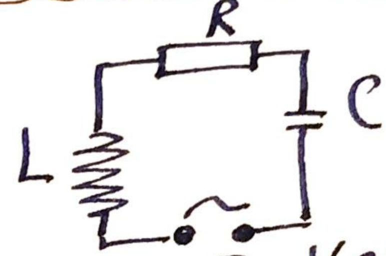
Лекция № 12

Операторный метод:
преобразование Лапласа и его свойства

Задача: найти силу тока в электр. цепи при установившемся режиме (при $t \gg 1$).



$I(t) = ?$

$E = V \sin \omega t$ рис. 1

$$(0)\begin{cases} LI' + RI + \dfrac{q}{C} = V \sin \omega t \\ q' = I \end{cases}$$

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = \omega V \cos \omega t \quad (1)$$

$$p(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}} \quad \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \\ \text{либо} \\ \lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\beta, \ \alpha > 0 \end{array} \right. \quad (*)$$

$$I(t) = \underbrace{I_0(t)}_{\text{общее решение ДУ } (1_0)} + \underbrace{I_1(t)}_{\text{частное решение ДУ } (1)}, \quad \left. \begin{array}{l} I_0(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \\ \text{в силу } (*) \end{array} \right\} \Rightarrow I_1(t) = ?$$

$$Lz'' + Rz' + \frac{1}{C} z = \omega V e^{i\omega t} \quad (2)$$ (комплексификация)

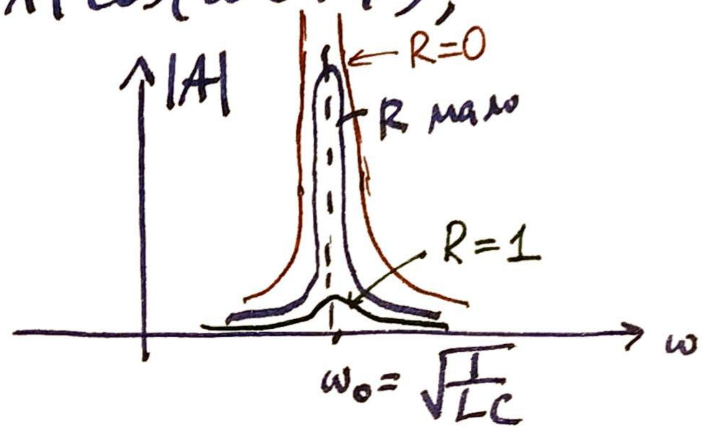
$$z = Ae^{i\omega t}, \quad A\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right)\cancel{e^{i\omega t}} = \omega V \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$A = \frac{\omega V}{-\omega^2 L + \frac{1}{C} + i\omega R} = \frac{V}{\frac{1}{C\omega} - \omega L + iR} = |A| e^{i\varphi} \Rightarrow z = |A| e^{i(\varphi + \omega t)}$$

$$I_1(t) = \operatorname{Re} z$$

$$I_1(t) = \mathrm{Re}\left(|A| e^{i(\varphi + \omega t)}\right) = |A| \cos(\omega t + \varphi),$$

где $$|A| = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$



$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Longleftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Операторное исчисление

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt\,,\quad p>0 \;(p\in\mathbb{C} \text{ или } \mathrm{Re}\,p>0)$$

оригинал — образ, преобразование Лапласа

Пример $1 \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

Определение Скажем, что $f\in\mathcal{O}$ (множество оригиналов), если

а) f задана на $\mathbb{R}$, $f\equiv 0$ на $(-\infty, 0)$;

б) $\forall T$ на $[0,T]$ не более, чем конечное число точек разрыва, все они I рода ("точки скачка");

в) $\exists M>0,\ s_0\geq 0$: $|f(t)|\leq M e^{s_0 t}$ $\forall t$, s_0 – показатель роста.

Примеры $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{\sin\frac{1}{t}}$, $e^{t^2} \notin \mathcal{O}$

Теорема 1 Пусть $f \in \mathcal{O}$. Тогда $\exists\, F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$, $\forall p > s_0$

Док-во $|f(t)e^{-pt}| \le M e^{s_0 t} e^{-pt} = M e^{-(p-s_0)t}$ (i)

$$\int\limits_0^\infty e^{-(p-s_0)t}\,dt = \frac{e^{-(p-s_0)t}}{-(p-s_0)}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-s_0} \quad \text{(ii)}$$

Из (i), (ii) $\Rightarrow$ $\exists\, F(p)$, $|F(p)| \le \dfrac{M}{p-s_0}$

Следствие Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\underset{\text{при } p\to+\infty}{F(p) \to 0}$ и $|F(p)| \le \dfrac{M_1}{p}$, $p > s_0$

Примеры $\dfrac{p^2}{p^2+1}$, $\dfrac{1}{\ln p}$ не м. б. образами

Теорема 2 Пусть $F_1(p) = F_2(p)$. Тогда $f_1(t) = f_2(t)$

(Равенство образов влечёт равенство оригиналов.)

Свойства преобразования $f(t) \risingdotseq F(p)$.

1° $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \risingdotseq \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ (линейность)

2° $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a>0$ (подобие)

3° $f(t-b) \risingdotseq e^{-pb} F(p)$, $b>0$ (запаздывание оригинала)

4° $e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$ (смещение изображения)

Док-во

$$pt = \frac{p}{a}\cdot at$$

$$f(at) \risingdotseq \int_0^\infty f(\underbrace{at}_{u}) e^{-pt}\,dt = \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^\infty f(u)\, e^{-\frac{p}{a}u}\,du}_{F\left(\frac{p}{a}\right)} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$du = a\,dt$$

$$e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty \underbrace{e^{-pt} e^{-\alpha t}}_{e^{-(p+\alpha)t}} f(t)\,dt = F(p+\alpha)$$

$$f(t-b) \risingdotseq \int_b^{+\infty} f(\underbrace{t-b}_{u}) e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(u) \underbrace{e^{-p(u+b)}}_{e^{-pb} e^{-pu}}\,du = e^{-bp} F(p)$$

5° $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0+)$, если $f, f' \in O$ (дифференцирование оригинала)

$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0+) - f'(0+)$, если $f, f', f'' \in O$

. . . .

$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - \ldots - pf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$,

если $f, f', .., f^{(n)} \in O$

<u>Пример</u> Если $f(t) = \sin e^{t^2}$, то $f \in O$, но $f' \notin O$

$(\sin e^{t^2})' = \cos e^{t^2} \cdot e^{t^2} \cdot 2t$ (не выполнено условие в) из определения мн-ва O)

6° $(-t) f(t) \risingdotseq F'(p)$ (дифференцирование образа)

<u>Док-во</u> $f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-pt} \underbrace{f'(t)\,dt}_{df(t)} = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^\infty f(t) \underbrace{de^{-pt}}_{-pe^{-pt}} = pF(p) - f(0+)$

$(-t) f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty \underbrace{e^{-pt}(-t)}_{\overset{\shortparallel}{(e^{-pt})'_p}} f(t)\,dt = \frac{d}{dp} \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = F'(p)$

Таблица оригиналов и изображений

$f(t) \doteqdot F(p)$	
1	$1/p$
$e^{-\alpha t}$	$1/(p+\alpha)$
$\cos\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
$\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
t^n	$n!\,p^{-(n+1)}$

вычислим непосредственно

по св-ву 4°

по св-ву 1° + 4°

$$\cos\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}\right) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha} + \frac{1}{p+i\alpha}\right) = \frac{p}{p^2+\alpha^2}$$

$$\mathrm{ch}\,\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$t^n = (-1)^n(-t)^n \doteqdot (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = n!\,p^{-n-1}$$

по свойству 1° + 6°

Примеры применения свойства 5°

1) $\begin{cases} x' - x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad x(t) \risingdotseq X(p)$, $\quad x'(t) \risingdotseq pX(p)$

$pX - X = \dfrac{1}{p}$, $\quad X = \dfrac{1}{p(p-1)} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p} \risingdotseq e^t - 1 = x(t)$.

2) $\begin{cases} x'' - x = 6e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow p^2X - X = \dfrac{6}{p-2}$, $\quad X = \dfrac{6}{(p-2)(p^2-1)} = \dfrac{6}{(p-2)(p-1)(p+1)} \risingdotseq$

$x \risingdotseq X$, $x' \risingdotseq pX$, $x'' \risingdotseq p^2X$, $e^{2t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-2}$

$$= \frac{\overset{p^2-1}{A}}{p-2} + \frac{\overset{(p-2)(p+1)}{B}}{p-1} + \frac{\overset{(p-2)(p-1)}{C}}{p+1} \risingdotseq$$

$p=2$	$6 = 3A$, $A = 2$
$p=1$	$6 = -2B$, $B = -3$
$p=-1$	$6 = 6C$, $C = 1$

$$\risingdotseq \underbrace{2e^{2t}}_{x_{\text{част}}} \underbrace{- 3e^{t} + e^{-t}}_{\text{решение ОДУ одн.}}$$

Проверка: $(2e^{2t})'' - 2e^{2t} = 6e^{2t}$,

$x(0) = 0$, $x'(0) = \left(4e^{2t} - 3e^{t} - e^{-t}\right)\Big|_{t=0} = 0$