Уравнение Риккати

$$y' = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y' &= a_1(x)y + a_0(x) \qquad (a_2 \equiv 0) \\ y' &= a_2(x)y^2 + a_1(x)y \qquad (a_0 \equiv 0) \end{aligned}\right\} \text{умеем интегрировать!}$$

$$y' = a_2(x)y^2 + a_0(x) \qquad (a_1 \equiv 0) \longleftarrow \text{сложно!}$$

Частный случай: $\underbrace{y' = ay^2 + bx^{\alpha}}_{\text{специальное уравнение Риккати}}$, α, a, b – константы (СУР)

Если $\alpha = -\dfrac{4k}{2k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, то (СУР) интегрируется

<u>Утв</u> Пусть $\varphi(x)$ — решение ДУ (1). Тогда для функции $\boxed{z = y - \varphi}$ возникает уравнение Бернулли.

<u>Д-во</u> Подставим в ДУ (1) $y = z + \varphi$:

$$y' = (z+\varphi)' = \boxed{z' + \cancel{\varphi'} = \underbrace{a_2(z+\varphi)^2}_{a_2 z^2 + \cancel{a_2\varphi^2} + 2a_2 z\varphi} + \underbrace{a_1(z+\varphi)}_{a_1 z + \cancel{a_1\varphi}} + \cancel{a_0}}$$

Подчеркнутые волнистой линией слагаемые взаимно уничтож., т.к. $\varphi' = a_2\varphi^2 + a_1\varphi + a_0$. Тогда

$$z' = \underbrace{a_2}_{B(x)} z^2 + z(\underbrace{2a_2\varphi + a_1}_{A(x)}), \text{ т.е. } z' = A(x)z + B(x)z^2.$$

Пример $y' = (y - \operatorname{arctg} x)^2 + \dfrac{1}{1+x^2}$ (*)

$$y' = y^2 + \underbrace{(-2\operatorname{arctg} x)}_{a_1(x)} y + \underbrace{\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}}_{a_0(x)}$$

Решение $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$ – решение (*)

$\boxed{y = z + \varphi}$ $\quad z' + \underset{\cancel{\frac{1}{1+x^2}}}{\underset{\parallel}{\varphi'}} = z^2 + \cancel{\dfrac{1}{1+x^2}}$ $\quad z' = z^2$

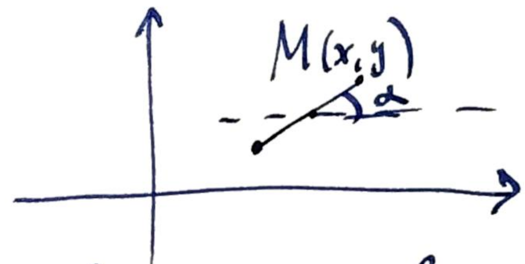
$\varphi = \operatorname{arctg} x$

и т. д.

Геометрическая трактовка ДУ $1^{\text{го}}$ порядка

$$y' = f(x,y) \quad (1)$$

Задано ДУ (1) $\Longleftrightarrow$ Задано Поле Направлений



$\operatorname{tg}\alpha = f(x,y)$

ИК (Интегральная Кривая) — кривая, которая в каждой своей точке касается ПН.

<u>Утв.</u> Функция $y=\varphi(x)$ — решение ДУ (1) $\Longleftrightarrow$ Кривая $y=\varphi(x)$ — ИК

Метод изоклин (решения ДУ)

Изоклина – кривая, на которой ПН одно и то же.

$\boxed{f(x,y)=C, \text{ } C\text{ – постоянная}}$

уравнение семейства изоклин.

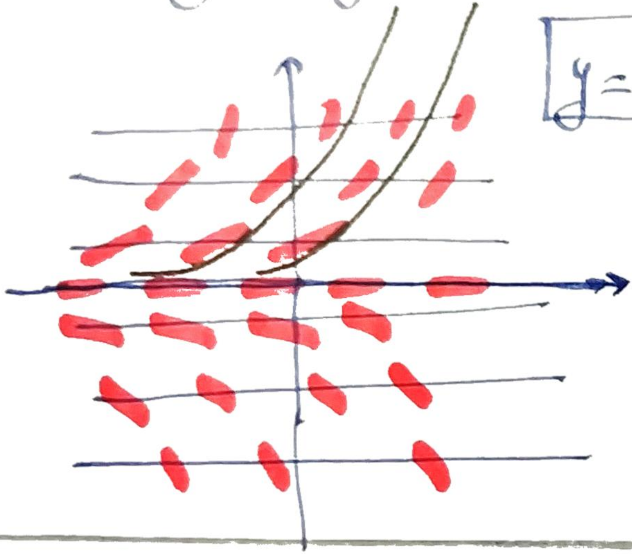
Шаг 1 Нарисовать на плоскости изоклины.

Шаг 2 Нарисовать на изоклинах ПН.

Шаг 3 Найти ИК (точно или приближённо)

Примеры

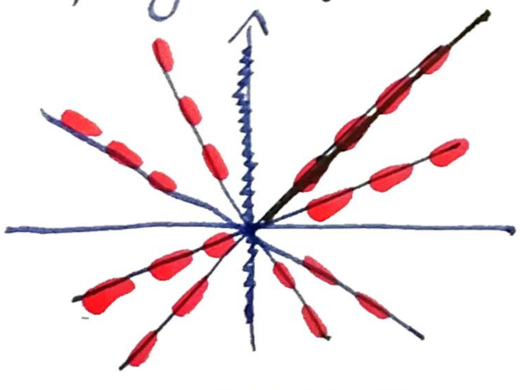
1) $y' = y$



$\boxed{y = C}$ — изоклины

2) $y' = y/x$

изоклины $\boxed{y = Cx}$



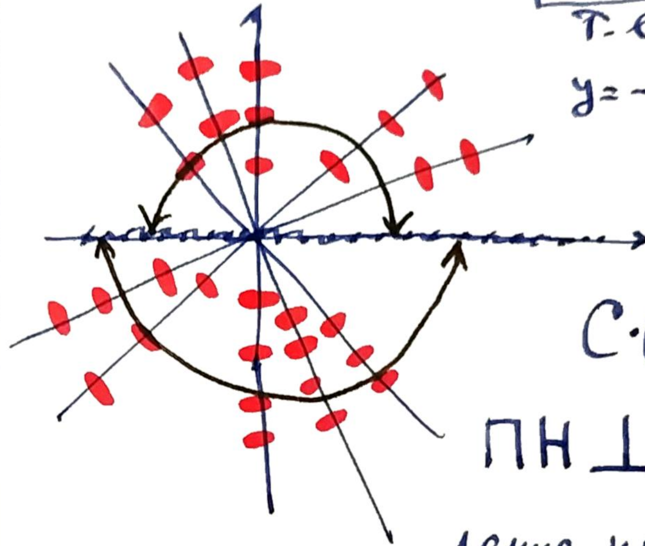
ПН совпадает с направлением прямой $y = Cx$

$\boxed{y = Cx}$ — ИК

3) $y' = -\frac{x}{y}$

изоклины $\boxed{-\frac{x}{y} = C}$ (*)

т.е. $y = -\frac{1}{C}x$



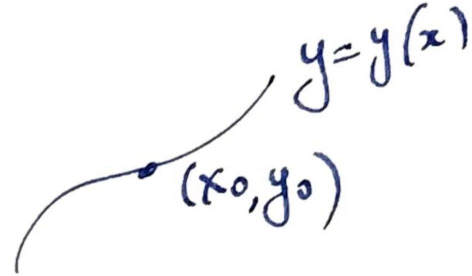
$C \cdot \left(-\frac{1}{C}\right) = -1$

ПН $\perp$ направлению прямой (*)

ИК — полуокружности $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

Задача Коши

$$(1)\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



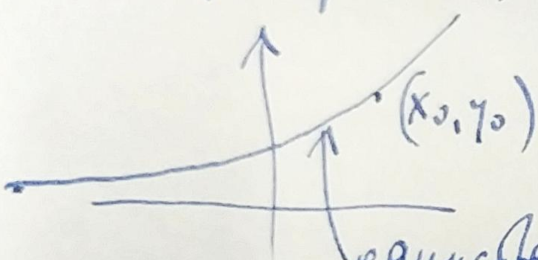
$y=y(x)$ – решение ЗК (1) $\Longleftrightarrow$ ИК $y=y(x)$ проходит через точку (x_0, y_0)

<u>Теорема Пеано</u> Пусть $f(x,y)$ непрерывна и ограничена в области D. Тогда через $\forall$ точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит ИК (т.е. задача Коши (1) имеет решение)

Единственность решения не утверждается!

Примеры 1) $\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\quad y = y_0 e^{x - x_0} \leftarrow \exists!$ решение задачи Коши для $\forall (x_0, y_0)$

любые



единственная ИК проходит через (x_0, y_0).

2) $y' = 3y^{2/3}$ $\quad (y' = y^{\alpha},\ \alpha \in (0,1))$

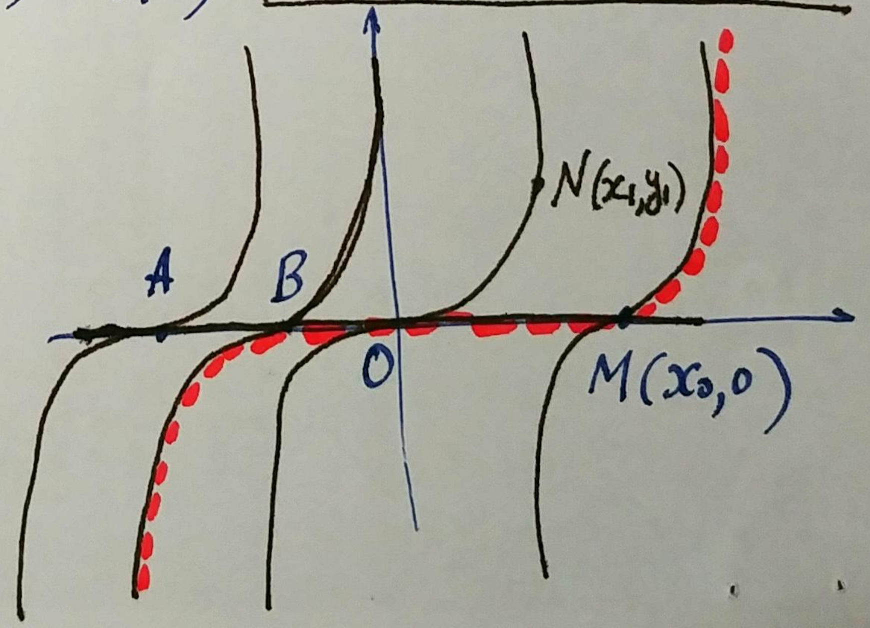
$\frac{dy}{y^{2/3}} = 3\,dx$ $\quad \boxed{y \equiv 0}$ о.р.

$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = 3(x + C)$

$\| $

$3y^{1/3}$ $\quad y = (x + C)^3$

Сколько ИК проходит через точку $M(x_0, 0)$?



Теорема единственности (Осгуда) Пусть в области D функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию:

$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D$ имеем

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \omega(|y_2-y_1|),$$

где $\omega(t) > 0$ на $[0;a]$

$\omega(0)=0$

$\omega \in C[0,a]$

$\int\limits_0^a \frac{dt}{\omega(t)} = \infty$

Тогда через $\forall$ точку $M(x_0,y_0) \in D$ проходит не более одной ИК.

Примеры $\omega(t) = \begin{cases} t \\ t|\ln t| \end{cases}$

$\int\limits_0^a \frac{dt}{dt} = \infty$ $\int\limits_0^a \frac{dt}{t\ln t} = \infty$

Теорема 1 (существования и единственности) Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна и ограничена в области D и удовлетворяет условию Липшица по переменной y:

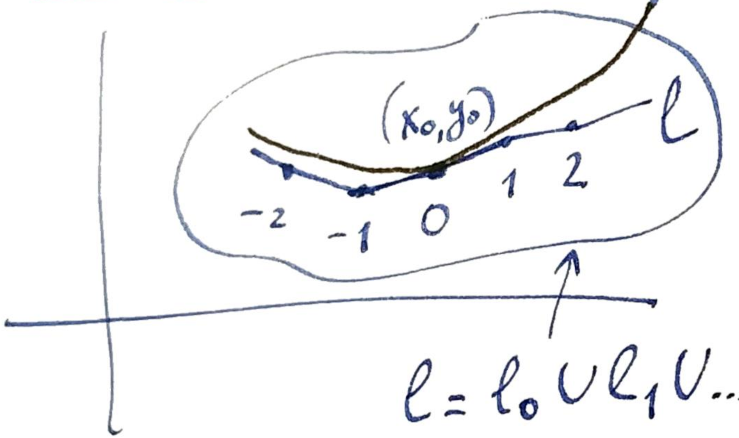
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_2 - y_1| \quad (L>0) \qquad (1)$$

Тогда через $\forall$ точку $M_0(x_0,y_0) \in D$ проходит единственная ИК

В (1) модуль непрерывности $\omega(t) = Lt$

Методы доказательства теорем ∃-ия

I. Метод ломаных Эйлера



$$l = l_0 \cup l_1 \cup \ldots \cup l_{-1}$$

- угловой коэф-т в т. (x_0, y_0) равен $f(x_0, y_0)$ ~ звено l_0;
- точка $(x_1, y_1) \in l_0$, выпускаем из неё звено l_1 с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$
- точка $(x_2, y_2) \in l_1$, выпускаем из неё звено l_2 с угловым коэфф. $f(x_2, y_2)$ и т.д.

1° Ломаные Эйлера стремятся к некоторой кривой, если длина звеньев стягивается в 0

2° "Предельная кривая" есть искомая ИК, проходящая через (x_0, y_0).

II. Метод Пикаровских приближений

$$(1)\ \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \quad (1')$$

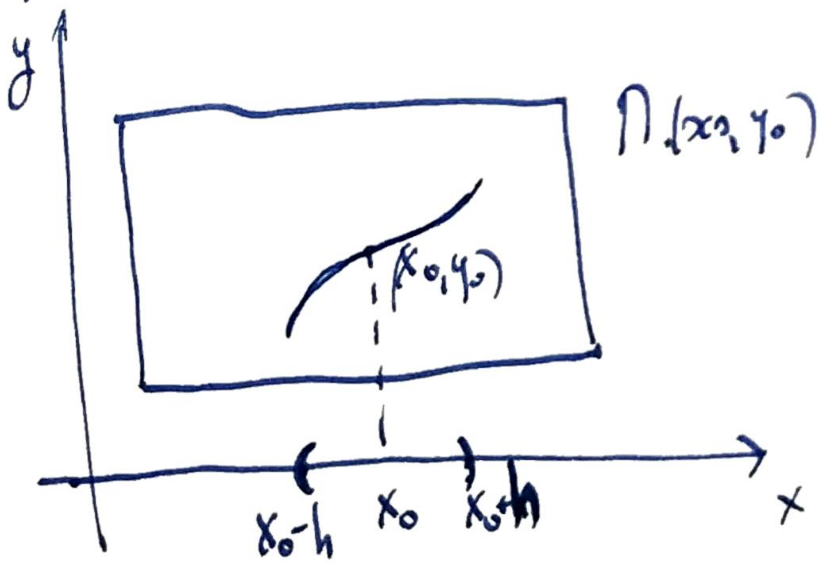
интегральное уравние

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt, \quad n = 0, 1, \dots \\ y_0(x) &= y_0 \end{aligned}\right\} \text{итерации}$$

Последовательность $\{y_n(x)\}$ "сходится" к решению ЗК (1) или решению интегрального уравнения (1').

Теорема 2 (существования и единственности)

Пусть $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi(x_0,y_0)$. Тогда задача Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ имеет решение, определенное на некотором интервале (x_0-h, x_0+h). Это решение единственно.



Пример Лаврентьева М. А. (1925 г.) для $y' = f(x, y)$

Кривые Пеано всюду плотно заполняют квадрат