1

Примерный билет

1) $(2x+y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$

2) $x''' - 5x'' + 6x' = 2t+1+e^{-t}$

3) $y'' - y' = \dfrac{2}{1+e^{-2x}}$

Решить ДУ (найти общее решение)

4) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{t} \\ y(0)=1,\ y'(0)=2 \end{cases}$

Решить задачу Коши операторным методом (с помощью преобразования Лапласа)

5) $\begin{cases} x' = 2x+y \\ y' = x+2y \end{cases}$

Решить систему ДУ. Определить тип О.Т. (особой точки) (точки покоя). Нарисовать эскиз фазового портрет.

1) $\underbrace{(2x+y)}_{P}dx + \underbrace{(x+y)}_{Q}dy = 0$ (*)

$0 = dF(x,y) \overset{?}{=} P\,dx + Q\,dy$

$F(x,y) = ?$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$F(x,y) = \int P\,dx = \int (2x+y)\,dx = x^2 + yx + C(y)$ $\quad \boxed{F(x,y) = C}$ ← решение

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \boxed{\cancel{x} + y = \cancel{x} + C'(y)}$ $\qquad C(y) = \dfrac{y^2}{2} + A$

Ответ: $x^2 + yx + \dfrac{y^2}{2} = C$

---

5 классов ДУ $1^{\text{го}}$ порядка: $y' = f(x,y)$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y}{x+y} = -\dfrac{2+y/x}{1+y/x}$ (**)

$y' = \varphi(y/x)$, ...

Другой метод решения ДУ (*)

I. $y' = h(x)g(y)$

II. $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

III. $y' = a(x)y + b(x)$

IV. $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$, $\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq 1 \end{cases}$

V. $P\,dx + Q\,dy = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\checkmark 3$

2) $x''' - 5x'' + 6x' = 2t + 1 + e^{-t}$ $\boxed{x_{он} = x_{оо} + x_{част}}$

$\underbrace{\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda}_{\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6)} = 0$, $\lambda_{1,2,3} = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$ $x_{оо} = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$ (1)

$\boxed{x_{част} = x_1 + x_2}$, $x_1 = t(At + B) = At^2 + Bt = \frac{t^2}{6} + \frac{11t}{18}$ (2)

$Lx_1 = 2t + 1$, $(At^2 + Bt)''' - 5(At^2 + Bt)'' + 6(At^2 + Bt)' = 2t + 1$

$-10A + 12At + 6B = 2t + 1$

$\begin{cases} -10A + 6B = 2 \\ 12A = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1/6 \\ B = 11/18 \end{cases}$

$x_2 = Ce^{-t}$, $Lx_2 = e^{-t}$, $C\cancel{e^{-t}}\overbrace{(-1 - 5 - 6)}^{-12} = \cancel{e^{-t}}$, $C = -1/12$

$x_2 = -e^{-t}/12$ (3)

Ответ: $x = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} + \frac{3t^2 + 11t}{18} - \frac{e^{-t}}{12}$

3) $y''-y'=\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$ $\qquad y=C_1(x)+C_2(x)e^{x}$ $\qquad \begin{cases} C_1'+C_2'e^{x}=0 \\ \cancel{C_1'\cdot 0}+C_2'e^{x}=\dfrac{2}{1+e^{-2x}} \end{cases}$ $\quad$ 4

$\lambda^2-\lambda=0\,,\quad \lambda_{1,2}=\begin{cases}0\\1\end{cases}\quad ФСР=\{1,\,e^{x}\}$

$$C_2'=\frac{2e^{-x}}{1+e^{-2x}}\,,\quad C_2=\int\frac{2e^{-x}dx}{1+e^{-2x}}=-2\int\frac{de^{-x}}{1+(e^{-x})^2}=-2\,\mathrm{arctg}\,e^{-x}+B$$

$$C_1'=-\frac{2}{1+e^{-2x}}\,,\quad C_1=-\int\frac{2\,dx}{1+e^{-2x}}=-\int\frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}+1}=-\int\frac{2e^{x}de^{x}}{(e^{x})^2+1}\overset{u=e^{x}}{=}$$

$$=-\int\frac{\overbrace{2u\,du}^{=d(u^2+1)}}{u^2+1}=-\ln(u^2+1)\Big|_{u=e^{x}}+A$$

Ответ: $y=\underbrace{\left(A-\ln(1+e^{2x})\right)}_{C_1(x)}+\underbrace{\left(B-2\,\mathrm{artg}\,e^{-x}\right)}_{C_2(x)}e^{x}=$

$$=\underbrace{A+Be^{x}}_{y_{оо}}\underbrace{-\ln(1+e^{2x})-2e^{x}\,\mathrm{arctg}\,e^{-x}}_{y_{част}}$$

5

4) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow p^2 Y - p - 2 - 2(pY - 1) + Y = \frac{1}{p-1}$

$Y(p^2 - 2p + 1) = \frac{1}{p-1} + p$

$y \doteqdot Y,\quad y' \doteqdot pY - 1,\quad y'' \doteqdot p^2 Y - p - 2,\quad e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$

$Y = \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{p}{(p-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{(p-1)+1}{(p-1)^2} = \underbrace{\frac{1}{(p-1)^3} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}}_{\text{разложение на простейшие дроби}} \doteqdot$

$\frac{1}{p} \doteqdot 1,\quad \frac{1}{p^2} \doteqdot t,\quad \frac{1}{p^3} \doteqdot \frac{t^2}{2}$

$\doteqdot \overbrace{e^t \frac{t^2}{2}}^{y_{част}} + \overbrace{e^t + te^t}^{y_{оо}} = y(t)$

Ответ:

Проверка: $y(0) = 1$

$y'(0) = 1 + 1 = 2$

$L\left(e^t \frac{t^2}{2}\right) = e^t$

5) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ (*)

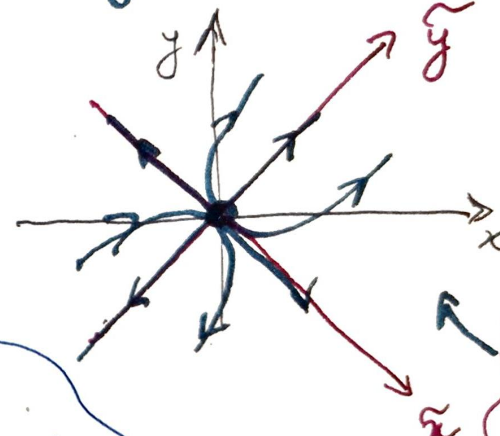
$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1, \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$ — СЗ

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\underbrace{C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{СВ}}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ae^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{cases} x = ae^{t} + be^{3t} \\ y = -ae^{t} + be^{3t} \end{cases}$



неуст. узел

$\begin{cases} \tilde{x} = C_1 e^{t} \\ \tilde{y} = C_3 e^{3t} \end{cases}$

$y = x' - 2x$

$x'' - 2x' = x + 2(x' - 2x)$

$x'' - 4x' + 3x = 0, \quad x = ae^{t} + be^{3t}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$y = (ae^{t} + be^{3t})' - 2(ae^{t} + be^{3t}) = -ae^{t} + be^{3t}$

Другой метод решения системы (*)

5') $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$$

неуст. фокус.

$y = x' - 2x \quad (*)$

$x'' - 2x' = -x + 2(x' - 2x)$

$x'' - 4x' + 5x = 0$

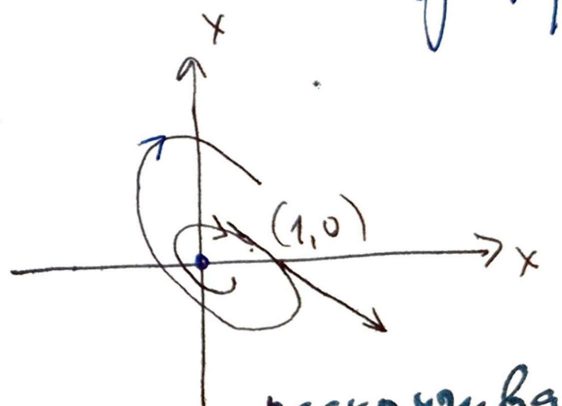
$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$\begin{cases} x = e^{2t}(a\cos t + b\sin t) \\ y \overset{(*)}{=} \dots \end{cases}$

<u>Возможны 4 типа траекторий</u>

устойчивый фокус

неустойчивый фокус.



раскручивание по часовой стрелке.