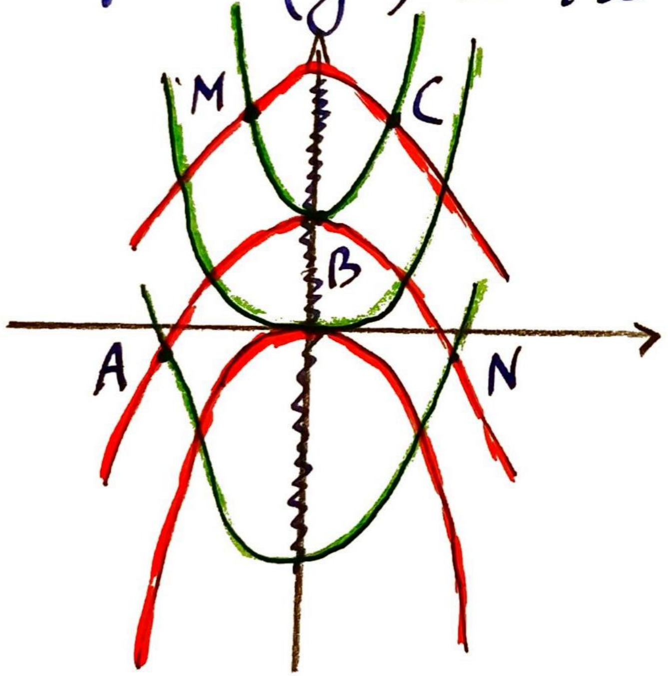
# Уравнения, не разрешенные относительно $y'$

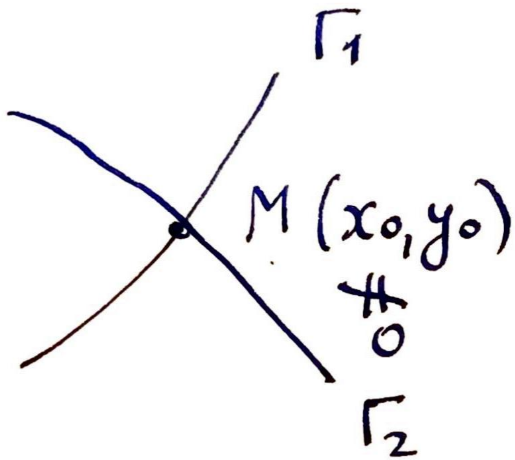
$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Пример 1

$$(y')^2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y' = 2x, \ y = x^2 + C \ (1') \\ y' = -2x, \ y = -x^2 + C \ (1'') \end{array}$$




- Через любую точку $M(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, проходит одна парабола семейства $(1')$ и одна парабола семейства $(1'')$.
- ИК уравнения (1) являются кривые $ABC$ и $MBN$, т.е. через точку $B(0, y_0)$ проходит четыре ИК $\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ - "множество неединственности"




Чтобы выделить однозначно ИК задаём для данных Коши

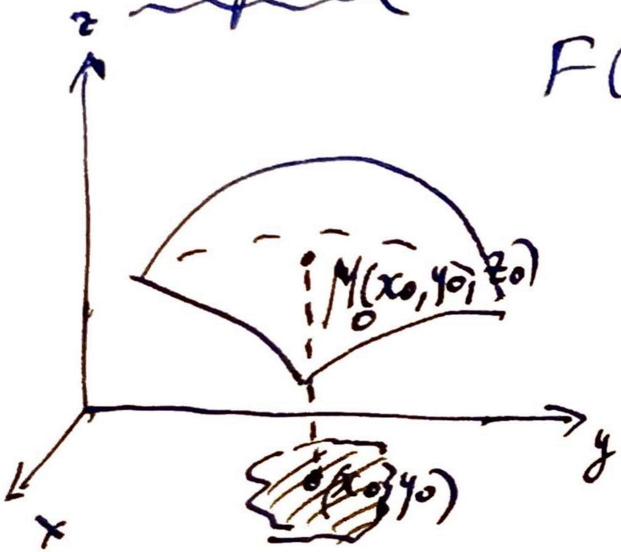
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

где $0 \neq x_0$, $y_0$ – произвольно

$y_0'$ – подходящее значение: $F(x_0, y_0, y_0') = 0$

**Теорема** (о неявной функции) Рассмотрим

$$F(x,y,z)=0 \quad (1)$$




Пусть $F$ класса $C^1$ (т.е. $\exists$ непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_z$).

Пусть в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

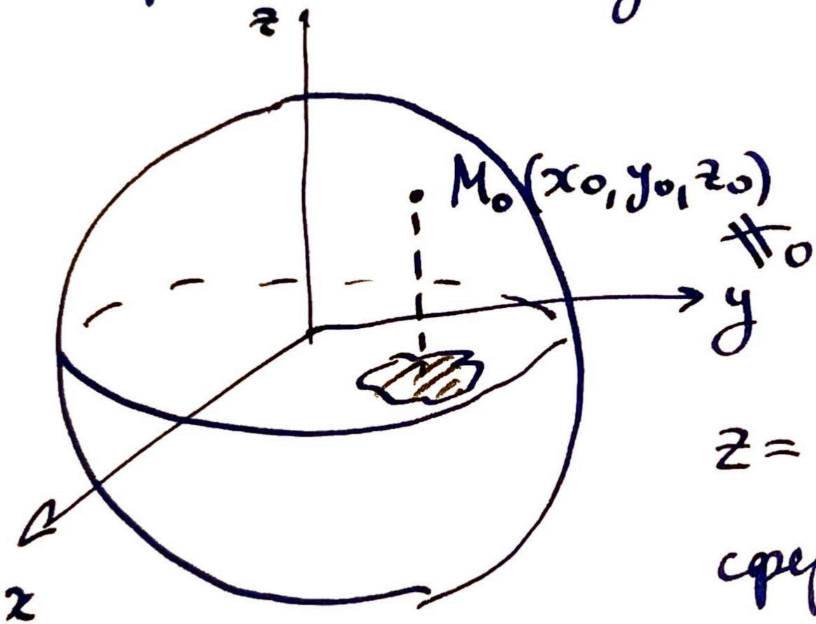
Тогда $\exists$ функция $z=f(x,y)$, такая что $z_0=f(x_0,y_0)$,

$F(x,y,f(x,y))=0$ $\forall (x,y)$ достаточно близких к $(x_0,y_0)$,

т.е. вблизи точки $M_0$ поверхность (1) можно задать как график функции $z=f(x,y)$. Кроме того, $f\in C^1$,

$$f'_x(x,y)=-\left.\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\right|_{z=f(x,y)}$$ и аналогично $f'_y(x,y)=\ldots\ldots$

Пример $x^2+y^2+z^2-1=0$ (1)




$\frac{\partial F}{\partial z}=2z=0$ на множестве $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ задаёт сферу (1) в окрестности $M_0$

**Теорема** (существования и единственности)

Рассмотрим ДУ $F(x, y, y') = 0$. (1)

Пусть $F$ класса $C^1$ в области $D$ и в точке $(x_0, y_0, y_0') \in D$

имеем: $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$.

Тогда $\exists!$ решение ДУ (1), удовлетворяющее

условиям: $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

**Док-во.** По теореме о неявной функции в некоторой окрестности $(x_0, y_0)$ $\exists$ функция $f(x, y)$, такая что $f \in C^1$. Тогда

$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$, $f(x_0, y_0) = y_0'$, задача Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ имеет единственное решение, причем $y'(x_0) = f(x_0, y_0) = y_0'$.

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Если для уравнения (1) в точке $(x_0, y_0)$ нарушается единственность, то при некоторых $y_0'$ выполняются два условия:

$$\underbrace{F(x_0, y_0, y_0') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0'}(x_0, y_0, y_0') = 0}_{\text{исключая } y_0', \text{ получаем}} \quad (2) \qquad \varphi(x_0, y_0) = 0 \quad (2')$$

Множество (2) или (2') называется дискриминантной кривой.

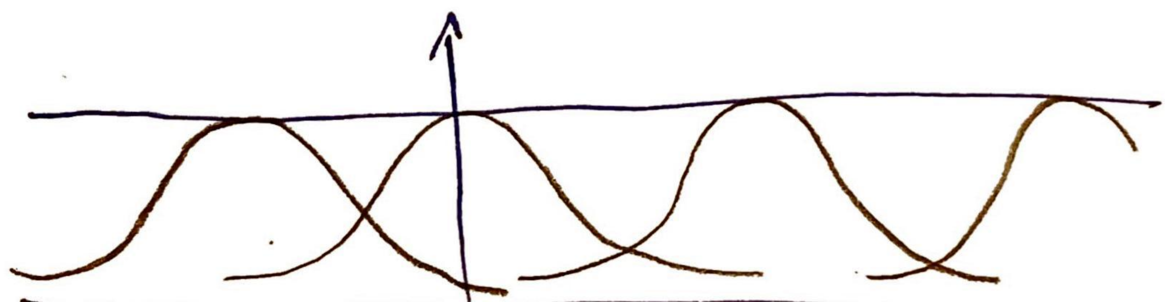
! || Дискриминантная кривая содержит все точки нарушения единственности, но может содержать и некоторые другие точки.

Примеры 1) $\underbrace{(y')^2 - 4x^2}_{F(x,y,y')} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$

$\boxed{x=0}$ дискриминант. кривая ДК

2) $\underbrace{(y')^2 - 4y^3(1-y)}_{F(x,y,y')} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$

$4y^3(1-y) = 0$, т.е. $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right\}$ две ветви дискримин. кривой ДК



$y' = \pm 2y\sqrt{y(1-y)}$

$y = \frac{1}{(x+C)^2+1}$

$$y' = \pm 2y\sqrt{y(1-y)} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{y\sqrt{y(1-y)}} = \pm 2\,dx \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{y^2} = d\left(-\frac{1}{y}\right)$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y(1-y)}} = \int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\sqrt{\frac{1}{y}-1}} = -2\sqrt{\frac{1}{y}-1}$$

$$-\cancel{2}\sqrt{\frac{1}{y}-1} = \pm \cancel{2}(x+c), \quad \frac{1}{y}-1 = (x+c)^2$$

$$y = \frac{1}{1+(x+c)^2}$$

# Методы решения ДУ $F(x, y, y') = 0$ (1)

Ⓐ Разрешить уравнение относительно $y'$.

Ⓑ Метод введения параметра $p = y'$.

Пусть ДУ можно записать в виде

(2) $y = f(x, y')$ (или $x = f(y, y')$).

Введём $\boxed{p = y'}$. Тогда уравнение (2) имеет вид

$$y = f(x, p) \xrightarrow[\text{дифференцируем по } x]{} y' = f'_x + f'_p\, p', \text{ т.е. } \underbrace{p = f'_x + f'_p\, p'}_{\text{исключим } y}, \quad (3)$$

!

Решаем ДУ (3): $x = \varphi(p)$ – решение (3) $\Rightarrow \begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = f(\varphi(p), p) \end{cases}$

$p = \psi(x)$ – решение (3) $\Rightarrow y = f(x, \psi(x))$

решение ДУ (2)

Уравнение Клеро: $y = xy' + \psi(y')$ (1)

$\boxed{y'=p}$, $y = xp + \psi(p)$ (1')

после дифференцирования по $x$

$$y' = p + xp' + \psi'_p\, p', \text{ т.е. } \cancel{p} = \cancel{p} + xp' + \psi'_p\, p'$$

$$0 = p'(x + \psi'_p)$$

1° $p' = 0$, $p = C = \text{const}$, из (1') $\Rightarrow$ $y = Cx + \psi(C)$ — семейство прямых

2° $x = -\psi'_p = -\psi'(p)$ $\quad \begin{cases} y = -\psi'(p)\,p + \psi(p) \\ x = -\psi'(p) \end{cases}$ — решение ДУ (1), заданное параметрически

**Пример** $y = xy' + (y')^2$ (1)

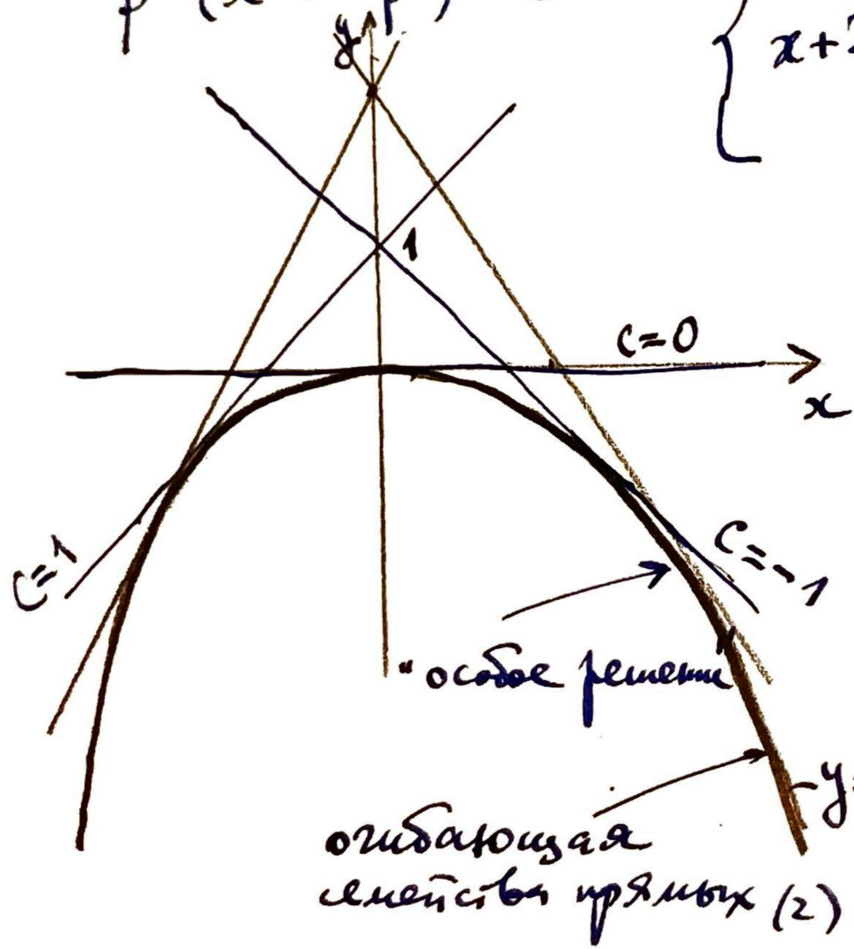
$y' = p$, $y = xp + p^2$, $\cancel{p} = (y' =)\, \cancel{p} + xp' + 2pp'$,

$$p'(x + 2p) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p' = 0,\ p = C,\ y = xC + C^2 \quad (2) \\ x + 2p = 0 \qquad \begin{cases} x = -2p \\ y = (-2p)\cdot p + p^2 = -p^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} p = -\dfrac{x}{2} \\ y = x\left(-\dfrac{x}{2}\right) + \left(-\dfrac{x}{2}\right)^2 = -\dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

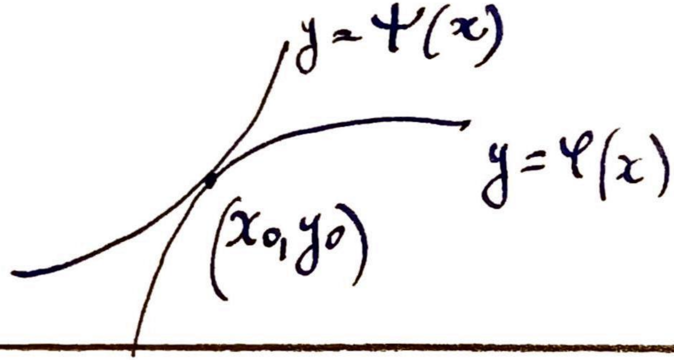
$$y = -\frac{x^2}{4} \qquad (3)$$




! Парабола (3) в каждой своей точке касается некоторой прямой семейства (2).

Кривые $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ касаются в точке $(x_0,y_0)$, если

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0\\ &\varphi'(x_0)=\psi'(x_0)\end{aligned}\right\} \quad (*)$$




---

Условие касания $(*)$ для $y=-\dfrac{x^2}{4}$ и $y=Cx+C^2$:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{2}=C & (1)\\[2mm] -\dfrac{x^2}{4}=Cx+C^2 & (2)\end{cases}$$

выполнено,

т.к. из $(1) \Rightarrow (2)$. Действительно, $-\dfrac{x^2}{4}=\left(-\dfrac{x}{2}\right)x+\left(-\dfrac{x}{2}\right)^2$

Уравнение Лагранжа: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ (1)

Если $\varphi(y') = y'$, то имеем уравнение Клеро.

Пусть $\boxed{y'=p}$. $y = x\varphi(p) + \psi(p) \Rightarrow p = (y'=)\, x\varphi'_p p' + \varphi + \psi'_p p'$

(2) $p - \varphi(p) = p'\left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)$ ← уравнение для $p = p(x)$ или $x = x(p)$

1° Если $p_0 - \varphi(p_0) = 0$, то $p(x) = p_0$ — решение ДУ(2).

$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$ — решение ДУ(1)

2° $\frac{dp}{dx}\left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right) = p - \varphi(p)$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}\, x + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$ ← линейное ДУ

$$\begin{cases} x = \omega(p, C) \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases} \xrightarrow{\text{исключаем } p} \Phi(x, y, C) = 0$$

общий интеграл ДУ(1)

<u>Пример</u> $y = x(y')^2 + (y')^2$ (1) $\Longleftrightarrow$ $y = \underbrace{xp^2 + p^2}_{(x+1)p^2}$ (1')

$\boxed{y' = p}$; $p = p^2 + x\,2pp' + 2pp'$

$$p - p^2 = p'\,2p\,(x+1) \quad (2)$$

1) $p - p^2 = 0$, $p = 0$ или $p = 1$ $\Big\}$ решения ДУ (2) $\Rightarrow$ $y = 0$, $y = x + 1$ $\Big\}$ решения ДУ (1)

2) $\cancel{p}(1-p) = p'\,2\cancel{p}\,(x+1)$, $\dfrac{dx}{dp} = \underbrace{\dfrac{2x}{1-p}}_{=a(p)} + \underbrace{\dfrac{2}{1-p}}_{=b(p)}$ $\Leftarrow$ линейное уравнение

$x(p) = u(p)\,v(p)$, где $\begin{cases} \dfrac{du}{dp} = -\dfrac{2u}{p-1}, & u = \dfrac{1}{(p-1)^2} \\ \dfrac{dv}{dp} = \dfrac{2\,(p-1)^2}{(1-p)\cdot 1} = -2(p-1), & v = -(p-1)^2 + A \end{cases}$

$\dfrac{dv}{dp} = \dfrac{b(p)}{u(p)}$

$\boxed{x = \dfrac{A}{(p-1)^2} - 1}$ $\quad p = 1 + \dfrac{C}{\sqrt{x+1}}$

$y \overset{(1')}{=} (x+1)\left(\dfrac{C}{\sqrt{x+1}} + 1\right)^2$

$y = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2$

Ответ: $y = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2$

$y = 0$