

# Грамматики вида LR(0/1)

1

**Романенко Владимир Васильевич,  
к.т.н., доцент каф. АСУ ТУСУР**

# Вид таблицы разбора LR(0/1)

2

Q \ X	Action					Goto			
	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$	$\perp$	$A_1$	$A_2$	...	$A_m$
$Q_0$									
$Q_1$									
...									

Здесь:

- $Q$  – множество состояний;
- множество  $X = \Sigma \cup N \cup \{\perp\}$ .

Содержимое ячейки:

- сдвиг (shift)  $S_k$ ;
- свертка (reduce)  $R_k$ ;
- ошибка ERROR;
- остановка HALT.

# Вид таблицы разбора LR(0/1)

3

**Расширение грамматики:** стартовый символ  $S$  не должен иметь несколько альтернатив порождающего правил. Если в грамматике это правило нарушается, необходимо ввести новый искусственный стартовый символ:

$$G' = (N', \Sigma, P', S'),$$

$$\text{где } N' = N \cup \{S'\}, P' = \{S' \rightarrow S\} \cup P.$$

# Вид таблицы разбора LR(0/1)

4

Структуры данных:

- Состояния анализатора:

$$Q = \{Q_1, Q_2, \dots\},$$

$$Q_i = \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots\}$$

```
declare 1 STATE,  
         2 situations SITUATION,  
         2 next pointer;  
declare STATES pointer;
```

# Вид таблицы разбора LR(0/1)

5

Структуры данных:

- Граф переходов:

$G = (Q, R)$  с разметкой  $g$ ,

$R \subset Q \times Q$ ,  $g: Q \times Q \rightarrow \Sigma \cup N$

```
declare 1 EDGE,  
         2 term string,  
         2 from STATE,  
         2 to STATE,  
         2 next pointer;  
declare GRAPH pointer;
```

# Вид таблицы разбора LR(0/1)

6

Структуры данных:

- LR-ситуация:

$$\sigma = [A \rightarrow \alpha \cdot \beta \mid a],$$

где  $(A \rightarrow \alpha \beta) \in P$ ,  $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$ .

```
declare 1 SITUATION,  
         2 rule RULE,  
         2 pos integer,  
         2 term string,  
         2 next pointer;
```

# Вид таблицы разбора LR(0/1)

7

Структуры данных:

- Таблица разбора:

```
declare 1 ACTION,  
          2 shift integer,  
          2 reduce integer,  
          2 halt bool,  
          2 error bool;  
declare TABLE (N,M) ACTION;
```

# Определение состояний и переходов

8

Алгоритм:

1.  $Q_0 = \text{ЗАМЫКАНИЕ}(\{[S' \rightarrow \bullet S \mid \perp]\})$
2.  $Q = \{Q_0\}, R = \emptyset$
3. Для каждого  $Q_i \in Q$  и для каждого  $X_k \in X$ :
  - 3.1.  $Q' = \text{ПЕРЕХОД}(Q_i, X_k)$
  - 3.2. Если  $Q' \neq \emptyset$  и  $Q' \notin Q$ , то  $Q = Q \cup \{Q'\}$
  - 3.3. Если  $Q' \neq \emptyset$  и  $(Q_i, Q') \notin R$ , то  $R = R \cup \{(Q_i, Q')\}$ ,  
 $g(Q_i, Q') = X_k$
4. Если  $Q$  или  $R$  изменились, возврат на шаг 3.



# Определение состояний и переходов

9

Алгоритм функции *ЗАМЫКАНИЕ*( $Q'$ )

1. Три цикла:

- Для каждой LR-ситуации  $\sigma = [A \rightarrow \alpha \cdot B\beta \mid a] \in Q'$ ,  $A \in N'$ ,  $B \in N$ ,  $\alpha \in X^*$ ,  $\beta \in X^*$ ,  $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$ ;
- Для каждого терминала  $b \in S(\beta a)$ ,  $b \in \Sigma \cup \{\perp\}$ ;
- Для каждого правила  $(B \rightarrow \gamma) \in P$ :

1.1.  $\sigma' = [B \rightarrow \cdot \gamma \mid b]$

1.2. Если  $\sigma' \notin Q'$ , то  $Q' = Q' \cup \{\sigma'\}$

2. Если  $Q'$  изменилось, возврат на шаг 1.

# Определение состояний и переходов

10

Алгоритм функции *ПЕРЕХОД*( $Q'$ ,  $X'$ )

1.  $Q'' = \emptyset$

2. Для всех ситуаций  $\sigma = [A \rightarrow \alpha \cdot X\beta \mid a] \in Q'$ :

$$\sigma' = [A \rightarrow \alpha X \cdot \beta \mid a]$$

$$Q'' = Q'' \cup \{\sigma'\}$$

3. Вернуть *ЗАМЫКАНИЕ*( $Q''$ )

# Определение состояний и переходов

11

Алгоритм поиска символов-предшественников цепочки  $\alpha = X_1 X_2 \dots X_n$ :

$$S(\alpha) = \bigcup_{i=1}^k (S(X_i) - \{e\}) \cup \Delta,$$

но с учетом отсутствия  $e$ -правил

$$S(\alpha) = S(X_1).$$

# Пример

12

Дана грамматика:

$$E \rightarrow E + T$$

$$E \rightarrow T$$

$$T \rightarrow T * F$$

$$T \rightarrow F$$

$$F \rightarrow x$$

Она описывает математические выражения, состоящие из операндов (обозначены терминалом  $x$ ), а также операций сложения и умножения.

# Пример

13

Формальная запись:

$$G = (N, \Sigma, P, S);$$

$$N = \{E, T, F\};$$

$$\Sigma = \{+, *, x\};$$

$$P = \{(E, E + T), (E, T), (T, T * F), (T, F), (F, x)\} \text{ или } \{E \rightarrow E + T, E \rightarrow T, T \rightarrow T * F, T \rightarrow F, F \rightarrow x\};$$

$$S = E.$$

$$\text{Тогда } X = \{E, T, F, +, *, x\}$$

# Пример

14

Добавление искусственного стартового символа:

$$E' \rightarrow E$$

$$E \rightarrow E + T$$

$$E \rightarrow T$$

$$T \rightarrow T * F$$

$$T \rightarrow F$$

$$F \rightarrow x$$

# Пример

15

Формальная запись:

$$G' = (N', \Sigma, P', S');$$

$$N' = \{E', E, T, F\};$$

$$\Sigma = \{+, *, x\};$$

$$P' = \{(E', E), (E, E + T), (E, T), (T, T * F), (T, F), (F, x)\} \text{ или } \{E' \rightarrow E, E \rightarrow E + T, E \rightarrow T, T \rightarrow T * F, T \rightarrow F, F \rightarrow x\};$$

$$S' = E'.$$

$$\text{Тогда } X' = \{E', E, T, F, +, *, x\}.$$

# Пример

16

Определение символов-предшественников:

$$E' \rightarrow E$$

$$E \rightarrow E + T$$

$$E \rightarrow T$$

$$T \rightarrow T * F$$

$$T \rightarrow F$$

$$F \rightarrow x$$



# Пример

17

Алгоритм получения  $Q$  и  $R$ :

$$Q' = \{[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]\}$$

$$Q_o = \text{ЗАМЫКАНИЕ}(Q')$$

$$Q = \{Q_o\}$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

# Пример

18

Алгоритм получения  $Q$  и  $R$ :

$$Q' = \{[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]\}$$

$$Q_0 = \text{ЗАМЫКАНИЕ}(Q')$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

1)  $[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]$

# Пример

19

Алгоритм получения  $Q$  и  $R$ :

$$Q = \{Q_0\},$$

$$R = \emptyset$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [E' &\rightarrow \bullet E \mid \perp] \\ [E &\rightarrow \bullet E + T \mid \perp] \\ [E &\rightarrow \bullet T \mid \perp] \\ [E &\rightarrow \bullet E + T \mid +] \\ [E &\rightarrow \bullet T \mid +] \\ [T &\rightarrow \bullet T^* F \mid \perp] \\ [T &\rightarrow \bullet F \mid \perp] \\ [T &\rightarrow \bullet T^* F \mid +] \\ [T &\rightarrow \bullet F \mid +] \\ [T &\rightarrow \bullet T^* F \mid *] \\ [T &\rightarrow \bullet F \mid *] \\ [F &\rightarrow \bullet x \mid \perp] \\ [F &\rightarrow \bullet x \mid +] \\ [F &\rightarrow \bullet x \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

20

Переход из  $Q_0$  по  $E$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid +]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

21

Переход из  $Q_0$  по  $E$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1\},$$

$$R = \{(Q_0, Q_1)\},$$

$$g((Q_0, Q_1)) = E.$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E' \rightarrow E \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid +]$

# Пример

22

Переход из  $Q_0$  по  $T$ :

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T * F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [E' &\rightarrow \bullet E \mid \perp] \\ [E &\rightarrow \bullet E + T \mid \perp] \\ [E &\rightarrow \bullet T \mid \perp] \\ [E &\rightarrow \bullet E + T \mid +] \\ [E &\rightarrow \bullet T \mid +] \\ [T &\rightarrow \bullet T * F \mid \perp] \\ [T &\rightarrow \bullet F \mid \perp] \\ [T &\rightarrow \bullet T * F \mid +] \\ [T &\rightarrow \bullet F \mid +] \\ [T &\rightarrow \bullet T * F \mid *] \\ [T &\rightarrow \bullet F \mid *] \\ [F &\rightarrow \bullet x \mid \perp] \\ [F &\rightarrow \bullet x \mid +] \\ [F &\rightarrow \bullet x \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

23

Переход из  $Q_0$  по  $T$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2\},$$
$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2)\},$$
$$g((Q_0, Q_2)) = T.$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

# Пример

24

Переход из  $Q_0$  по  $F$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid +]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$



# Пример

25

Переход из  $Q_0$  по  $F$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\},$$

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3)\},$$

$$g((Q_0, Q_3)) = F.$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[T \rightarrow F \bullet \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid *]$

# Пример

26

Переход из  $Q_0$  по  $x$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid +]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

27

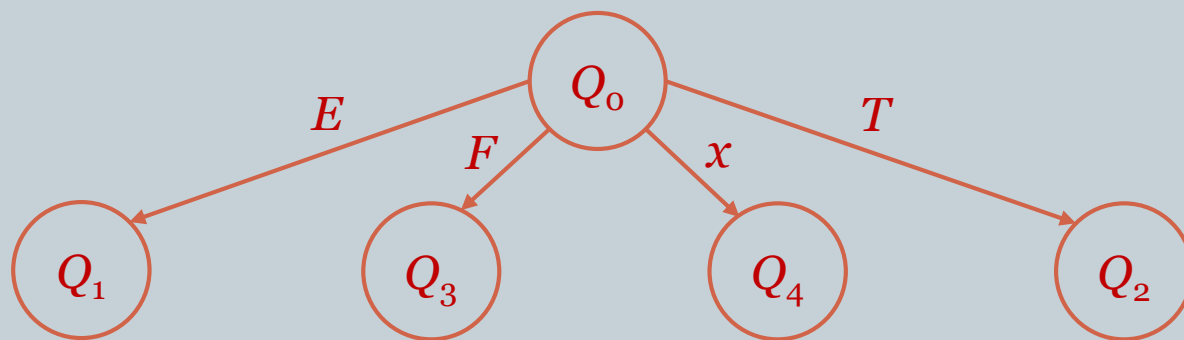
Переход из  $Q_0$  по  $x$ :

$$\begin{aligned} Q &= \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}, \\ R &= \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), \\ &\quad (Q_0, Q_4)\}, \\ g((Q_0, Q_4)) &= x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [F \rightarrow x \bullet \mid \perp] \\ [F \rightarrow x \bullet \mid +] \\ [F \rightarrow x \bullet \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

28



# Пример

29

Переходы из  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ :

$[E' \rightarrow E \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid +]$

$[E \rightarrow T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

$[T \rightarrow F \bullet \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid *]$

$[F \rightarrow x \bullet \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow x \bullet \mid +]$   
 $[F \rightarrow x \bullet \mid *]$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

# Пример

30

Переход из  $Q_1$  по  $+$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E' \rightarrow E \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid +]$

# Пример

31

Переход из  $Q_1$  по  $+$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\},$$
$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3),$$
$$(Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5)\},$$
$$g((Q_1, Q_5)) = +.$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

32

Переход из  $Q_2$  по  $*$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$



# Пример

33

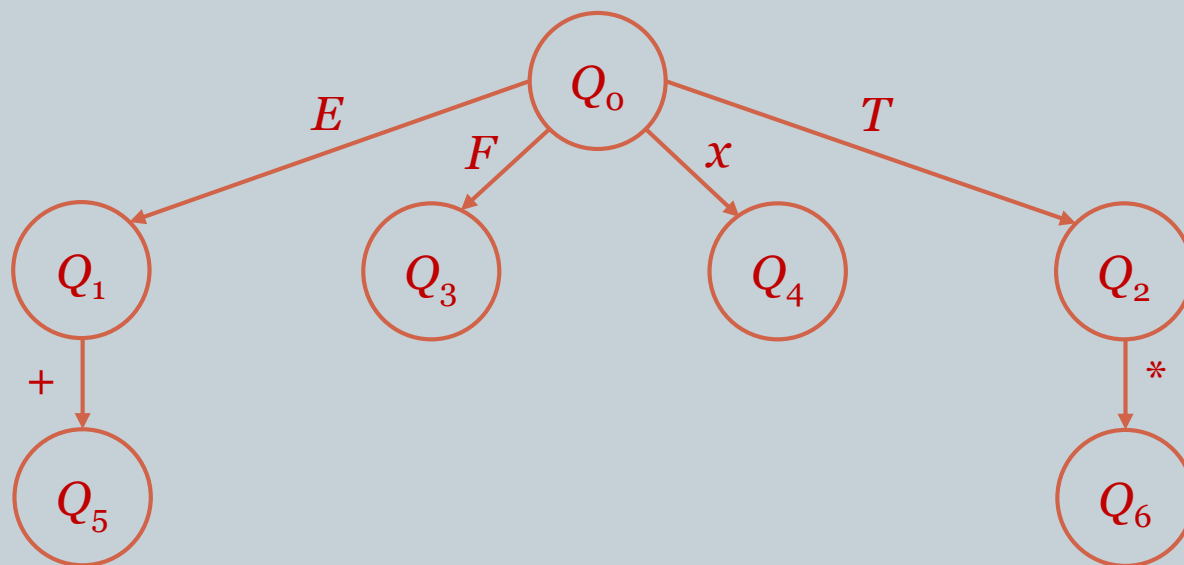
Переход из  $Q_2$  по  $*$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\},$$
$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3),$$
$$(Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6)\},$$
$$g((Q_2, Q_6)) = *.$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [T \rightarrow T^* \cdot F \mid \perp] \\ [T \rightarrow T^* \cdot F \mid +] \\ [T \rightarrow T^* \cdot F \mid *] \\ [F \rightarrow \cdot x \mid \perp] \\ [F \rightarrow \cdot x \mid +] \\ [F \rightarrow \cdot x \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

34



# Пример

35

Переходы из  $Q_5$ ,  $Q_6$ :

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$[T \rightarrow T^* \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

# Пример

36

Переход из  $Q_5$  по  $T$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

37

Переход из  $Q_5$  по  $T$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7\},$$

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), (Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6), (Q_5, Q_7)\},$$

$$g((Q_5, Q_7)) = T.$$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow E + T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

# Пример

38

Переход из  $Q_5$  по  $F$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

39

Переход из  $Q_5$  по  $F$ :

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), \\ (Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6), (Q_5, Q_7), \\ (Q_5, Q_3)\}, \\ g((Q_5, Q_3)) = F.$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [T \rightarrow F \bullet \mid \perp] \\ [T \rightarrow F \bullet \mid +] \\ [T \rightarrow F \bullet \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

40

Переход из  $Q_5$  по  $x$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T * F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$



# Пример

41

Переход из  $Q_5$  по  $x$ :

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), \\ (Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6), (Q_5, Q_7), \\ (Q_5, Q_3), (Q_5, Q_4)\}, \\ g((Q_5, Q_4)) = x.$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [F \rightarrow x \bullet \mid \perp] \\ [F \rightarrow x \bullet \mid +] \\ [F \rightarrow x \bullet \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

42

Переход из  $Q_6$  по  $F$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[T \rightarrow T^* \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

43

Переход из  $Q_6$  по  $F$ :

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8\},$$

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), \\ (Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6), (Q_5, Q_7), \\ (Q_5, Q_3), (Q_5, Q_4), (Q_6, Q_8)\},$$

$$g((Q_6, Q_8)) = F.$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [T \rightarrow T^* F \bullet \mid \perp] \\ [T \rightarrow T^* F \bullet \mid +] \\ [T \rightarrow T^* F \bullet \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

44

Переход из  $Q_6$  по  $x$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T^* F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[T \rightarrow T^* \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

# Пример

45

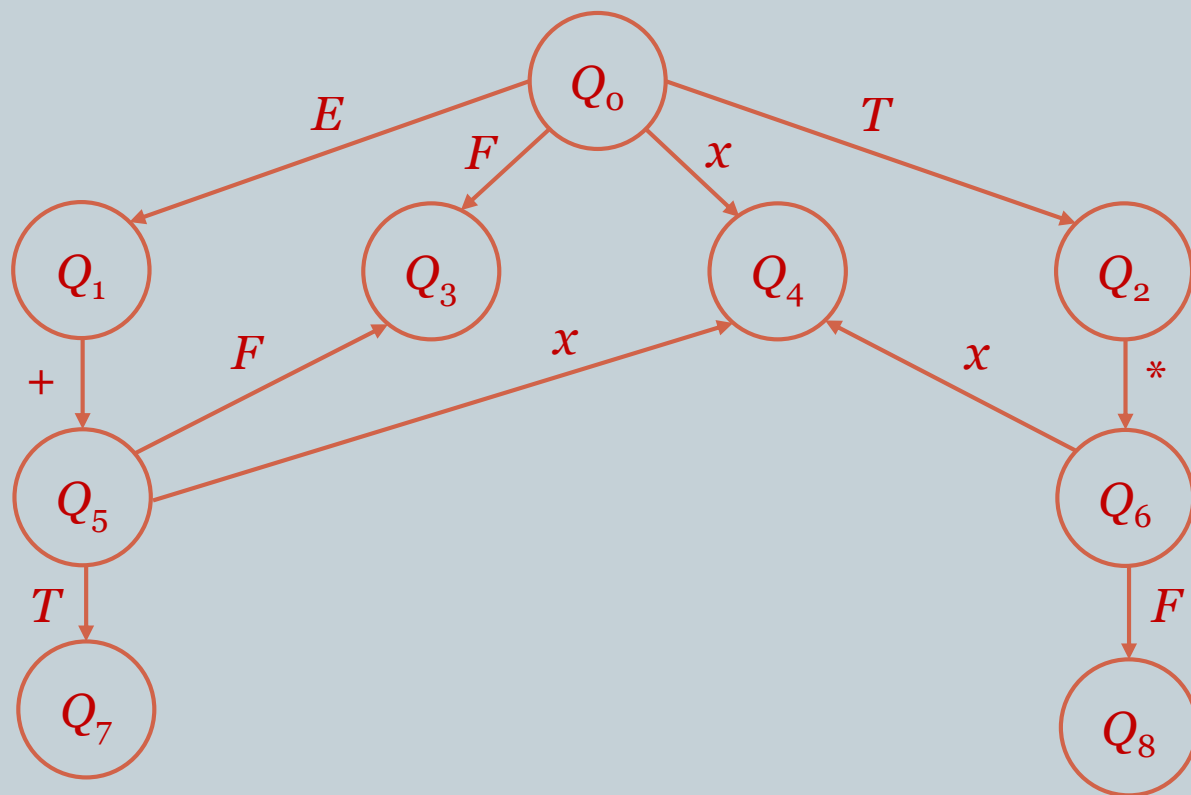
Переход из  $Q_6$  по  $x$ :

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), \\ (Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6), (Q_5, Q_7), \\ (Q_5, Q_3), (Q_5, Q_4), (Q_6, Q_8), (Q_6, Q_4)\}, \\ g((Q_6, Q_4)) = x.$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [F \rightarrow x \bullet \mid \perp] \\ [F \rightarrow x \bullet \mid +] \\ [F \rightarrow x \bullet \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

46



# Пример

47

Переходы из  $Q_7$ ,  $Q_8$ :

$$\begin{aligned} &[E \rightarrow E + T \bullet \mid \perp] \\ &[E \rightarrow E + T \bullet \mid +] \\ &[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp] \\ &[T \rightarrow T \bullet * F \mid +] \\ &[T \rightarrow T \bullet * F \mid *] \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &[T \rightarrow T * F \bullet \mid \perp] \\ &[T \rightarrow T * F \bullet \mid +] \\ &[T \rightarrow T * F \bullet \mid *] \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &E' \rightarrow E \\ &E \rightarrow E + T \\ &E \rightarrow T \\ &T \rightarrow T * F \\ &T \rightarrow F \\ &F \rightarrow x \end{aligned}$$

# Пример

48

Переход из  $Q_7$  по  $*$ :

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

$[E \rightarrow E + T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$



# Пример

49

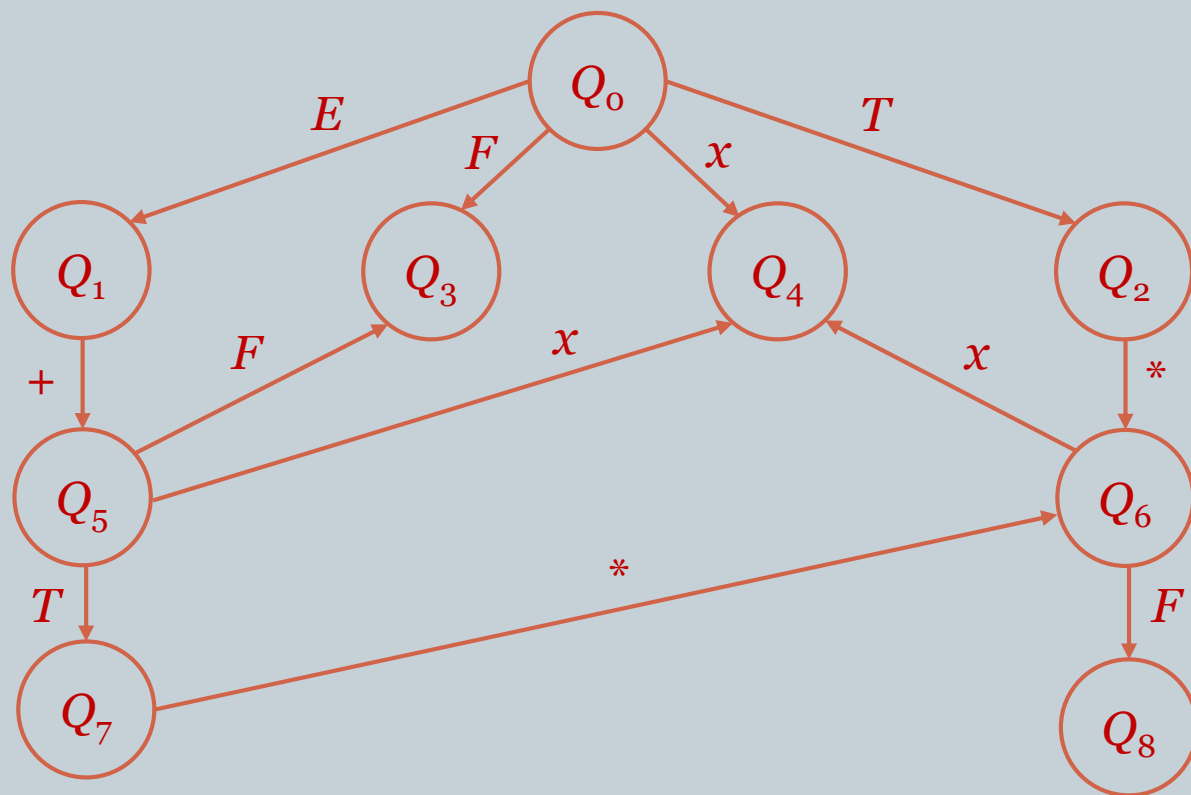
Переход из  $Q_7$  по  $*$ :

$$R = \{(Q_0, Q_1), (Q_0, Q_2), (Q_0, Q_3), \\ (Q_0, Q_4), (Q_1, Q_5), (Q_2, Q_6), (Q_5, Q_7), \\ (Q_5, Q_3), (Q_5, Q_4), (Q_6, Q_8), (Q_6, Q_4), \\ (Q_7, Q_6)\}, \\ g((Q_7, Q_6)) = F.$$

$$\begin{aligned} E' &\rightarrow E \\ E &\rightarrow E + T \\ E &\rightarrow T \\ T &\rightarrow T^* F \\ T &\rightarrow F \\ F &\rightarrow x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} [T \rightarrow T^* \cdot F \mid \perp] \\ [T \rightarrow T^* \cdot F \mid +] \\ [T \rightarrow T^* \cdot F \mid *] \\ [F \rightarrow \cdot x \mid \perp] \\ [F \rightarrow \cdot x \mid +] \\ [F \rightarrow \cdot x \mid *] \end{aligned}$$

# Пример

50



# Пример

51

$[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid +]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$Q_0$

$[E' \rightarrow E \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid +]$

$Q_1$

$[E \rightarrow T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

$Q_2$

$[T \rightarrow F \bullet \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid *]$

$Q_3$

$[F \rightarrow x \bullet \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow x \bullet \mid +]$   
 $[F \rightarrow x \bullet \mid *]$

$Q_4$

$[T \rightarrow T^* \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$Q_6$

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$Q_5$

$[E \rightarrow E + T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

$Q_7$

$[T \rightarrow T^* F \bullet \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* F \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* F \bullet \mid *]$

$Q_8$

# Пример

52

Грамматика с состояниями:

$$E' \rightarrow_0 E_1$$

$$E \rightarrow_0 E_1 +_5 T_7$$

$$E \rightarrow_0 T_2$$

$$T \rightarrow_{0,5} T_{2,7} *_6 F_8$$

$$T \rightarrow_{0,5} F_3$$

$$F \rightarrow_{0,5,6} x_4$$

# Построение таблицы разбора

53

Исходные данные:  $X = \Sigma \cup N$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $g$

Алгоритм:

1. Создаем таблицу из  $\#X+1$  столбца (по столбцу на каждый терминал  $a \in \Sigma$  и нетерминал  $A \in N$ , а также столбец для маркера конца цепочки « $\perp$ ») и  $\#Q$  строк (по одной на каждое состояние анализатора).
2. В каждую ячейку таблицы записываем элемент *ERROR*.

# Построение таблицы разбора

54

3. Для всех состояний  $Q_i \in Q$  выполняем следующие действия:

3.1. Если  $[A \rightarrow \alpha \cdot X_j \beta \mid a] \in Q_i$ , где  $A \in N'$ ,  $X_j \in X$ ,  $\alpha \in X^*$ ,  $\beta \in X^*$ ,  $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$ , а также  $(Q_i, Q_j) \in R$  и  $g((Q_i, Q_k)) = X_j$ , то  $T(Q_i, X_j) = Q_k$ .

3.2. Если  $[A \rightarrow \alpha \cdot \mid a] \in Q_i$ ,  $A \in N'$ ,  $\alpha \in X^+$ ,  $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$ , то:

а) если  $A = S'$  (и  $a = \perp$ ), то  $T(Q_i, a) = HALT$ ,

б) иначе  $T(Q_i, a) = R_k$ , где  $k$  – номер правила  $(A \rightarrow \alpha) \in P$  в грамматике, т.е.  $P_k = (A \rightarrow \alpha)$ .

# Построение таблицы разбора

55

## LR-конфликты:

- При попытке записать в ячейку сдвиг  $Q_i$ , обнаруживаем, что там уже содержится свёртка  $R_j$  (конфликт типа сдвиг-свёртка);
- При попытке записать в ячейку свёртку  $R_i$ , обнаруживаем, что там уже содержится сдвиг  $Q_j$  (конфликт типа свёртка-сдвиг);
- При попытке записать в ячейку сдвиг  $Q_i$ , обнаруживаем, что там уже содержится другой сдвиг  $Q_j$  (конфликт типа сдвиг-сдвиг);
- При попытке записать в ячейку свёртку  $R_i$  обнаруживаем, что там уже содержится другая свёртка  $R_j$  (конфликт типа свёртка-свёртка).

# Построение таблицы разбора

56

Конфликты типа «сдвиг-свёртка» и «свёртка-сдвиг» являются *разрешимыми*. В большинстве случаев предпочтительным является сдвиг.

Пример:

COND → **if** EXPR **then** CODE

COND → **if** EXPR **then** CODE **else** CODE



# Построение таблицы разбора

57

Конфликты типа «сдвиг-сдвиг» и «свёртка-свёртка» являются *неразрешимыми* и свидетельствуют об ошибках при составлении грамматики.

Пример:

$$S \rightarrow A S$$

$$S \rightarrow S A$$

$$S \rightarrow A S A$$

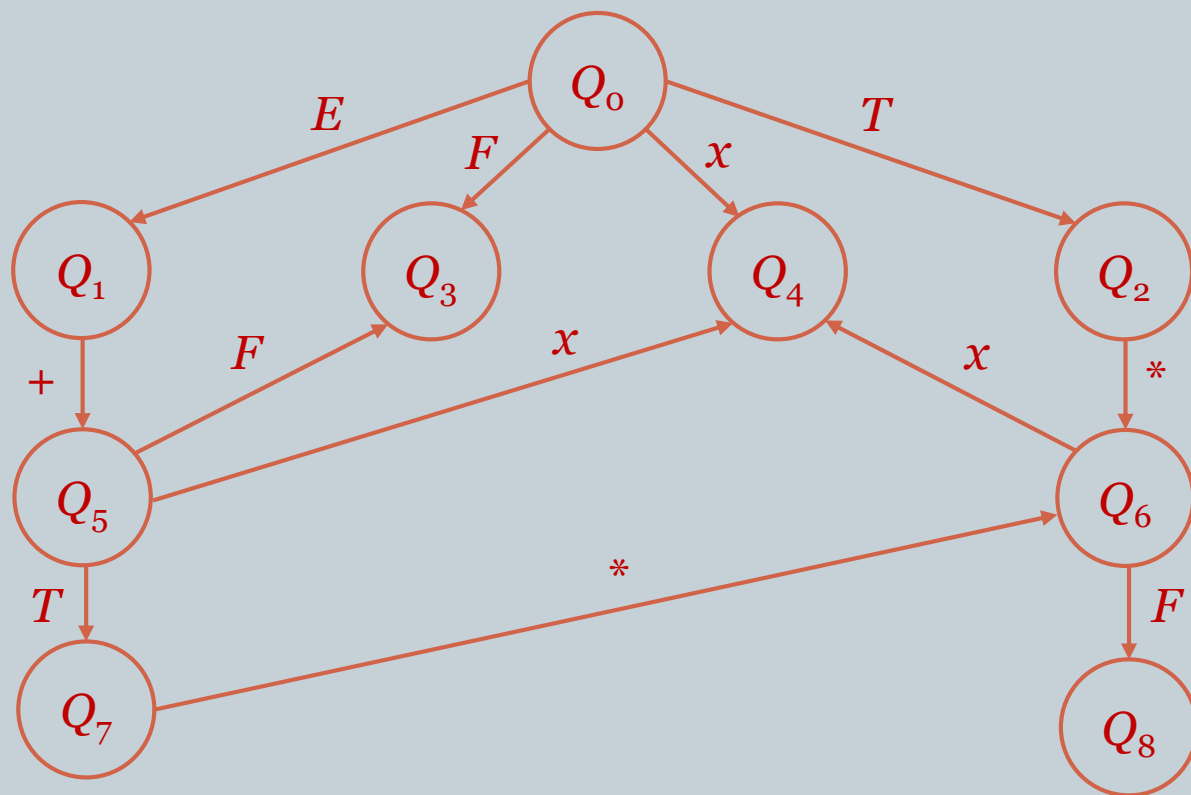
$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow a$$

$$A \rightarrow A A$$

# Пример

58



# Пример

59

	$E$	$T$	$F$	$+$	$*$	$x$	$\perp$
$Q_0$							
$Q_1$							
$Q_2$							
$Q_3$							
$Q_4$							
$Q_5$							
$Q_6$							
$Q_7$							
$Q_8$							

# Пример

60

	$E$	$T$	$F$	$+$	$*$	$x$	$\perp$
$Q_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_1$				$Q_5$			
$Q_2$					$Q_6$		
$Q_3$							
$Q_4$							
$Q_5$		$Q_7$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_6$			$Q_8$			$Q_4$	
$Q_7$					$Q_6$		
$Q_8$							

# Пример

61

$[E' \rightarrow \bullet E \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow \bullet E + T \mid +]$   
 $[E \rightarrow \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$Q_0$

$[E' \rightarrow E \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E \bullet + T \mid +]$

$Q_1$

$[E \rightarrow T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

$Q_2$

$[T \rightarrow F \bullet \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow F \bullet \mid *]$

$Q_3$

$[F \rightarrow x \bullet \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow x \bullet \mid +]$   
 $[F \rightarrow x \bullet \mid *]$

$Q_4$

$[T \rightarrow T^* \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$Q_6$

$[E \rightarrow E + \bullet T \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + \bullet T \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid +]$   
 $[T \rightarrow \bullet T^* F \mid *]$   
 $[T \rightarrow \bullet F \mid *]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid \perp]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid +]$   
 $[F \rightarrow \bullet x \mid *]$

$Q_5$

$[E \rightarrow E + T \bullet \mid \perp]$   
 $[E \rightarrow E + T \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid +]$   
 $[T \rightarrow T \bullet * F \mid *]$

$Q_7$

$[T \rightarrow T^* F \bullet \mid \perp]$   
 $[T \rightarrow T^* F \bullet \mid +]$   
 $[T \rightarrow T^* F \bullet \mid *]$

$Q_8$

# Пример

62

	$E$	$T$	$F$	$+$	$*$	$x$	$\perp$
$Q_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_1$				$Q_5$			
$Q_2$					$Q_6$		
$Q_3$							
$Q_4$							
$Q_5$		$Q_7$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_6$			$Q_8$			$Q_4$	
$Q_7$					$Q_6$		
$Q_8$							

# Пример

63

	$E$	$T$	$F$	$+$	$*$	$x$	$\perp$
$Q_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_1$				$Q_5$			$HALT$
$Q_2$				$R_2$	$Q_6$		$R_2$
$Q_3$				$R_4$	$R_4$		$R_4$
$Q_4$				$R_5$	$R_5$		$R_5$
$Q_5$		$Q_7$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_6$			$Q_8$			$Q_4$	
$Q_7$				$R_1$	$Q_6$		$R_1$
$Q_8$				$R_3$	$R_3$		$R_3$

# Разбор цепочки по таблице

64

Конфигурация LR-анализатора:

$$(Q_0 X_1 Q_1 X_2 Q_2 \dots X_m Q_m, a_i a_{i+1} \dots a_n \perp),$$

где:

- $Q_i \in Q, X_i \in X, a_i \in \Sigma;$
- $Q_0 X_1 Q_1 X_2 Q_2 \dots X_m Q_m$  – содержимое магазина;
- $\omega = X_1 X_2 \dots X_m a_i a_{i+1} \dots a_n$  – правая сентенциальная форма;
- $X_1 X_2 \dots X_m$  – активный префикс анализатора.



# Разбор цепочки по таблице

65

## Действия LR-анализатора

$$(Q_0 X_1 Q_1 X_2 Q_2 \dots X_m Q_m, a_i a_{i+1} \dots a_n \perp)$$

- Если  $T(Q_m, a_i) = Q_k$ , выполняется сдвиг:

$$(Q_0 X_1 Q_1 X_2 Q_2 \dots X_m Q_m a_i Q_k, a_{i+1} \dots a_n \perp).$$

- Если  $T(Q_m, a_i) = R_k$ , выполняется свёртка:

$$(Q_0 X_1 Q_1 X_2 Q_2 \dots X_{m-r} Q_{m-r}, a_i a_{i+1} \dots a_n \perp),$$

$$(Q_0 X_1 Q_1 X_2 Q_2 \dots X_{m-r} Q_{m-r} A Q_j, a_i a_{i+1} \dots a_n \perp),$$

где  $P_k = (A \rightarrow \alpha) \in P$ ,  $r = |\alpha|$ ,  $Q_j = T(Q_{m-r}, A)$ .

- Если  $T(Q_m, a_i) = HALT$  или  $ERROR$ , конец разбора.

# Пример

66

$$\alpha = x^*x+x\perp$$

	$E$	$T$	$F$	$+$	$*$	$x$	$\perp$
$Q_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_1$				$Q_5$			$HALT$
$Q_2$				$R_2$	$Q_6$		$R_2$
$Q_3$				$R_4$	$R_4$		$R_4$
$Q_4$				$R_5$	$R_5$		$R_5$
$Q_5$		$Q_7$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_6$			$Q_8$			$Q_4$	
$Q_7$				$R_1$	$Q_6$		$R_1$
$Q_8$				$R_3$	$R_3$		$R_3$

$E' \rightarrow E$   
 $E \rightarrow E + T$   
 $E \rightarrow T$   
 $T \rightarrow T * F$   
 $T \rightarrow F$   
 $F \rightarrow x$

# Пример

67

$$\alpha = x^*x+x\perp$$

$(Q_0, x^*x+x\perp)$

$(Q_0 \text{ x } Q_4, ^*x+x\perp)$

$(Q_0 \text{ F } Q_3, ^*x+x\perp)$

$(Q_0 \text{ T } Q_2, ^*x+x\perp)$

$(Q_0 \text{ T } Q_2 \text{ * } Q_6, x+x\perp)$

$(Q_0 \text{ T } Q_2 \text{ * } Q_6 \text{ x } Q_4, +x\perp)$

$(Q_0 \text{ T } Q_2 \text{ * } Q_6 \text{ F } Q_8, +x\perp)$

$(Q_0 \text{ T } Q_2, +x\perp)$

$(Q_0 \text{ E } Q_1, +x\perp)$

$(Q_0 \text{ E } Q_1 + Q_5, x\perp)$

$(Q_0 \text{ E } Q_1 + Q_5 \text{ x } Q_4, \perp)$

$(Q_0 \text{ E } Q_1 + Q_5 \text{ F } Q_3, \perp)$

$(Q_0 \text{ E } Q_1 + Q_5 \text{ T } Q_7, \perp)$

$(Q_0 \text{ E } Q_1, \perp)$

HALT

	<i>E</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	+	*	<i>x</i>	$\perp$
$Q_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_1$				$Q_5$			HALT
$Q_2$				$R_2$	$Q_6$		$R_2$
$Q_3$				$R_4$	$R_4$		$R_4$
$Q_4$				$R_5$	$R_5$		$R_5$
$Q_5$		$Q_7$	$Q_3$			$Q_4$	
$Q_6$			$Q_8$			$Q_4$	
$Q_7$				$R_1$	$Q_6$		$R_1$
$Q_8$				$R_3$	$R_3$		$R_3$

$E' \rightarrow E$

$E \rightarrow E + T$

$E \rightarrow T$

$T \rightarrow T^* F$

$T \rightarrow F$

$F \rightarrow x$