Лекция № 13

Операторный метод (продолжение)

Операторное исчисление

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad p>0 \ (p\in\mathbb{C} \text{ и } \operatorname{Re} p>0)$$

или

оригинал — $f(t)$; образ, преобразование Лапласа — $F(p)$

Пример $1 \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

Определение Скажем, что $f \in \mathcal{O}$ (множество оригиналов), если

а) f задана на $\mathbb{R}$, $f \equiv 0$ на $(-\infty, 0)$;

б) $\forall T$ на $[0, T]$ не более, чем конечное число точек разрыва, все они I рода ("точки скачка");

в) $\exists M>0,\ s_0 \geq 0:\ |f(t)| \leq M e^{s_0 t}\ \forall t$, s_0 – показатель роста.

Таблица оригиналов и изображений

$f(t)$	$\fallingdotseq F(p)$
1	$1/p$
$e^{-\alpha t}$	$1/(p+\alpha)$
$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
t^n	$n!\,p^{-(n+1)}$

вычислим непосредственно

по св-ву 4°

по св-ву $1^\circ+4^\circ$

$$\cos\alpha t=\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}\right)\fallingdotseq$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{p}{p^2+\alpha^2}$$

$$\operatorname{ch}\alpha t=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)\fallingdotseq$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$t^n=(-1)^n(-t)^n\fallingdotseq(-1)^n\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}=n!\,p^{-n-1}$$

по свойству $1^\circ+6^\circ$

Свойства преобразования $f(t) \risingdotseq F(p)$.

1° $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \risingdotseq \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ (линейность)

2° $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a>0$ (подобие)

3° $f(t-b) \risingdotseq e^{-pb} F(p)$, $b>0$ (запаздывание оригинала)

4° $e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$ (смещение изображения)

5° $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0+)$, если $f, f' \in O$ (диффер-ие оригинала)

$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0+) - f'(0+)$, если $f, f', f'' \in O$

6° $(-t) f(t) \risingdotseq F'(p)$ (диффер-ие образа)

7° $\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$ (интегрирование оригинала)

8° $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(u)\, du$ (интегрирование образа)

<u>Доказательство</u> 7° $g(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$, $g'(t)=f(t)$ $\Longrightarrow$

$$\underset{\substack{\parallel\\ pG(p)-\cancel{g(0+)}\\ \parallel\\ 0}}{g'(t)} = f(t) \doteqdot F(p)$$

$pG(p)=F(p)$, т.е.

$$G(p)=\frac{F(p)}{p}$$

8° $g(t)=\dfrac{f(t)}{t}$, $f(t)=-(-t)g(t)\doteqdot -G'(p) \Rightarrow F(p)=-G'(p)$

$$\underbrace{G(p)=-\int_0^p F(u)\,du+C}, \quad C=\int_0^{+\infty}F(u)\,du$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & p\to+\infty & \downarrow \\ 0 & & -\int_0^{+\infty}F(u)\,du+C \end{array}$$

$$G(p)=C-\int_0^p F(u)\,du=\int_0^{+\infty}F(u)\,du-\int_0^p F(u)\,du=\int_p^{+\infty}F(u)\,du$$

<u>Примеры использования 7° и 8°</u>: $\dfrac{\sin t}{t}\doteqdot\displaystyle\int_p^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}=\operatorname{arctg}u\Big|_p^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p$

$$\operatorname{si}t := \int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p\right)$$

"интегральный синус"

Оригинал для правильной рациональной функции $F(p)$

$$F(p)=\frac{Q_m(p)}{T_n(p)}=\underbrace{\frac{A_{1,1}}{p-a_1}+\ldots+\frac{A_{1,n}}{(p-a_1)^{r_1}}}+\ldots$$

$$+\underbrace{\frac{M_{1,1}p+N_{1,1}}{p^2+c_1p+d_1}+\ldots+\frac{M_{1,k}p+N_{1,k}}{(p^2+c_1p+d_1)^{s_1}}}+\ldots$$

представление правильной рацион. функции в виде суммы простейших дробей

где $T_n(p)=(p-a_1)^{r_1}\ldots(p-a_e)^{r_e}(p^2+c_1p+d_1)^{s_1}\ldots(p^2+c_mp+d_m)^{s_m}$

Как перевести в оригиналы простейшие дроби?

1) $\dfrac{A}{p-a}\risingdotseq Ae^{at}$; 2) $\dfrac{A}{(p-a)^n}\risingdotseq Ae^{at}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, т.к.

$$\frac{1}{p^n}=p^{-n}=p^{-1-(n-1)}(n-1)!\,\frac{1}{(n-1)!}\risingdotseq\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1};$$

3) $\dfrac{Mp+N}{p^2+cp+d}=\dfrac{M\left(p+\frac{c}{2}\right)+N-M\,c/2}{\left(p+\frac{c}{2}\right)^2+\underbrace{d-\left(\frac{c}{2}\right)^2}_{\omega^2}}\risingdotseq e^{-\frac{c}{2}t}\left(M\cos\omega t+\dfrac{N-M\frac{c}{2}}{\omega}\sin\omega t\right)$

4) $$\frac{Ap+B}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \; ?$$

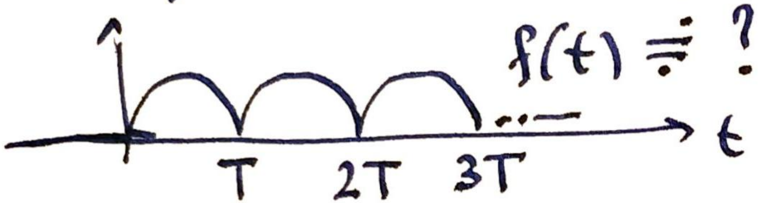
$$\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' \risingdotseq \frac{1}{2}(-t)\sin t$$

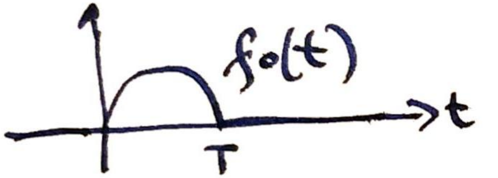
$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{\frac{p}{(p^2+1)^2}}{p} \overset{7^\circ}{\risingdotseq} \int_0^t \underbrace{\left(-\frac{u}{2}\right)\sin u\, du}_{\frac{u}{2}\, d\cos u} = \frac{u\cos u}{2}\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \cos u\, du =$$

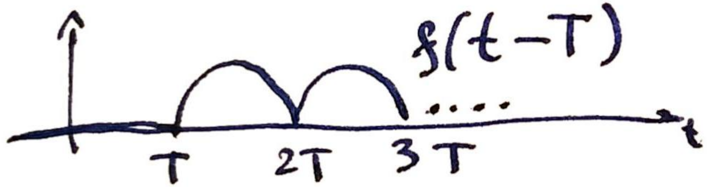
$$= \frac{1}{2}(t\cos t - \sin t)$$

$$\frac{Ap+B}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \frac{t}{2}(B\cos t - A\sin t) - \frac{B}{2}\sin t$$

Изображение для периодического оригинала





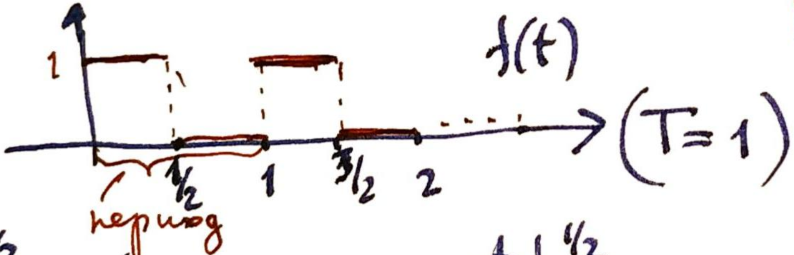


$$
\begin{array}{ccccc}
f_0(t) & = & f(t) & - & f(t-T) \\
\risingdotseq & & \risingdotseq & & \risingdotseq \\
F_0(p) & & F(p) & & e^{-pT}F(p)
\end{array}
$$

$$F_0(p) = F(p)\left(1-e^{-pT}\right)$$

$$\boxed{F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}, \quad F_0(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt}$$

Пример



$$F(p) = \frac{\int_0^{1/2} e^{-pt}\,dt}{1-e^{-p}} = \frac{e^{-pt}\Big|_0^{1/2}}{-p(1-e^{-p})} = \frac{1-e^{-\frac{p}{2}}}{p(1-e^{-p})} = \frac{1}{p\left(1+e^{-\frac{p}{2}}\right)}$$

Решение систем линейных ДУ $1^{го}$ порядка

1) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \\ x(0) = 0, \; y(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} p\bar{x} = \bar{x} + \bar{y} \\ p\bar{y} - 2 = -\bar{x} + \bar{y} \end{cases} \iff \begin{cases} (p-1)\bar{x} - \bar{y} = 0 \\ \bar{x} + (p-1)\bar{y} = 2 \end{cases}$

$x \risingdotseq \bar{x}, \; y \risingdotseq \bar{y}, \; x' \risingdotseq p\bar{x}; \; y' \risingdotseq p\bar{y} - 2$

$\bar{x}\left((p-1)^2 + 1\right) = 2, \quad \bar{x} = \dfrac{2}{(p-1)^2+1} \risingdotseq 2e^t \sin t = x$

$\bar{y} = (p-1)\bar{x} = \dfrac{2(p-1)}{(p-1)^2+1} \risingdotseq 2e^t \cos t = y$

Ответ: $\begin{cases} x = 2e^t \sin t \\ y = 2e^t \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y + 1 \\ x(0) = 0, \; y(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (p-1)\bar{x} - \bar{y} = 0 \\ \bar{x} + (p-1)\bar{y} = 2 + \dfrac{1}{p} \end{cases}$ и т.д.

Отыскание операторной экспоненты e^{At} операторным методом

$(e^{At})' = Ae^{At}$, если A — число, т.е. e^{At} — решение $3K_{\text{задачи}}$ $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$p\bar{x} - 1 = A\bar{x}$

$\bar{x}(p - A) = 1$, $\bar{x} = \frac{1}{p-A} \doteqdot e^{At}$

Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — матрица

e^{At} — решение матричной $3K$ $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = E \end{cases} \Longleftrightarrow p\bar{X} - E = A\bar{X}$

$(pE - A)\bar{X} = E$, $\bar{X} = (pE - A)^{-1}$.

Итак, $e^{At} = X \doteqdot (pE - A)^{-1}$

Пример $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} = ?$ $(pE - A)^{-1} = ?$ $pE - A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix}$

$(pE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^2+1} \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix}^{T} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+1} & \frac{1}{p^2+1} \\ -\frac{1}{p^2+1} & \frac{p}{p^2+1} \end{pmatrix} \doteqdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t}$

Решение системы ДУ с помощью матричной экспоненты

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$X = e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = ?$$

- $e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} t} \risingdotseq (pE - A)^{-1} = \begin{pmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(p-1)^2 - 4} \begin{pmatrix} p-1 & 2 \\ 2 & p-1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{p-1}{(p-1)^2-4} & \frac{2}{(p-1)^2-4} \\ \frac{2}{(p-1)^2-4} & \frac{p-1}{(p-1)^2-4} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} ch2t & sh2t \\ sh2t & ch2t \end{pmatrix}$$

- $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} ch2t & sh2t \\ sh2t & ch2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t ch2t \\ e^t sh2t \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = e^t ch2t \\ y(t) = e^t sh2t \end{cases}$