Цель работы

Рассмотреть некоторые простейшие модели боевых действий – ***модели Ланчестера***, а также их программную реализацию.

Задание

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью *38 000* человек, а в распоряжении страны Y армия численностью в *29 000* человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск армии X и армии Y для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками:
   $\frac{dx}{dt} = -0.41x(t) - 0.76y(t) + |sin(t+3)|$
   $\frac{dy}{dt} = -0.59x(t) - 0.63y(t) + |cos(t+2)|$
2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов:
   $\frac{dx}{dt} = -0.37x(t) - 0.76y(t) + |sin(6t)|$
   $\frac{dy}{dt} = -0.32x(t) - 0.61y(t) + |cos(7t)|$

Теоретическое введение

Динамическая модель Ланчестера, или закон Ланчестера о ходе сражения, является инструментом теоретического прогноза результатов ведения боевых действий. Следует отметить, что в это же время аналогичные модели исследовал М. Осипов, математические результаты которого были аналогичными.

Модель Ланчестера – Осипова описывает динамику истощения (Attrition) численности воюющих сторон в зависимости от их показателей эффективности ведения боевых действий.

Эта простейшая модель неоднократно модифицировалась в зависимости от типа боевых действий: применение артиллерии, партизанская или повстанческая войны, возможность задействовать резервы, условия, приводящие к хаотическому поведению, учет иерархии, игровых и психологических.

Выполнение лабораторной работы

1. Постановка задачи

Рассмотрим некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера (Осипова — Ланчестера). В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотрим два случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками.
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

1.1. Боевые действия между регулярными войсками

Модель

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство).
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.).
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

где:

- члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$ описывают потери, не связанные с боевыми действиями, а $a(t)$ и $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери.
- члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя, а $b(t)$ и $c(t)$ - величины, которые указывают на эффективность боевых действий.
- функции $P(t)$ и $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

В простейшей модели борьбы двух противников:

- коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными, то есть, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x).
- не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями.
- не учитывается возможность подхода подкрепления.

Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид:

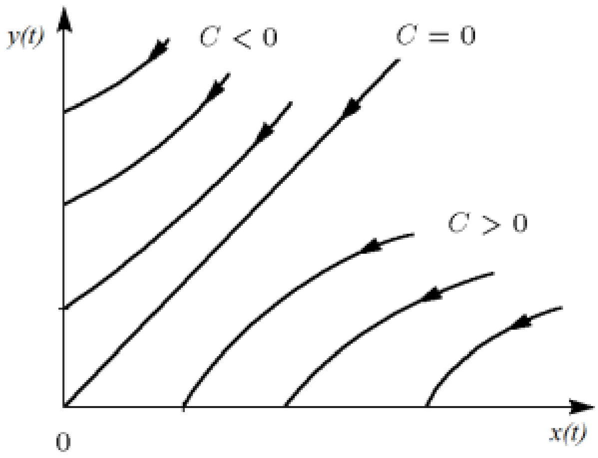
$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ x \dot{=} y = -cx \end{cases}$$

Это жесткая модель, которая допускает точно решение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. [-@fig:001]). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки:



Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$:

- Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y, т.е. побеждают партизаны.

  Пояснение: это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

- Если начальная точка лежит ниже этой прямой, то гипербола выходит на ось x, т.е. побеждает регулярная армия.

  Пояснение: это значит, что в ходе войны численность армии y уменьшается до нуля (за конечное время). Армия x выигрывает, противник уничтожен.

- Если начальная точка лежит на прямой, то война заканчивается истреблением обеих армий.

  Пояснение: но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

1.2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Модель

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан.

В результате модель принимает вид:

$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$

$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$

Пояснение:

- члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$ описывают потери, не связанные с боевыми действиями, где:
  - $a(t)$ и $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери.
- члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя, где:
  - $b(t)$ и $c(t)$ - величины, которые указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно.

- функции $P(t)$ и $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

В простейшей модели борьбы двух противников:

- коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными.

  Пояснение: Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x).

- не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями.
- не учитывается возможность подхода подкрепления.

Если рассматривать второй случай с теми же упрощениями, то модель принимает вид:

$\frac{dx}{dt} = -by(t)$

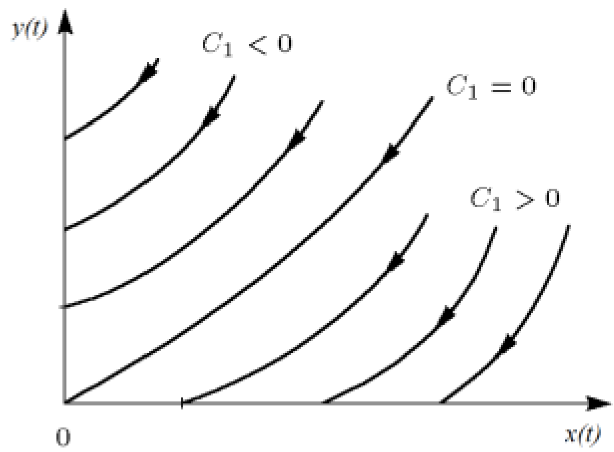
$\frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t)$

Эта система приводится к уравнению:

$\frac{d}{dt}(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)) = 0$,

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение (рис. [-@fig:002]):

$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$



Эти гиперболы разделены параболой $\frac{b}{2}x^2(0) = cy(0)$:

- при $C_1 < 0$ побеждают партизаны.

  Пояснение: это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

- при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия.

  Пояснение: это значит, что в ходе войны численность армии y уменьшается до нуля (за конечное время). Армия x выигрывает, противник уничтожен.

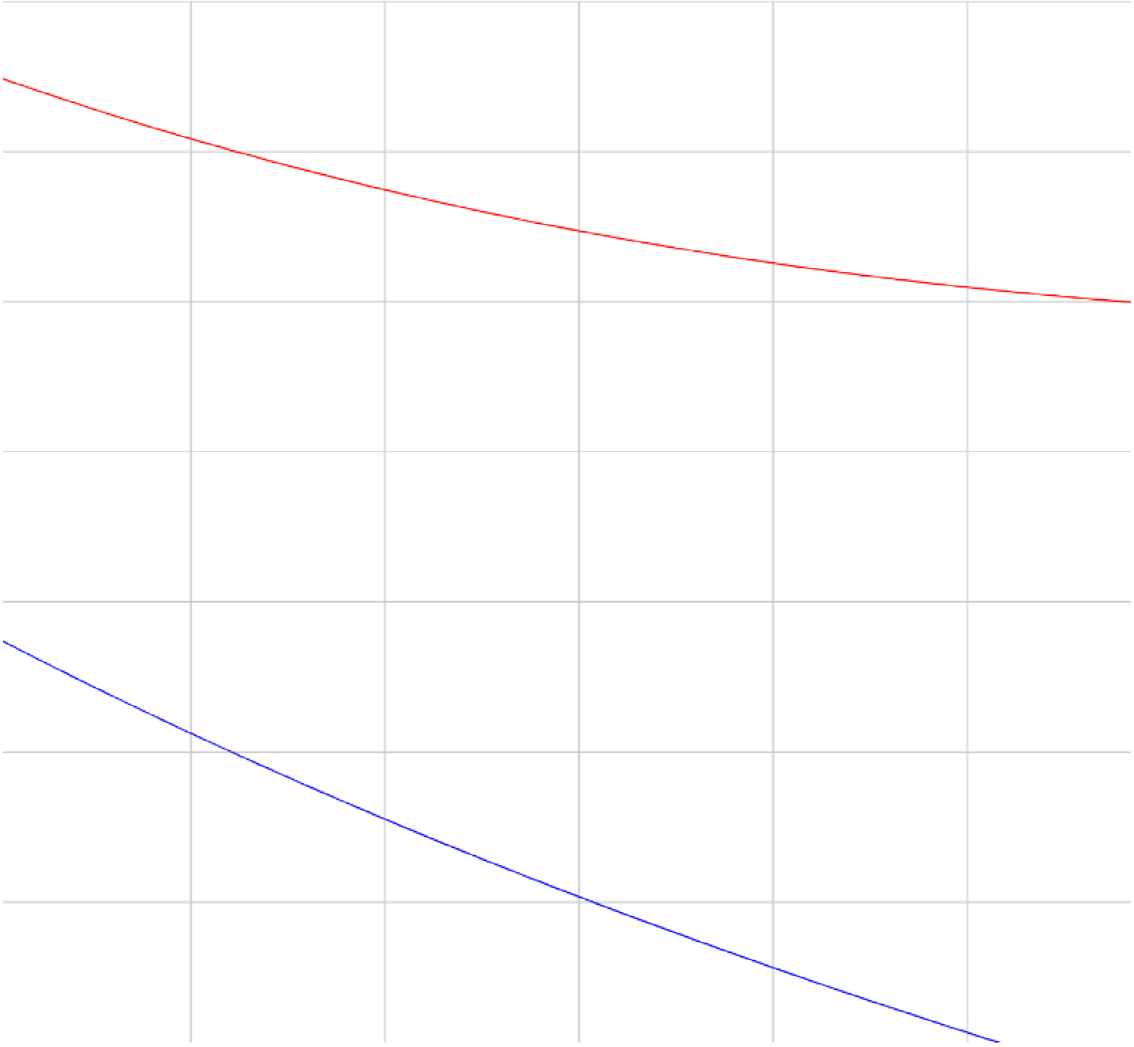
2. Построение графиков изменения численности войск

2.1. Боевые действия между регулярными войсками

1. Код программы на Modelica:

```
model lab3case1

  type Soldier=Real(unit="sol", min=0);//тип Солдат с минимальным значением 0
  type Time=Real(unit="d", min=0);//тип Время с минимальным значением 0
  parameter Time t;//параметр времени t

  constant Real a = 0.41;//степень влияния различных факторов на потери
  constant Real b = 0.76;//эффективность боевых действий армии y
  constant Real c = 0.59;//эффективность боевых действий армии x
  constant Real h = 0.63;//степень влияния различных факторов на потери

  Real p;//размер подкрепления к армии X
  Real q;//размер подкрепления к армии Y
  Soldier x; //численность армии X
  Soldier y; //численность армии Y

initial equation
  x=38000;//начальная численность армии X
  y=29000;//начальная численность армии Y
  t=0;//стартовое время

equation
  p=abs(sin(t+3));//функция, описывающая подкрепление к армии X
  q=abs(cos(t+2));//функция, описывающая подкрепление к армии Y
  der(x)=-a*x-b*y+p;//первое дифференциальное уравнение системы
  der(y)=-c*x-h*y+q;//второе дифференциальное уравнение системы

end lab3case1;
```

2. График изменения численности войск армии X и армии Y (рис. [-@fig:003]):



Легенда:

- красный - регулярная армия X;
- синий - регулярная армия Y;

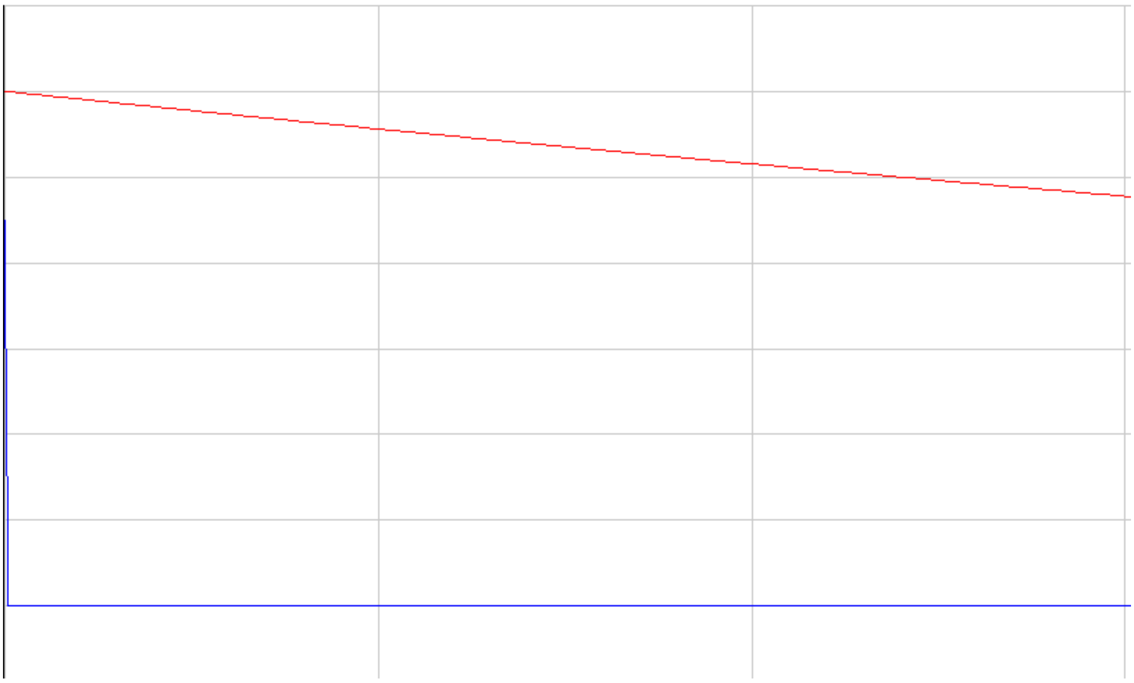
2.2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

1. Код программы на Modelica:

```
model lab3case2

  type Soldier=Real(unit="sol", min=0);//тип Солдат с минимальным значением 0
  type Time=Real(unit="d", min=0);//тип Время с минимальным значением 0
  parameter Time t;//параметр времени t

  constant Real a = 0.37;//степень влияния различных факторов на потери
  constant Real b = 0.76;//эффективность боевых действий армии y
  constant Real c = 0.32;//эффективность боевых действий армии x
  constant Real h = 0.61;//степень влияния различных факторов на потери

  Real p;//размер подкрепления к армии X
  Real q;//размер подкрепления к армии Y
  Soldier x; //численность армии X
  Soldier y; //численность армии Y

initial equation
  x=38000;//начальная численность армии X
```

```
  y=29000;//начальная численность армии Y
  t=0;//стартовое время

equation
  p=abs(sin(6*t));//функция, описывающая подкрепление к армии X
  q=abs(cos(7*t));//функция, описывающая подкрепление к армии Y
  der(x)=-a*x-b*y+p;//первое дифференциальное уравнение системы
  der(y)=-c*x*y-h*y+q;//второе дифференциальное уравнение системы

end lab3case2;
```

2. График изменения численности войск армии X и армии Y (рис. [-@fig:004]):



Легенда:

- красный - регулярная армия X;
- синий - партизанский отряд Y;

Выводы

Благодаря данной лабораторной работе познакомился с простейшей моделью боевых действий — моделью Ланчестера, и научился:

- строить эту модель для следующих двух случаев:
  - Модель боевых действий между регулярными войсками.
  - Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов.
- строить графики изменений численности войск армии X и армии Y для следующих двух случаев:
  - Модель боевых действий между регулярными войсками.
  - Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов.

Список литературы

- Кулябов Д.С. Лабораторная работа №3
- Кулябов Д.С. Задания к лабораторной работе №3 (по вариантам)

- `Wikipedia Законы Осипова-Ланчестера`
- В. В. Бреер, “Пороговые модели боевых действий”, *УБС*, **84** (2020), 35–50