Линейные однородные и неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами.

$$Lx := x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (1)$$

a_i — вещественные константы

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (1_0)$$

План

1. Метод характеристического многочлена для отыскания ФСР ДУ (1_0). (продолжение)
2. Метод Лагранжа (метод вариации постоянных) для решения ДУ (1).

Пример $x'' + x = 0$, $\underbrace{\lambda^2 + 1 = 0}_{\text{хар. ур-е}}$, $\lambda_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i$

$e^{\pm it}$ – решения; $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$

ФСР $= \{\cos t, \sin t\}$, $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Напоминание $\boxed{e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)}$ (1)

$a, b \in \mathbb{R}$ (формула Эйлера)

$$e^{\lambda t} \overset{\lambda = \alpha + i\beta}{=} e^{t(\alpha + i\beta)} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t) \quad (2)$$

$$\boxed{(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}} \quad (3)$$

$$(e^{\lambda t})' = [e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)]' = (e^{\alpha t})'(\ldots) + e^{\alpha t}(\ldots)' =$$

$$\underbrace{\alpha e^{\alpha t}(\ldots)}_{e^{\lambda t}} + \beta e^{\alpha t}\underbrace{(-\sin\beta t + i\cos\beta t)}_{i(\cos\beta t + i\sin\beta t)} =$$

$i^2 = -1$

$$= e^{\lambda t}(\alpha + i\beta) = \lambda e^{\lambda t}$$

<u>Предложение 3</u> Если $\alpha \pm i\beta$ – комплексные хар. корни кратности s, то $\left\{ \begin{matrix} e^{\alpha t}\cos\beta t, & te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, & te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{s-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{matrix} \right\}$ –

$2s$ линейно независимых решения ДУ (1_0).

Пусть $\alpha \pm i\beta$ – хар. корень кратности s.
Тогда $\{ t^k e^{(\alpha \pm i\beta)t} \}_{k=0}^{s-1}$ – решения ДУ (1_0).

$L(e^{\lambda t}) = p(\lambda) e^{\lambda t} = 0 \Longleftrightarrow p(\lambda) = 0$

$L(t^k e^{\lambda t}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda$ корень хар. кратности s, $k < s$.

<u>Теорема 2</u> Пусть $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ — все вещественные хар. корни,
$r_1, \ldots, r_k$ — их кратности;

и пусть $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_m \pm i\beta_m$ — все комплексные хар. корни,
$s_1, \ldots, s_m$ — их кратности.

Тогда

$$\text{ФСР} = \Big\{ \underbrace{\overbrace{e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 t}}^{r_1 \text{ функций}}; \ldots\ldots}_{k \text{ серий}} ;$$

$$\underbrace{\overbrace{e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t; t e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, t e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t; \ldots; t^{s_j - 1} e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, t^{s_j - 1} e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t}^{2 s_j \text{ функций}}, \quad j = 1, \ldots, m}_{m \text{ серий}} \Big\}$$

В ФСР $\underline{(r_1 + \ldots + r_k) + (2s_1 + \ldots + 2s_m) = n}$ функций.

Примеры а) $x^{(VI)} + 6x^{(IV)} + 5x'' = 0$

б) $x''' + x = 0$

в) $x''' + 3x'' + 7x' + 5x = 0$

Метод Лагранжа решения ДУ (1).

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (1)$$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (1_0)$$

Теорема Лагранжа Пусть $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ — ФСР ДУ (1_0).

Тогда решением ДУ (1) будет $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x_i(t)$, где $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$ удовлетворяют СЛАУ для $\forall t$

$$(*) \begin{cases} c_1'(t) x_1(t) + \ldots + c_n'(t) x_n(t) = 0 \\ c_1'(t) x_1'(t) + \ldots + c_n'(t) x_n'(t) = 0 \\ \ldots \\ c_1'(t) x_1^{(n-2)}(t) + \ldots + c_n'(t) x_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ c_1'(t) x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n'(t) x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

6

<u>Доказательство</u> $(n=2)$ $x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$ (1)

$\{x_1(t), x_2(t)\}$ – ФСР для (1_0)

Пусть $x(t) = \sum_i c_i x_i$, где

$\{c_i'\}_i$ удовлетворяют СЛАУ

$$(2)\begin{cases} \sum_i c_i' x_i = 0 \\ \sum_i c_i' x_i' = f \end{cases}$$

Вычислим

$$x' = \underbrace{\cancel{\sum_i c_i' x_i}}_{0 \text{ в силу } (2)_1} + \sum_i c_i x_i', \quad x'' = \Big(\sum_i c_i x_i'\Big)' = \underbrace{\sum_i c_i' x_i'}_{f \text{ в силу } (2)_2} + \sum_i c_i x_i''$$

Тогда

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = \overbrace{f + \sum_i c_i x_i''} + \overbrace{a_1 \sum_i c_i x_i'} + \overbrace{a_2 \sum_i c_i x_i} =$$

$$= f + \sum_i c_i \underbrace{(x_i'' + a_1 x_i' + a_2 x_i)}_{0} = f$$

Примеры а) $x'' + x = tg\, t$

Метод Лагранжа

1° Найти ФСР $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ ДУ (1_0)

2° Решить СЛАУ $\begin{cases} \sum_i c_i' x_i = 0 \\ \sum_i c_i' x_i' = 0 \\ \cdots \\ \sum c_i' x_i^{(n-1)} = f \end{cases}$

относительно $c_1', \ldots, c_n'$

3° Найти $c_1 = \int c_1' dt, \ldots, c_n = \int c_n' dt$

4° Записать $x_{он} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, x_i(t)$ — решение ДУ (1) б) $x''' - x' = \dfrac{e^t}{1+e^t}$; $\underbrace{\lambda^3-\lambda}_{\lambda(\lambda^2-1)}=0$, $\lambda_{1,2}=\pm 1$, $\lambda_3=0$

$$\boxed{x(t)=C_1(t)e^t+C_2(t)e^{-t}+C_3(t)}$$

1° ФСР $=\{e^t, e^{-t}, 1\}$

$$(*)\begin{cases} C_1' e^t + C_2' e^{-t} + C_3' = 0 \\ C_1' e^t - C_2' e^{-t} = 0 \\ C_1' e^t + C_2' e^{-t} = \dfrac{e^t}{1+e^t} \end{cases}$$

2° Решим СЛАУ (*) методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & 1 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{e^t\cdot e^{-t}}_{=1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} & 1 \\ 0 & -e^{-t} & 0 \\ \frac{e^t}{1+e^t} & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{e^t e^{-t}}_{=1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{1+e^t} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^t},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} e^t & 0 & 1 \\ e^t & 0 & 0 \\ e^t & \frac{e^t}{1+e^t} & 0 \end{vmatrix} = e^t e^t\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{1+e^t} \end{vmatrix} = \frac{e^{2t}}{1+e^t}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & e^{-t} & \frac{e^t}{1+e^t} \end{vmatrix} = \cancel{\underbrace{e^t e^{-t}}_{=1}}\,\frac{-2e^t}{1+e^t}$$

$$\boxed{C_i' = \Delta_i \quad \forall i}$$

3° $C_1=\displaystyle\int\frac{dt}{1+e^t}=\int\frac{e^t\,dt}{e^t(1+e^t)}=\int\frac{du}{u(1+u)}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|\Bigg|_{u=e^t}+A_1$, $\quad e^t\,dt = de^t$

и т. д.