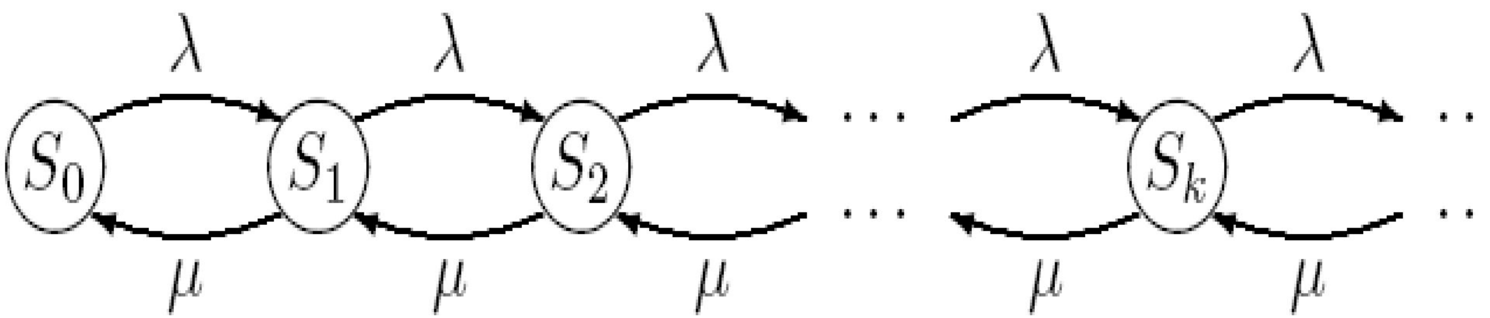
Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Рассмотрим одноканальную СМО с очередью, на которую не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). В СМО поступает поток заявок интенсивности λ, а поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

- $L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок в системе;
- $W_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания заявки в системе;
- $L_{\text{оч}}$ — среднее число заявок в очереди;
- $W_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;
- $P_{\text{зан}}$ — вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Как и ранее, состояние данной СМО определяется числом заявок в системе: S_k — в СМО находится k заявок $(k = 1, 2, \dots)$. Граф состояний СМО соответствует системе гибели и размножения и представлен на



Поскольку число состояний в данной СМО бесконечно, то при $t \to \infty$ очередь может неограниченно возрастать. Поэтому финальные вероятности существуют не всегда, а только когда система не перегружена. Можно доказать, что если $\rho < 1$, то финальные вероятности существуют, а при $\rho \geq 1$ очередь при $t \to \infty$ растет неограниченно. Особенно «непонятным» кажется этот факт при $\rho = 1$. Казалось бы, к системе не предъявляется невыполнимых требований: за время обслуживания одной заявки приходит в среднем одна заявка, и все должно быть в порядке, а вот на деле — не так. При $\rho = 1$ СМО справляется с потоком заявок, только если поток этот — регулярен, и время обслуживания — тоже не случайное, равное интервалу между заявками. В этом «идеальном» случае очереди в СМО вообще не будет, канал будет непрерывно занят и будет регулярно выпускать обслуженные заявки. Но стоит только потоку заявок или потоку обслуживаний стать хотя бы чуточку случайным — и очередь уже будет расти до бесконечности. На практике этого не происходит только потому, что «бесконечное число заявок в очереди»— абстракция.

Формулы для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения выведенные для случая конечного числа используем для бесконечного числа состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1} =$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

Ряд в формуле представляет собой геометрическую прогрессию. При $\rho < 1$ ряд сходится — это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем ρ. При $\rho \geq 1$ ряд расходится, что косвенно подтверждает то, что финальные вероятности состояний $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ существуют только при $\rho < 1$.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^k}{\mu^k} + \dots\right)^{-1} =$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии
S=1/(1-r)

При $\rho < 1$ $\qquad p_0 = 1 - \rho.$

Поскольку $p_k = \rho^k p_0$, то остальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ определяются по формулам:

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \dots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \dots$$

Как ни странно, но, поскольку максимальная из этих вероятностей есть p_0, то наиболее вероятное число заявок в системе будет 0.

Найдем теперь среднее число заявок в системе. Случайная величина ξ — число заявок в системе — принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ Ее математическое ожидание равно

$$
\begin{aligned}
L_{\text{сист}} &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} \\
&= \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \\
&= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho}.
\end{aligned}
$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

$$W_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Теперь определим среднее число заявок в очереди. Число заявок в очереди равно числу заявок в системе минус число заявок, находящихся под обслуживанием. Значит (по правилу сложения математических ожиданий), среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе $L_{\text{сист}}$ минус среднее число заявок под обслуживанием. Число заявок под обслуживанием может быть либо нулем (если канал свободен), либо единицей (если канал занят). Математическое ожидание такой случайной величины равно вероятности того, что канал занят (мы ее обозначили $P_{\text{зан}}$). Ясно, что $P_{\text{зан}}$ равно единице минус вероятность p_0 того, что канал свободен:

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = \rho.$$

Следовательно, среднее число заявок под обслуживанием равно $L_{\text{об}} = \rho$, откуда

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Ресторан MacDonalds планирует открыть drive-through окно для обслуживания своих клиентов. Менеджеры оценили, что клиенты будут прибывать с интенсивностью 15 клиентов в час. Кассир, который будет работать в данном окне, в среднем тратит три минуты на обслуживание одного клиента. Нужно определить параметры эффектвности данной СМО.

Решение. Параметры данной СМО следующие: $\lambda = 15, \mu = 60/3 = 20$. Средняя занятость кассира $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = 0.75$ (75 %).

1. Среднее число клиентов в системе:

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3 \text{ клиента.}$$

2. Среднее число клиентов в очереди:

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 3 - 0.75 = 2.25 \text{ клиента.}$$

3. Среднее время ожидания в системе:

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}} = \frac{3}{15} = 0.2 \text{ ч.} = 12 \text{ мин.}$$

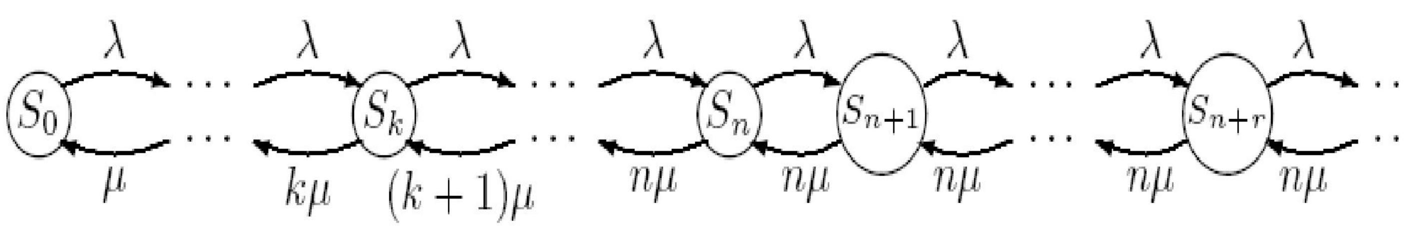
4. Среднее время ожидания в очереди:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}} = \frac{2.25}{15} = 0.15 \text{ ч.} = 9 \text{ мин.}$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

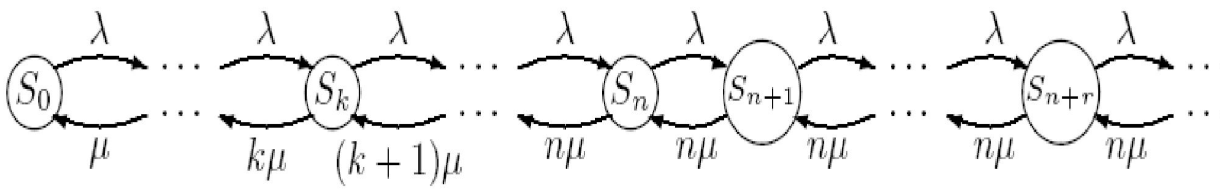
Совершенно аналогично расчитываетя эффективность работы n-канальной СМО с неограниченной очередью. Нумерация состояний теперь следующая:

- S_k — занято k каналов, остальные свободны ($k = 0, \ldots, n$);
- S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди ($r = 1, 2, \ldots$).



Естественное условие существования финальных вероятностей: ρ/n < 1 (напомним, что ρ = λ/μ). Если ρ/n ≥ 1, то очередь растет до бесконечности. Поэтому предположим, что ρ/n < 1 и финальные вероятности существуют. Найдем 1/p0 по формулам:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}} + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \dots + \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{n-1,n}}{\pi_{n,n-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}}\right)^{-1}$$



$$\begin{aligned}
\frac{1}{p_0} &= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} + \frac{\rho^{n+3}}{n^3 \cdot n!} + \dots \\
&= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}\left(1 + \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots\right) \\
&= 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}.
\end{aligned}$$

Остальные вероятности найдем по формулам

$$p_k = \frac{\pi_{01}\pi_{12}\cdots\pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\cdots\pi_{21}\pi_{10}} p_0.$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \ \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0, \ \ldots$$

Теперь найдем характеристики эффективности данной СМО. Среднее число занятых каналов для любой СМО с неограниченной очередью определяется одинаково: $\bar{k} = \lambda/\mu$.

Среднее число заявок в очереди вычисляется так:

$$L_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho^{r-1}}{n^r} =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^r}{n^r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n}\right)^r =$$

$$= \frac{\rho^{n+1} p_0}{n!} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho/n}{1-\rho/n}\right) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! (1-\rho/n)^2}.$$

Среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$ равно среднему числу заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ плюс число заявок под обслуживанием, которое равно среднему числу занятых каналов $\bar{k} = \rho$. Итак,

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \rho.$$

И наконец, по формуле Литтла получим средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$W_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч}}, \quad W_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}.$$

Пример *На автовоклале имеются всего две кассы: одна продает билеты на маршруты направления A, а другая — на маршруты направления B. Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билеты) для обоих направлений одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0.45$ (пассажира в минуту). Кассир тратит на обслуживания пассажира в среднем две минуты ($\mu_A = \mu_B = 0.5$). Определите среднюю длину очереди и среднее время ожидания в очереди для каждой из двух касс (одноканальных СМО с очередью). Как изменятся эти параметры эффективности, если две очереди объединить в одну и обе кассы начнут продавать билеты на оба напрвления?*

Решение. В настоящий момент мы имеем две одноканальных СМО; на каждую поступает поток заявок с интенсивностью λ = 0.45; интенсивность потока обслуживания μ = 0.5. Поскольку ρ = λ/μ = 0.9 < 1, то финальные вероятности существуют. По формуле (*) вычисляем среднюю длину очереди:

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (*)$$

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1.$$

Деля $L_{\text{оч}}$ на λ, найдем среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{8.1}{0.45} \approx 18 \text{ (минут)}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда обе кассы продают билеты на оба направления. На двухканальную СМО поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 \cdot 0.45 = 0.9$. Интенсивность потока потока обслуживаний каждым каналом $\mu = 0.5$. Поэтому $\rho = \lambda/\mu = 1.8$. Поскольку $\rho/n = 1.8/2 = 0.9 < 1$, то финальные вероятности существуют.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^3}{2(2-1.8)}\right) - 1 \approx 0.0525.$$

Среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} = \frac{1.8^3 \cdot 0.0525}{2 \cdot 2(1-1.8/2)^2} \approx 7.68.$$

Деля $L_{\text{оч}}$ на λ, найдем среднее время ожидания в очереди

$$W_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{7.68}{0.9} \approx 8.54 \text{ (минуты)}.$$

Почему произошло такое сокращение времени ожидания в очереди? Во первых, в двуканальной СМО меньше время простаивания каждого из двух кассиров. Объяснение этому следующее: при двух одноканальных СМО кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать, если в очереди нет пассажиров на его направление, а в двуканальной СМО кассир, который обслужил очередного пассажира, будет простаивать, если общая очередь пуста (нет пассажиров на оба направления).

Хорошо, мы поняли, почему сократилось время ожидания в очереди. Но почему сокращение столь существенное (более чем в два раза)? Дело в том, что в данном примере обе одноканальных СМО работают почти на пределе своих возможностей. Стоит немного увеличить время обслуживания (т. е. уменьшить μ) и они перестанут справляться с потоком пассажиров, и очередь начнет неограниченно расти. А простои кассира в некотором смысле равносильны уменьшению его производительности μ.

Пример *На станции технического обслуживания автомобилей механики получают нужные им запчасти в отдел запчастей, где работают три клерка. Механики прибывают с интенсивностью 40 человек в час. Один клерк облуживает одного механика в среднем за три минуты.*

Владелец станции хочет определить нужно ли ему нанять еще одного клерка для работы за стойкой в отделе запчастей, если зарплата клерка в два раза меньше зарплаты механика.

Решение. Для λ = 40, μ = 60/3 = 20, ρ = λ/μ = 40/20 = 2 по формулам вычислим среднее количество механиков, ждущих в очереди, когда число клерков n равно 3 и 4

$$p_0(3) = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(3-\rho)}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{6(3-2)}\right)^{-1}$$

$$= (1 + 2 + 2 + 4/3 + 8/3)^{-1} = 1/9,$$

$$L_{\text{оч}}(3) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} + \rho = \frac{2^4/9}{3 \cdot 6(1-2/3)^2} + 2 = 2\frac{8}{9},$$

$$p_0(4) = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{4!(4-\rho)}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24} + \frac{2^5}{24(4-2)}\right)^{-1}$$

$$= (1 + 2 + 2 + 4/3 + 2/3 + 2/3)^{-1} = 3/23,$$

$$L_{\text{оч}}(4) = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} + \rho = \frac{2^5(3/23)}{4 \cdot 24(1-2/4)^2} + 2 = 2\frac{4}{23}.$$

Поскольку $L_{\text{оч}}(3) - L_{\text{оч}}(4) = 2\frac{8}{9} - 2\frac{4}{23} = \frac{8\cdot 23 - 4\cdot 9}{9\cdot 23} > 0.71 > 0.5$, то дополнительный клерк в отделе запчастей позволит сократить, которое механики проводят в отделе запчастей, боле чем на половину рабочего дня одного механика. Поскольку стоимость половины рабочего дня механика равна стоимости одного рабочего дня клерка, то мы можем рекомендовать хозяину станции нанять еще одного клерка. $\square$

8.1. Кофе-автомат установлен в университетской столовой. В среднем за минуту к автомату подходят 3 студента. Каждому студенту в среднем требуется 15 секунд, чтобы обслужить себя. Ответьте на следующие вопросы:

а) в среднем какое число студентом можно увидеть у автомата;

б) в среднем сколько времени тратит студент, чтобы получить свою чашку кофе;

в) какой процент времени автомат простаивает;

г) какова вероятность того, что три или более студентов стоят у автомата.