ДУ $1^{\text{го}}$ порядка. Основные классы инт-ых ДУ.

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

I. $y' = h(x)\,g(y)$ — "Ур-ие с разделяющимися переменными"

1° Пусть $g(y) \neq 0$. Тогда $\dfrac{y'}{g(y)} = h(x)$; $\displaystyle\int \frac{y'}{g(y)}dx = \int h(x)dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

$$G(y) = H(x) + C$$

конкретные первообразные

2° Пусть $\exists\, y_0 : g(y_0) = 0$.

Тогда $y(x) \equiv y_0$ — особое решение (о.р.)

Алгоритм $y' = h(x)\,g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

1° $\dfrac{dy}{g(y)} = h(x)dx$, если $g(y) \neq 0$ 2° Если $\exists\, y_0 : g(y_0) = 0$, то $y(x) \equiv y_0$ — о.р.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

Запись уравнения в дифференциалах

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \qquad (2)$$

где M и N — заданные функции.

Решения ДУ (2) суть решения хотя бы одного ДУ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}.$$

Пример $y\,dx + x\,dy = 0$ (*) **Ответ:** $\boxed{y = \frac{C}{x},\ C\in\mathbb{R};\quad x \equiv 0}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \ (а), \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \ (б)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \underbrace{-\ln|x| + \ln \overset{>0}{A}}_{\ln\frac{A}{|x|}}, \quad |y| = \frac{A}{|x|}, \quad y = \pm\frac{A}{x}$$

$y \equiv 0$ — о.р. $\Rightarrow$ $y = \frac{C_1}{x},\ C_1\in\mathbb{R}$ $\leftarrow$ решение ДУ (а)

Аналогично, $x = \frac{C_2}{y},\ C_2\in\mathbb{R}$ $\leftarrow$ решение ДУ (б)

II. Однородные ДУ

$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (3)

однородные функции степени p

Опр. $M(x,y)$ – однородная функция степени p, если

$M(kx, ky) = k^p M(x,y)$ $\forall x, y$ и $\forall k > 0$

Примеры однородных функций: $ax + by$, $ax^2 + bxy + cy^2$;

$2x + \sqrt{x^2 + y^2}$, $\frac{x-y}{3x^2 - 4xy}$, $x^2 \cos\frac{y}{x}$.

ДУ (3) решается заменой $\boxed{\frac{y}{x} = u(x)}$ – новая неизвестная функция

$\Updownarrow$

$y = x u(x)$

$\Downarrow$

$y' = x u' + u$

ДУ $(3_1) \Longleftrightarrow x u' + u = \varphi(u)$

$u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}$

ДУ класса I

Примеры 1) $y' = \frac{x+y}{x} \left(= 1 + \frac{y}{x}\right)$, $y = xu$

$xu' + \cancel{u} = 1 + \cancel{u}$, $u' = \frac{1}{x}$, $u = \ln|x| + C$, $\boxed{y = x(\ln|x|+C)}$

2) $y' = \frac{y-x}{x+y} \left(= \frac{\frac{y}{x}-1}{1+\frac{y}{x}}\right)$, $y = xu$

$xu' + u = \frac{u-1}{1+u}$, $xu' = \frac{u+1}{1+u} - u = \frac{-1-u^2}{1+u}$, $x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u^2}{1+u}$

$\frac{(u+1)du}{u^2+1} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{u\,du}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$

$u\,du = \frac{1}{2} d\,u^2 = \frac{1}{2} d(u^2+1)$, $\int \frac{u\,du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C$

$$\boxed{\left.\left(\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \operatorname{arctg} u\right)\right|_{u=\frac{y}{x}} = -\ln|x| + C}$$

3) $(y^2-2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$, $y = xu$, $dy = x\,du + u\,dx$ 5

$(\cancel{x^2}u^2 - 2\cancel{x\cdot x}u)\,dx + \cancel{x^2}(x\,du + u\,dx) = 0$

$\boxed{x \equiv 0}$ — о.р.

$\underbrace{u^2\,dx - u\,dx}_{u(u-1)\,dx} = -x\,du$, $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{du}{u(u-1)}$ о.р. $\boxed{\begin{matrix} u\equiv 0 \\ u \equiv 1\end{matrix}}$

"Уравнение с разделяющимися переменными"

$\boxed{\begin{matrix} y\equiv 0 \\ y = x\end{matrix}}$ — о.р.

$\int \dfrac{dx}{x} = -\int \dfrac{du}{u(u-1)}$, $\dfrac{1}{u(u-1)} = \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}$ $\left(= \dfrac{a}{u-1} - \dfrac{b}{u}\right)$

$a = b = 1$

$\underbrace{A}_{\ln C,\ C>0} + \ln|x| = \ln|u| - \ln|u-1|$, $\cancel{\ln} C|x| = \cancel{\ln}\left|\dfrac{u}{u-1}\right|$

$\underbrace{\pm C}_{B\neq 0}\, x = \dfrac{u}{u-1}$, $Bx = \dfrac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 1} = \dfrac{y}{y-x}$

Ответ: $Bx = \dfrac{y}{y-x}$, $B \neq 0$

$y = x$, $y \equiv 0$, $x \equiv 0$

4) $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ — «Уравнение фокусирующего зеркала»

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$ $\left(= \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y}\right)$

$x = x(y) = ?$ $\boxed{x = y\,u(y)}$!

$\cancel{u} + y\frac{du}{dy} = \sqrt{u^2+1} + \cancel{u}$ — ДУ класса I

$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{dy}{y}$, $\ln|u+\sqrt{u^2+1}| = \ln(|y|\underbrace{A}_{>0})$, $u+\sqrt{u^2+1} = \underbrace{\pm A}_{C \neq 0}\,y$

$\sqrt{u^2+1} = Cy - u$, $\cancel{u^2}+1 = C^2y^2+\cancel{u^2}-2C\underbrace{y\,u}_{x}$,

$C^2y^2 - 2Cx = 1$, $x = \frac{C}{2}y^2 - \frac{1}{2C}$, $C \neq 0$ — семейство парабол

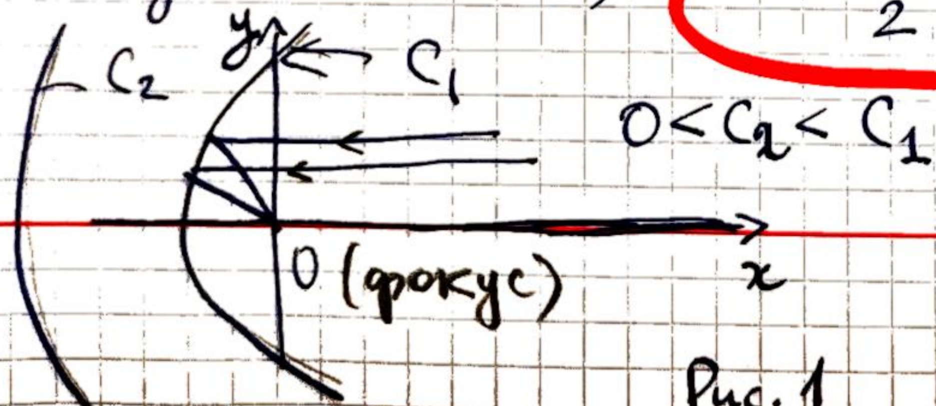

Рис. 1

III. Линейные уравнения: $y' = a(x)y + b(x)$ (4)

1° Пусть $b(x) \equiv 0$, т.е. $y' = a(x)y$ – ДУ класса I

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx, \quad \boxed{y \equiv 0} \text{ – о.р.}$$

$$\ln|y| = \int a(x)dx = \underbrace{\varphi(x)}_{\text{фиксированная первообразная}} + B, \quad B \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\varphi(x)} \underbrace{e^{B}}_{>0}, \quad y = \underbrace{\pm e^{B}}_{=C \neq 0} \underbrace{e^{\varphi(x)}}_{= u(x) \neq 0 \text{ всюду}}$$

$$\boxed{y = C \underbrace{u(x)}_{\text{"частное решение ДУ } (4_0) \text{, отличное от нуля"}}, \; C \in \mathbb{R}}$$ (с учетом особого решения $y \equiv 0$)

2° Решение ДУ (4) ищем в виде $y = C(x) \underbrace{u(x)}_{\text{частное решение } (4_0)}, \; C(x) = ?$

$$C'u + \underbrace{\cancel{Cu'} = a\cancel{Cu}}_{\text{так как } u' = au} + b \iff C' = \frac{b}{u}$$

$$C = \int \frac{b}{u} dx$$

"Метод вариации постоянной"

Алгоритм решения ДУ $y' = a(x)y + b(x)$

$y = v(x)\,u(x)$, где

1) $u' = a(x)u$; 2) $v' = \dfrac{b(x)}{u(x)}$, $v = \int \dfrac{b}{u}\,dx$

$u \not\equiv 0$

ДУ класса I

Пример $xy' - 2y - 2x^4 = 0$, $y' = \dfrac{2y}{x} + 2x^3$

$y = v(x)\,u(x)$, где $\begin{cases} u' = 2\dfrac{u}{x}, \quad u = x^2 \quad \left(\dfrac{du}{u} = 2\dfrac{dx}{x},\ \ln|u| = 2\ln|x| \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{\ln x^2} \\ v' = \dfrac{b(x)}{u(x)} = \dfrac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}} = 2x \\ v = x^2 + C \end{cases}$

Ответ: $y = x^2(x^2 + C)$, $C \in R$

IV. Уравнение Бернулли: $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

сводится к линейному ДУ заменой

$$\boxed{y^{1-\alpha} = z}$$

$$\underbrace{\frac{y'}{y^{\alpha}}}_{\parallel} = a(x)\, y^{1-\alpha} + b(x) \qquad \boxed{y \equiv 0} \text{ — о.р., если } \alpha > 0$$

$$\frac{\left(y^{1-\alpha}\right)'}{1-\alpha}$$

$$z' = \underbrace{(1-\alpha)\, a(x)}_{A(x)}\, z + \underbrace{(1-\alpha)\, b(x)}_{B(x)} \text{ — линейное ДУ}$$

Некоторые ДУ становятся линейными или уравнениями Бернулли, если их переписать для обратной функции $x = x(y)$.

Пример $y = (3x+y^3)y'$, $y' = \dfrac{y}{3x+y^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x+y^3}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{3x+y^3}{y} = \underbrace{\frac{3}{y}}_{=a(y)} x + \underbrace{y^2}_{=b(y)}$$

$x = v(y)\,u(y)$, где

1) $\begin{cases} u' = \dfrac{3}{y} u \\ u \not\equiv 0 \end{cases}$ $\quad u = y^3$

2) $v' = \dfrac{y^2}{y^3} = \dfrac{1}{y}$, $v = \ln|y| + C$

Ответ: $x = (\ln|y| + C)\,y^3$