.** Введенная классификация не учитывает правил формирования очереди, которые должны дополнять модель СМО.

### Потоки событий

Основным понятием при рассмотрении случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем, к которым относятся СМО, является понятие **потока событий**.

**Определение.** Поток событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (поток автобусов на данной остановке, поток отказов какой-то системы и т. п.). Поток событий можно изображать последовательностью точек на оси времени, как это показано на рис. 6.

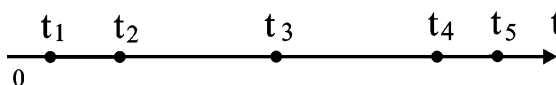


Рисунок 3.4.1 – Поток событий

Особое место занимают потоки событий, обладающие свойствами – стационарности, отсутствия последействия, ординарности:

- Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания  $n$  событий в интервале времени  $(t, t + \tau)$  зависит от  $\tau$  и не зависит от  $t$ . Это означает, что интенсивность потока событий не зависит от времени. Такие потоки событий часто встречаются на практике. Однако об их стационарности строго можно говорить только на ограниченном интервале времени. Распространение этого свойства на весь временной интервал является удобным приемом.

- Поток событий называется потоком без последействия, если события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

- Поток событий называется ординарным, если вероятность осуществления на бесконечно малом интервале времени  $\Delta t$  двух и более событий  $P(i, \Delta t)$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) пренебрежимо малы по сравнению с вероятностью одного события  $P(1, \Delta t)$ , т. е. выполняется условие

$$P(1, \Delta t) \gg P(i, \Delta t), \quad i = 2, 3, \dots$$

**Определение.** Поток событий называется простейшим, если он стационарен, ординарен и не имеет последствий. Для такого потока вероятность появления на интервале времени  $\Delta t$   $n$  событий определяется формулой Пуассона  $P(N = n, \Delta t) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^n}{n!}$ .

Для простейшего потока интервал  $\tau$  между соседними событиями имеет экспоненциальное распределение  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ . Если рассматривать бесконечно

малый временной интервал  $\Delta t$ , то с учетом ординарности пуассоновского потока

$$P(0, \Delta t) + P(1, \Delta t) \approx 1.$$

Отсюда следует, что

$$P(1, \Delta t) \approx \lambda \Delta t.$$

**Определение.** Поток событий называется рекуррентным или потоком «Пальма», если он стационарен, ординарен, а интервалы времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  между соседними событиями представляют собой независимые случайные величины с одинаковым произвольным распределением. Из определения следует, что простейший поток – это частный случай рекуррентного. Интервалы времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  имеют одинаковое экспоненциальное распределение, а их независимость обусловлена тем, что простейший поток есть поток без последствий.

Важными для практики являются потоки Эрланга, которые образуются в результате «просеивания простейшего потока». Поток Эрланга  $n$ -го порядка получается, если в исходном простейшем потоке сохранить каждое  $n$ -е событие. На рис. 3.4.2 показан пример формирования потока Эрланга 4-го порядка.



Рисунок 3.4.2 – Поток Эрланга

Простейший поток является потоком Эрланга первого порядка. Можно показать, что плотность вероятности интервала времени между соседними событиями в потоке Эрланга  $k$ -го порядка имеет вид:

$$f_k(\tau) = \frac{\lambda (\lambda \tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda \tau} \quad (\tau > 0), \quad (3.4.2)$$

где  $\lambda$  – средняя интенсивность порождающего простейшего потока. При этом среднее и

дисперсия СВ  $\tau$  равны

$$m_1^{(k)}(\tau) = k/\lambda, \quad D^{(k)}(\tau) = k/\lambda^2.$$

### Многоканальная СМО с ожиданием

Структура многоканальной СМО показана на рис. 3.4.3.

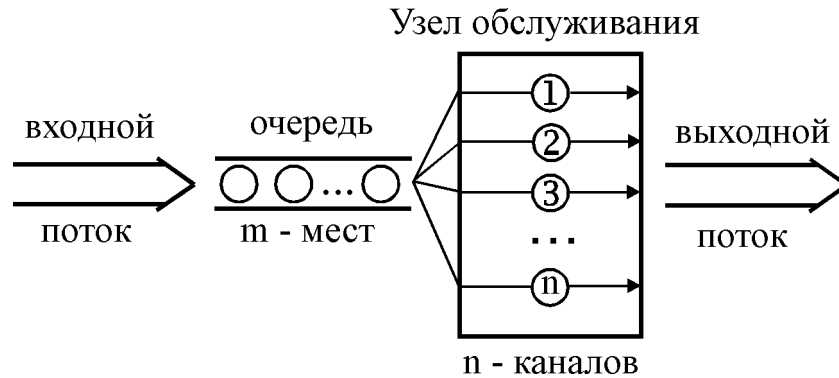


Рисунок 3.4.3 – Структура СМО

Число мест в очереди равно  $m$ , число обслуживающих устройств –  $n$ . Максимально в СМО одновременно может находиться  $m+n$  требований. Если поступающее требование застаёт СМО полностью занятой, т. е. заняты все обслуживающие устройства и нет свободных мест в очереди, то это требование покидает систему. Если при поступлении требования свободно несколько обслуживающих устройств, то оно поступает на любое из них с равной вероятностью. Состояние системы будем нумеровать по числу находящихся в ней требований:

$Q_0$  – все каналы свободны;

$Q_1$  – занят один канал;

$Q_n$  – заняты все каналы;

$Q_{n+1}$  – одно требование стоит в очереди;

$Q_{n+m}$  – все каналы заняты, все места в очереди заняты.

Граф состояний такой СМО показан на рис. 3.4.4 и представляет собой схему «гибели и размножения».

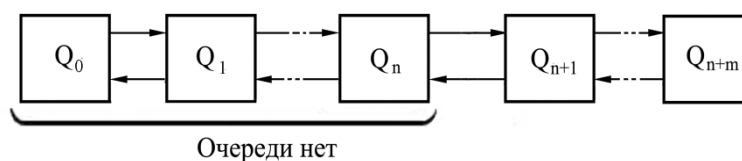


Рисунок 3.4.4 – Схема гибели и размножения

Пусть поток поступающих требований пуассоновский со средней интенсивностью  $\lambda$ , а время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ . Можно

показать, что в этом случае финальные вероятности состояний системы равны:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{(\rho/n)^{m+1} - \rho/n}{\rho/n - 1} \right]^{-1}, \quad (3.4.3)$$

$$p_k = \left( \frac{\rho^k}{k!} \right) p_0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.4.4)$$

$$p_k = \left( \frac{\rho^{n+i}}{n!n^i} \right) p_0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4.5)$$

где параметр  $\rho = \lambda / \mu$ .

### Основные характеристики СМО

Ниже перечислены основные характеристики СМО, определяемые при решении задач анализа. Аналитические результаты в виде формул приведены для случая пуассоновского потока заявок со средней интенсивностью  $\lambda$  и экспоненциального распределения времени обслуживания с параметром  $\mu$ .

1. Вероятность того, что все обслуживающие устройства свободны, равна  $p_0$ .
2. Вероятность того, что занято  $k$  обслуживающих устройств, равна  $p_k$ .
3. Вероятность того, что все обслуживающие устройства заняты и  $l$  требований находятся в очереди ( $l \leq m$ ), находится из выражения:

$$p_{n+l} = \frac{\rho^{n+l}}{n!n^l} p_0, \quad 1 \leq l < m; \quad (3.4.6)$$

вероятность отказа в обслуживании

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0. \quad (3.4.7)$$

4. Среднее число устройств, занятых обслуживанием требований, определяется выражением:

$$N_{\text{зан}} = \sum_{k=1}^n k p_k + n \sum_{l=1}^m p_{n+l}. \quad (3.4.8)$$

Если поток заявок пуассоновский, то, выполняя суммирование, найдем:

$$N_{\text{зан}} = \rho \left[ 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0 \right]. \quad (3.4.9)$$

5. Среднее число простаивающих устройств

$$N_{\text{пр}} = n - N_{\text{зан}}. \quad (3.4.10)$$

6. Коэффициенты простоя и занятости

$$K_{\text{пр}} = \frac{N_{\text{пр}}}{n}, \quad K_{\text{зан}} = 1 - K_{\text{пр}}. \quad (3.4.11)$$

7. Относительная пропускная способность равна доли обслуженных требований от общего числа поступивших в систему:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m} p_0. \quad (3.4.12)$$

8. Абсолютная пропускная способность  $A$  равна среднему числу требований, обслуживаемых в единицу времени:

$$A = \lambda q. \quad (3.4.13)$$

9. Среднее число требований, находящихся в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{l=1}^m l p_{n+l} = \frac{\rho^{n+1}}{n!n} \frac{1 - (\rho/n)^m (1 + m - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} p_0. \quad (3.4.15)$$

10. Среднее число требований, находящихся в СМО:

$$L = L_{\text{оч}} + N_{\text{зан}}. \quad (3.4.16)$$

11. Среднее время ожидания в очереди (формула Литтла)

$$W = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} \quad (3.4.17)$$

12. Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\langle t_{\text{сис}} \rangle = \langle t_{\text{ож}} \rangle + \langle \tau \rangle, \quad (3.4.18)$$

$t_{\text{ож}}$  – время ожидания в очереди,

$$\tau = \begin{cases} 0, & \text{если требование не попадает в СМО,} \\ t_{\text{обсл}}, & \text{если требование попадает в СМО,} \end{cases}$$

$t_{\text{обсл}}$  – время обслуживания. Можно показать, что для пуассоновского потока заявок

$$\langle t_{\text{пéñ}} \rangle = W + q/\mu. \quad (3.4.19)$$

### Моделирование систем массового обслуживания

Рассмотрим пример, связанный с моделированием методом Монте-Карло системы массового обслуживания. Имеется одноканальная СМО ( $n=1$ ) с очередью, число мест в очереди  $m=1$ . Поток заявок – пальмовский, т. е. соседние интервалы времени между заявками представляют собой независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности  $f(\tau)$ . Время обслуживания одной заявки – случайная величина с плотностью вероятности  $\varphi(\tau)$ .

Требуется, моделируя работу СМО методом Монте Карло



и располагая одной длинной реализацией событий входного потока продолжительностью  $T$ , найти оценки:

- $P_0$  и  $P_1$ , – вероятностей того, что канал не будет занят и канал будет занят;
- величины среднего времени ожидания в очереди  $\hat{m}_1(t_{i\text{э}})$

и дисперсии времени ожидания  $\hat{D}(t_{i\text{э}})$ ;

- вероятности отказа в обслуживании  $P_{\text{отк}}$ .

**Решение.** Граф состояний системы показан на рис. 3.4.5.

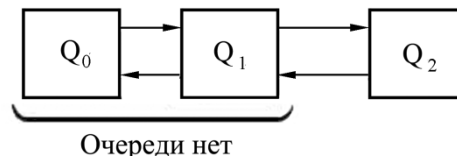


Рисунок 3.4.5

Будем считать, что в начальный момент времени система находится в состоянии  $Q_0$ . Разыграем моменты времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  прихода заявок. Для этого определим функцию распределения вероятностей интервалов времени между заявками

$$F(\tau) = \int_0^{\tau} f(x) dx$$

и, используя метод обратной функции, последовательно разыграем интервалы времени  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ , пример реализации которых показан на рис. 3.4.6.

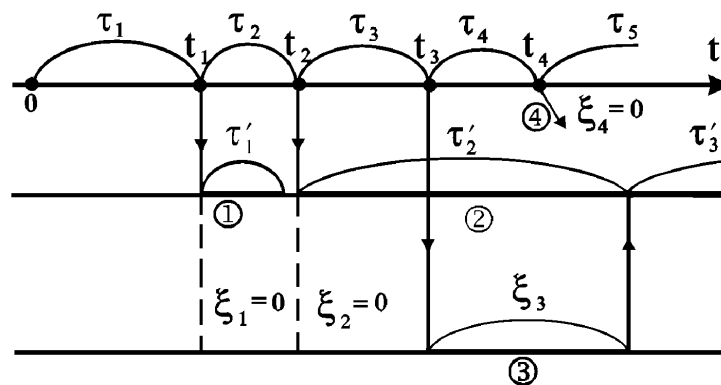


Рисунок 3.4.6 – Процесс моделирования

На второй оси (рис. 3.4.6) будем изображать состояние канала (жирная черта – «занято», тонкая – «свободно»). На третьей оси будем изображать состояние места в очереди. Заявка, пришедшая в момент времени  $t_1$ , занимает канал. Время ее обслуживания  $\tau'_1$  разыгрывается с помощью метода обратных функций. Вторая заявка, пришедшая в момент  $t_2$ , также занимает канал после его освобождения первой заявкой. Третья заявка

занимает место в очереди, а четвертая покидает СМО. Обозначим через  $T_0$  – время, в течение которого канал свободен,  $T_1 = \sum \tau'_i$  – суммарное время обслуживания (для четвертой заявки время обслуживания  $\tau'_4 = 0$ ). При достаточно большом значении  $T$  оценки вероятностей равны соответственно

$$\hat{P}_0 = \frac{T_0}{T} \text{ и } \hat{P}_1 = \frac{T_1}{T}.$$

Оценка среднего времени ожидания  $t_{\text{ож}}$  в очереди

$$\hat{m}_1(t_{\text{ож}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i,$$

где  $\xi_i$  – время ожидания в очереди  $i$ -й заявки (первая и вторая заявки сразу приняты к обслуживанию, а четвертая получила отказ, поэтому для этих заявок  $\xi_i = 0$ ),  $N$  – общее число заявок. Дисперсия времени ожидания в очереди

$$D(t_{\text{ож}}) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\xi_i - \hat{m}_1(t_{\text{ож}})]^2.$$

Оценка вероятности отказа  $\hat{P}_{\text{отк}} = \frac{N^*}{N}$ , где  $N^*$  – число заявок, получивших отказ.

### 3.4.2 Лабораторное задание по ТМО

1. Реализовать на ЭВМ алгоритм метода Монте-Карло моделирования СМО, позволяющий вычислять: относительную  $q$  и абсолютную  $A$  пропускную способность СМО, среднюю интенсивность потока заявок, покинувших СМО необслуженными, среднее время ожидания в очереди, средний интервал времени между событиями выходного потока. Входной поток заявок – поток Эрланга порядка  $k$  с параметром  $\lambda$ . Время обслуживания имеет экспоненциальную плотность вероятности с параметром  $\mu$ . Число мест в очереди  $m$ , число обслуживающих устройств  $n$  и порядок потока Эрланга  $k$  приведены в таблице, значения параметров  $\lambda$  и  $\mu$  выбрать самостоятельно.

2. Вычислить оценки указанных в задании характеристик СМО и определить величину их относительной среднеквадратической погрешности.

3. Построить гистограмму величины интервала времени между событиями выходного потока.

4. Провести исследование полученных результатов на устойчивость к принятой модели, изменив вид функции плотности вероятности интервалов времени между соседними

заявками  $f(\tau)$  входного потока. При этом параметры новой  $f^*(\tau)$  подобрать так, чтобы величина среднего интервала  $m_1(\tau)$  осталась неизменной.

5. По результатам лабораторной работы оформить отчет, который должен содержать: цель работы, характеристики заданной СМО, ее статистическую модель, описание алгоритма численного моделирования, результаты расчетов, их обсуждение и основные выводы.

Таблица 3.4.1 - Варианты заданий

Номер варианта	$m$	$n$	$k$
1	2	2	2
2	3	2	2
3	4	2	2
4	2	3	2
5	3	3	3
6	4	3	3
7	2	4	3
8	3	4	3
9	4	4	3
10	2	2	4
11	3	2	4
12	4	2	4
13	2	3	5
14	3	3	5
15	4	3	5

### 3.4.3 Контрольные вопросы

1. Какой поток событий называется рекуррентным?
2. Какой поток событий называется простейшим?
3. Какой вид имеет граф состояний рассмотренной вами СМО?
4. Перечислите основные компоненты СМО.
5. Что такое очередь и дисциплина очереди?
6. Что такое абсолютный и относительный приоритет заявки?
7. Какие параметры характеризуют эффективность работы СМО?
8. Какова эффективность рассмотренной вами СМО?
9. Как можно повысить эффективность СМО?
10. Что характеризуют результаты расчетов при различных статистических характеристиках входного потока?
11. Что такое обозначения Кендалла для СМО?

### 3.5 Лабораторная работа №5. Решение матричных задач теории игр в смешанных стратегиях. Поиск оптимальной стратегии с помощью генетического алгоритма.

#### 3.5.1 Теория игр

Теория игр — это раздел математической экономики, изучающий решение конфликтов между игроками и оптимальность их стратегий.

Конфликт может относиться к разным областям человеческого интереса: чаще всего это экономика, социология, политология, реже биология, кибернетика и даже военное дело.

Конфликтом является любая ситуация, в которой затронуты интересам двух и более участников, традиционно называемых игроками. Для каждого игрока существует определённый набор стратегий, которые он может применить. Пересекаясь, стратегии нескольких игроков создают определённую ситуацию, в которой каждый игрок получает определённый результат, называемый выигрышем, положительным или отрицательным. При выборе стратегии важно учитывать не только получение максимального профита для себя, но также возможные шаги противника, и их влияние на ситуацию в целом.

Конфликтная ситуация называется антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приведёт к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину, и наоборот.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на парные и многочисленные. Участники множественной игры могут образовывать коалиции. Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.

Стороны, участвующие в игре, называются игроками. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, оговаривается в процессе игры. Фактически, число стратегий совпадает с числом вариантов действий.

Игра называется конечной, если число стратегий игроков конечно и бесконечной, если хотя бы у одного из игроков число ситуаций является бесконечным.

Стратегия игрока называется оптимальной, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника.

Выбор одной из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется ходом. Ходы бывают личные и случайные. Ход называется личным, если игрок

сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (ход в шахматах, шашках). Ход называется случайным, если выбор производится не игроком, каким-либо механизмом случайной выборки (бросание монеты).

Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечное множество стратегий, называются матричными.

Так как игра конечна, то множество стратегий  $X$  и  $Y$  конечны.

Пусть

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Если игрок I выбрал стратегию  $x_i$ , а игрок II –  $y_j$ , то выигрыш равен  $a_{ij}$ . Числа  $a_{ij}$  образуют матрицу  $A$  размером  $(m \times n)$ .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \\ x_3 \rightarrow \\ \dots \\ x_m \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \end{array} = \|a_{ij}\| = A$$

Основная задача состоит в том, чтобы найти оптимальные (или хотя бы рациональные) стратегии, наилучшим образом приводящие систему к цели при заданных внешних условиях.

### 3.5.2 Типы игр

#### 3.5.2.1 Кооперативная\некооперативная игра

Кооперативной игрой является конфликт, в котором игроки могут общаться между собой и объединяться в группы для достижения наилучшего результата.

Примером кооперативной игры можно считать карточную игру Бридж, где очки каждого игрока считаются индивидуально, но выигрывает пара, набравшая наибольшую сумму.

Некооперативные описывают ситуации в мельчайших деталях и выдают более точные результаты. Кооперативные рассматривают процесс игры в целом. Не смотря на то, что эти два вида противоположны друг другу, вполне возможно объединение стратегий, которое может принести больше пользы, чем следование какой-либо одной.

#### 3.5.2.2 С нулевой суммой и с ненулевой суммой

Игрой с нулевой суммой называют игру, в которой выигрыш одного игрока равняется проигрышу другого.

Например, банальный спор: если вы выиграли сумму  $N$ , то кто-то эту же сумму  $N$  проиграл.

В игре же с ненулевой суммой может изменяться общая цена игры, таким образом принося выгоду одному игроку, не отнимая ее цену у другого. В играх с ненулевой суммой проигрыш одного из игроков не является обязательным условием, хотя такой исход и не исключается.

В качестве примера здесь отлично подойдут шахматы: превращая пешку в ферзя игрок А увеличивает общую сумму своих фигур, при этом не отнимая ничего у игрока Б.

### **3.5.2.3 Параллельные и последовательные**

Параллельной является игра, в которой игроки делают ходы одновременно, либо ход одного игрока неизвестен другому, пока не завершится общий цикл. В последовательной игре каждый игрок владеет информацией о предыдущем ходе своего оппонента до того, как сделать свой выбор. И совсем не обязательно информации быть полной, что подводит нас к следующему типу.

### **3.5.2.4 С полной или неполной информацией**

Эти типы являются подвидом последовательных игр, и названия их говорят сами за себя.

## **3.5.3 Решение матричной игры по критерию Гурвица, Сэвиджа, Байеса и Вальда**

### **3.5.3.1 Игры с природой**

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком один. Игроку два (природа) не важен результат, либо он не способен к осмысленным решениям. Или, возможно, условия не зависят от действий игрока, а определяются внешними факторами: реакция рынка, который не будет вредить одному конкретному игроку, государственная политика, реальная природа.

Различают два вида задач в играх с природой:

- Задача о принятии решений в условиях риска, когда известны вероятности, с которыми природа принимает каждое из возможных состояний;
- Задачи о принятии решений в условиях неопределённости, когда нет возможности получить информацию о вероятностях появления состояний природы;

#### **Пример:**

Первого игрока, за которого мы будем принимать решения, будет представлять Samsung. Вторым игроком, играющим «природу», будет компания Apple.

Подходит время выпуска нового смартфона, прошла презентация, эксперты высказали свое мнение, и игрок один должен принять важное решение, когда выпустить продукт? Упростив ситуацию, у нас останется три стратегии: до конкурента ( $A_1$ ), вместе с ним ( $A_2$ ) или после ( $A_3$ ). Естественно, пока не выйдет новый iPhone мы не узнаем, будет он намного лучше нашего ( $B_1$ ), таким же ( $B_2$ ) или сильно уступающим в качестве ( $B_3$ ). Посчитав прибыль во всех случаях, в итоге получим матрицу:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	5	5	7
$A_2$	3	4	6
$A_3$	2	4	8

Теперь же, для принятия решения, у нас есть несколько критериев.

### 3.5.3.2 Критерий Вальда (максиминный).

Игрок рассчитывает, что природа пойдет по наихудшему для него пути, и следует выбрать вариант с максимальной прибылью при самом плохом исходе, поэтому данный критерий считается пессимистическим. Представить его можно в виде  $\max(\min i)$ .

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	5	5	7
$A_2$	3	4	6
$A_3$	2	4	8

Для  $A_1$  минимальной прибылью является 5 у природы  $B_1$  и  $B_2$

Для  $A_2$  минимальной прибылью является 3 у природы  $B_1$

Для  $A_3$  минимальной прибылью является 2 у природы  $B_1$

$$\max\{5|3|2\} = 5$$

Таким образом из 5, 3 и 2 максимум прибыли нам даст вариант  $A_1$

### 3.5.3.3 Критерий максимума (максимаксный)

Является оптимистическим, т.е. мы надеемся на самый благоприятный для нас исход представляется как  $\max(\max i)$ .

Для  $A_1$  максимальной прибылью является 7 у природы  $B_3$

Для  $A_2$  максимальной прибылью является 6 у природы  $B_3$

Для  $A_3$  максимальной прибылью является 8 у природы  $B_3$

$$\max\{7|6|8\} = 8$$

Таким образом из 7, 6 и 8 максимум прибыли нам даст вариант  $A_3$

### 3.5.3.4 Критерий Гурвица

Рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max (A \cdot \max i + (1 - A) \cdot \min i)$$

где  $A$  — степень оптимизма и изменяется в пределах от 0 до 1.

Критерий выдает результат, учитывающий возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При  $A=1$  данный критерий можно заменить критерием максимума, а при  $A=0$  — критерием Вальда. Величина  $A$  зависит от степени ответственности игрока один: чем она выше, тем ближе  $A$  к единице. Для данного примера  $A=0,4$ .

Для  $A_1$  прибыль равна  $0,4 \cdot 7 + 0,6 \cdot 5 = 5,8$

Для  $A_2$  прибыль равна  $0,4 \cdot 6 + 0,6 \cdot 3 = 4,2$

Для  $A_3$  прибыль равна  $0,4 \cdot 8 + 0,6 \cdot 2 = 4,4$

Из полученных ответов максимальную прибыль приносит действие  $A_1$ .

### 3.5.3.5 Критерий Сэвиджа (минимаксный).

Суть его заключается в выборе стратегии, не допускающей слишком высоких потерь. Для этого используется матрица рисков, в которой вычисляется максимальная прибыль при каждом варианте действия игрока, и среди результатов выбирается наименьший. Его формула выглядит как  $\min (\max i)$ .

Для  $A_1$  максимальной прибылью является 7 у природы  $B_3$

Для  $A_2$  максимальной прибылью является 6 у природы  $B_3$

Для  $A_3$  максимальной прибылью является 8 у природы  $B_3$

Таким образом из 7, 6 и 8 минимум прибыли нам даст вариант  $A_2$

### 3.5.3.6 Критерий Байеса

Предлагает придать равные вероятности всем рассматриваемым стратегиям, после чего принять ту из них, при которой ожидаемый выигрыш окажется наибольшим. Критерий имеет один недостаток: не всегда можно точно определить вероятность того или иного события со стороны природы. Формулой для него является  $\max (\sum q \cdot i)$ . Где  $q$  -вероятность наступления каждого из событий природы.

Вероятности событий для природы равны 0,5; 0,4; 0,1; соответственно. Таким образом

Для  $A_1$   $5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,1 = 5,2$

Для  $A_2$   $3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,1 = 3,7$

Для  $A_3$   $2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,1 = 3,4$



Очевидно, что максимальную прибыль мы получим от варианта  $A_1$

Для выбора стратегий в условиях неопределённости можно применять любые критерии, в условиях риска действеннее критерий Байеса. Однако выбор между самими критериями основывается обычно на интуиции, зависит от характера, принимающего решение (в частности, его склонности к риску).

Если решение принимается в условиях неопределённости, то лучше использовать несколько критериев. В том случае, если рекомендации совпадают, можно с уверенностью выбирать наилучшее решение. Если рекомендации противоречивы, решение надо принимать более взвешенно, с учётом сильных и слабых сторон.

### 3.5.3.7 Задание №1 по теории игр, решение матричных игр, критерии Вальда, Гурвица, Байеса

Задача та же, что была рассмотрена в прошлом разделе, только прибыль у каждого варианта различна. Выбрать в соответствии со своим вариантом матрицу. Выбрать лучшую стратегию используя критерии Вальда, Гурвица, Сэвиджа и Байеса.

2	3	5	21	13	5	1	1	7	18	12	4
1) 1	6	9	2) 11	4	7	3) 12	8	6	4) 3	8	17
3	6	2	3	6	12	6	9	18	7	16	23

1	3	8	4	12	9	7	9	5	5	3	9
5) 10	2	9	6) 9	9	2	7) 1	13	7	8) 3	4	1
7	4	1	7	8	11	12	6	9	3	2	7

4	8	1	5	4	2	6	13	3	7	9	4
9) 1	1	9	10) 7	2	7	11) 1	3	7	12) 3	8	1
6	4	14	6	8	13	7	6	12	2	12	15

### 3.5.4 Упрощение матричной игры. Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$ в смешанных стратегиях

#### Чистые и смешанные стратегии

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком **A** и игроком **B** пара стратегий называются чистыми стратегиями.

В антагонистической игре пара стратегий  $(A_i, B_j)$  называется равновесной или устойчивой, если ни одному из игроков не выгодно отходить от своей стратегии.

Применять чистые стратегии имеет смысл тогда, когда игроки **A** и **B** располагают сведениями о действиях друг друга и достигнутых результатах. Если допустим, что хотя бы

одна из сторон не знает о поведении противника, то идея равновесия нарушается, и игра ведется бессистемно.

Рассмотрим матричную игру **G** (3x4).

Таблиц 3.5.1 – Матричная игра 3x4

	B1	B2	B3	B4	AI
A1	5	7	10	8	5
A2	10	9	11	10	9
A3	8	6	7	4	4
BJ	10	9	11	10	

В этом примере нижняя цена игры равна верхней:  $a=b=9$ , т. е. игра имеет седловую точку.

Оказывается, что в этом случае максиминные стратегии **A2** и **B2** будут устойчивыми по отношению к информации о поведении противника.

Признак устойчивости (равновесности) пары стратегии - это равенство нижней и верхней цены игры.

Стратегии **AI** и **BJ** (в рассматриваемом примере **A2**, **B2**), при котором выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются оптимальными чистыми стратегиями, а их совокупность - решением игры. Про саму игру в этом случае говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Величина  $v = \alpha = \beta$ ,

Называется ценой игры.

Если  $N > 0$ , то игра выгодна для игрока А, если  $N < 0$  - для игрока В; при  $N = 0$  игра справедлива, т. е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Однако наличие седловой точки в игре - это далеко не правило, скорее - исключение. Большинство матричных игр, не имеет седловой точки, а, следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий. Впрочем, есть разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это - игры с полной информацией.

**Теорема** Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а, следовательно, решается в чистых стратегиях, т. е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный **N**.

Если такая игра состоит только из личных ходов, то при применении каждым игроком своей оптимальной чистой стратегии она должна кончаться выигрышем, равным цене игры.

Скажем, шахматная игра, как игра с полной информацией, либо всегда кончается выигрышем белых, либо всегда - выигрышем черных, либо всегда - ничьей (только чем именно - мы пока не знаем, так как число возможных стратегий в шахматной игре огромно).

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение сразу находится по принципу максимина.

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку **A** выигрыш не менее **A**, игроку - проигрыш не больше **b**. Учитывая, что  $a < b$ , естественно для игрока **A** желание увеличить выигрыш, а для игрока **B** - уменьшить проигрыш. Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его смешанной стратегией.

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков **A** и **B** соответственно

$$SA = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|,$$

$$SB = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|,$$

Где  $p_i$  - вероятность применения игроком **A** чистой стратегии  $A_i$ ;

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1;$$

$q_j$  - вероятность применения игроком **B** чистой стратегии  $B_j$ ;

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна - единице, смешанная стратегия превращается в чистую.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными  $P_i$  и  $Q_j$ .

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок **A** применяет смешанную стратегию  $SA = \|p_1, p_2, \dots, p_m\|$ , а игрок **B** смешанную стратегию  $SB = \|q_1, q_2, \dots, q_n\|$ , то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока **A** определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i \cdot q_j$$

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока **В** равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш **N**.

### 3.5.5 Решение матричной игры (2x2)

Пусть матричная игра **G** (2x2) имеет платежную матрицу

	B1	B2
A1	A11	A12
A2	A21	A22

Предположим, что игра не имеет седловой точки. При наличии седловой точки решение очевидно.

В соответствии с основной теоремой игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях:  $SA = \|p_1, p_2\|$  и  $SB = \|q_1, q_2\|$ , где вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (3.5.1)$$

$$q_1 + q_2 = 1 \quad (3.5.2)$$

В соответствии с теоремой об активных стратегиях, оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры **N**, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок **A** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **B** - свою чистую активную стратегию **B1**, то цена игры **N** равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \quad (3.5.3)$$

А при использовании игроком **B** чистой активной стратегии **B2**, выигрыш будет равен

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \quad (3.5.4)$$

Уравнения (3.5.1), (3.5.3) и (3.5.4) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестным:

$p_1, p_2$  и  $v$ .

Решая ее, легко находим, что

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (3.5.5)$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (3.5.6)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (3.5.7)$$

Если игрок **B** использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок **A** - свою чистую активную стратегию **A1**, то цена игры **N** равна

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \quad (3.5.8)$$

А при использовании игроком **A** чистой активной стратегии **A2**, выигрыш будет равен

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \quad (3.5.9)$$

Уравнения (3.5.2), (3.5.8) и (3.5.9) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:  $q_1$ ;  $q_2$  и  $v$ .

Решая ее, легко находим, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (3.5.10)$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (3.5.11)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (3.5.12)$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры (выражения (3.5.10) и (3.5.12)) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (3.5.5), (3.5.6), (3.5.7), (3.5.10), (3.5.11), (3.5.12) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Тогда  $0 < p_1 < 1$ ;  $0 < p_2 < 1$ ;  $0 < q_1 < 1$ ;  $0 < q_2 < 1$ .

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырёх выигрышей  $a_{11}$ ,

$a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своём столбце.

Решения системы уравнений (3.5.5), (3.5.6), (3.5.7) и (3.5.10), (3.5.11), (3.5.12), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рис 3.5.1). Для нахождения вероятностей  $P_1$ ,  $P_2$  и цены игры  $V$  в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность  $P_1 \in [0,1]$ , а по оси ординат - соответствующие этой вероятности - выигрыши игрока А.

При  $p_1=0$ , игрок А применяет чистую стратегию А2. Если при этом игрок В применяет чистую стратегию В1, то выигрыш игрока А равен  $a_{21}$  (уравнение (1.3)), а если игрок В применяет чистую стратегию В2, то выигрыш игрока А равен  $a_{22}$  (уравнение (3.5.4)). При  $p_1=1$ , игрок А применяет чистую стратегию А1.

При  $p_1=0$ , игрок А применяет чистую стратегию А2. Если при этом игрок В применяет чистую стратегию В1, то выигрыш игрока А равен  $a_{21}$  (уравнение (1.3)), а если игрок В применяет чистую стратегию В2, то выигрыш игрока А равен  $a_{22}$  (уравнение (3.5.4)). При  $p_1=1$ , игрок А применяет чистую стратегию А1.

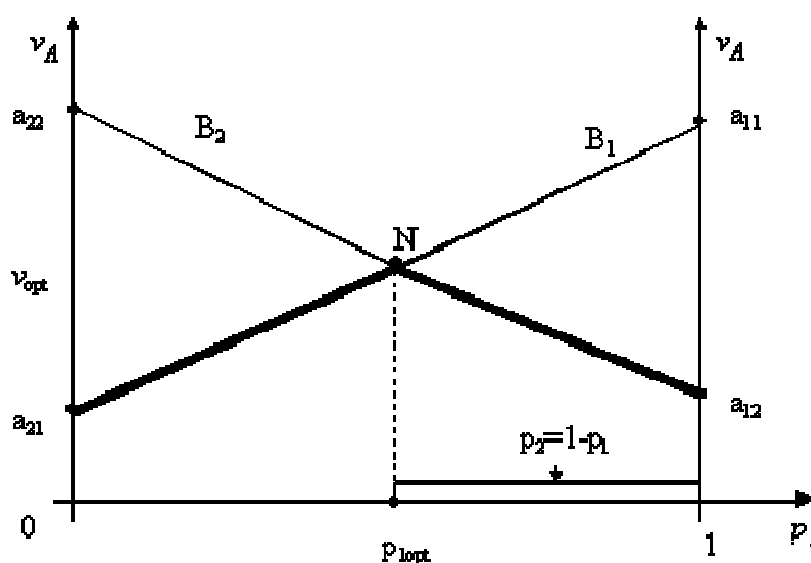


Рисунок 3.5.1 – Графический метод решения игры (игрок А)

Если при этом игрок В применяет чистую стратегию В1, то выигрыш игрока А равен  $a_{11}$ , а при применении чистой стратегии В2 -  $a_{12}$ . Так как значения  $p_1$  лежат в пределах  $[0,1]$ , то соединяя крайние точки для стратегий В1 и В2 (строим графики функций  $V_A=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{22}$  и  $V_A=(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$ ), получаем значения выигрышей игрока А для всех промежуточных значений  $P_1$ .

В соответствии с принципом максимина, игрок А должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка N пересечения

отрезков прямых (рис. 3.5.1) и определяет как оптимальную цену игры  $V_{Opt}$ , так и оптимальные вероятности  $P_{1opt}$  и  $P_{2opt}=1-P_{1opt}$ , соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока А, т. е. даёт решения системы уравнений (3.5.1), (3.5.3), (3.5.4).

Для графического решения системы уравнений (3.5.2), (3.5.8), (3.5.9) отложим по оси абсцисс вероятность  $q_1 \in [0,1]$ , а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока В:

$$VB=(a_{11}-a_{12})q_1+a_{12}; \quad (3.5.13)$$

$$VB=(a_{21}-a_{22})q_1+a_{22}. \quad (3.5.14)$$

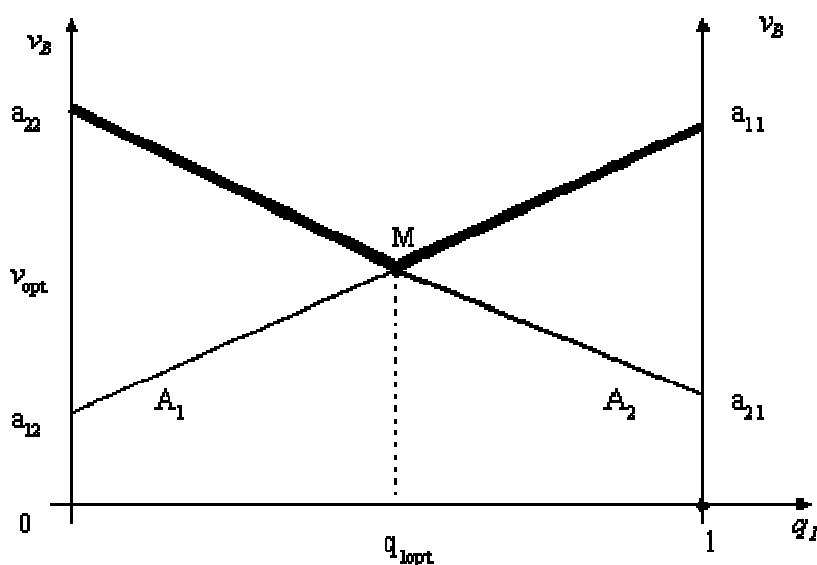


Рисунок 3.5.2 - Графический метод решения игры (игрок В)

Решением являются координат точки **М** (рис 3.5.2.) пересечения прямых, описываемых уравнений (3.5.13) и (3.5.14):

$$Q_{1opt}; q_{2opt}=1-q_{1opt} \text{ и } V_{Opt}.$$

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок В должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры  $G(2 \times 2)$  с седловой точкой геометрическая интерпретация решения быть представлена, например, следующим образом (рис. 3.5.3).

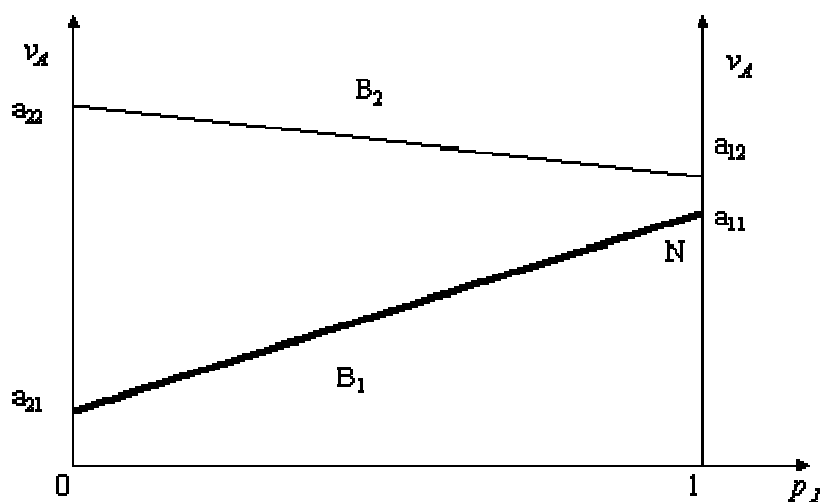


Рисунок 3.5.3 - Графический метод решения игры с седловой точкой

Стратегия **B2** игрока **B** является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любой случае проигрывает больше, чем при применении стратегии **B1**. В данной игре  $P1Opt=1$ ;  $p2Opt=0$ ;  $VOpt=a11$ , т. е. игра имеет седловую точку **N** и решается в чистых стратегиях. Игрок **A** должен применять стратегию **A1**, а игрок **B** - стратегию **B1**.

На рис. 4 показан случай, в котором решением игры для игрока **A** является чистая стратегия **A2**, а для игрока **B** - стратегия **B1**.

Игра имеет седловую точку **N**.

Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид

	B1	B2	A/
A1	4	-2	-2
A2	1	3	1
B/	4	3	



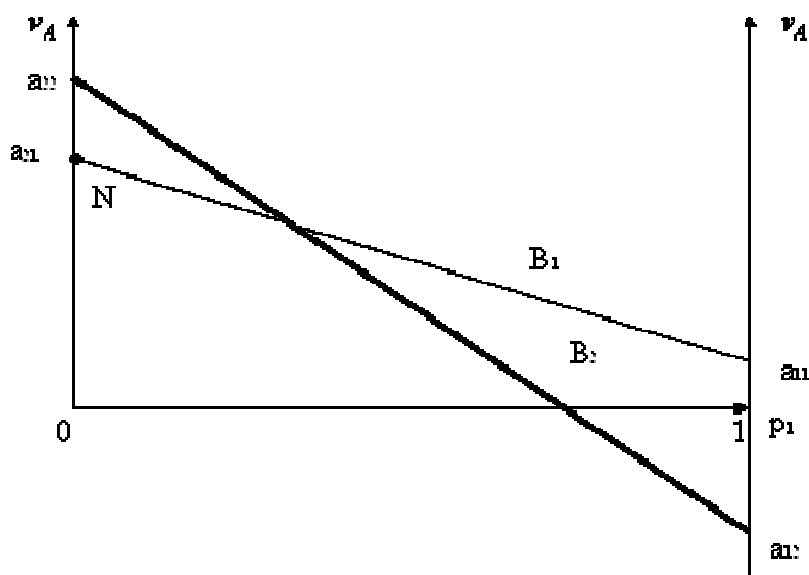


Рисунок 3.5.4 – Решение с чистыми стратегиями

В данной игре нижняя цена игры  $a=1$  не равна верхней цене игры  $b=3$ , поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока **A**, в соответствии с формулами (3.5.5) и (3.5.6), оптимальные вероятности применения стратегий **A1** и **A2** равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3 - 1}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 + 2}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока **B**, в соответствии с формулами (3.5.10) и (3.5.11), оптимальные вероятности применения стратегий **B1** и **B2** равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3 + 2}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 - 1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков

$$S_A = \left\| \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{5}{8}; \frac{3}{8} \right\|,$$

а цена игры в соответствии с формулой (3.5.12) равна:

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4 + 3 - 1 + 2} = \frac{7}{4}.$$

Так как  $N > 0$ , то игра выгодна для игрока А.

Графическое изображение игры для игрока А показана на рис. 3.5.5.

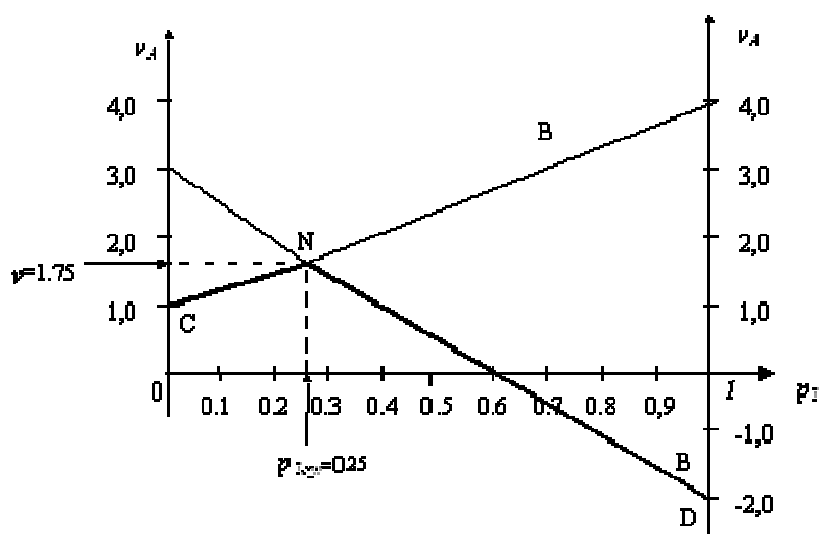


Рисунок 3.5.5 - Графическое изображение игры для игрока А

Нижняя граница выигрыша игрока А определяется ломаной  $CND$ . Оптимальное решение, определяется точкой  $N$ , естественно, дает тоже решение, что и алгебраический метод:  $S_A = \{0,25; 0,75\}$ ,  $\nu = 1,75$ .

Графическое изображение игры для игрока В показано на рис.6.

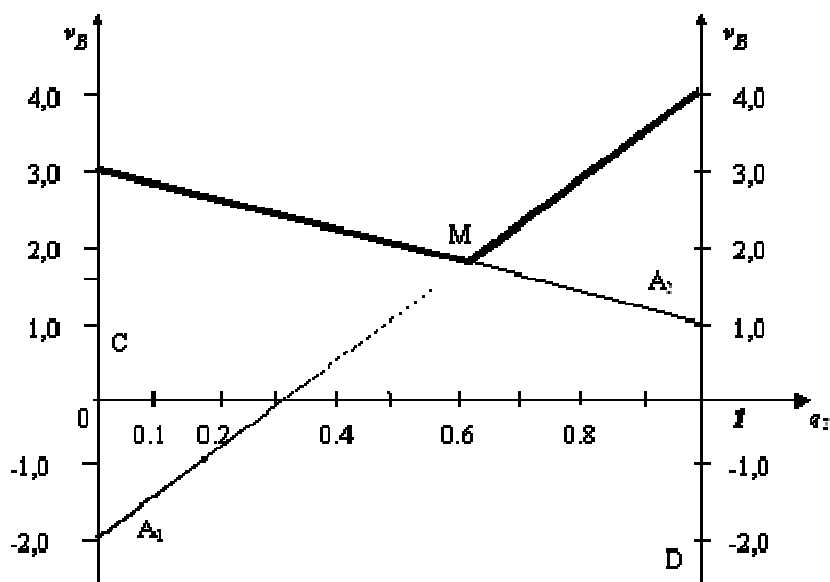


Рисунок 3.5.6 – Графическое изображение игры для игрока В

Оптимальное решение, определяемое точкой  $M$ , даёт решение  $S_B = \{0,625; 0,375\}$ ,  $\nu = 1,75$ .

### 3.5.6 Упрощение матричной игры

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платёжной матрицы. Поэтому для игр с платёжными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путём исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

**Определение 1.** Если в платёжной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) стратегии называются дублирующими.

**Определение 2.** Если в платёжной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию  $A_I$  игрока  $A$ , не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия  $A_I$  называется доминируемой (заведомо невыгодной).

**Определение 3.** Если в платёжной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию  $B_I$  игрока  $B$  не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия  $B_I$  называется доминируемой (заведомо невыгодной).

Решение матричной игры не изменится, если из платёжной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

Упростить матричную игру, платёжная матрица которой имеет вид:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	5	9	3	4	5
A2	4	7	7	9	10
A3	4	6	3	3	9
A4	4	8	3	4	5
A5	4	7	7	9	10

Из платёжной матрицы видно, что стратегия  $A_2$  дублирует стратегию  $A_5$ , потому любую из них можно отбросить (отбросим стратегию  $A_5$ ). Сравнивая почленно стратегии  $A_1$  и  $A_4$ , видим, что каждый элемент строки  $A_4$  не больше соответствующего элемента строки  $A_1$ . Поэтому применение игроком  $A$  доминирующей над  $A_4$  стратегии  $A_1$  всегда обеспечивает выигрыш, не меньший того, который был бы получен при применении стратегии  $A_4$ . Следовательно, стратегию  $A_4$  можно отбросить. Таким образом, имеем упрощённую матричную игру с платёжной матрицей вида:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	5	9	3	4	5
A2	4	7	7	9	10
A3	4	6	3	3	9

Из этой матрицы видно, что в ней некоторые стратегии игрока В доминируют над другими: В3 над В2, В4 и В5. Отбрасывая доминируемые стратегии В2, В4 и В5, получаем игру 3х2, имеющей платёжную матрицу вида:

	B1	B3
A1	5	3
A2	4	7
A3	4	3

В этой матрице стратегия А3 доминируется как стратегией А1, так и стратегией А2. Отбрасывая стратегию А3, окончательно получаем игру 2х2 с платёжной матрицей

	B1	B3
A1	5	3
A2	4	7

Эту игру уже упростить нельзя, ее надо решать рассмотренным выше алгебраическим или геометрическим методом.

Необходимо отметить, что отбрасывая дублируемые и доминируемые стратегии в игре с седловой точкой, мы все равно придём к игре с седловой точкой, т. е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой - это проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы платёжной матрицы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

**Свойство 1.** Если ко всем элементам платёжной матрицы прибавить (вычесть) одно и то же число  $C$ , то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а только цена игры увеличится (уменьшится) на это число  $C$ .

**Свойство 2.** Если каждый элемент платёжной матрицы умножить на положительное число  $k$ , то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры умножится на  $k$ .

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку. Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными имеет и отрицательные элементы, то ко всем ее элементам прибавляют такое число, чтобы исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

Решить матричную игру 2x2 с платёжной матрицей вида:

	B1	B2
A1	0.5	-0.2
A2	0.1	0.3

Умножая все элементы платёжной матрицы на 10, а затем прибавляя к ним число 2, получаем игру с платёжной матрицей

	B1	B2
A1	7	0
A2	3	5

Решая эту игру алгебраическим методом, получаем

$$p_1 = \frac{5-3}{7+5-3-0} = \frac{2}{9}; \quad p_2 = \frac{7}{9};$$

$$q_1 = \frac{5-0}{7+5-3-0} = \frac{5}{9}; \quad q_2 = \frac{4}{9};$$

$$v = \frac{7 \cdot 5 - 0 \cdot 3}{7+5-3-0} = \frac{35}{9}.$$

В соответствии со свойствами 1 и 2, исходная матричная игра имеет те же

оптимальные смешанные стратегии:  $s_A = \left\| \frac{2}{9} : \frac{7}{9} \right\|$  и  $s_B = \left\| \frac{5}{9} : \frac{4}{9} \right\|$ . А для получения исходной цены игры необходимо из полученной цены игры вычесть 2, а затем разделить на 10. Таким

образом, получаем цену исходной игры:  $\left( \frac{35}{9} - 2 \right) : 10 = \frac{17}{90}$

### 3.5.7 Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$

У игры  $2 \times n$  или  $m \times 2$  всегда имеется решение содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков ( $\min(2, n) = \min(m, 2) = 2$ ). Если эти активные стратегии игроков будут найдены, то игры  $2 \times n$  и  $m \times 2$  превращаются в игры  $2 \times 2$ , методы решения которых рассмотрены выше.

Практически решение игры  $2 \times n$  осуществляется следующим образом:

- 1) строится графическое изображение игры для игрока **A**;
- 2) выделяется нижняя граница выигрыша и находится наибольшая ордината нижней границы (максимин), которая равна цене игры  $V$ ;
- 3) определяется пара стратегий игрока **B**, пересекающихся в точке оптимума. Эти стратегии и являются активными стратегиями игрока **B**.

Таким образом, игра  $2 \times n$  сведена к игре  $2 \times 2$ , которую более точно можно решить алгебраическим методом.

Если в точке оптимума пересекается более двух стратегий, то в качестве активных стратегий может быть выбрана любая пара из них.

Решение игры  $m \times 2$  осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока **B** и выделяется не нижняя, а верхняя граница выигрыша (так как находится оптимальная смешанная стратегия игрока **B**), и на ней находится точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

Найти решение игры, платёжная матрица которой имеет вид:

	B1	B2	B3
A1	2	5	8
A2	7	4	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки, поэтому оптимальное решение должно быть в смешанных стратегиях. Строим графическое изображение игры для игрока **A** (рис.7)

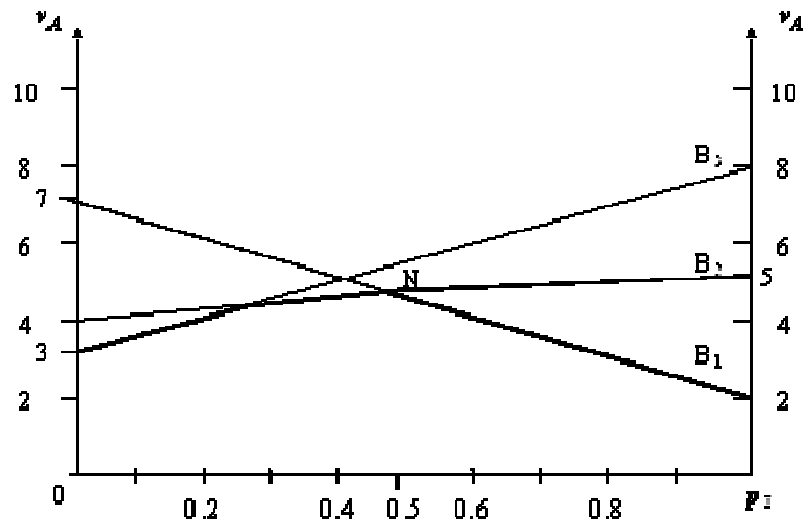


Рисунок 3.5.7 - Графическое изображение игры для игрока А

Точка **N** (максимин) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются линии, соответствующие активным стратегиям **B1** и **B2** игрока **B**. Таким образом, исключая стратегию **B3**, получаем матричную игру **2x2** с платёжной матрицей вида

	B1	B2
A1	2	5
A2	7	4

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем точное решение

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = \frac{1}{2}; \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2};$$

$$q_1 = \frac{4-5}{2+4-7-5} = \frac{1}{6}; \quad q_2 = 1 - q_1 = \frac{5}{6};$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = \frac{27}{6}.$$

Ответ:

$$S_A = \left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0 \right\|; \quad v = \frac{27}{6}.$$

Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид

	B1	B2
A1	0	1
A2	4	2
A3	-1	4
A4	1	-3
A5	6	-2
A6	1,5	3

Платёжная матрица не имеет седловой точки. Для сведения данной игры к игре **2x2** строим ее графическое изображение для игрока **B** (рис. 8).

Точка **М** (минимакс) является точкой оптимума. В этой точке пересекаются отрезки, соответствующие активным стратегиям A2, A6 и A3 игрока A. Таким образом, исключая стратегии A1, A4 и A5 и выбирая из трех активных стратегий две (например, A2 и A3 или A2 и A6), приходим к матричной игре **2x2**. Выбор стратегий A3 и A6 исключён, так как в этом случае точка М перестанет быть точкой минимакса.

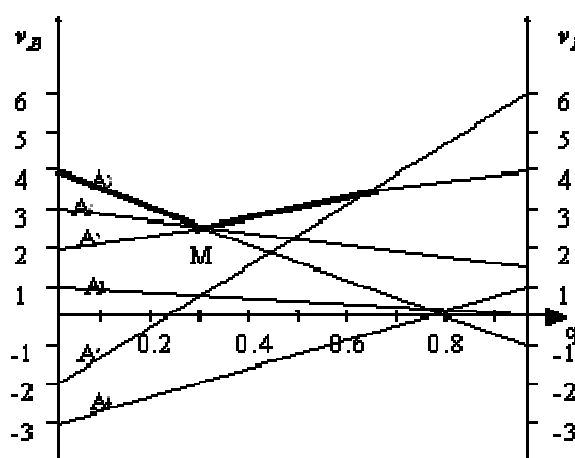


Рисунок 3.5.8 - Графическое изображение игры для игрока B

Пусть выбираются стратегии A2 и A3. Тогда игра **2x2** приобретает вид

	B1	B2
A2	4	2
A3	-1	4

Оптимальные смешанные стратегии данной игры, а, следовательно, и исходной игры определяются следующими вероятностями:

$$p_1 = \frac{4+1}{4+4-2+1} = \frac{5}{7}; \quad p_2 = \frac{2}{7};$$



$$q_1 = \frac{4-2}{4+4-2+1} = \frac{2}{7}; \quad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 2}{4+4-2+1} = \frac{18}{7}.$$

Ответ:  $S_A = \left\| 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0, 0 \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|; \quad v = \frac{18}{7}.$

Другой вариант игры **2x2** получается, если использовать стратегии A2 и A6. В этом случае платёжная матрица имеет вид

	B1	B2
A2	4	2
A6	1,5	3

Тогда

$$p_1 = \frac{3 - 1\frac{1}{2}}{4 + 3 - 1\frac{1}{2} - 2} = \frac{3}{7}; \quad p_2 = \frac{4}{7};$$

$$q_1 = \frac{3-2}{4+3-1\frac{1}{2}-2} = \frac{2}{7}; \quad q_2 = \frac{5}{7};$$

$$v = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2}}{4 + 3 - 1\frac{1}{2} - 2} = \frac{18}{7}.$$

Ответ:

$$S_A = \left\| 0, \frac{3}{7}, 0, 0, 0, \frac{4}{7} \right\|; \quad S_B = \left\| \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right\|; \quad v = \frac{18}{7}.$$

Естественно, что цена игры для обоих вариантов одинакова.

В заключение наметим общую схему решения матричных игр **2xn** и **mx2**:

1. Определяется наличие седловой точки, т. е. возможность решения игры в чистых стратегиях. Если нижняя цена игры **A** не равна верхней цене игры **B**, то осуществляется поиск решения в смешанных стратегиях.

2. Производится упрощение матричной игры путём исключения дублирующих и доминируемых стратегий. Если упрощённая игра имеет размерность не **2x2**, то переходим к этапу 3.

3. Строится графическое изображение игры и определяется две активные стратегии игрока, имевшего в исходной задаче число стратегий больше двух.

### 3.5.7.1 Задание №2. Упрощение игр и решение игр 2 на n или m на 2 в смешанных стратегиях.

Упростить матрицу, решить задачу в смешанных стратегиях математическим и графическим способом.

2	3	33	3	2	6	51	4	4	6	7	5	13	7	5
3	1	43	1	3	3	27	3	3	3	11	7	43	11	7
1) 4	3	77	3	4	2) 7	33	3	3	7	3) 7	6	87	7	6
5	2	24	2	5	5	25	8	8	5	2	4	24	2	4
4	10	43	10	4	14	70	4	4	14	8	10	53	8	10

11	71	4	4	11	7	1	23	7	1	9	51	4	4	9
3	27	3	3	3	8	7	53	8	7	3	27	3	3	3
4) 9	43	4	4	9	5) 8	5	17	8	5	6) 7	37	3	3	7
2	27	2	2	2	5	4	54	5	4	5	25	8	8	5
4	49	8	8	4	6	9	73	6	9	13	70	4	4	13

3	3	33	3	3	6	71	6	6	6	7	1	23	7	1
8	1	43	8	1	3	27	3	3	3	8	7	53	8	7
7) 3	4	27	3	4	8) 9	43	4	4	9	9) 8	5	17	8	5
6	4	24	6	4	2	27	8	8	2	5	4	54	5	4
4	15	43	4	15	8	40	3	3	8	6	9	73	6	9

6	5	13	6	5	6	51	2	2	6	6	3	33	3	6
11	7	43	11	7	3	27	5	5	3	3	1	43	1	3
10) 7	6	87	7	6	11) 7	33	3	3	7	12) 4	3	77	3	4
2	4	24	2	4	5	25	8	8	5	5	2	24	2	5
8	12	53	8	12	14	70	3	3	14	2	10	43	10	2

### 3.5.8 Решение коалиционных игр, нахождение ядра и вектора Шепли

В экономике отдельные субъекты редко действуют поодиночке. Чаще всего они объединяются в союзы, коллективы, кооперации для достижения своих целей и принимают коллективные действия. Такие случаи изучаются в теории коалиционных игр. Коалиционной игрой называется игра с не противоположными интересами, в которой игроки могут обсуждать перед игрой свои стратегии, договариваться о совместных действиях, заключать союзы (коалиции) для объединения ресурсов. **Коалиция** – подмножество игроков, а **большая коалиция** – синоним для множества всех игроков. Коалиционная игра в характеристической форме это:

1. Множество игроков  $N$ .

2. Характеристическая функция,  $v$ , сопоставляющая каждой коалиции сумму денег, которую эта коалиция может заработать самостоятельно. Равна гарантированному математическому ожиданию выигрыша.

Характеристическая функция может принимать отрицательные значения (например, при дележе расходов). Мы считаем, что пустая коалиция (куда никто не входит), не может заработать денег и никому ничего не должна, т.е.  $v(\emptyset) = 0$ . Именно характеристическая функция полностью описывает игру.

Если несколько непересекающихся коалиций объединяются, то вместе как одна коалиция они заработают не меньше, чем по отдельности и это называется свойством супераддитивности.

**Определение.** Игра называется супераддитивной, если для любых непересекающихся коалиций  $S_1, S_2$ , верно неравенство  $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$ . В такой игре у игроков есть интерес в создании большой коалиции и дележе полученного  $v(N)$ . Есть две концепции деления  $v(N)$ : ядро и вектор Шепли. Несколько примеров таких игр:

**Пример 1.** «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - ещё один такой же левый, а у Паши - правый.

Здесь  $N = \{\text{Лёня, Лева, Паша}\}$ ,  $v(\text{Лёня}) = v(\text{Лева}) = v(\text{Паша}) = 0$  (в одиночку никто не может получить 600 рублей);  $v(\text{Лёня, Лева}) = 0$  (у них нет правого); для любой другой коалиции  $S$ ,  $v(S) = 600$ , т.к. есть и правый и левый ботинки.

**Пример 2.** «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков.

Здесь  $N = \{\text{Андрей, Борис}\}$ ,  $v(\text{Андрей}) = 60$ ,  $v(\text{Борис}) = 120$ ,  $v(\text{Андрей, Борис}) = 240$ .

Решить коалиционную игру - значит назвать множество допустимых векторов выигрышей. **Вектор выигрышей игроков** – произвольный вектор, представляющий собой распределение полученного выигрыша. Представляется в виде:  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , где каждый  $x_i$  - это выигрыш, который получает  $i$ -й игрок. **Допустимый вектор выигрышей** такой, что сумма выигрышей не превышает выигрыш большой коалиции.

### 3.5.8.1 Ядро

**Ядро** – решения кооперативных игр, основанные на минимизации степени неудовлетворённости выигрышем коалиций. Предположим, что большая коалиция решила каким-то образом разделить  $v(N)$ . С математической точки зрения, делёж - это вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Поскольку большая коалиция может заработать  $v(N)$ , то любой делёж обязан удовлетворять бюджетному ограничению  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq v(N)$ . Будем называть ядром  $C(v)$  такое множество векторов выигрышей, которое:

**Эффективно** т.е. всё должно быть распределено между всеми без остатка, Для этого неравенство  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq v(N)$  должно быть выполнено как равенство;

**Устойчиво** т.е. не должно найтись такой коалиции, которой было бы выгодно отколоться от данной. Например, если отсоединившись, коалиция  $S$  получает  $v(S)$ ; а

$$\sum_{i \in S} x_i$$

соглашаясь на делёж – получает

, то для любой коалиции  $S$  должно соблюдаться условие

Находим ядро в наших примерах. Ядро можно найти решая систему из одного

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

уравнения и нескольких неравенств.

**Пример 1.** «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - ещё один такой же левый, а у Паши - правый. Считаем количество пар, а не стоимость:  $x_1 + x_2 + x_r = 1$ ,  $x_1 + x_r \geq 1$ ,  $x_2 + x_r \geq 1$ .

Решение одно  $x_1=0$   $x_2=0$   $x_r=1$ , победитель получает все или все получает владелец редкого ресурса. Если  $x_1 + x_2 + x_r = 600$ ,  $x_1 + x_r \geq 600$ ,  $x_2 + x_r \geq 600$   $x_1=0$   $x_2=0$   $x_r=600$

**Пример 2.** «Носки». Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков.  $x_1 + x_2 = 240$ ,  $x_1 \geq 60$ ,  $x_2 \geq 120$ .

Решение: любой делёж вида  $(x_1, 240 - x_1)$ , где  $x_1$  принадлежит к  $[60; 120]$ .

**Пример 3.** «Бизнес»: Виктор и Сергей ведут совместный бизнес, их доход - \$1500 в месяц. Обязанности распределены таким образом, что если бы Виктор работал один, то получал бы \$600 в месяц, а один Сергей не смог бы зарабатывать вовсе. Как должны распределиться между ними выигрыши, чтобы они вступили в коалицию?

Возможны четыре коалиции: пустая, две по одному человеку и большая. Платежи в них будут следующие:

$$v(\text{пустое}) = v(\{\text{Сергей}\}) = 0;$$

$$v(\{\text{Виктор}\}) = 600;$$

$$v(\{\text{Виктор, Сергей}\}) = 1500;$$

Таким образом, Виктор должен получать не меньше 600, тогда как для Сергея допустима любая сумма.

У концепции Ядра есть недостатки:

- оно может быть не единственным;
- оно может быть пустым из-за того, что условие устойчивости слишком сильное;

Другими словами - оно может применяться не для всякой коалиционной игры.

### 3.5.8.2 Вектор Шепли

**Вектор Шепли** – принцип оптимальности распределения выигрыша между игроками, в котором выигрыш каждого игрока равен его среднему вкладу в благосостояние тотальной коалиции. Мы хотим получить вектор выигрышей, который:

- эффективен - сумма выигрышей всех игроков равна выигрышу большой коалиции;
- симметричен – игроки получают равные выигрыши, если при присоединении к коалиции внесли одинаковый взнос. А выигрыш не привнесшего ничего игрока равен нулю;
- линейность – выигрыш любого игрока в игре, являющейся суммой двух коалиционных игр равен сумме выигрышей в каждой из этих двух игр по отдельности;

Вектор Шепли – это математическое ожидание вклада каждого игрока, если большая коалиция формируется в случайном порядке.

Допустим, игроки у нас занумерованы в некотором порядке  $\pi$ , где  $\pi$ -некая последовательность чисел от 1 до  $n$ . Будем добавлять игроков в коалицию в указанном порядке, формируя большую коалицию. Когда мы добавляем  $i$ -го игрока у нас уже сформирована некоторая коалиция  $S$ . Присоединяясь к этой коалиции  $S$ , игрок  $i$  увеличивает достижимый выигрыш на  $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ . Назовём эту прибавку вкладом  $i$ -го игрока в большую коалицию, обозначим ее  $Add(i, \pi)$ . Он зависит от порядка формирования большой коалиции  $\pi$ .

Если же формировать большую коалицию добавляя игроков по одному в случайном порядке  $\pi$ , то прибавка, вносимая  $i$ -м игроком,  $Add(i)$  – будет случайной величиной.

Вектор Шепли, это вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где выигрыш  $i$ -го игрока  $x_i$  определяется по принципу  $x_i = E(Add(i))$ .

**Пример 1.** «Ботинки». Пара ботинок (левый плюс правый) стоит 600 рублей. Один ботинок без пары не стоит ничего. У Лени есть левый ботинок, у Левы - еще один такой же левый, а у Паши - правый. Если формировать большую коалицию в порядке Лёня, Лёва, Паша, то вклад Левы равен нулю. Если формировать большую коалицию в порядке Паша, Лёва, Лёня, то вклад Лёвы равен 600 руб.

Найдём  $E(Add(r))$ . Если Паша ходит первым, то его вклад равен нулю, иначе его вклад равен 600. Значит  $E(Add(r)) = (2/3) * 600 = 400$ . Вклад Лени равен 600 только если первым вошёл Паша, а вторым – Лёня. Значит  $E(Add(l)) = (1/6) * 600 = 100$ . Аналогично для Лёвы. Значит вектор Шепли равен: (100, 100, 400).

**Пример 2. «Носки».** Левые и правые носки ничем не отличаются. Пара носков стоит 60 рублей. Один носок ничего не стоит. У Андрея - три носка, у Бориса - пять носков. Здесь  $N = \{\text{Андрей, Борис}\}$ ,  $v(\text{Андрей}) = 60$ ,  $v(\text{Борис}) = 120$ ,  $v(\text{Андрей, Борис}) = 240$ .

Возможно два порядка формирования большой коалиции: Андрей-Борис и Борис-Андрей. В первом случае вклады игроков равны  $\text{Add}(a, ab) = 60$ ,  $\text{Add}(b, ab) = 180$ , во втором -  $\text{Add}(b, ba) = 120$ ,  $\text{Add}(a, ba) = 120$ . И вектор Шепли:  $x_a = 90$ ,  $x_b = 150$ . Что соответствует интуитивному дележу в пропорции 3/5.

### 3.5.8.3 Задание №3. Решение коалиционных игр.

Есть три игрока: Виктор, Сергей и Анатолий и у них есть ресурсы для изготовления часов – циферблаты и ремешки. У Виктора – А циферблатов и В ремешков, у Сергея – С циферблатов и D ремешков, а у Анатолия – Е циферблатов и F ремешков. Один циферблат стоит 10 рублей, а один ремешок – 30 рублей. Стоимость собранных часов – 100 рублей.

Таблица 3.5.2 – Выбор задания по вариантам

Вариант	A1	B	A2	B2	A3	B3
1	5	10	10	5	5	5
2	2	11	4	4	11	2
3	4	7	6	6	8	5
4	8	7	4	7	9	7
5	10	5	5	10	10	10
6	11	2	4	4	2	11
7	7	4	6	6	5	8
8	7	8	7	4	7	9

В соответствии со своим вариантом записать характеристическую функцию игры, на случай коалиции Виктора и Анатолия, Сергея и Анатолия, отдельно Виктора и т.д. для всех. Записать доход. Записать ядро и вектор Шепли.

### 3.5.8.4 Пример решения коалиционной игры по заданию

Рассмотрим игру 3-х лиц с характеристической функцией следующего вида:

K	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(K)$	0	1	0	1	4	3	5	8

Найдём ядро игры. Дележом будет вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющий условиям:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 - \text{дележи лежат в одной плоскости}$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1 - \text{описывает многоугольник в этой плоскости}$$

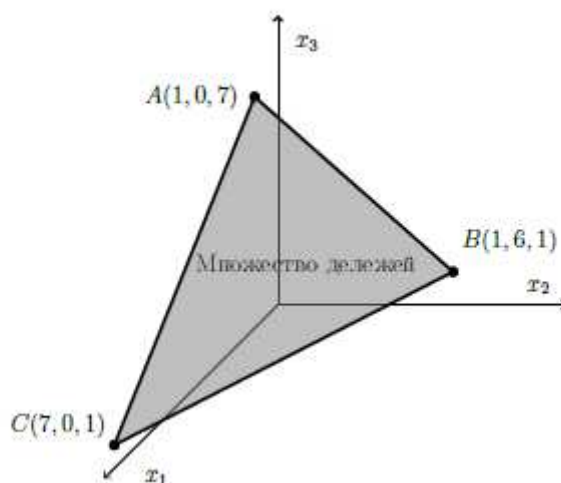


Рисунок 3.5.9 – Графическое решение задачи поиска ядра

В дальнейшем рассмотрении рассмотрим треугольник отдельно, введя бароцентрические координаты.

Воспользуемся критерием принадлежности дележа ядру, который заключается в выполнении неравенства:

$$v(K) \leq \sum_{i \in K} x_i$$

для каждой коалиции  $K$ . Это означает, что на компоненты вектора  $x = (x_1, x_2, x_3)$  накладываются условия:

$$K = \{1,2\}: x_1 + x_2 \geq 4 \Rightarrow x_3 \leq 8 - (x_1 + x_2) = 4$$

$$K = \{1,3\}: x_1 + x_3 \geq 3 \Rightarrow x_2 \leq 8 - (x_1 + x_3) = 5$$

$$K = \{2,3\}: x_2 + x_3 \geq 5 \Rightarrow x_1 \leq 8 - (x_2 + x_3) = 3$$

Чтобы нарисовать множество  $x_1 + x_2 \geq 4$  (что аналогично  $x_3 \leq 4$ ), достаточно заметить что прямая  $x_3 = 4$  параллельна стороне  $BC$  треугольника и будет пересекать стороны треугольника на равном расстоянии от вершин  $B$  и  $C$ . Это расстояние равно 4. И, соответственно, множество точек треугольника, для которых  $x_3 \leq 4$ , будет лежать между прямой  $x_3 = 4$  и отрезком  $BC$ . Аналогично для остальных условий. Ядром будет пересечение этих многоугольников:

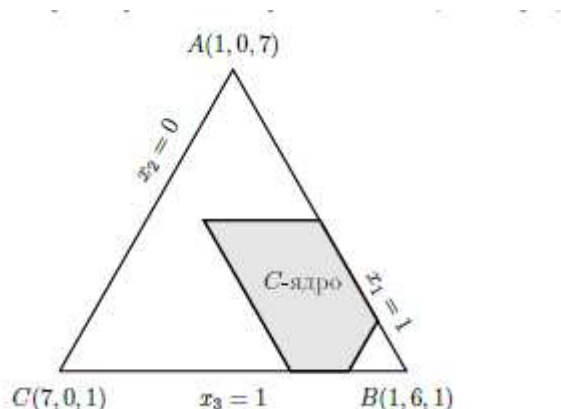


Рисунок 3.5.10 – Графическое решение задачи поиска ядра

Напомним, что вектор Шепли это один из дележей. Особенность его заключается в том, что доля, достающаяся тут каждому игроку, является, в определённом смысле, справедливой: она коррелирует с важностью игрока для коалиции.

Делёж зависит от порядка, в котором подключаются игроки. Чтобы выбрать самый «справедливый» делёж, нужно перебрать все возможные варианты последовательностей подключения игроков к игре и найти среднее этих дележей.

Нарисуем таблицу для построения вектора Шепли, где в каждой строке посчитаем вклад каждого, согласно очередности:

Таблица 3.5.3 - Вклады

	w(1)	w(2)	w(3)
1-2-3	1	4-1=3	8-4=4
1-3-2	1	3-1=2	8-3=5
2-1-3	4-0=4	0	8-4=4
2-3-1	8-5=3	0	5-0=5
3-1-2	3-1=2	8-3=5	1
3-2-1	8-5=3	5-1=4	1
Сумма	14	14	20
Вектор Шепли	7/3	7/3	10/3

Если вернуться к рисунку 3.5.10, то можно обнаружить, что получившийся делёж Шепли  $(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3})$  принадлежит ядру игры.

### 3.5.9 Темы и контрольные вопросы по теории игр

1. Равновесие Нэша
2. Дилемма заключенного



3. Аналогии дилеммы заключенного
4. Оптимальное по Парето решение

## ЛИТЕРАТУРА

### а) основная литература

1. Ржевский, Сергей Владимирович. Исследование операций [Электр.ресурс] : учебное пособие. - СПб. : Лань , 2021 on-line[Электронный ресурс]: — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/reader/book/169378/#1>.

2. Горлач, Борис Алексеевич. Исследование операций. Практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов [Электр.ресурс] : учебное пособие для вузов. - СПб.: Лань, 2021 on-line[ Электронный ресурс ] : — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/reader/book/162371/#1>.

### б) дополнительная литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций (задачи, принципы, методология) М.: Наука. 1988. – 208 с. (19 экз. в библиотеке ТУСУР)

2. Давыдов Э.Г. Исследование операций: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа. 1990. – 382 с. (19 экз. в библиотеке ТУСУР)

3. Северцев, Николай Алексеевич. Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности [Электр.ресурс] : учебное пособие для вузов. - М. : Юрайт, 2020 on-line (экз.) [Электронный ресурс]: — Режим доступа: <https://urait.ru/viewer/issledovanie-operaciy-principy-prinyatiya-resheniy-i-obespechenie-bezopasnosti-454393#page/1>.

4. Исследование операций в экономике [Электр.ресурс] : учебник для вузов. - М.: Юрайт, 2020 on - line [Электронный ресурс]: — Режим доступа: <https://urait.ru/viewer/issledovanie-operaciy-v-ekonomike-460143#page/1>.