

Цель работы

- Научиться строить простейшую модель эпидемии.
- Рассмотреть два случая протекания эпидемии.
- Научиться строить графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 5555$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 75$. А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 4$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I^*$
2. если $I(0) > I^*$

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа - это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначаемая через $R(t)$ - это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(0) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{если } I(t) > I^* \\ 0, & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I, & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающих иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности

α, β , - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

1. Случай 1 (если $I(0) \leq I^*$)

Код на Modelica:

```
model lab06case1
  constant Real b = 0.02; //коэффициент выздоровления
  constant Real N = 5555; //общее число проживающих на острове

  Real R; // здоровые, с иммунитетом
  Real I; // заболевшие
  Real S; // здоровые, в зоне риска

  initial equation
    R = 4; // здоровые с иммунитетом в момент начала эпидемии
    I = 75; // заболевшие в момент начала эпидемии
    S = N-I-R; //восприимчивые, но пока здоровые в момент начала эпидемии
  equation
    //Случай 1:  $I \leq I^*$ 
    der(S) = 0;
    der(I) = -b*I;
    der(R) = b*I;
  end lab06case1;
```

Графики изменения числа особей в каждой из трех групп(рис. [-@fig:001]):

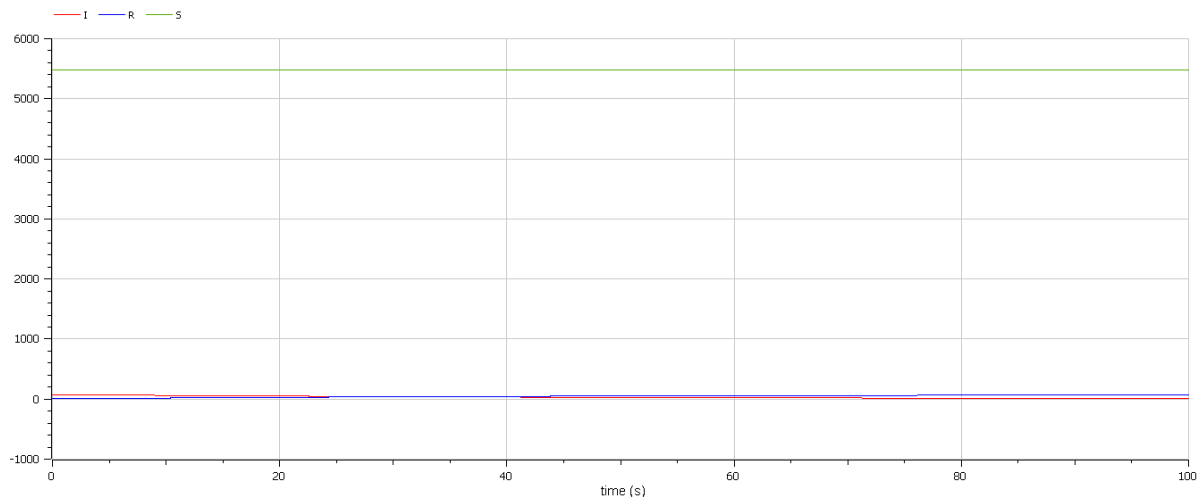
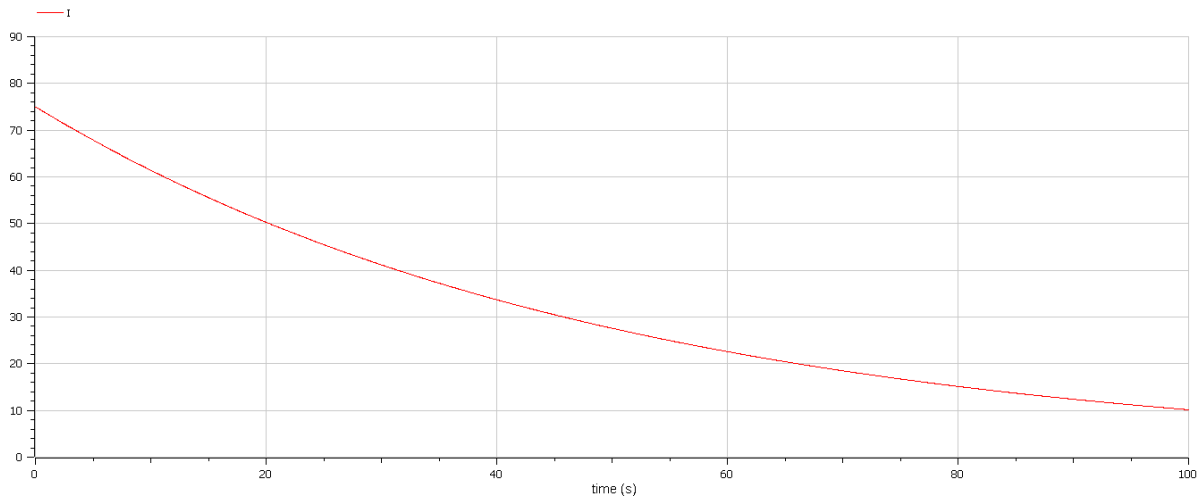
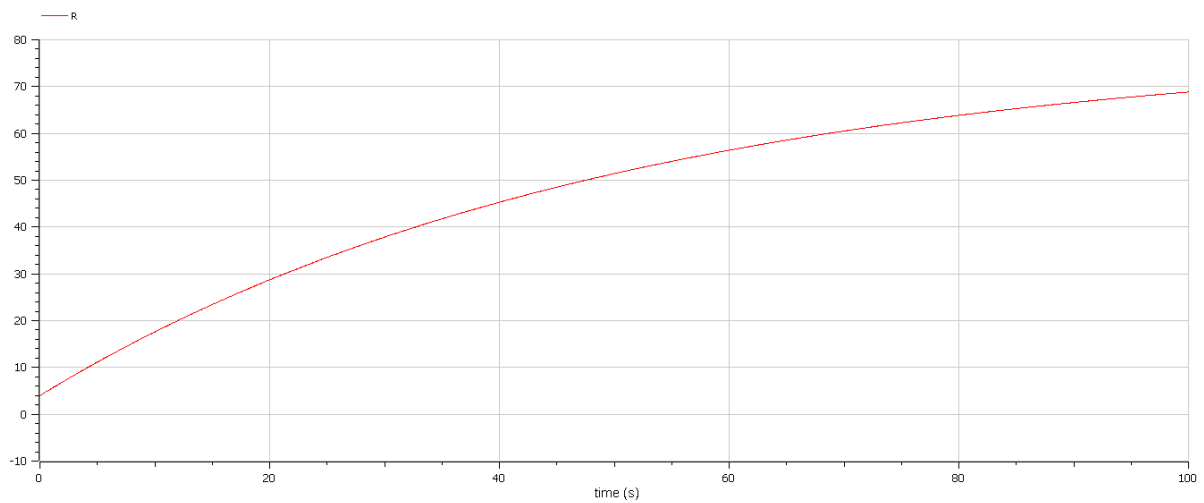


График изменения I(рис. [-@fig:002]):



Графики изменения R(рис. [-@fig:003]):



2. Случай 2 (если $I(0) > I^*$)

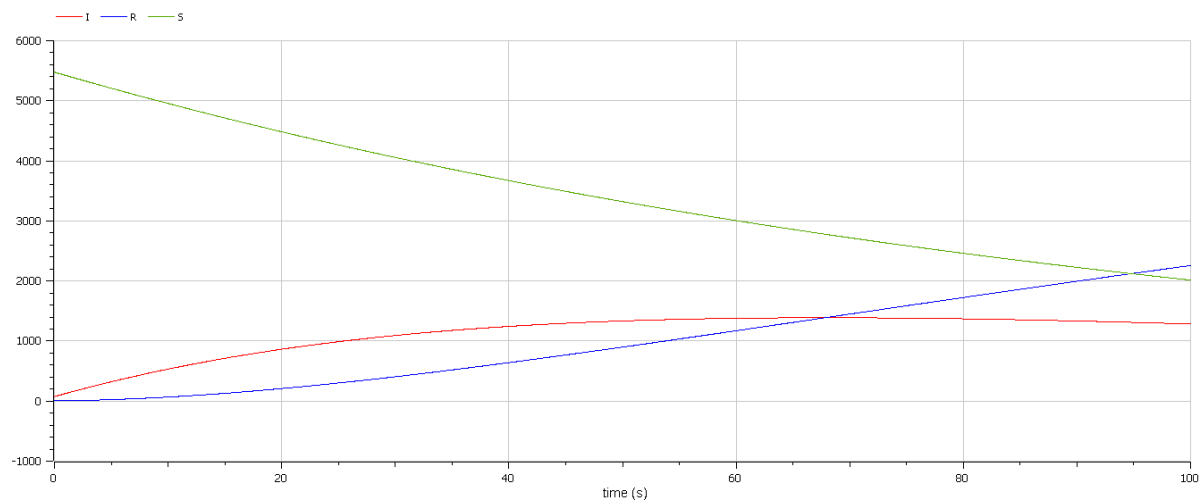
Код на Modelica:

```
model lab06case2
  constant Real a = 0.01; //коэффициент заболеваемости
  constant Real b = 0.02; //коэффициент выздоровления
  constant Real N = 5555; //общее число проживающих на острове

  Real R; // здоровые, с иммунитетом
  Real I; // заболевшие
  Real S; // здоровые, в зоне риска

  initial equation
    R = 4; // здоровые с иммунитетом в момент начала эпидемии
    I = 75; // заболевшие в момент начала эпидемии
    S = N-I-R; //восприимчивые, но пока здоровые в момент начала эпидемии
  equation
    //Случай 2:  $I > I^*$ 
    der(S)=-a*S "изменение числа восприимчивых к болезни, но пока здоровых";
    der(I)=a*S-b*I "изменение числа инфицированных распространителей";
    der(R)=b*I "изменение числа здоровых с иммунитетом";
  end lab06case2;
```

Графики изменения числа особей в каждой из трех групп(рис. [-@fig:004]):



Выводы

Научился строить

- простейшую модель эпидемии, рассматривая два случая протекания эпидемии,
- графики изменения числа особей в каждой из трех групп для простейшей модели эпидемии.

Список литературы

- [Кулябов Д.С. Лабораторная работа №6](#)
- [Кулябов Д.С. Задания к лабораторной работе №6 \(по вариантам\)](#)