Основные классы интегрируемых ДУ

$$F(x, y, y') = 0, \quad y' = f(x, y) \quad (*)$$

I. $y' = h(x)\,g(y)$

II. $y' = \Phi(y/x)$

III. $y' = a(x)y + b(x)$

IV. $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \; \alpha \neq 1, \; \alpha \neq 0$

V. $\underbrace{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}_{dF(x,y)} = 0$

$dF(x,y)$, т.е. $M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$

$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$

Примеры

а) $y' = \frac{x}{y} + x$; б) $y' = \frac{y}{x} + x$; в) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

г) $y' = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}$; д) $y' = \frac{y}{x + y^4 x^2}$

Напоминание из Мат. Анализа (I семестр)

$z = F(x,y)$, $\Delta z = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)$

(1) Часто $\Delta z \approx a\Delta x + b\Delta y$ с ошибкой $r = r(x,y,\Delta x,\Delta y)$, т.ч.

$r \to 0$, $r/\Delta x \to 0$, $r/\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$;

(2) $dz = a\,dx + b\,dy$ или $dF(x,y) = a(x,y)dx + b(x,y)dy$,

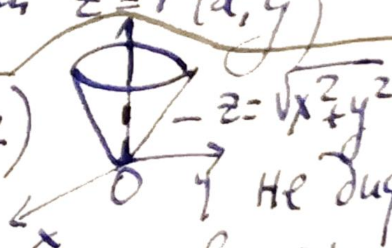
где $a(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $b(x,y) = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$;

(1) есть определение дифференцируемости ф-ии $z = F(x,y)$

(2) есть определение дифференциала ф-ии $z = F(x,y)$

<u>Примеры</u> 1) $F(x,y) = x^2y^3$ – дифференц. всюду

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2$, $d(x^2y^3) = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$;

2) 

не диф. в точке O

Уравнения в полных дифференциалах (класс V)

$$\underbrace{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}_{dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy} = 0 \qquad (1)$$

$F(x,y)=C$, C – произвольная (допустимая) констант.

<u>Теорема</u> Пусть $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ – непрерывные функции. Тогда уравнение (1) "в полных дифференциалах" $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}}$ (2)

<u>Примеры</u> $y\,dx - x\,dy \neq dF(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}(y) \neq \frac{\partial}{\partial x}(-x)$

$y\,dx + x\,dy = d(xy)$, $\frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$

Док-во. **Необходимость.** Пусть $M\,dx + N\,dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

Тогда $M = \frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$,

$$N = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

По предположению

$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ существуют и непрерывны. Тогда $\underset{\displaystyle\frac{\partial M}{\partial y}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}}} = \underset{\displaystyle\frac{\partial N}{\partial x}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}}$,

т.е. (2) верно.

факт из Мат. Анал.

Достаточность. Пусть (2) верно. Найдём $F(x,y)$, т.ч.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dF(x,y),$$

т.е.

$$M = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial F}{\partial y}. \qquad (3)$$

Решая ДУ (3_1), имеем $F(x,y)=\int M(x,y)\,dx + C(y)$,

$C(y)=?$

Найдём $C(y)$ так, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + C(y)\right) = N(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial C(y)}{\partial y} = \overbrace{-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + N(x,y)}^{G\text{ - известна}}$$

Корректно ли это ур-ие?

Необходимо: $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + N(x,y)\right) = 0$, т.е. $G=G(y)$,

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{M(x,y)}}\right) + \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 0,$$

$$-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ (верно в силу (2)).}$$

Итак, $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y)$, где $C'(y) = -\frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx + N$.

Алгоритм решения уравнений в полных дифференциалах

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

0) Проверить условие $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}}$. Далее ищем $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

1) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M \Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y)$, $C(y) = ?$

2) $N = \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + C(y)\right)$, т. е.

$$C'(y) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + N(x,y)}$$

обязательно: $C'(y)$ не зав. от x!

3) Для найденной функции $F(x,y)$ записываем решение равенством $\boxed{F(x,y) = C}$

Примеры • $\underbrace{2xy}_{M}\,dx + (\underbrace{x^2-y^2}_{N})\,dy = 0$ — ДУ класса V.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad F = \underbrace{\int 2xy\,dx}_{x^2y} + C(y),$

2) $x^2-y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y} = \right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + C(y)\right), \quad \cancel{x^2}-y^2 = \cancel{x^2} + C'(y)$

$C(y) = -\frac{y^3}{3} + A, \quad A \in \mathbb{R}$

Ответ: $x^2y - \frac{y^3}{3} + A = 0$

• $2x(1+\sqrt{x^2-y})\,dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0$

Построение ортогонального семейства кривых.

Задача. Пусть задано ОСК (Однопараметрическое Семейство Кривых) $\Phi(x,y,C)=0$ (Φ).

Найти семейство $\perp$-ых к (Φ) кривых $\tilde{\Phi}(x,y,C)=0$ $(\tilde{\Phi})$

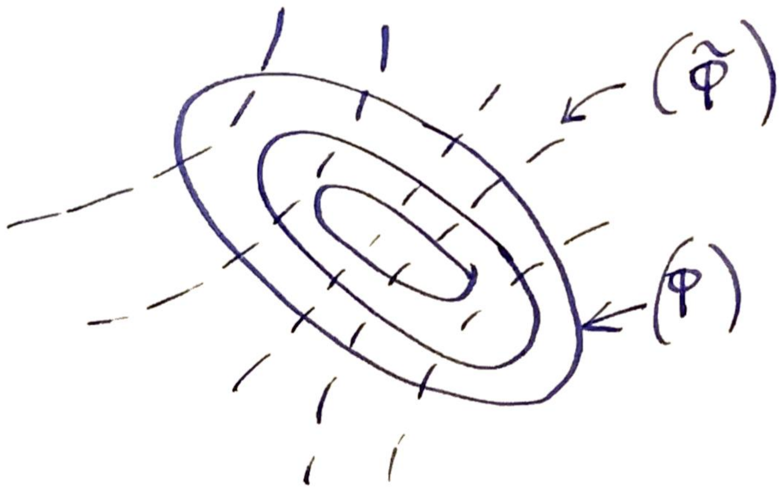
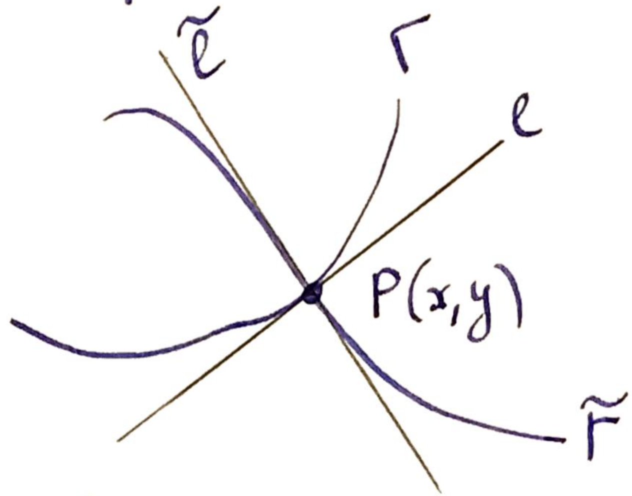


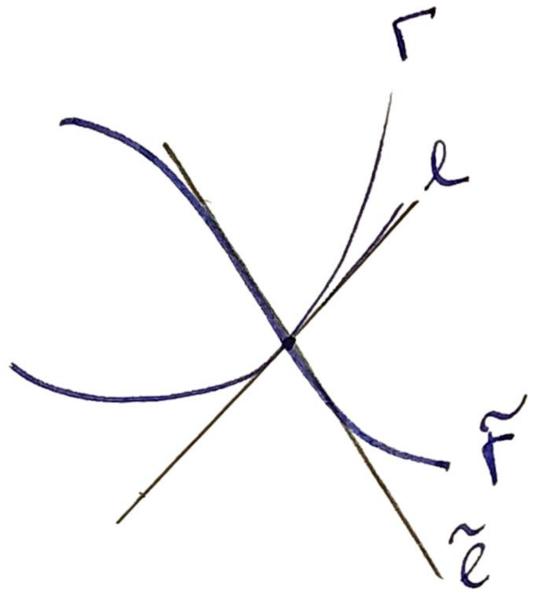
рис. 1.

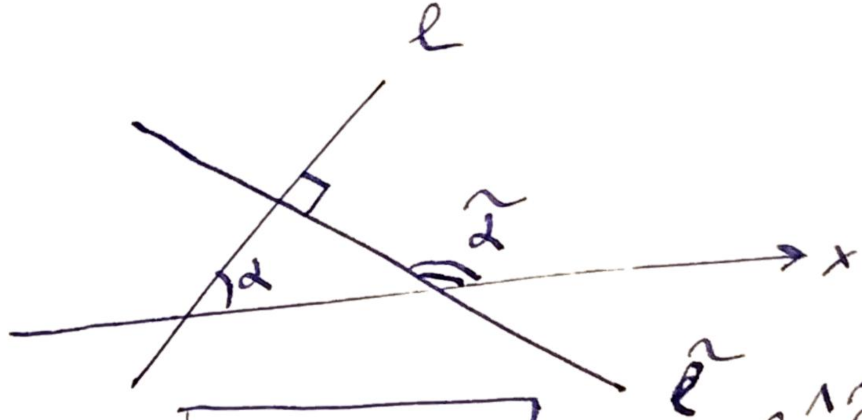


$$\boxed{\Gamma \wedge \tilde{\Gamma} = l \wedge \tilde{l}}$$

$\Gamma \perp \tilde{\Gamma}$ в точке $P(x,y)$, если $l \perp \tilde{l}$, где $l, \tilde{l}$ — касательные к $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ в точке $P(x,y)$

Напоминание





$\boxed{\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \alpha}$, если $l \wedge \tilde{l} = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} (l)\quad & y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg}\alpha \\ (\tilde{l})\quad & y = \tilde{k}x + \tilde{b}, \quad \tilde{k} = \operatorname{tg}\tilde{\alpha} \end{aligned}\right\}$$ угловые коэффициенты прямых $l, \tilde{l}$

$\boxed{l \perp \tilde{l} \Leftrightarrow k \cdot \tilde{k} = -1}$,

т.к. $\tilde{k} = \operatorname{tg}\tilde{\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{k}$

$(\Gamma)\ y = y(x)$

$(\tilde{\Gamma})\ y = \tilde{y}(x)$

$\Gamma \perp \tilde{\Gamma}$ в т. $P \Leftrightarrow y'(x)\,\tilde{y}'(x) = -1$

Как по заданному ОСК (Φ) найти $\perp$-ое семейство ($\tilde{\Phi}$)?

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (\Phi)$$

<u>Шаг 1</u> Найти ДУ ~ семейству (Φ)

$$\begin{cases} \Phi'_x + \Phi'_y\, y' = 0 \\ \Phi(x, y, C) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{исключаем } C} F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

<u>Шаг 2</u> По ДУ (1) записываем ДУ $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ (2), задающее $\perp$-ое семейство ($\tilde{\Phi}$)

<u>Шаг 3</u> Решаем ДУ (2) и находим ОСК

$$\tilde{\Phi}(x, y, C) = 0 \quad (\tilde{\Phi})$$

Примеры

1)  "семейство концентрических окружностей"

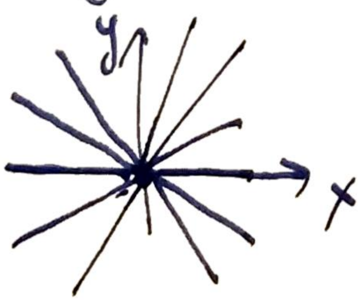
$x^2+y^2=R^2$ (Ф)

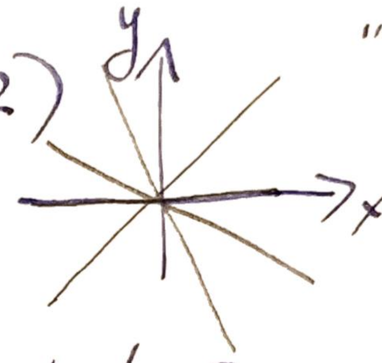
I. $\cancel{2}x+\cancel{2}y\,y'=0$ (1)

II. $\cancel{2}x+\cancel{2}y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0$ (2)

III. $y'=\frac{y}{x}$ ← Решаем

$y=Cx,\ C\in\mathbb{R}^2$ ($\tilde{Ф}$)



2)  "пучок прямых"

$y=Cx$

I. $\begin{cases} y'=C \\ y=Cx \end{cases} \Rightarrow y'=\frac{y}{x}$ (1)

II. $-\frac{1}{y'}=\frac{y}{x}$ (2)

III. $y'=-\frac{x}{y}$

$y\,dy=-x\,dx$

$\cancel{\frac{1}{2}}y^2=-\cancel{\frac{1}{2}}x^2+\cancel{\frac{C}{2}}$

$y^2+x^2=\underset{\text{"}R^2}{C}>0$

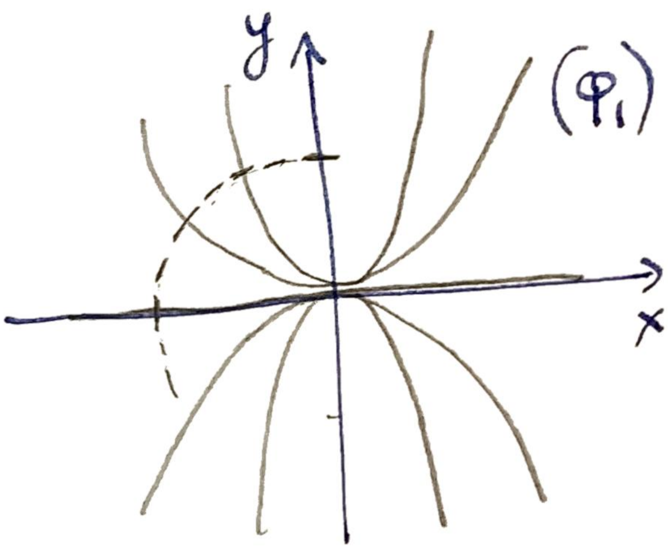
3

Задача

Найти ортогональные траектории для ОСК

$y = Cx^2 \quad (\Phi_1)$

$y = Ce^x \quad (\Phi_2)$



("пучок парабол")