Применение определителя Вронского

$$Lx(t) := \underset{\substack{||| \\ 1}}{\cancel{a_0}}\, x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (1_0)$$

$\mathbb{E}$ – пространство решений ДУ (1_0), $\dim \mathbb{E} = n$

общее решение $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$, где $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ – ФСР (базис $\mathbb{E}$)

Опр. $W(t) = W_{x_1(t), \ldots, x_n(t)} = \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$ – опр-тель Вронского системы ф-ий $\{x_1, \ldots, x_n\}$

Пусть $x_i(t) \in \mathbb{E}$ $\forall i$. Тогда

- $W(t) \neq 0$ $\forall t$ и $x_1, \ldots, x_n$ – линейно независимы, т.е. ФСР

  либо

  $W(t) \equiv 0$ $\forall t$ и $x_1, \ldots, x_n$ – линейно зависимы;

- $\boxed{W'(t) = -a_1(t)\,W(t)}$ – формула Л.-О.

Задача 1 Пусть $x_1(t) \not\equiv 0$ — решение ДУ $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$. Найти ФСР $= \{x_1(t), x_2(t)\}$, т.е. найти $x_2(t) \in E$ линейно незав. с $x_1(t)$

Решение $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)' = \frac{x_2' x_1 - x_1' x_2}{x_1^2} = \frac{W(t)}{x_1^2} = \Phi(t)$ — известна,

т.к. $x_1(t)$ — задана, $W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$ — решение ДУ $W'(t) = -a_1(t)W(t)$!

$$\frac{x_2}{x_1} = \int \Phi(t)\,dt$$

$$x_2(t) = x_1(t) \int \Phi(t)\,dt$$

Пример. $x'' - 2x' + x = 0$, $x_1 = e^t \in E$. Найти ФСР $= \{e^t, x_2(t)\}$.

$(e^t)'' - 2(e^t)' + e^t = 0$

$\left(\frac{x_2}{e^t}\right)' = \frac{W(t)}{(e^t)^2} = C$ $\quad W' = 2W$, $W = e^{2t}C$

$\frac{x_2}{e^t} = Ct + B$, $\quad x_2 = e^t(\underset{1}{C}t + \underset{0}{B})$.

Ответ: ФСР $= \{e^t, te^t\}$

Задача 2 Известна ФСР $=\{x_1,\dots,x_n\}$. Восстановить ЛДУ (1_0) (т.е. найти коэффициенты $a_1(t),\dots,a_n(t)$)

Решение Неизвестные $a_1(t),\dots,a_n(t)$ удовлетворяют равенствам

$$(*)\begin{cases} a_n(t)x_1+\dots+a_1(t)x_1^{(n-1)}=-x_1^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n(t)x_n+\dots+a_1(t)x_n^{(n-1)}=-x_n^{(n)} \end{cases}$$

$\forall t$ имеем СЛАУ (*) относительно неизвестных $a_1(t),\dots,a_n(t)$ с матрицей коэффициентов
$$\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n(t) & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & & \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}^T,$$

определитель которой равен $W(t)\neq 0$.

СЛАУ (*) имеет единственное решение $a_1(t),\dots,a_n(t)$, которое можно явно выписать по правилу Крамера

Практическое отыскание ДУ с заданной ФСР $P=\{x_1,\dots,x_n\}$

Если $x(t)$ – общее решение ДУ (1_0), то $x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\cdot x_i(t)$.

После дифференцирования $x^{(j)}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, x_i^{(j)}(t)$, $j\le n$. (*)

Введём $X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, X_n=\begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$

Тогда система равенств (*) означает $\boxed{X=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i}$, т. е.

столбцы $X_1,\dots,X_n, X$ – линейно зависимы $\Longrightarrow$

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & x \\ x_1' & \dots & x_n' & x' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & x^{(n)} \end{vmatrix} = \underbrace{x^{(n)} \overbrace{A_{n+1,n+1}}^{=W(t)\neq 0} + \dots + x\, A_{1,n+1}}_{\text{разложение по } (n+1)\text{-ому столбцу}} \quad (**)$$

Делим обе части (**) на $W(t)$ и получаем $\underbrace{x^{(n)}+a_1 x^{(n-1)}+\dots+a_n x=0}_{\text{искомое ДУ}}$

<u>Примеры</u> (отыскания ДУ по заданной ФСР)

а) ФСР $= \{1, t\}$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & t & x \\ 0 & 1 & x' \\ 0 & 0 & x'' \end{vmatrix} = x''$$

б) ФСР $= \{\cos t, \sin t\}$

в) ФСР $= \{t^{-1}, t^{-2}\}$

Линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами.

Метод характеристического многочлена.

$$\left.\begin{array}{l} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0, \\ \text{где } a_i \text{ — вещественные константы} \end{array}\right\} (1_0)$$

$\boxed{\text{Как найти ФСР для ДУ } (1_0)\text{ ?}}$

Опр. $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ — характеристический многочлен; если $p(\lambda_0)=0$, то λ_0 — характер. корень

Предложение 1 $L(e^{\lambda t}) = p(\lambda) e^{\lambda t}$

Следствие $L(e^{\lambda_0 t})=0 \Leftrightarrow p(\lambda_0)e^{\lambda_0 t}=0$, т.е. $p(\lambda_0)=0$

$\boxed{\text{Любой вещественный хар. корень } \lambda_0 \text{ порождает решение } e^{\lambda_0 t}}$

Случай I: все характеристические корни вещественны и различны,

т.е. $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Тогда

$$ФСР = \{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}.$$

$$W_{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t} \cdots e^{\lambda_n t} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{опр-ль Вандермонда}} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t} \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0,$$ если все λ_j различны.

Примеры

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \; ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) - (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)[(\lambda_3 + \cancel{\lambda_1}) - (\lambda_2 + \cancel{\lambda_1})]$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

Напоминание

λ_0 – корень кратности r многочлена $p(\lambda)$, если

- $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r q(\lambda)$, $q(\lambda_0) \neq 0$

или

- $p(\lambda_0) = 0$, $p'(\lambda_0) = 0, \ldots, p^{(r-1)}(\lambda_0) = 0$, $p^{(r)}(\lambda_0) \neq 0$.

Пример $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$

$\lambda_1 = 0$ – корень кратности 2

$\lambda_2 = 1$ – корень кратности 1 (простой или некратный).

или $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda$, $p''(\lambda) = 6\lambda - 2$

$p'(0) = 0$, $p''(0) \neq 0$; $p'(1) \neq 0$

$$\boxed{(uv)^{(r)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j u^{(j)} v^{(r-j)}, \quad C_r^j = \frac{r!}{j!\,(r-j)!}}$$

Предложение 2 $L(t^k e^{\lambda_0 t})=0$, если λ_0 – хар. корень кратности $r>k\geq 0$

Док-во. $L(\underbrace{t^k e^{\lambda t}}_{\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda t}}) = L\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{\lambda t}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\underbrace{L(e^{\lambda t})}_{p(\lambda)e^{\lambda t}} =$

$$= \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(p(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, p^{(j)}(\lambda)\underbrace{\left(e^{\lambda t}\right)^{(k-j)}}_{t^{k-j}e^{\lambda t}}$$

$$L(t^k e^{\lambda_0 t}) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, \underbrace{p^{(j)}(\lambda_0)}_{=0}\, t^{k-j} e^{\lambda_0 t} = 0$$

0, если $j\leq k<r$ и λ_0 – хар. корень кратн. r

Следствие Если λ_0 – хар. корень кратности r, то $e^{\lambda_0 t}, t e^{\lambda_0 t}, \dots, t^{r-1}e^{\lambda_0 t}$ – r линейно незав. решения (1_0).

Примеры а) $y''-2y'+y=0$

б) $y'''+3y''+3y'+y=0$

Теорема 1 Пусть $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ — все различные вещественные хар. корни $k \leq n$; и пусть $r_1, \ldots, r_k$ — их кратности $r_1 + \ldots + r_k = n$.

Тогда $ФСР = \{\underbrace{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 t}}_{r_1}; \ldots; \underbrace{e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{r_k - 1} e^{\lambda_k t}}_{r_k}\}.$

Примеры а) $x''' - x' = 0$

б) $x^{(IV)} - 6x'' + 5x = 0$

в) $x^{(V)} - 4x^{(IV)} + 4x''' = 0$

г) $x''' - 7x'' - 6x' + 2x = 0$

Предложение 3 Если $\alpha \pm i\beta$ — комплексные хар. корни кратности S, то

$$\left\{\begin{matrix} e^{\alpha t}\cos\beta t, & te^{\alpha t}\cos\beta t, & \dots, & t^{s-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, & te^{\alpha t}\sin\beta t, & \dots, & t^{s-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{matrix}\right\} -$$

$2s$ линейно независимых решения ДУ (1₀).

Примеры а) $x'' - 2x' + 2x = 0$

б) $x^{(IV)} + 2x'' + x = 0$

в) $x^{(VI)} + 3x^{(IV)} + 3x'' + x = 0$

<u>Теорема 2</u> Пусть $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ – все вещественные хар. корни,
$r_1, \ldots, r_k$ – их кратности;
и пусть $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_m \pm i\beta_m$ – все комплексные хар. корни,
$s_1, \ldots, s_m$ – их кратности.

Тогда

$$\text{ФСР} = \Bigg\{ \underbrace{\overbrace{e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 t}}^{r_1 \text{ функций}}; \ldots\ldots}_{k \text{ серий}};$$

$$\underbrace{\Big\{ \overbrace{e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t; t e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, t e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t; \ldots; t^{s_j - 1} e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, t^{s_j - 1} e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t}^{2s_j \text{ функций}}, \quad j = 1, \ldots, m \Big\}}_{m \text{ серий}} \Bigg\}$$

В ФСР $(r_1 + \ldots + r_k) + (2s_1 + \ldots + 2s_m) = n$ функций.

Примеры а) $x^{(VI)} + 6x^{(IV)} + 5x'' = 0$

б) $x''' + x = 0$

в) $x''' + 3x'' + 7x' + 5 = 0$