Теория игр — это раздел математической экономики, изучающий решение конфликтов между игроками и оптимальность их стратегий.
Конфликт может относиться к разным областям человеческого интереса: чаще всего это экономика, социология, политология, реже биология, кибернетика и даже военное дело.
Конфликтом является любая ситуация, в которой затронуты интересу двух и более участников, традиционно называемых игроками. Для каждого игрока существует определенный набор стратегий, которые он может применить. Пересекаясь, стратегии нескольких игроков создают определенную ситуацию, в которой каждый игрок получает определенный результат, называемый выигрышем, положительным или отрицательным. При выборе стратегии важно учитывать не только получение максимального профита для себя, но так же возможные шаги противника, и их влияние на ситуацию в целом.

Основы теории игр зародились еще в 18 веке, с началом эпохи просвящения и развитием экономической теории. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Первые концепции теории игр анализировали антагонистические игры, когда есть проигравшие и выигравшие за их счет игроки. Не смотря на то, что теория игр рассматривала экономические модели, вплоть до 50-х годов 20 века она была всего лишь математической теорией. После, в результате резкого скачка экономики США после второй мировой войны, и, как следствие, большего финансирования науки, начинаются попытки практического применения теории игр в экономике, биологии, кибернетике, технике, антропологии. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений. В начале 50-х Джон Нэш разрабатывает методы анализа, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Эти ситуации получили названия «равновесие по Нэшу».

Равновесие Нэша (англ. Nash equilibrium) названо в честь Джона Форбса Нэша — так в теории игр называется тип решений игры двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив своё решение в одностороннем порядке, когда другие участники не меняют решения. Такая совокупность стратегий выбранных участниками и их выигрыши называются равновесием Нэша.

Игра может иметь равновесие Нэша в чистых стратегиях или в смешанных (то есть при выборе чистой стратегии стохастически с фиксированной частотой). Нэш доказал, что если разрешить смешанные стратегии, тогда в каждой игре n игроков будет хотя бы одно равновесие Нэша.
По его теории, стороны должны использовать оптимальную стратегию, что приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение. Эти работы Нэша сделали серьезный вклад в развитие теории игр, были пересмотрены математические инструменты экономического моделирования. Джон Нэш показывает, что классический подход к конкуренции А.Смита, когда каждый сам за себя, неоптимален. Более оптимальны стратегии, когда каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других.

*Опр.:*Ситуации в которых эффективность принимает односторонние решения зависит от действий другой стороны, называются **конфликтными**.
Конфликт всегда связан с наличием разногласий.
Опр.: Конфликтная ситуация называется **антагонистической**, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приведет к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину, и наоборот.
Теория игр занимается выработкой рекомендаций по рациональному образу действий участников **многократно** повторяющегося конфликта.
Игра представляет собой математическую модель реальной конфликтной ситуации, анализ которой ведется по определенным правилам. Они позволяют установить последовательность, объем имеющейся информации у одной стороны о поведении другой, результат игры.
В зависимости от числа участников игры подразделяются на **парные** и **многочисленные**. Участники множественной игры могут образовывать коалиции. Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.
Стороны , участвующие в игре, называются **игроками**. Иногда под игроком понимается природа, формирующая условия, в которых необходимо принимать решения.

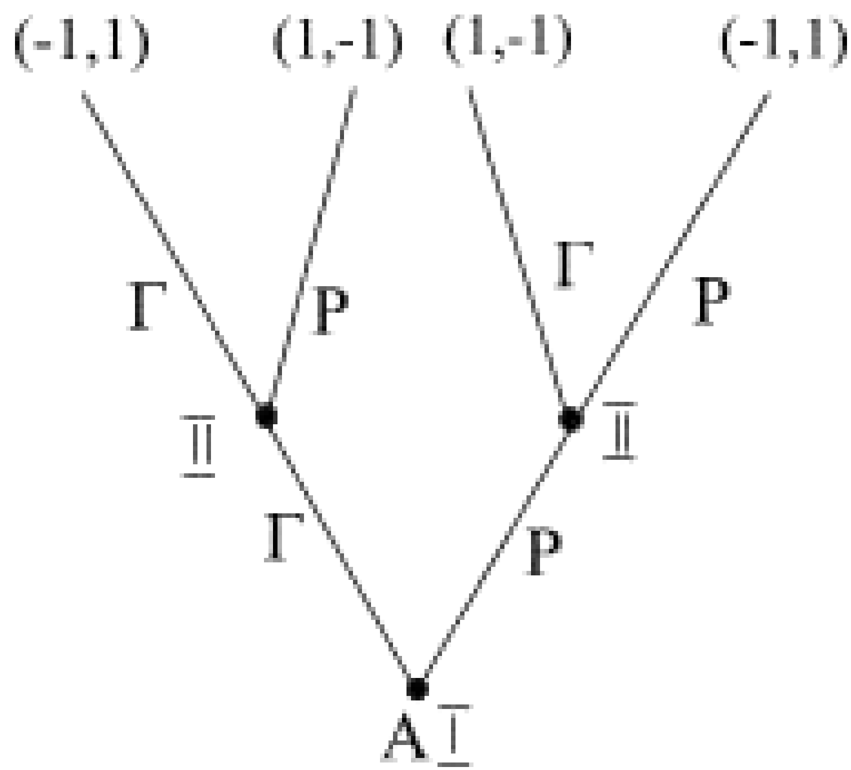
Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе игрока в зависимости от ситуации, оговаривается в процессе игры. Фактически, число стратегий совпадает с числом вариантов действий.
Игра называется **конечной** , если число стратегий игроков конечно и **бесконечной** , если хотя бы у одного из игроков число ситуаций является бесконечным.
Стратегия игрока называется **оптимальной** , если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от поведения противника.
Выбор одной из предусмотренных правилами игры стратегий и ее осуществление называется **ходом** . Ходы бывают личные и случайные. Ход называется **личным**, если игрок сознательно выбирает один из возможных вариантов действий и осуществляет его (ход в шахмотах, шашках). Ход называется **случайным**, если выбор производится не игроком, каким-либо механизмом случайной выборки (бросание монеты).

В зависимости от цели исследования любую игру можно рассматривать в развернутой(позиционной) или в нормальной (частный случай - матричной) форме.
В развернутой форме лучше раскрывается последовательность событий, она более наглядна для многоходовых игр. Здесь показываются очередности ходов игроков, их информативность и выигрыш. Недостатком этой формы представления является сложность решения.
Нормальная форма игры менее наглядна. Однако, большинство методов нахождения решений разработано именно для этой формы.

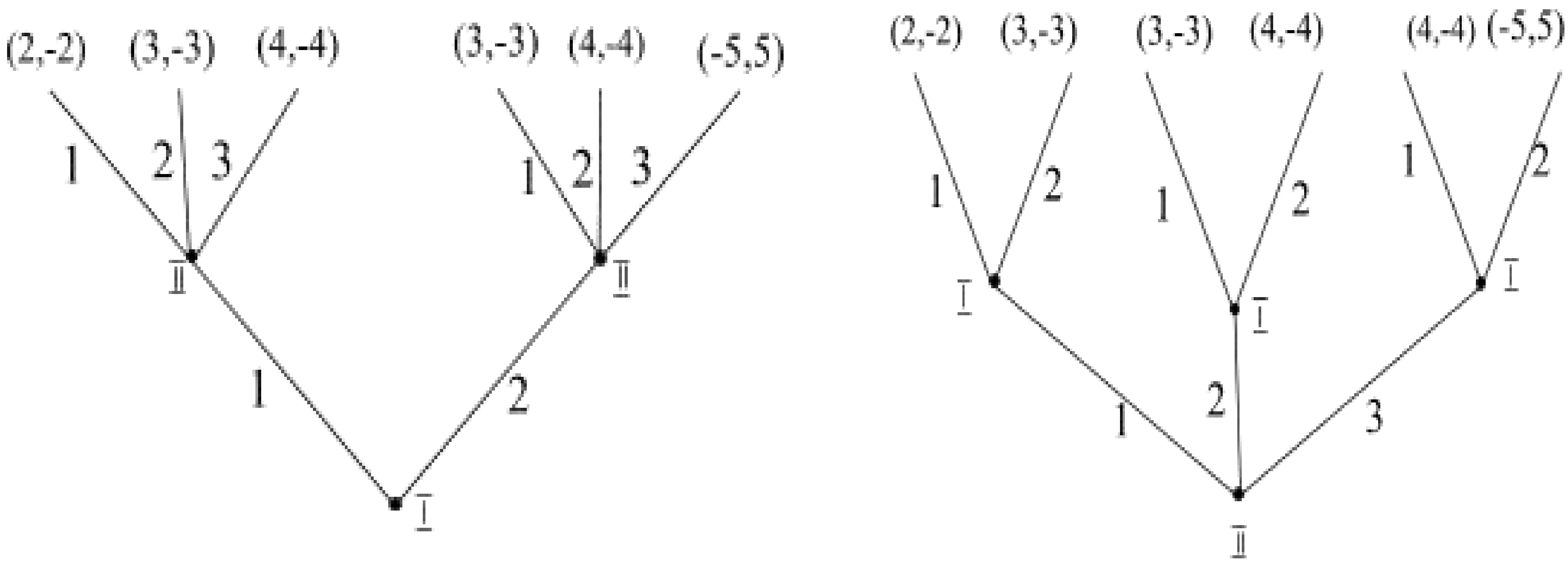
Развернутая форма представляет игру в виде дерева, имеющего структуру:

1. Начальная точка – исходная позиция игры;
2. Ребра, исходящие из одной и той же вершины называются **альтернативными**. Каждое ребро соответствует ходу игрока;
3. Вершины, имеющие хотя бы одну альтернативу, называются промежуточными;
4. Вершины не имеющие ни одной альтернативы называются конечными и означают конец игры; возле каждой конечной вершины записывается вектор $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ определяющий выигрыш игроков в данной позиции;
5. Множество всех промежуточных вершин разбивается на N + 1 множество ,которые называются $I_1, I_2, \dots, I_N$ множествами очередностей. В множестве I_i – ходит i-ый игрок, I_0 очередь хода случая. Для каждой позиции из I_0 указывается вероятность выбора альтернатив;
6. Нециклический путь от начала дерева до любой окончательной позиции называется **партией**.

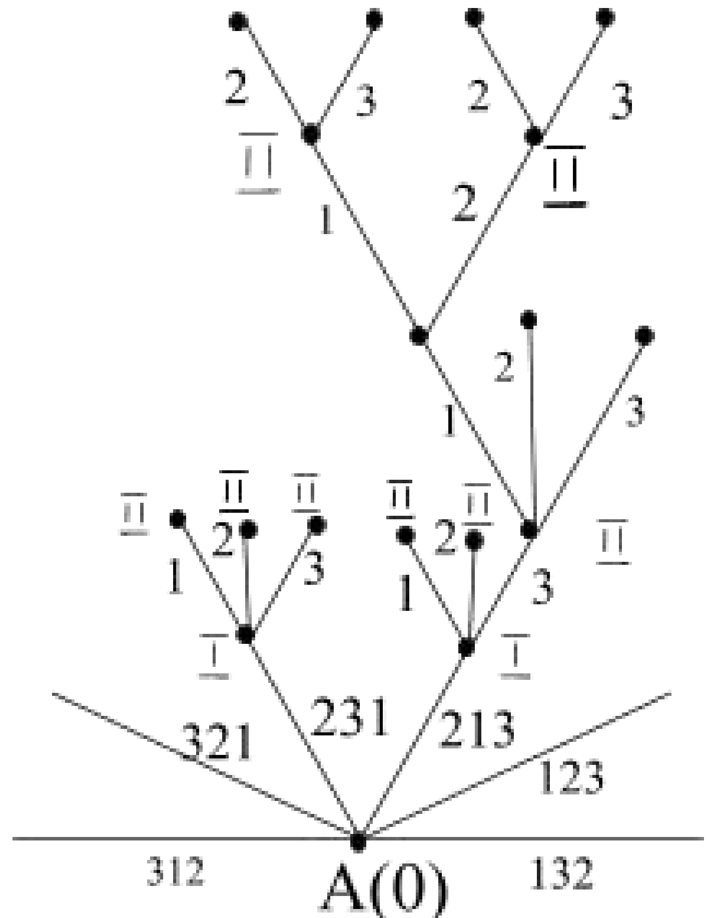
Пример 1: В игре в орлянку игрок I выбирает решетку (Р) или герб(Г). Игрок II не зная выбора игрока I так же выбирает решку или герб. Если оба противника совершают одинаковый выбор, то игрок II выигрывает единицу у игрока I. В противном случае I выигрывает единицу у игрока II. На рисунке показано дерево игры.



Пример 2: Пусть игрок I имеет две, а игрок II – три фишки. Независимо и тайно друг от друга игроки откладывают произвольное число фишек. Если при этом суммарное количество отложенных фишек окажется четным, то их выигрывает игрок I, в противном случае фишки выигрывает игрок II. В данной задаче игрок I имеет две, а игрок II – три стратегии. Как и в предыдущем примере, здесь нет случайного хода.



Пример 3: Каждому из двух игроков сдается по три карты одинаковой масти. Три карты третьей масти тасуются и затем открываются по очереди. Каждый раз когда карта открыта, оба игрока по своему желанию открывают, наудачу какую-то одну из своих карт. Тот кто открыл старшую выигрывает третью. Если оба игрока открыли карты одинакового достоинства, никто не выигрывает. После этого каждый игрок подсчитывает количество очков на картах, которые он выиграл. Счет ведется по разностям выигрышей игроков. В этой игре есть один случайный ход – тасование, которое упорядочивает карты одним из шести способов



Определение матричной игры.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \\ x_3 \rightarrow \\ \cdots \\ x_m \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\| = A \end{array}$$

Опр.: Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечное множество стратегий, называются **матричными**.

Так как игра конечна, то множество стратегий X и Y конечны. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Элементы декартова произведения $X \cdot Y$(пары стратегий (x, y)) называются **ситуациями** , функция K(x, y) – функция выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) полагается равным [–K(x, y)]. Такая игра называется игрой с нулевой суммой. В ней игроки одновременно и независимо выбирают стратегии x и y . После этого первый игрок получает выигрыш, равный K(x, y), а игрок 2 – [–K(x, y)]

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \\ x_3 \rightarrow \\ \cdots \\ x_m \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = \left\| a_{ij} \right\| = A$$

a_{ij}- соответствует выигрышу игрока I в ситуации .

Выигрыш второго игрока -a_{ij}.

Матричные игры являются самыми простыми из класса антагонистических игр.

Пример: Игроки 1 и 2 выбирают целые числа i и j между 1 и n, при этом игрок 1 выигрывает величину |i – j|. Игра антагонистическая. Матрица выигрышей этой игры квадратная, размером $(n \times n)\, a_{ij} = |i - j|$. При n = 4

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Решение матричных игр двух лиц с нулевой суммой

Рассмотрим игру $m \times n$ с платежной матрицей

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Следует определить наилучшую стратегию игрока I среди стратегий A_i, и игрока II среди стратегий B_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Определение наилучших стратегий игроков основано на принципе, который предполагает, что противники, участвующие в игре, одинаково разумны и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.
Найдем наилучшую стратегию игрока I.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \\ x_3 \rightarrow \\ \cdots \\ x_m \rightarrow \end{matrix} &
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
= \left\| a_{ij} \right\| = A
\qquad
A_2 = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (2) \leftarrow \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} (3) & 4 & (5) \\ \uparrow & & \end{matrix} &
\end{array}
$$

Найдем наилучшую стратегию игрока 1. Из принципа – выбрать наилучшее решение из наихудших ситуаций. То есть смотрим в строке для данной стратегии xi наихудший выигрыш, затем среди полученных значений выбираем стратегию, которой соответствует наилучший из наихудших. Так называемый принцип минимакса. Можно это назвать безрисковым гарантированным выигрышем или нижней ценой игры.

$$\underline{V} = \max_i \min_j a_{ij}$$

Игрок 2 старается обеспечить игроку 1 наименьший выигрыш исходя из самой неблагоприятной для него ситуации, то есть когда выигрыш игрока 1 максимален, он в столбце своей стратегии выбирает максимальные значение и из них тот столбце где достигается минимальный из максимальных

$$\overline{V} = \min_j \max_i a_{ij} \longrightarrow$$

Верхняя цена игры

$$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -3 \\ (2) \leftarrow \end{matrix} \quad \underline{V} = 2 \quad \overline{V} = 2 \quad \underline{V} = \overline{V}$$

$$\begin{matrix} 5 & (2) & 4 \\ & \uparrow & \end{matrix}$$

Отклонение одностороннее от минимаксной и максиминной стратегий невыгодно игрокам.

Опр.: Если $V = \underline{V} = \overline{V}$, то минимаксная или максиминная стратегии называются **оптимальными стратегиями игроков**,

$V = \underline{V} = \overline{V}$ **называется** значениями или **ценой** игры.

теорема: для того чтобы игра А имела седловую точку, необходимо и достаточно

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

$$A_4 = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 4 & (2) & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & (2) & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2 \leftarrow \\ 1 \\ 2 \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 4 & (2) & 5 \\ & \uparrow & \end{array} & \end{array}$$

Здесь нет седловых точек! По субъективной оценке игрока I его первая стратегия лучше второй в два раза. Тогда он может смешивать с вероятностями 2/3 и 1/3, т.е. выбрать не первую и не вторую, а вектор $S_1 = (2/3, 1/3)$. В этом случае средний выигрыш первого игрока составит

$$\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot (-3) = \frac{1}{3}$$

Число 1/3 называется ожидаемым выигрышем игрока I при использовании смешанной стратегии $S_1 = (p_1, p_2)$. Этот результат соответствует розыгрышу игры из большого числа партий.

Первый игрок может смешивать свой стратегии с любыми вероятностями $S_1 = (p_1, p_2)$. В результате, вместо двух первоначальных стратегий (1,0) и (0,1) оказывается бесконечное множество стратегий вида $S_1 = (p_1, p_2)$

Аналогично может рассмотреть свои возможности второй игрок $S_2 = (q_1, q_2, q_3)$

Первого игрока, за которого мы будем принимать решения, будет представлять Samsung со своим Galaxy S5. Вторым игроком, играющим «природу», будет компания Apple, и его iPhone 6.
Подходит время выпуска нового смартфона, прошла презентация, эксперты высказали свое мнение, и игрок один должен принять важное решение, когда выпустить продукт? Упростив ситуацию, у нас останется три варианта: до конкурента (A1), вместе с ним (A2) или после (A3). Естественно, пока не выйдет новый iPhone мы не узнаем, будет он намного лучше нашего (B1), таким же (B3) или сильно уступающим в качестве (B3). Посчитав прибыль во всех случаях, в итоге получим матрицу:

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	5	7
A_2	3	4	6
A_3	2	4	8

Критерий Вальда (максиминный). Игрок рассчитывает, что природа пойдет по наихудшему для него пути, и следует выбрать вариант с максимальной прибылью при самом плохом исходе, поэтому данный критерий считается пессимистическим. Представить его можно в виде max (min i)

При данном критерии:

для A1 минимальной прибылью (5) выльются действия природы B1 и B2

для A2 минимальная прибыль 3 после действия B1

для A3 минимальная прибыль 2 после действия B1

Таким образом из 5, 3 и 2 максимум прибыли (5) нам даст вариант A1

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	5	7
A_2	3	4	6
A_3	2	4	8

2. Критерий максимума (максимаксный) является оптимистическим, т.е. мы надеемся на самый благоприятный для нас исход.представляется как max (max i).
для А1 максимальная прибыль 7
для А2 максимальная прибыль 6
для А3 максимальная прибыль 8
Из 7, 6 и 8 максимальную прибыль принесет вариант А3

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	5	7
A_2	3	4	6
A_3	2	4	8

3. Критерий Гурвица рекомендует стратегию, определяемую по формуле max (A*max i + (1-A)*min i), где A — степень оптимизма и изменяется в пределах от 0 до 1. Критерий выдает результат, учитывающий возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При A=1 данный критерий можно заменить критерием максимума, а при A=0 — критерием Вальда. Величина A зависит от степени ответственности игрока один: чем она выше, тем ближе A к единице. Для данного примера примем A=0,4.

для A1 прибыль равна 0,4*7 + 0,6*5 = 5,8

для A2 прибыль равна 0,4*6 + 0,6*3 = 4,2

для A3 прибыль равна 0,4*8 + 0,6*2 = 4,4

Из полученных ответов максимыльную прибль приносит действие A1

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	5	7
A_2	3	4	6
A_3	2	4	8

4. Критерий Сэвиджа (минимаксный). Суть его заключается в выборе стратегии, не допускающей слишком высоких потерь. Для этого используется матрица рисков, в которой вычисляется максимальная прибыль при каждом варианте действия игрока, и среди результатов выбирается наименьший. Его формула выглядит как min (max i)

При данном критерии:

для A1 максимальной прибылью (7) выльется действие природы B3

для A2 максимальная прибыль 6 после действия B3

для A3 максимальная прибыль 8 после действия B3

Таким образом из 7, 6 и 8 минимум прибыли (6) нам даст вариант A2

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	5	7
A_2	3	4	6
A_3	2	4	8

5. По критерию Байеса предлагается придать равные вероятности всем рассматриваемым стратегиям, после чего принять ту из них, при которой ожидаемый выигрыш окажется наибольшим. Критерий имеет один недостаток: не всегда можно точно определить вероятность того или иного события со стороны природы. Формулой для него является max (Σ q*i).

Сначала мы положили вероятность наступления каждого из собитий природы равной 0,33, и получили

для А1 5*0,33 + 5*0,33 + 7*0,33 = 5,61

для А2 3*0,33 + 4*0,33 + 6*0,33 = 4,29

для А3 2*0,33 + 4*0,33 + 8*0,33 = 7,63

Очевидно что максимальную прибыль мы получим от варианта А3. Однако, обратившись к экспертам, мы получили вероятности событий для природы 0,5; 0,4; 0,1; соответственно. Таким образом

для А1 5*0,5 + 5*0,4 + 7*0,1 = 5,2

для А2 3*0,5 + 4*0,4 + 6*0,1 = 3,7

для А3 2*0,5 + 4*0,4 + 8*0,1 = 3,4

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	5	7
A_2	3	4	6
A_3	2	4	8

Основная задача состоит в том, чтобы найти оптимальные (или хотя бы рациональные) стратегии, наилучшим образом приводящие систему к цели при заданных внешних условиях. Для выбора стратегий в условиях неопределенности можно применять любые критерии, в условиях риска действеннее критерий Байеса. Однако выбор между самими критериями основывается обычно на интуиции, зависит от характера принимающего решение (в частности, его склонности к риску).

Если решение принимается в условиях неопределенности, то лучше использовать несколько критериев. В том случае, если рекомендации совпадают, можно с уверенностью выбирать наилучшее решение. Если рекомендации противоречивы, решение надо принимать более взвешенно, с учетом сильных и слабых сторон.