Понятие о ДУ. Задачи, приводящие к ДУ.

1

Раньше: найти числа x, т.ч.

$2x+4=0 \quad (x=-2)$

$x^2-x-2=0 \quad \left(x_{1,2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}\right)$

$\sin x=0 \quad (x_n=\pi n,\ n\in\mathbb{Z})$

и т.д.

Теперь: найти функцию $y=y(x)$, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, т.ч.

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0,\quad n\geq 1 \qquad (1)$$

ДУ n-ого порядка

$F(x,y,y')=0$ — ДУ $1^{го}$ порядка

$y'=f(x,y)$ — ДУ, разрешённое относительно производной

Примеры 1) $\underbrace{y'=g(x)}_{\text{задана}}$, $y=\int g(x)\,dx$

$y'=4x$ (а), $y'=\cos x$ (б), $y'=\sin 2x$ (в)

2) $y'=y$

3) $y''+y=0 \Leftrightarrow y''=-y$

2/ Ответ: 2) $y = Ce^x,\ C \in R$; 3) $y = A\cos x + B\sin x;\ A, B \in R$

Как возникают ДУ?

$\boxed{\text{ДУ возникают, когда физические (геометрические) законы, выраженные словесно, переводят на язык математических формул.}}$

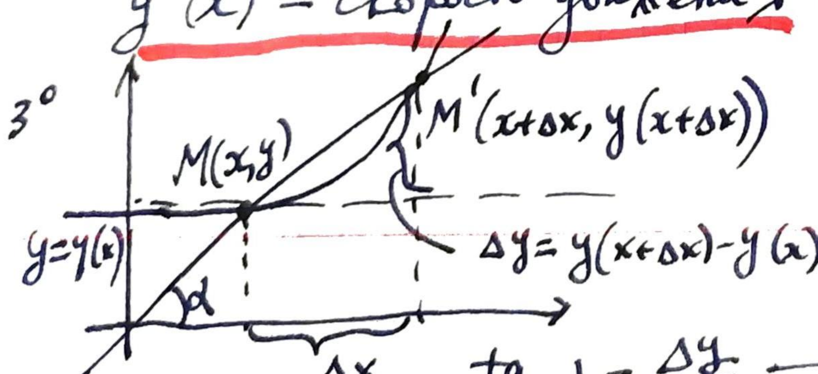
Напоминание из Мат. Анализа

1° $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Если x – время, то $y'(x)$ – мгновенная скорость изменения $y(x)$

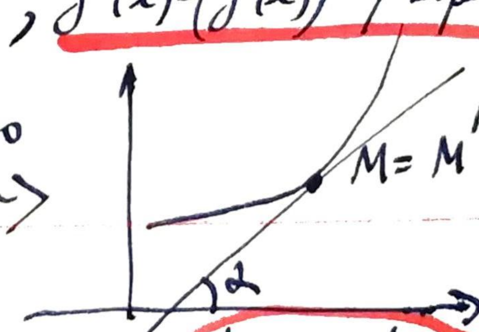
2° Если $y(x)$ – расстояние, пройденное в момент времени x, то $y'(x)$ – скорость движения в момент x; $y''(x) = (y'(x))'$ – ускорение...

3°



$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} y'(x)$

$\Delta x \to 0$



$\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$!

Задачи на составление ДУ

Пример 1 (распад радия)

$m(t) = ?$

Скорость распада Ra пропорциональна наличной массе.

$$m'(t) = \underbrace{-k}_{k>0}\, m(t)\ ; \quad m(t) = e^{-kt} \underset{m(0)}{\underset{\parallel}{C}}$$

T – период полураспада: $\underset{e^{-kT}\cancel{m(0)}}{\underset{\parallel}{m(T)}} = \frac{1}{2}\cancel{m(0)}$; $e^{-kT} = \frac{1}{2}$; $\ln\frac{1}{2} = -kT$

$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

Пример 2 (остывание нагретого тела)

Скорость остывания нагретого тела в окружающей среде с постоянной температурой ($t_{окр.} = 20^\circ$) пропорциональна разности температур тела и $t_{окр}$

$T(t) = ?$ $\quad \underset{(T-20)'}{\underset{\parallel}{T'}} = \underbrace{-k}_{k>0}(T-20)$

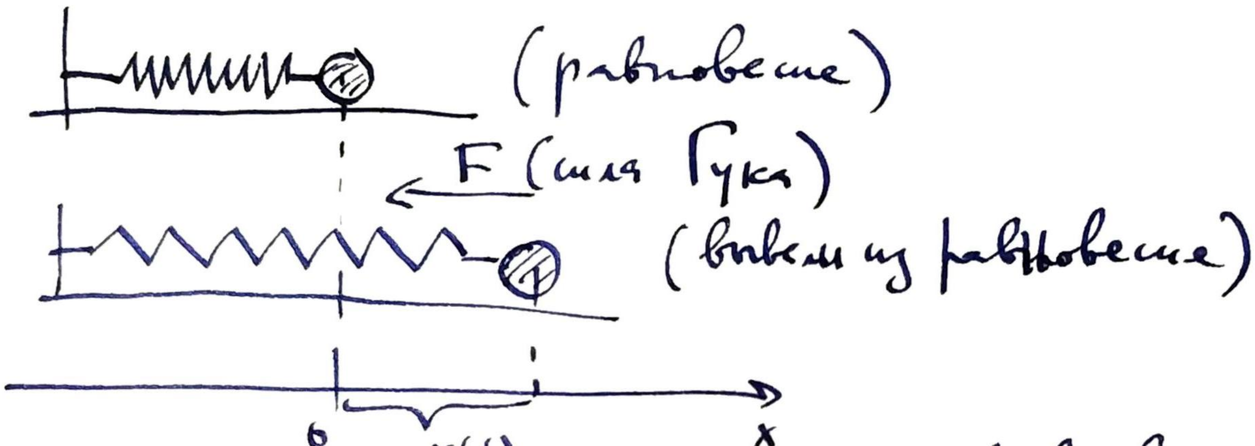
$\theta = T-20$, $\theta' = -k\theta$, $\theta(t) = e^{-kt}\theta(0)$

$T(t) = 20 + e^{-kt}(T(0) - 20)$

Мысленный эксперимент: $T(0) = 100^\circ$, $T(\frac{1}{12}) = 80^\circ$

Вопрос: Через какое время t_0 $T(t_0) = 50^\circ$?

Пример 3 (колебания маятника)



$x(t)$ — отклонение от равновесия

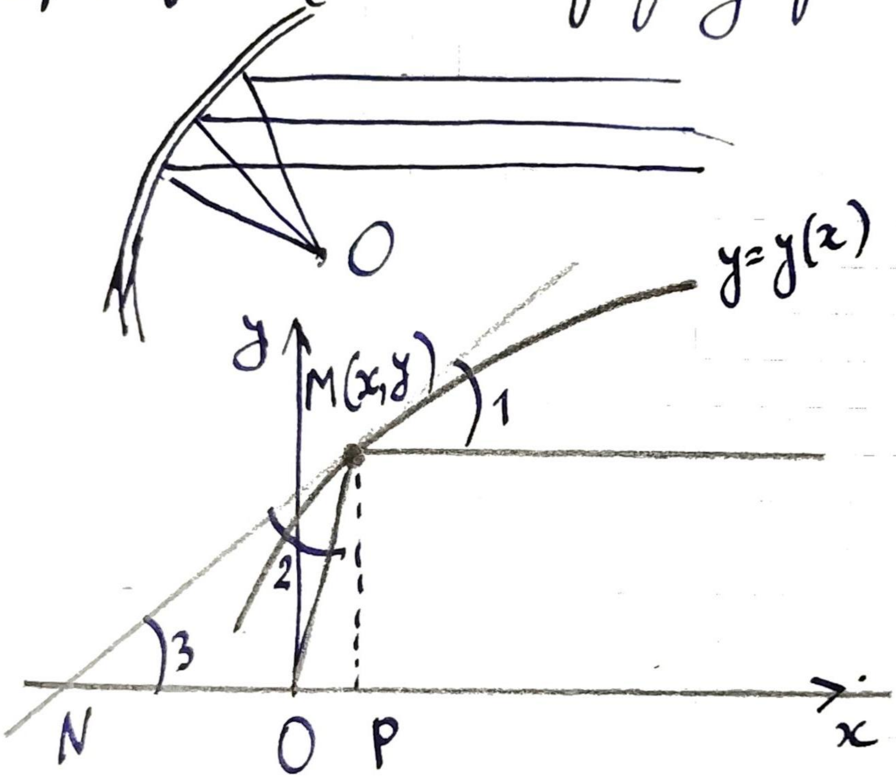
$$\boxed{\begin{aligned} &F = -k\,x(t) \text{ — закон Гука} \\ &F = m\underset{\text{ускорение}}{a} \quad \text{II закон Ньютона.} \end{aligned}}$$

$$m x'' = -kx, \quad x'' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0,$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \underset{\text{амплитуда колебаний } (R>0)}{R}\sin(\omega t + \overset{\text{сдвиг}}{\varphi})$$

$A, B \in \mathbb{R}$

Пример 4 (Найти форму фокусирующего зеркала)



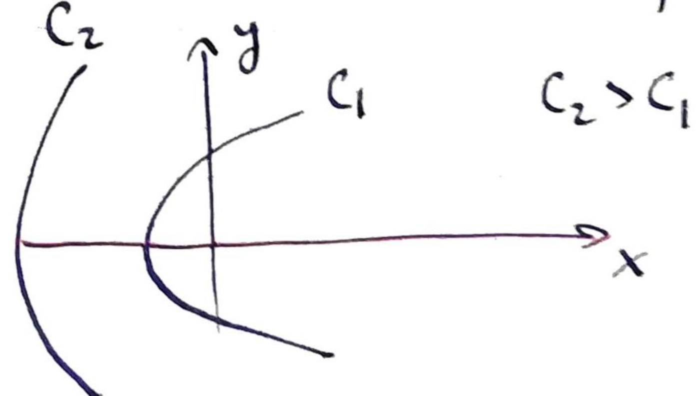
- угол падения равен углу отражения: $\angle 1 = \angle 2$
- $\underbrace{\angle 1 = \overbrace{\angle 3 = \angle 2}}_{} = \alpha$

Δ NOM – равнобедренный

- $OP = x$, $MP = y$, $OM = \sqrt{x^2+y^2}$, $OM = ON$
- $NP = NO + OP = \sqrt{x^2+y^2} + x$
- $\operatorname{tg}\alpha = y'$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MP}{NP} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

$$x = \frac{1}{2C}y^2 - \frac{C}{2}, \quad C>0$$



ДУ 1

ДУ $1^{\text{го}}$ порядка. Основные классы инт-ых ДУ.

$$y' = f(x, y)$$

I. $y' = h(x)\, g(y)$ — "Ур-ие с разделяющимися переменными"

1° Пусть $g(y) \neq 0$. Тогда $\dfrac{y'}{g(y)} = h(x)$; $\displaystyle\int \frac{y'}{g(y)} dx = \int h(x) dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx$$

$$\underbrace{G(y) = H(x)}_{\text{конкретные первообразные}} + C$$

2° Пусть $\exists\, y_0 :\ g(y_0) = 0$.

Тогда $y(x) \equiv y_0$ — особое решение (о.р.)

Алгоритм $y' = h(x)\, g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = h(x)\, g(y)$$

1° $\dfrac{dy}{g(y)} = h(x) dx$, если $g(y) \neq 0$ $\quad 2^\circ$ Если $\exists\, y_0 :\ g(y_0) = 0$, то $y(x) \equiv y_0$ — о.р.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx$$

Примеры

1) $y' = 2y$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{dy}{y} = 2dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int dx$$

$$\ln|y| = 2x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{2x+C} = e^{2x}\underbrace{e^{C}}_{=A>0}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \underbrace{\pm A}_{=B\neq 0} e^{2x} \\ y \equiv 0 \text{ — о.р.} \end{array}\right\} y = Be^{2x},\ B \in \mathbb{R}$$

Ответ: $y = Be^{2x},\ B \in \mathbb{R}$

2) $y' = -\frac{x}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{\cancel{2}} = -\frac{x^2}{\cancel{2}} + \frac{C}{\cancel{2}}$$

$$y^2 + x^2 = \underbrace{C}_{>0} = R^2$$

Ответ:
$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$
$$R > 0$$

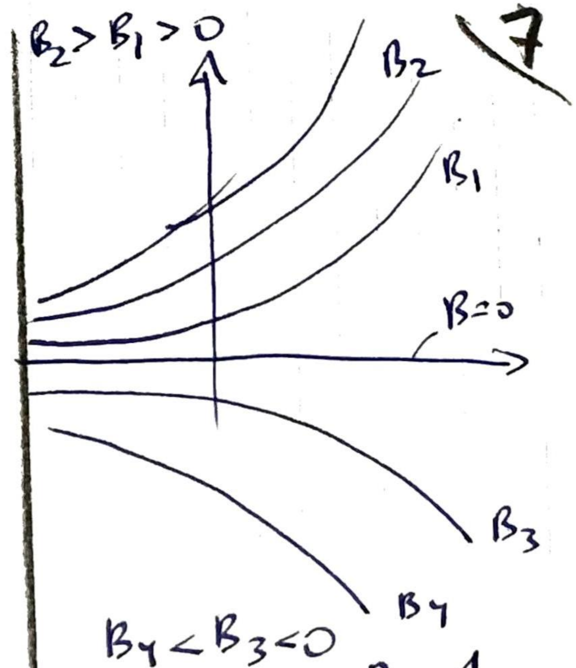


Рис. 1

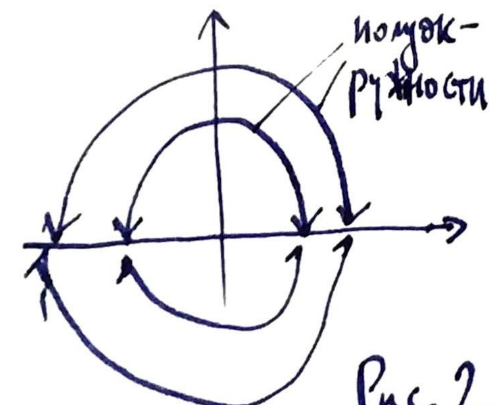


Рис. 2

Определение ИК (интегр. кривые) — график решения ДУ

II $y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ "Ур-ие с однородной правой частью"

$\boxed{\frac{y}{x} = u}$ ← новая неизвестная ф-ция

$\Updownarrow$

$y = x\,u(x)$

$y' = u + xu'$

$u + xu' = \Phi(u)$

$u' = \frac{\Phi(u) - u}{x}$ — ДУ класса I

Примеры 1) $y' = \frac{x+y}{x} \left(= 1 + \frac{y}{x} \right)$

$\boxed{y = xu}$

$xu' + \cancel{u} = 1 + \cancel{u}$

$u' = \frac{1}{x}$

$u = \ln|x| + C$

$y = x(\ln|x| + C)$

2) $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные многочлены степени m

$x^2 + 2xy + 10y^2$ — однородн.

$x^2 + y$ — неоднород.

Литература

1) Бугров + Никольский. Высшая математика: ДУ (том 2)

2) Петровский И.Г. Лекции по теории ОДУ

3) Понтрягин Л.С. ОДУ

4) Эльсгольц Л.Э. ДУ и вариационное исчисление

5) Арнольд В.И. ОДУ

6) Филиппов А.Ф. Лекции по ОДУ

7) Филиппов А.Ф. Сборник задач по ДУ