Линейные ДУ с Постоянными Коэффициент. (продолжение)

Постановка задачи

$$Lx := x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (1)$$

a_i — вещественные константы

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (1_0)$$

$$\boxed{x_{он} = x_{оо} + x_{част.}}$$

$x_{он}$ — общее решение ДУ (1); $x_{оо}$ — общее решение ДУ (1_0); $x_{част.}$ — частное решение ДУ (1)

Находим $x_{оо}$ методом хар. многочлена.

Как найти $x_{част.}$?

План

1. Метод подбора $x_{част.}$ в случае, когда $f(t)$ — квазимногочлен.
2. Уравнение Эйлера

Опр. Квазимногочлен — это функция вида
$$f(t) = e^{\alpha t}\left[\underset{\substack{\text{многочлен}\\ \text{степени } k}}{P_k(t)}\cos\beta t + \underset{\substack{\text{многочлен}\\ \text{степени } m}}{Q_m(t)}\sin\beta t\right]. \qquad (2)$$

Примеры 1) t^2+t $\quad(\alpha=0,\ \beta=0,\ P_k(t)=t^2+t,\ Q_m(t)=0)$

2) e^t $\quad(\alpha=1,\ \beta=0,\ P_k(t)=1,\ Q_m(t)=0)$

3) $\sin 2t$ $\quad(\alpha=0,\ \beta=2,\ P_k(t)=0,\ Q_m(t)=1)$

4) $e^t(t+1)\cos 3t$ $\quad(\alpha=1,\ \beta=3,\ P_k(t)=t+1,\ Q_m(t)=0)$

5) e^t+1 ← что это? Квазимногочлен или.....?

Соглашение: Скажем, что λ_0 — хар. корень кратности $r\in\{0,1,\dots\}$ (в расширенном смысле),

если $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^r q(\lambda)$, $q(\lambda_0)\neq 0$. $\quad (3)$

В случае $r=0$ в (3) λ_0 — не хар. корень в обычном смысле.

(В расширенном смысле) любое число является хар. корнем.

Теорема Пусть в (1) $f(t)$ — квазимногочлен вида (2), при этом число $\alpha + i\beta$ — хар. корень кратности $r \in \{0, 1, \dots\}$.

Тогда

$$(4)\quad \boxed{x_{част} = t^r e^{\alpha t}\Big[\underbrace{R_\ell(t)\cos\beta t + S_\ell(t)\sin\beta t}_{\text{многочлены степени } \ell \text{ с неопределенными коэффициентами}}\Big]}, \quad \ell = \max\{k, m\}.$$

Коэффициенты многочленов $R_\ell(t)$ и $S_\ell(t)$ находятся подстановкой $x_{част.}$ в уравнение (1).

Принцип суперпозиции Частное решение ΔУ $Lx = \sum_i f_i$ ищем в виде $x_{част.} = \sum_i x_{част.,i}$, где $Lx_{част.,i} = f_i$

Пример 1 $Lx := x'' - 2x' + x = \underbrace{1 + e^{-t} + e^{t}}_{\text{сумма } 3^x \text{ квазимногочленов}}$ (5)

$x_{част.} = x_1 + x_2 + x_3$, где

$Lx_1 = 1$, $\quad Lx_2 = e^{-t}$, $\quad Lx_3 = e^{t}$

1° $x'' - 2x' + x = 1$ $\Big\}$ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_k(t) = 1$, $Q_m(t) = 0$, $\alpha + i\beta = 0$ – х.к. кратности $r = 0$ $\Big\}$

$\lambda_{1,2} = 1$ – хар. корни

$x_{част.} = A = 1$

2° $x'' - 2x' + x = e^{-t}$ $\Big\}$ $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $P_k(t) = 1$, $Q_m(t) = 0$, $\alpha + i\beta = -1$ – х.к. кратности $r = 0$ $\Big\}$

$x_{част} = Ae^{-t}$, $A = \frac{1}{4}$

3° $x'' - 2x' + x = e^{t}$ $\Big\}$ $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_k(t) = 1$, $Q_m(t) = 0$, $\alpha + i\beta = 1$ – хар. корень кратности $r = 2$

$$+\begin{cases} x_2 = \cancel{t^2 A e^t} \\ (-2)x_2' = (\cancel{2tAe^t} + \cancel{t^2 A e^t})(-2) \\ x_2'' = 2Ae^t + \cancel{t^2 A e^t} + \cancel{2 \cdot 2t \cdot Ae^t} \end{cases}$$

$$e^t = 2Ae^t, \quad A = 1/2$$

$(uv)'' = u''v + uv'' + 2u'v'$

формула Лейбница двухкратного дифф-ия

Ответ: Для ДУ (5) $x_{част} = 1 + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{t^2}{2}e^{t}$

Пример 2 а) $x'' + x = \sin t$ $\left\{ \alpha=0,\ \beta=1,\ P_k(t)=0,\ Q_m(t)=1,\ \alpha+i\beta=i \right.$ — хар. кор. кр. $r=1$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$$+\begin{cases} x_{част} = t(A\cos t + B\sin t) \\ x''_{част} = -t(\cancel{A\cos t + B\sin t}) + 2(B\cos t - A\sin t) \end{cases}$$

$\sin t = 2(B\cos t - A\sin t) \Rightarrow B=0,\ A=-1/2$

Ответ: $x_{част.} = -\frac{t}{2}\cos t$

$x_{он} = \underbrace{C_1\cos t + C_2\sin t}_{\text{собственные колебания системы}} - \overbrace{\frac{t}{2}\cos t}^{\text{вынужденные колебания}}$ — растущая амплитуда

Явление резонанса !!!

б) $x'' + x = \sin 2t$ $\left\{ \alpha=0,\ \beta=2,\ P_k(t)=0,\ Q_m(t)=1,\ \alpha+i\beta=2i \right.$ — хар. корень кр. $r=0$

$$+\begin{cases} x_{част.} = A\cos 2t + B\sin 2t \\ x''_{част.} = -4(A\cos 2t + B\sin 2t) \end{cases}$$

$\sin 2t = -3(A\cos 2t + B\sin 2t) \Rightarrow A=0,\ B=-\frac{1}{3},\ x_{част.} = -\frac{\sin 2t}{3}$

Ответ: $x_{он} = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{\sin 2t}{3}$ — колебания с ограниченной амплитудой

Комплексификация

1) $x'' + x = \sin t \longleftrightarrow z'' + z = e^{it}$, $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i\sin t}$$

$$\boxed{x_{\text{част.}} = \operatorname{Im} z_{\text{част.}}}$$

$$+\left\{\begin{aligned} z_{\text{част.}} &= \cancel{tAe^{it}} \\ z''_{\text{част.}} &= \cancel{-tAe^{it}} + 2iAe^{it} \end{aligned}\right.$$

$$\cancel{e^{it}} = 2iA\cancel{e^{it}},\quad 1 = 2iA,\quad A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2},\quad z_{\text{част.}} = -\frac{i}{2}te^{it}$$

$$x_{\text{част.}} = \operatorname{Im}\left(-\frac{i}{2}te^{it}\right) = \operatorname{Im}\left[\frac{t}{2}(-i\cos t + \sin t)\right] = -\frac{t}{2}\cos t$$

то же, что раньше

2) $x'' + x = 2\cos t - 8t\sin t$

$x_{\text{част.}} = t\left[(At+B)\cos t + (Ct+D)\sin t\right]$, коэфф-ты A, B, C, D находим подстановкой в ДУ

$z'' + z = 2e^{it}(1 + 4it)$, т.к. $\cos t = \operatorname{Re} e^{it}$, $-\sin t = \operatorname{Re}(ie^{it})$

$z_{\text{част.}} = te^{it}(\mathcal{A}t + \mathcal{B})$

Компл. коэф-ты находим подстановкой в ДУ

Решить самостоятельно!

Уравнение Эйлера

10

$y(x) = ?\quad x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (1)$

a_i — константы

(2) $x = e^t \Longleftrightarrow t = \ln x$; $\frac{dx}{dt} = e^t = x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$

$$y(x)\big|_{x=e^t} = \tilde{y}(t) \Longleftrightarrow \tilde{y}(t)\big|_{t=\ln x} = y(x)$$

✓ $\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dt}\frac{dt}{dx} = \tilde{y}' \cdot x^{-1}$, $\boxed{x\frac{dy}{dx} = \tilde{y}'}$ (i)

✓ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\tilde{y}'\right) = -x^{-2}\tilde{y}' + x^{-1}\left(\tilde{y}'' x^{-1}\right) = x^{-2}\left(\tilde{y}'' - \tilde{y}'\right)$

$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \tilde{y}'' - \tilde{y}'}$ (ii)

✓ Аналогично получаем (iii) $\boxed{x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \tilde{y}''' - 3\tilde{y}'' + 2\tilde{y}'}$ и т. д.

Замена переменной (2) переводит ДУ (1) в лин. ДУ с ПК

$L\tilde{y} = \tilde{f}(t)$, $\tilde{f}(t) = f(x)\big|_{x=e^t}$ (3)

Пример $\underbrace{x^2y''}_{\tilde y''-\tilde y'}+\underbrace{2xy'}_{\tilde y'}-\underbrace{2y}_{\tilde y}=\underbrace{2-\frac{2}{x}}_{2-2e^{-t}}$, $y(x)=?$ (1)

Замена $\boxed{x=e^t}$ переводит ДУ для $y(x)$ в ДУ для $\tilde y(t)=y(x)\big|_{x=e^t}$:

(*) $\tilde y''+\tilde y'-2\tilde y=2-2e^{-t}$, $\tilde y_{он}=\tilde y_{оо}+\tilde y_{час.}$,

$\lambda^2+\lambda-2=0$ — хар. ин-н, $\lambda_{1,2}=\left\{\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$, $\tilde y_{oo}=C_1e^{-2t}+C_2e^t$;

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde y_{час.}=\tilde y_1+\tilde y_2;\quad \tilde y_1=A,\ A=-1;\quad \tilde y_2=Be^{-t},\ B=1;\\ \tilde y_{час.}=-1+e^{-t}\end{array}\right.$$

$\tilde y_{он}=C_1e^{-2t}+C_2e^t-1+e^{-t}$

Ответ: $y(x)=C_1x^{-2}+C_2x-1+x^{-1}$

Как найти ДУ (*), не используя формулы (i), (ii) и т.д.?

Другой метод решения уравнения Эйлера

$$\mathcal{L} y(x) = f(x) \quad (1) \overset{}{\underset{x=e^t}{\Longleftrightarrow}} L\tilde{y}(t) = f(e^t) \quad (*)$$

$$L = ?$$

Оператор L можно определить по характеристическому многочлену.

Найдём $p(\lambda)$ и восстановим L.

$$L(e^{\lambda t}) = 0 \underset{\boxed{e^t = x}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{L}(x^\lambda) = 0$$

Найдём условие на λ, чтобы $\mathcal{L}(x^\lambda) = 0$: $\boxed{p(\lambda) = 0}$ характеристическое уравнение

Примеры 1) $\underbrace{x^2 y'' + 2xy' - 2y}_{\mathcal{L}y} = 2 - 2/x$;

$$\mathcal{L}(x^\lambda) = x^2 \underbrace{(x^\lambda)''}_{\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}} + 2x \underbrace{(x^\lambda)'}_{\lambda x^{\lambda-1}} - 2x^\lambda = x^{\lambda-2}\Big[\underbrace{\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2}_{\lambda^2+\lambda-2}\Big]$$

$$\mathcal{L}(x^\lambda) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda^2 + \lambda - 2}_{p(\lambda)} = 0$$

$$\boxed{L\tilde{y} = \tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - 2\tilde{y} = 2 - 2e^{-t}}$$

2) $\underbrace{x^2 y'' + x y' + 4y}_{\mathcal{L}y} = 3\cos\ln x \qquad y(x) = ?$

$x = e^t, \quad \tilde{y}(t) = y(x)\big|_{x=e^t}$

$\Updownarrow$

$L\tilde{y} = 3\cos t$

$\mathcal{L}(x^\lambda) = 0 \Longleftrightarrow x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x\lambda x^{\lambda-1} + 4x^\lambda = 0$

хар. уравнение

$\lambda(\lambda-1) + \lambda + 4 = 0$

$\boxed{\lambda^2 + 4 = 0} \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i$

$\mathcal{L}(x^{\pm 2i}) = 0 \Longleftrightarrow L(e^{\pm 2it}) = 0$

метод комплексификации

(*) $\tilde{y}'' + 4\tilde{y} = 3\cos t, \quad z'' + 4z = 3e^{it}, \quad z_{част} = Ae^{it}$

$A\cancel{e^{it}}(-1+4) = 3\cancel{e^{it}}, \quad A = 1, \quad \tilde{y}_{част} = \operatorname{Re} z_{част} = \cos t$

$\tilde{y}_{он} = \cos t + c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t$

Ответ: $y_{он} = \cos\ln x + c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)$