Лекция 14

Операторный метод (продолжение)

Операторное исчисление

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad p>0 \quad (p \in \mathbb{C} \text{ или } \operatorname{Re} p > 0)$$

оригинал — образ, преобразование Лапласа

Пример $1 \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

Определение Скажем, что $f \in \mathcal{O}$ (множество оригиналов), если

а) f задана на $\mathbb{R}$, $f \equiv 0$ на $(-\infty, 0)$;

б) $\forall T$ на $[0, T]$ не более, чем конечное число точек разрыва, все они I рода („точки скачка");

в) $\exists M > 0,\ s_0 \geq 0$: $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$ $\forall t$, s_0 — показатель роста.

Таблица оригиналов и изображений

$f(t) \risingdotseq F(p)$	
1	$1/p$
$e^{-\alpha t}$	$1/(p+\alpha)$
$\cos\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
$\operatorname{ch}\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\operatorname{sh}\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
t^n	$n!\,p^{-(n+1)}$

вычисли непосредственно

по св-ву 4°

по св-ву 1°+4°

$$\cos\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha} + \frac{1}{p+i\alpha}\right) = \frac{p}{p^2+\alpha^2}$$

$$\operatorname{ch}\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$t^n = (-1)^n(-t)^n \risingdotseq (-1)^n\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = n!\,p^{-n-1}$$

по свойству 1°+6°

Свойства преобразования $f(t) \risingdotseq F(p)$.

1° $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \risingdotseq \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ (линейность)

2° $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a>0$ (подобие)

3° $f(t-b) \risingdotseq e^{-pb} F(p)$, $b>0$ (запаздывание оригинала)

4° $e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$ (смещение изображения)

5° $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0+)$, если $f, f' \in O$ (диффер-ие оригинала)

$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0+) - f'(0+)$, если $f, f', f'' \in O$

6° $(-t) f(t) \risingdotseq F'(p)$ (диффер-ие образа)

7° $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$ (интегрирование оригинала)

8° $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} F(u) du$ (интегрирование образа)

Свертка функций

$$f(t),\ g(t) \longrightarrow (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,g(t-s)\,ds \quad (1)$$ свёртка

Для каких f и g имеет смысл интеграл (1)?

Утверждение Пусть $f, g \in \mathcal{O}$. Тогда интеграл (1) определён,

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds. \quad (2)$$

Действительно, $f(s)\,g(t-s) \neq 0 \iff s>0$ и $\overbrace{t-s>0}^{t>s}$, i.e. $0<s<t$

Примеры $$1*t = \int_0^t (t-s)\,ds = t\underbrace{\int_0^t ds}_{t} - \underbrace{\int_0^t s\,ds}_{t^2/2} = \frac{t^2}{2}$$

$$t*t = \int_0^t s(t-s)\,ds = t\underbrace{\int_0^t s\,ds}_{\frac{t^2}{2}} - \underbrace{\int_0^t s^2\,ds}_{\frac{t^3}{3}} = \frac{1}{6}t^3$$

Свойства свёртки

1) $f*g = g*f$ (симметричность)

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(s)g(\underbrace{t-s}_{=u})ds = -\int_t^0 f(t-u)g(u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = (g*f)(t)$$

$t-s=u$, $s=t-u$, $du=-ds$

Примеры $1*t = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}$; $1*f(t) = \int_0^t f(s)ds$ – первообразная функции f, равная 0 при $t=0$.

2) $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1(f_1*g) + \alpha_2(f_2*g)$ (линейность)

3) Пусть f – оригинал с показателем роста α_1, т.е. $f\in O_{\alpha_1}$, и пусть аналогично $g\in O_{\alpha_2}$. Тогда $f*g\in O_{\alpha}$, $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$.

Напоминание: $f\in O_{\alpha_1} \Rightarrow |f(t)|\le M_1 e^{\alpha_1 t}$, $M_1>0$, $\alpha_1\ge 0$

Пусть для определенности $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Тогда

$$|(f*g)(t)| \leq \int_0^t \underbrace{|f(s)\, g(t-s)|}_{\leq M_1 e^{\lambda_1 s} M_2 e^{\lambda_2 (t-s)} = M_1 M_2 e^{\lambda_2 t} e^{(\lambda_1-\lambda_2)s}} ds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 e^{\lambda_2 t} \underbrace{\int_0^t e^{(\lambda_1-\lambda_2)s} ds}_{\left.\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)s}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|_{s=0}^{s=t}} =$$

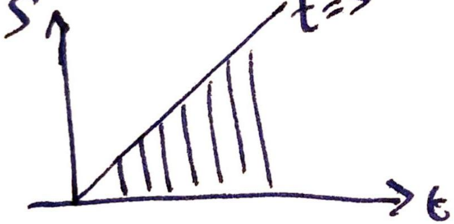
$$= M_1 M_2 e^{\lambda_2 t}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} - 1\right)\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \leq \frac{M_1 M_2}{\lambda_1-\lambda_2} e^{\lambda_2 t} e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} =$$

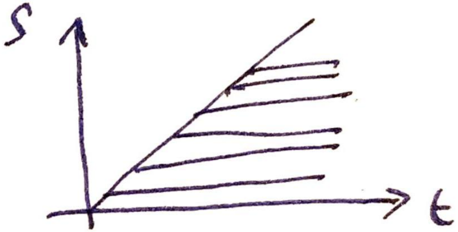
$$= \frac{M_1 M_2}{\lambda_1-\lambda_2} e^{\lambda_1 t}.$$

4) Пусть $f, g \in O$, $f \fallingdotseq F$, $g \fallingdotseq G$. Тогда
$$(f*g)(t) \fallingdotseq F(p)\,G(p)$$

Теорема Бореля.

Док-во. $(f*g)(t) \fallingdotseq \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds\right)dt =$





$$= \int_0^\infty \Big(\underbrace{\int_s^\infty g(t-s)e^{-pt}\,dt}_{=\,e^{-sp}G(p)\ \text{(св-во 3° запаздывание оригинала)}}\Big) f(s)\,ds = G(p)\overbrace{\int_0^\infty e^{-sp} f(s)\,ds}^{F(p)}$$

Пример: $\frac{1}{(p^2+1)^2} \fallingdotseq \sin t * \sin t = \int_0^t \underbrace{\sin\tau\,\sin(t-\tau)}_{\frac12(\cos(2\tau-t)-\cos t)}\,d\tau = \frac12\left[\frac{\sin(2\tau-t)}{2}\Big|_0^t - t\cos t\right]$

$$= \frac12\left[\frac{\sin t}{2} - \frac{\sin(-t)}{2} - t\cos t\right] = \frac{\sin t - t\cos t}{2}$$

Аналогично

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \cos t * \sin t = \ldots\ldots$$

$$\frac{p^2}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \cos t * \sin t = \ldots\ldots$$

Но: $\dfrac{p^3}{(p^2+1)^2} \risingdotseq\ ?$ (Теорема Бореля не работает!)

Хотелось бы продолжить формулу $\longrightarrow pF(p)G(p) \risingdotseq \ldots\ldots$

5) $$pF(p)G(p) \risingdotseq (f' * g)(t) + f(0+)\,g(t)$$

или

$$pF(p)G(p) \risingdotseq (g' * f)(t) + g(0+)\,f(t)$$

формулы Дюамеля

Док-во $$pF(p)G(p) = \underbrace{\left(pF(p) - f(0+)\right)}_{\risingdotseq f'(t)}G(p) + f(0+)G(p) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq (f' * g)(t) + f(0+)\,g(t)$$

или

$$pF(p)G(p) = \underbrace{\left(pG(p) - g(0+)\right)}_{\risingdotseq g'(t)}F(p) + g(0+)F(p) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq (g' * f)(t) + g(0+)\,f(t)$$

Примеры а) $\frac{p^3}{(p^2+1)^2} = p\frac{p}{p^2+1}\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq (\cos t)' * \cos t + \cos 0 \cdot \cos t =$

$= \cos t - \sin t * \cos t = \ldots$

б) $\frac{p}{(p-1)(p-2)} = p\underset{\substack{\parallel \\ e^t}}{\frac{1}{p-1}}\underset{\substack{\parallel \\ e^{2t}}}{\frac{1}{p-2}} \risingdotseq (e^t)' * e^{2t} + e^0 \cdot e^{2t} =$

$= e^t * e^{2t} + e^{2t} =$

$= \int_0^t e^{2s} e^{t-s} ds + e^{2t} = e^t \underbrace{\int_0^t e^s ds}_{e^t - 1} + e^{2t} = 2e^{2t} - e^t$

Другой метод: $\frac{p}{(p-1)(p-2)} =$

$= \frac{2}{p-2} - \frac{1}{p-1} \risingdotseq 2e^{2t} - e^t$

Схема Дюамеля

$$Ly := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_{n-1} y' + a_n y,$$ a_i постоянны.

$$(1)\ \begin{cases} Lx = f(t) \\ x(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} Lz = 1 \\ z(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} (2)$$

$$x \risingdotseq \overline{x},\ x' \risingdotseq p\overline{x}, \dots, x^{(n)} \risingdotseq p^n \overline{x}$$

$$(\underbrace{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}_{\Psi(p)\text{ – хар. мн-н оператора } L})\overline{x} = F(p)$$

Аналогично

$$\Psi(p)\overline{z} = \frac{1}{p}$$

$$\overline{z} = \frac{1}{p\Psi(p)}$$

$$\overline{x} = \frac{F(p)}{\Psi(p)} = \underbrace{\frac{1}{p\Psi(p)}}_{\risingdotseq z(t)} pF(p) \risingdotseq (z' * f)(t) + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{z(0+)} f(t)$$

Итог: Решение задачи Коши (1) определяется как

$$\boxed{x(t) = (z' * f)(t), \text{ где } z(t) \text{ – решение } (2)}$$

Алгоритм решения Задачи Коши (1) $\begin{cases} Lx = f(t) \\ + \\ \text{нулевые } \Delta \text{К} \end{cases}$ Δ Коши данные

Шаг 1 Решить задачу Коши (2) $\begin{cases} Lz = 1 \\ + \\ \text{нулевые } \Delta \text{К} \end{cases}$

Шаг 2 Найти $z'(t)$

Шаг 3 Взять свёртку $(z' * f)(t) = x(t)$

Пример $\begin{cases} x'' - x = e^t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} z'' - z = 1 \\ z(0) = z'(0) = 0 \end{cases}$

1) $z = \underbrace{\operatorname{ch} t}_{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})} - 1$; 2) $z' = \operatorname{sh} t$; 3) $x = \underbrace{\operatorname{sh} t}_{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})} * e^t =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (e^s - e^{-s}) e^{t-s} ds = \frac{e^t}{2}\int_0^t (1 - e^{-2s}) ds = \frac{e^t}{2}\left(t - \frac{e^{-2s}}{-2}\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{e^t}{2}\left(t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}\right) = \frac{te^t}{2} + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{4} = -\frac{1}{2}\operatorname{sh} t + \frac{1}{2}te^t$$