

Цель работы

- Научиться строить математическую модель распространения рекламы.
- Построить графики распространения информации о товаре и сравнить эффективность рекламной компании для трёх случаев.

Задание

Постройте график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

1. $\frac{dn}{dt} = (0.566 + 0.000066n(t))(N - n(t))$
2. $\frac{dn}{dt} = (0.000044 + 0.244n(t))(N - n(t))$
3. $\frac{dn}{dt} = (0.44t + 0.34\cos(t)n(t))(N - n(t))$

При этом объем аудитории $N = 3010$, в начальный момент о товаре знает 23 человека. Для случая 2 определите в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

Теоретическое введение

Эффективность рекламы

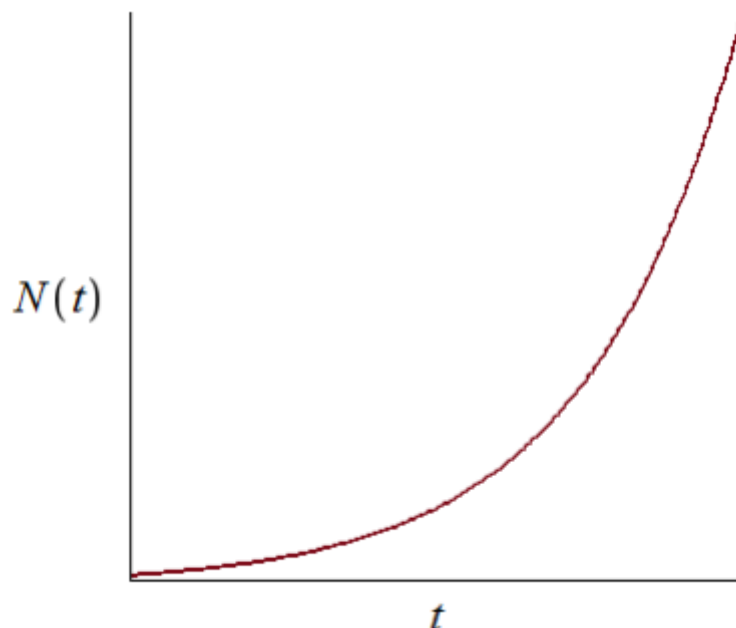
Организуется рекламная кампания нового товара или услуги. Необходимо, чтобы прибыль будущих продаж с избытком покрывала издержки на рекламу. Вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возрастает и прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар станет бесполезным.

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь n покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих.

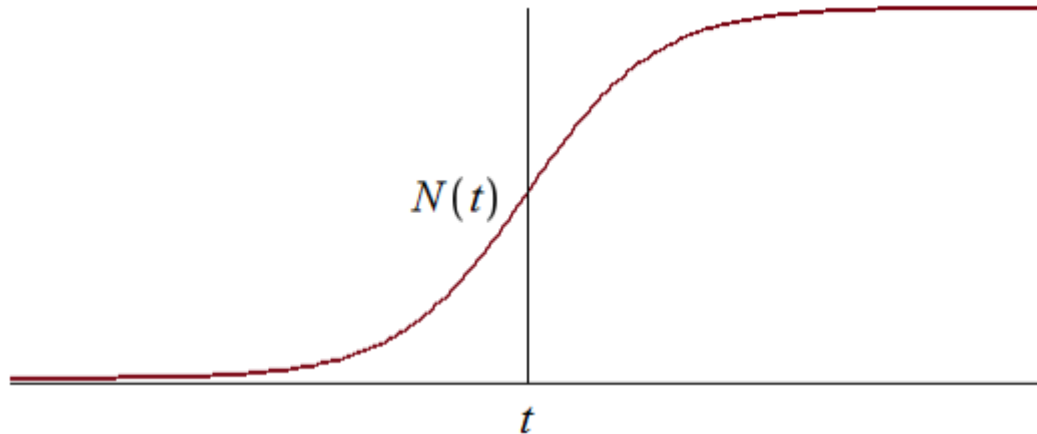
Модель рекламной кампании описывается следующими величинами. Считаем, что $\frac{dn}{dt}$ - скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить, t - время, прошедшее с начала рекламной кампании, $n(t)$ - число уже информированных клиентов. Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, это описывается следующим образом: $\alpha_1(t)(N - n(t))$, где N - общее число потенциальных платежеспособных покупателей, $\alpha_1(t) > 0$ - характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени). Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной $\alpha_2(t)(N - n(t))$, эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре. Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением:

$$\frac{dn}{dt} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)n(t))(N - n(t))$$

При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. [-@fig:001]):



В обратном случае, при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ получаем уравнение логистической кривой (рис. [-@fig:002]):



Ответы на вопросы к лабораторной работе

1. Записать модель Мальтуса (дать пояснение, где используется данная модель)

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta)x$$

где α и β - коэффициенты рождения и смертности соответственно.

Используется в биологии для моделирования динамики численности популяций, описывает неограниченный рост популяции.

2. Записать уравнение логистической кривой (дать пояснение, что описывает данное уравнение)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

где K - емкость экологической ниши популяции.

Используется в биологии для моделирования ограниченного роста популяции.

3. На что влияет коэффициент $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в модели распространения рекламы в модели распространения рекламы

$\alpha_1(t) > 0$ — характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени), а $\alpha_2(t)$ — это коэффициент интенсивности сарафанного радио.

4. Как ведет себя рассматриваемая модель при $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$

При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. [-@fig:001])

5. Как ведет себя рассматриваемая модель при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$

При $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ получаем уравнение логистической кривой (рис. [-@fig:002])

Выполнение лабораторной работы

1. Случай 1 (если $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$)

Код на Modelica:

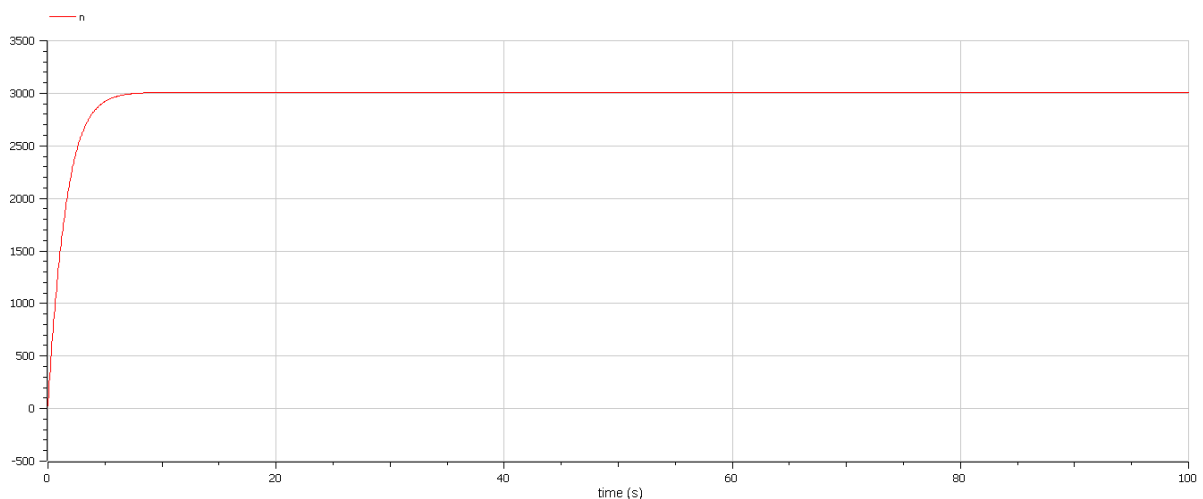
```
model lab07case1
  constant Real a_1=0.566; //коэффициент alpha_1
  constant Real a_2=0.000066; //коэффициент alpha_2
  constant Real N=3010; //объем аудитории

  Real n; //количество людей, знающих о товаре

  initial equation
    n=23; //количество людей, знающих о товаре в начальный момент времени

  equation
    der(n)=(a_1+a_2*n)*(N-n);
  end lab07case1;
```

График распространения информации о товаре(рис. [-@fig:003]):



2. Случай 2 (если $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$)

Код на Modelica:

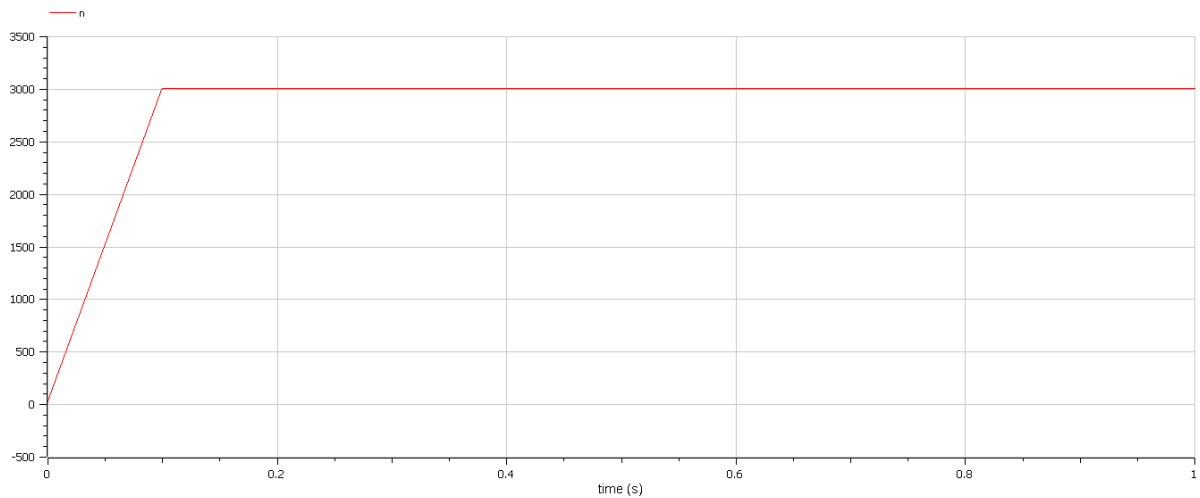
```
model lab07case2
  constant Real a_1=0.000044; //коэффициент alpha_1
  constant Real a_2=0.244; //коэффициент alpha_2
  constant Real N=3010; //объем аудитории

  Real n; //количество людей, знающих о товаре

  initial equation
    n=23; //количество людей, знающих о товаре в начальный момент времени

  equation
    der(n)=a_1*(N-n)+a_2*n*(N-n);
  end lab07case2;
```

График распространения информации о товаре(рис. [-@fig:004]):



Распространение информации о товаре достигает максимума в момент $t = 0.1$

3. Случай 3

Код на Modelica:

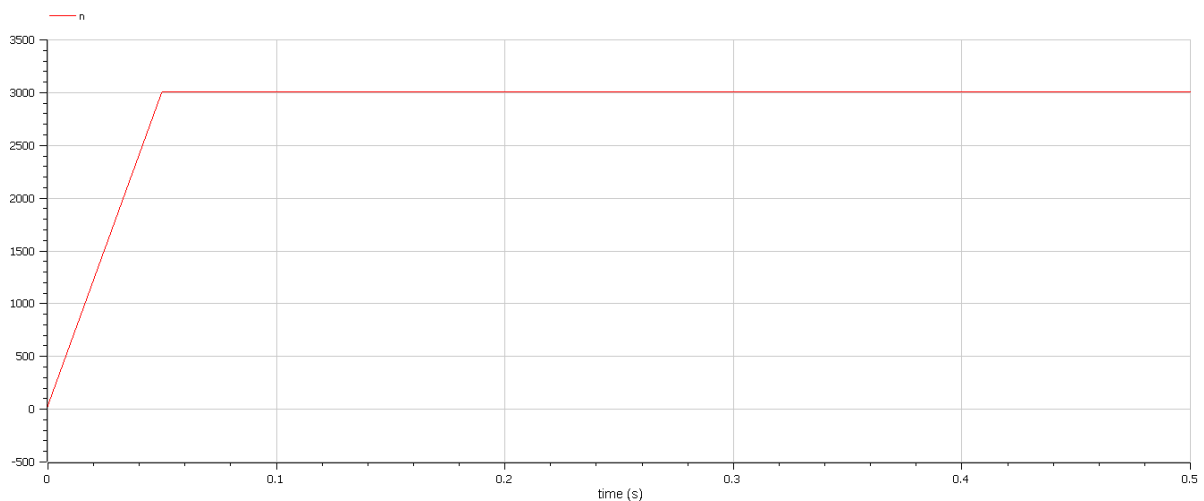
```
model lab07case3
  constant Real N=3010; //объем аудитории

  Real a_1; //коэффициент alpha_1
  Real a_2; //коэффициент alpha_2
  Real n; //количество людей, знающих о товаре

  initial equation
    n=23; //количество людей, знающих о товаре в начальный момент времени

  equation
    a_1 = 0.44*time;
    a_2 = 0.34*cos(time);
    der(n)=(a_1+a_2*n)*(N-n);
end lab07case3;
```

График распространения информации о товаре(рис. [-@fig:005]):



Выводы

- Научился строить математическую модель распространения рекламы.
- Построив графики распространения рекламы для трёх случаев, выяснил, что информация о товаре распространяется быстрее всего в случае 3.

Список литературы

- [Кулябов Д.С. Лабораторная работа №7](#)
- [Кулябов Д.С. Задания к лабораторной работе №7 \(по вариантам\)](#)
- Г.Ю. Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии [Электронный ресурс] // Справочник "Биофизики России". URL:(<http://library.biophys.msu.ru/LectMB/Lect03.htm>) (дата обращения: 25.03.2022).