Лекция 11: Системы ДУ

1. Уравнение Эйлера (окончание темы)
2. Общая система ДУ $1^{\text{го}}$ порядка.
3. Система линейных ДУ $1^{\text{го}}$ порядка с ПК
   постоянн. коэф-ми

Уравнение Эйлера

$$y(x) = ?\quad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

a_i — константы

$$(2)\quad x = e^t \longleftrightarrow t = \ln x\,; \quad \frac{dx}{dt} = e^t = x, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

$$y(x)\big|_{x=e^t} = \tilde{y}(t) \longleftrightarrow \tilde{y}(t)\big|_{t=\ln x} = y(x)$$

✓ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \tilde{y}'\cdot x^{-1}, \quad \boxed{x\frac{dy}{dx} = \tilde{y}'} \quad (i)$$

✓ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\tilde{y}'\right) = -x^{-2}\tilde{y}' + x^{-1}\left(\tilde{y}'' x^{-1}\right) = x^{-2}\left(\tilde{y}'' - \tilde{y}'\right)$$

$$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \tilde{y}'' - \tilde{y}'} \quad (ii)$$

✓ Аналогично получаем

$$(iii)\quad \boxed{x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \tilde{y}''' - 3\tilde{y}'' + 2\tilde{y}'} \quad \text{и т.д.}$$

Замена переменной (2) переводит ДУ (1) в лин. ДУ с ПК

$$L\tilde{y} = \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}(t) = f(x)\big|_{x=e^t} \quad (3)$$

3

Пример $\underbrace{x^2 y''}_{\tilde{y}''-\tilde{y}'} + \underbrace{2xy'}_{\tilde{y}'} - \underbrace{2y}_{\tilde{y}} = \underbrace{2 - \frac{2}{x}}_{2-2e^{-t}}$, $y(x) = ?$ (1)

Замена $\boxed{x = e^t}$ переводит ДУ для $y(x)$ в ДУ для $\tilde{y}(t) = y(x)\big|_{x=e^t}$:

(*) $\tilde{y}'' + \tilde{y}' - 2\tilde{y} = 2 - 2e^{-t}$, $\tilde{y}_{\text{он}} = \tilde{y}_{\text{оо}} + \tilde{y}_{\text{чнс.}}$,

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ — хар. ми-н, $\lambda_{1,2} = \left\{ \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$, $\tilde{y}_{\text{оо}} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$;

$\tilde{y}_{\text{чнс.}} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$; $\tilde{y}_1 = A$, $A = -1$; $\tilde{y}_2 = Be^{-t}$, $B = 1$;

$\tilde{y}_{\text{чнс}} = -1 + e^{-t}$

$\tilde{y}_{\text{он}} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - 1 + e^{-t}$

Ответ: $y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x - 1 + x^{-1}$

Как найти ДУ (*), не используя формулы (i), (ii) и т.д.?

Другой метод решения уравнения Эйлера

$$\underbrace{\mathcal{L}\, y(x) = f(x)}_{\text{уравнение Эйлера}} \quad (1) \quad \underset{x=e^t}{\longleftrightarrow} \quad \underbrace{L\tilde{y}(t) = f(e^t)}_{\text{линейное ДУ с ПК}} \quad (*)$$

$$L = ?$$

Оператор L можно определить по характеристическому многочлену. Найдём $p(\lambda)$ и восстановим L.

$$L(e^{\lambda t}) = 0 \overset{\boxed{e^t = x}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L}(x^\lambda) = 0$$

Найдём условие на λ, чтобы $\mathcal{L}(x^\lambda) = 0$: $\underbrace{p(\lambda) = 0}_{\text{характеристическое уравнение}}$

Пример 1) $\underbrace{x^2 y'' + 2xy' - 2y}_{\mathcal{L}y} = 2 - 2/x$;

$$\mathcal{L}(x^\lambda) = x^2 \underbrace{(x^\lambda)''}_{\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}} + 2x \underbrace{(x^\lambda)'}_{\lambda x^{\lambda-1}} - 2x^\lambda = x^{\lambda-2}\underbrace{[\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2]}_{\lambda^2+\lambda-2}$$

$$\mathcal{L}(x^\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{\lambda^2 + \lambda - 2}_{p(\lambda)} = 0$$

$$\boxed{L\tilde{y} = \tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 2\tilde{y} = 2 - 2e^{-t}}$$

Системы ДУ $1^{го}$ порядка

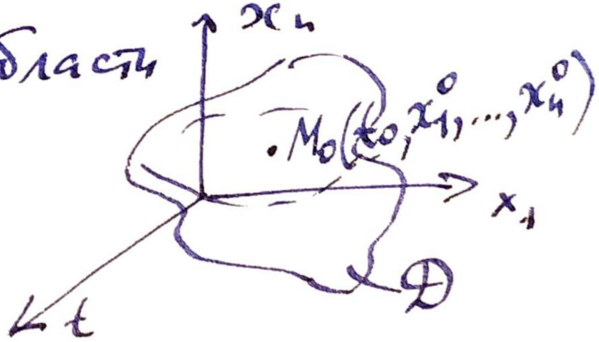
$x_1(t) = ?\ \dots\ x_n(t) = ?$

$$(1)\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff X' = F(t, X), \quad (1')$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, X) \\ \dots \\ f_n(t, X) \end{pmatrix}$

Считаем, что $f_1, \dots, f_n$ определены в области

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t, x_1, \dots, x_n}$



Задача Коши:

$$(2)\ \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \iff \begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X^0, \quad X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \end{cases} (2')$$

Теорема 1 ($\exists$-ие решения) [Пеано] Пусть $F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ непрерывна и ограничена в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t, x_1, \dots, x_n}$.

Тогда $\forall\ (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathcal{D}$ задача Коши (2) имеет решение $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, определённое для $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$.

Теорема 2 ($\exists$-ие и единственность решения) Пусть в условиях теоремы 1 $F(t, X)$ — липшицева функция по X, т.е.

$\exists L > 0: \quad |F(t, X) - F(t, \tilde{X})| < L\,|X - \tilde{X}| \quad \forall (t, X), (t, \tilde{X}) \in \mathcal{D}$.

Тогда решение задачи Коши (2′) единственно.

Связь ДУ n-ого порядка с системой (1)

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (3)$$

$$\Updownarrow \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \dots\dots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ \dots\dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4) \leftarrow$$

частный случай системы (1)

ДУ (3) изучается через систему (4)

Системы линейных ДУ 1^го порядка с Постоянными Коэффициентами

$$(1)\ \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \iff X' = AX + F \quad (1')$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$ — $(n\times n)$-матрица

$$X' = AX \quad (1_0')$$

$$X(t) = \underbrace{e^{At}}_{(n\times n)\text{ квадратная матрица}} C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ - столбец констант}$$

e^{At} можно определить следующими способами:

$$\begin{cases} e^{At} = E + At + \dfrac{(At)^2}{2!} + \ldots & (а) \\ e^{At} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(E + \dfrac{At}{n}\right)^n & (б) \\ e^{At} \text{ — решение матричного ДУ } \mathfrak{X}' = A\mathfrak{X},\ \mathfrak{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & (в) \end{cases}$$

Методы решения системы ДУ (1)

1) Метод сведения системы (1) к ДУ порядка n.

Пример $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = x + 2y - 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\underbrace{y' - 2y - 3}_{x'})' = \underbrace{y' - 2y + 3}_{x} - 1 \\ x = y' - 2y + 3 \end{cases}$

Лин. ДУ $2^{го}$ порядка с ПК

1° $y'' - 3y' + 2y = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \lambda_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = Ae^{2t} + Be^{t} + 1$$

2° $x = (Ae^{2t} + Be^{t} + 1)' - 2(Ae^{2t} + Be^{t} + 1) + 3 = 1 - Be^{t}$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 - Be^{t} \\ y = 1 + Ae^{2t} + Be^{t}, \end{cases}$ где $A, B \in \mathbb{R}$

2) <u>Метод Эйлера</u> решения однородного ДУ

$$(*)\quad X' = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Наблюдение</u> Пусть C — собственный вектор матрицы A с собственным значением λ.
Тогда $e^{\lambda t} C$ — решение ДУ $(*)$

В самом деле, $(e^{\lambda t}C)' = (e^{\lambda t})' C = \lambda e^{\lambda t} C$

$$A(e^{\lambda t} C) = e^{\lambda t} AC = e^{\lambda t} \lambda C$$

<u>Теорема</u> Пусть матрица A имеет собственные значения (СЗ) $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$; $C^{(1)}, \ldots, C^{(n)}$ — соответствующие собственные векторы, т.е. $AC^{(i)} = \lambda_i C^{(i)}$ и $C^{(i)} \neq 0$.
Тогда $X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i t} C^{(i)}$ — общее решение ДУ $(*)$.

<u>Напоминание</u>: СЗ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A находятся как корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$

Пример $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1° Решаем хар. ур-ие $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-1) - 4 =$

$= \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

2° Находим собственные векторы:

$\lambda_1 = -3$, $\begin{pmatrix} 1-(-3) & 4 \\ 1 & -2-(-3) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — СВ с СЗ $\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = 2$, $\begin{pmatrix} 1-2 & 4 \\ 1 & -2-2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ — СВ с СЗ $\lambda_2 = 2$;

3° $X(t) = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Ответ: $\begin{cases} x = ae^{-3t} + 4be^{2t} \\ y = -ae^{-3t} + be^{2t} \end{cases}$, где $a, b \in \mathbb{R}$