Линейное ДУ порядка $n \geq 2$

$x(t) = ?$ $F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$ – ДУ порядка n

$$Lx(t) := \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{a_0(t)} x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t) x' + a_n(t) x = f(t) \quad (1)$$

(линейное неоднородное ДУ порядка n)

$$Lx(t) = 0 \quad (1_0)$$

(линейное однородное ДУ порядка n)

<u>Теорема 1</u> Пусть функции $a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ непрерывны на интервале (α, β). Тогда задача Коши

$$(2) \quad \begin{cases} Lx = f(t), \\ x(t_0) = z_0, x'(t_0) = z_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1} \end{cases}$$

имеет единственное решение на (α, β) для $\forall t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

12

Принцип суперпозиции: $L\left(\sum_i c_i x_i(t)\right) = \sum_i c_i L x_i(t)$

Доказательство $L\left(\sum_i c_i x_i(t)\right) =$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t) \underbrace{\left(\sum_i c_i x_i(t)\right)^{(j)}}_{\sum_i c_i x_i^{(j)}(t)} = \sum_{i,j} a_j(t)\, c_i\, x_i^{(j)}(t) =$$

$$= \sum_i c_i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, x_i^{(j)}(t)\right)}_{L x_i(t)} = \sum_i c_i L x_i(t)$$

Теорема 2 (о структуре решения ДУ (1))

$$\boxed{x_{он}(t) = x_{оо}(t) + x_{част}(t)} \qquad (3)$$

(общее решение ДУ (1) есть общее решение ДУ (1_0) плюс частное решение ДУ(1)).

Согласно (3), чтобы найти общее решение ДУ (1), надо найти:

1) $x_{оо}(t)$
2) $x_{част}(t)$.

Далее учимся находить $x_{оо}(t)$ — общее решение однородного уравнения (1_0).

Однородное линейное ДУ порядка $n \geq 2$.

Пусть $\mathbb{E}$ – множество решений ДУ (1_0).

Теорема 3 $\mathbb{E}$ – линейное пространство, $\dim \mathbb{E} = n$.

Согласно теореме 3, общее решение ДУ (1_0) имеет вид

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t),$$

где $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ – $\underbrace{\text{базис в } \mathbb{E}}_{\text{Фунд. Сист. Реш.}}$; $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Вопрос: как находить ФСР для ДУ (1_0)?

__Напоминание__ (о линейной независимости)

__Опр. 1__ Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — линейно зависимы (на (α,β)), если $\exists$ набор констант $c_1, \dots, c_n$, такой что $c_1^2 + \dots + c_n^2 \neq 0$,

$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$. $(*)$

__Опр. 2__ Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — линейно независимы (на (α,β)), если равенство $(*)$ возможно лишь при $c_1 = \dots = c_n = 0$.

__Опр. 3__ Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — базис в $\mathbb{E}$ (или ФСР — Фундам. Системы Решений),

если (i) $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — линейно независимы;

(ii) для $\forall x(t) \in \mathbb{E}$ имеет место представление: $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$

для некоторого набора констант $c_1, \dots, c_n$.

__Замечание__ Если имеет место условие (i), то (ii) выполнено автоматически.

16

Как построить ФСР для ДУ (1_0)?

Рассмотрим задачи Коши

$$(2_1)\begin{cases} Lx_1 = 0 \\ x_1(t_0) = 1 \\ x_1'(t_0) = 0 \\ \dots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (2_2)\begin{cases} Lx_2 = 0 \\ x_2(t_0) = 0 \\ x_2'(t_0) = 1 \\ x_2''(t_0) = 0 \\ \dots \end{cases} \quad \dots \quad (2_n)\begin{cases} Lx_n = 0 \\ x_n(t_0) = 0 \\ \dots \\ x_n^{(n-2)}(t_0) = 0 \\ x_n^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

отличающиеся в данных Коши столбцами значений

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи $(2_1), \dots, (2_n)$ имеют единственное решение по Th1.

Тогда $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ – линейно независимы и порождают любое решение ДУ (1_0) по формуле $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$,

где $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i E_i.$

Определитель Вронского

Опр. Определитель Вронского системы функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – это

$$W(t) = W_{x_1(t),\dots,x_n(t)} = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Примеры

$$W_{1,t} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad W_{t,t^2} = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2$$

Теорема 4 Пусть $x_1(t),\dots,x_n(t)\in \mathbb{E}$ (т.е. $x_i(t)$ — решение (1_0)).

Тогда эквивалентны утверждения:

1° $x_1(t),\dots,x_n(t)$ — линейно зависимы;

2° $W(t)=W_{x_1(t),\dots,x_n(t)}\equiv 0\quad \forall t\in(\alpha,\beta)$;

3° $\exists\, t_0\in(\alpha,\beta)$, такое что $W(t_0)=0$.

Доказательство.

$$
\begin{tikzcd}
1^\circ \arrow[rr, Rightarrow] & & 2^\circ \arrow[dl, Rightarrow] \\
& 3^\circ \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Теорема 5 В условиях теоремы 4 эквивалентны утверждения:

а) $x_1(t),\dots,x_n(t)$ — линейно независимы;

б) $W(t)\neq 0\quad \forall t\in(\alpha,\beta)$;

в) $\exists\, t_0$, такое что $W(t_0)\neq 0$.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) (в противном случае противоречие с $3^\circ\Rightarrow 1^\circ$); б) $\Rightarrow$ в) (очевидно); в) $\Rightarrow$ а) (в противном случае противоречие с $1^\circ\Rightarrow 2^\circ$)

Теорема 6 (альтернатива) В условиях Теоремы 4 выполнено одно из двух:

либо $W(t) = W_{x_1(t),\dots,x_n(t)} \equiv 0$, $t \in (\alpha,\beta)$, и

$x_1(t),\dots,x_n(t)$ — линейно зависимы;

либо $W(t) = W_{x_1(t),\dots,x_n(t)} \neq 0$ $\forall t \in (\alpha,\beta)$ и

$x_1(t),\dots,x_n(t)$ — линейно независимы.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — линейно зависимы. Тогда

$\exists\, c_1, \ldots, c_n$, такие что $c_1^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0$ и

$$(*)\begin{cases} c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = 0 \\ c_1 x_1'(t) + \ldots + c_n x_n'(t) = 0 \\ \ldots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n x_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}$$

(следствие линейной зав-ти)

(результаты дифференцир-ия первого равенства)

$\forall t$ фиксированного получена СЛАУ $(*)$ для $c_1, \ldots, c_n$

с определителем $\begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ \ldots & & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = W_{x_1(t), \ldots, x_n(t)} = W(t)$

СЛАУ $(*)$ имеет нетривиальное (ненулевое) решение $c_1, \ldots, c_n \Longleftrightarrow W(t) = 0$

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ (очевидно)

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Пусть $W(t_0)=0$. Рассмотрим СЛАУ (*) при $t=t_0$

$$(*)\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + \ldots + c_n x_n(t_0) = 0 \\ c_1 x_1'(t_0) + \ldots + c_n x_n'(t_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

Определитель СЛАУ (*) есть $W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & \ldots & x_n(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$.

Поскольку $W(t_0)=0$, то $\exists$ ненулевое решение $(c_1, \ldots, c_n)$

Рассмотрим функцию $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$. (3)

Тогда
$$\left.\begin{cases} Lx(t) = 0 \quad \text{(по принципу суперпозиции)} \\ \left.\begin{aligned} x(t_0) &= \sum_i c_i x_i(t_0) = 0 \\ x'(t_0) &= \sum_i c_i x_i'(t_0) = 0 \\ &\ldots\ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= \sum_i c_i x_i^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{в силу СЛАУ (*)} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underset{\text{по теореме 1}}{x(t) = 0}$$

Формула (3) имеет вид
$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \Rightarrow x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – лин зав.

Теорема 7 (Лиувилля–Остроградского)

Рассмотрим $W(t) = W_{x_1(t), \dots, x_n(t)}$,

где $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – решения ЛУ

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, x = 0. \quad (1_0)$$

Тогда

$$\boxed{W'(t) = -a_1(t)\, W(t).} \quad (4)$$

Из (4) следует $\dfrac{dW}{dt} = -a_1 W$, $\dfrac{dW}{W} = -a_1\, dt$

$\int \dfrac{dW}{W} = -\int a_1\, dt$, $\ln|W| = -\int a_1\, dt$, $\left\{ \begin{array}{l} W = \pm e^{-\int a_1 dt} \neq 0 \text{ всюду} \\ \text{либо} \\ W \equiv 0 \text{ (особое решение)} \end{array} \right.$

получено частично утверждение Th6