Отчёт по лабораторной работе №8

Вариант 44

Василий Олегович Худицкий"

Содержание"

# Цель работы

* Научиться строить математическую модель конкуренции двух фирм.
* Научиться строить графики изменения оборотных средств двух фирм без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для двух случаев.

# Задание

**Случай 1.** Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

где .

Также введена нормировка .

**Случай 2.** Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и  
параметрами:

, ,

, , ,

, ,

, .

# Теоретическое введение

## Модель одной фирмы

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы,производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

– число потребителей производимого продукта.

– доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

– оборотные средства предприятия

– длительность производственного цикла

– рыночная цена товара

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

– доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

– постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой  
продукции.

– функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она  
равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу  
времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто  
представляют в простейшей форме:

$$\\label{1} Q = q - k \frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}),$$

где – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при p = pcr (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина pcr = Sq/k. Параметр – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, при ) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\\label{2} \frac{d M}{d t} = -\frac{M \delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M \delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$\\label{3} \frac{d p}{d t} = \gamma (-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}})$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла . При заданном уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$\\label{4} -\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) = 0$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$\\label{5} p = p\_{cr}(1 - \frac{M \delta}{\tau \tilde{p} Nq})$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\\label{6} \frac{d M}{d t} = M \frac{\delta}{\tau}(\frac{p\_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2 (\frac{\delta}{\tau \delta{p}})^2 \frac{p\_{cr}}{Nq} - \kappa$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию = 0:

$$\\label{7} \tilde{M}\_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$\\label{8} a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p\_{cr} \delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, ) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При стационарные значения M равны

$$\\label{9} \tilde{M}\_+ = Nq \frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p}, \tilde{M}\_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p\_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние неустойчиво, так что при оборотные средства падают (), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр всюду входит в сочетании с . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: = 1, а параметр будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

## Конкуренция двух фирм

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\\label{10} \begin{cases} \frac{d M\_1}{d t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1} + N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_1 \\ \frac{d M\_2}{d t} = - \frac{M\_2}{\tau\_2} + N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_2 \end{cases}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины и – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене . Тогда

$$\\label{11} \begin{cases} \frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} = - N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \\ \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} = - N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \end{cases}$$

где и – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\\label{12} \begin{cases} \frac{d M\_1}{d t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_1}) - \kappa\_1 \\ \frac{d M\_2}{d t} = - \frac{M\_2}{\tau\_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_2}) - \kappa\_2 \end{cases}$$

Уравнение для цены, по аналогии с (3),

$$\\label{13} \frac{d p}{d t} = - \gamma (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} - Nq (1 - \frac{p}{p\_{cr}})$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$\\label{14} p = p\_{cr} (1 - \frac{1}{Nq} (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2}))$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\\label{15} \begin{cases} \frac{d M\_1}{d t} = c\_1 M\_1 - b M\_1 M\_2 - a\_1 M\_1^2 - \kappa\_1 \\ \frac{d M\_2}{d t} = c\_2 M\_2 - b M\_1 M\_2 - a\_2 M\_2^2 - \kappa\_2 \end{cases}$$

где

$$\\label{16} a\_1 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2 Nq}, a\_2 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, b = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2 \tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, c\_1 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_1}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2}, c\_2 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_2}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки () пренебрежимо малы. И введем нормировку . Получим следующую систему:

$$\\label{17} \begin{cases} \frac{d M\_1}{d \theta} = M\_1 - \frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_1}{c\_1} M\_1^2 \\ \frac{d M\_2}{d \theta} = \frac{c\_2}{c\_1} M\_2 -\frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_2}{c\_1} M\_2^2 \end{cases}$$

## Cтационарная точка

Приравниваем первое уравнение из системы (17) к нулю и находим корни:

$$\\label{18} \begin{cases} x\_1 = 0 \\ x\_2 = \frac{c\_1 - by}{a\_1} \end{cases}$$

Отбрасываем 0, потому что он не может быть стационарным состоянием, и находим вторую точку:

$$\\label{18} \begin{cases} x = \frac{c\_1 - by}{a\_1} \\ y = \frac{a\_1 c\_2 - b c\_1}{a\_1 a\_2 - b^2} \end{cases}$$

Подставляем значение y и получаем:

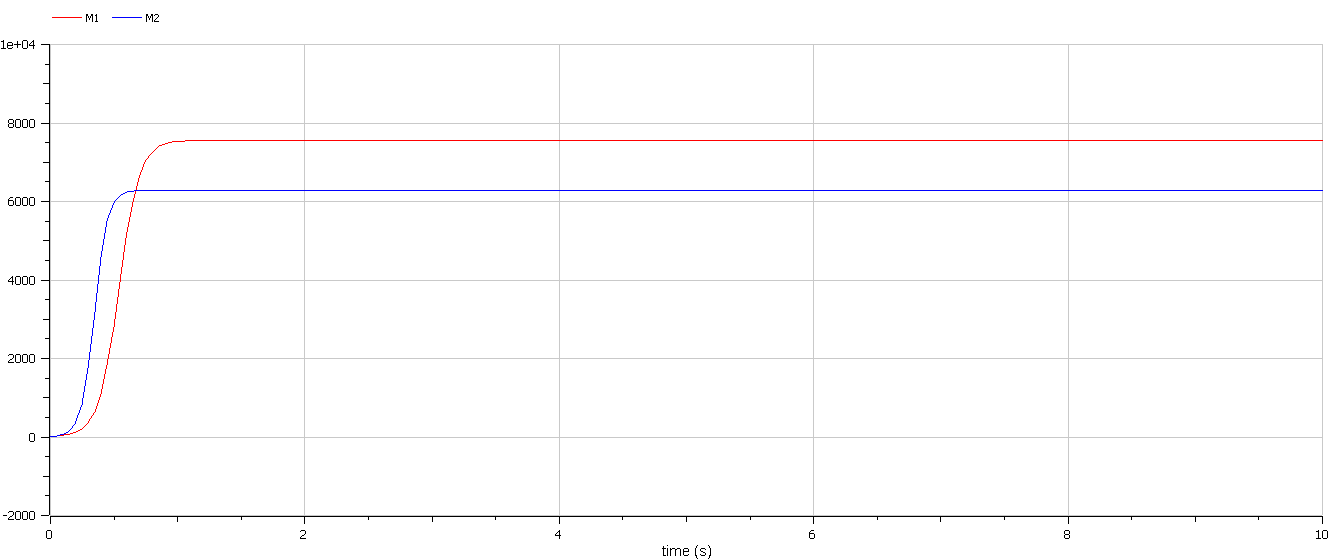
$$\\label{19} \begin{cases} x = \frac{c\_1 a\_2 - b c\_2}{a\_1 a\_2 - b^2} \\ y = \frac{a\_1 c\_2 - b c\_1}{a\_1 a\_2 - b^2} \end{cases}$$

# Выполнение лабораторной работы

## 1. Случай 1

Код на Modelica:

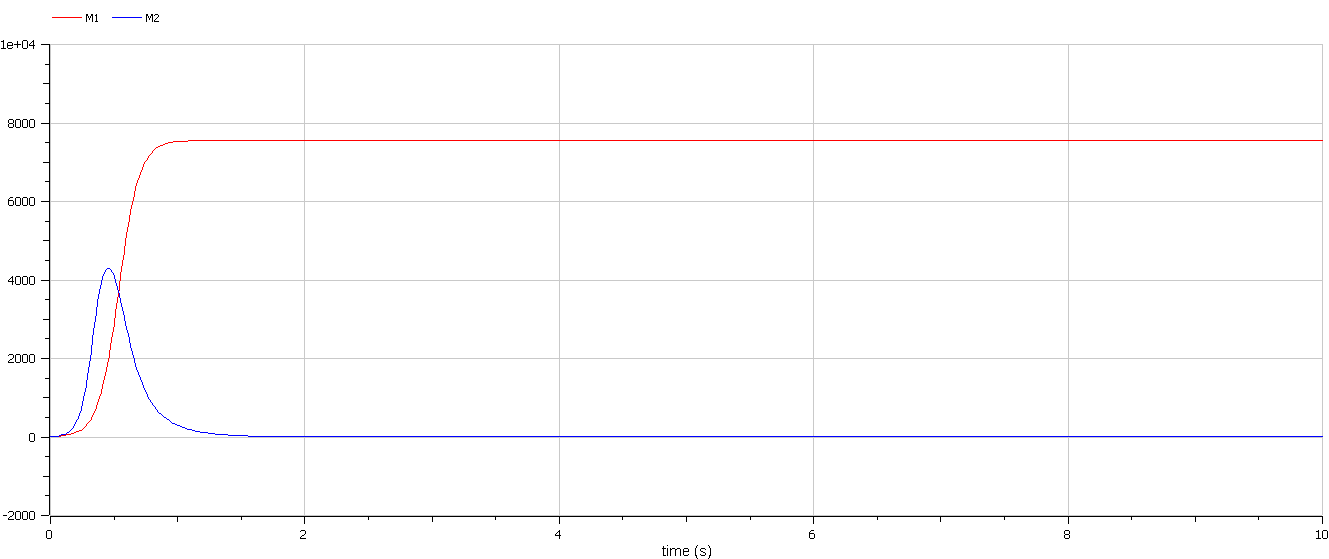
model lab08case1  
 constant Real p\_cr = 35; //критическая стоимость продукта  
 constant Real N = 44; //число потребителей производимого продукта  
 constant Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени  
 constant Real tau\_1 = 21; //длительность производственного цикла фирмы 1  
 constant Real tau\_2 = 20; //длительность производственного цикла фирмы 2  
 constant Real p\_1 = 13; //себестоимость продукта фирмы 1  
 constant Real p\_2 = 10; //себестоимость продукта фирмы 2  
 constant Real a1 = p\_cr/((tau\_1^2)\*(p\_1^2)\*N\*q);  
 constant Real a2 = p\_cr/((tau\_2^2)\*(p\_2^2)\*N\*q);  
 constant Real b = p\_cr/((tau\_1^2)\*(p\_1^2)\*(tau\_2^2)\*(p\_2^2)\*N\*q);  
 constant Real c1 = (p\_cr-p\_1)/(tau\_1\*p\_1);  
 constant Real c2 = (p\_cr-p\_2)/(tau\_2\*p\_2);  
  
 Real M1; //оборотные средства предприятия 1  
 Real M2; //оборотные средства предприятия 2  
 Real teta; //безразмерное время  
 Real s\_1; //стационарное состояние фирмы 1  
 Real s\_2; //стационарное состояние фирмы 2  
  
 initial equation  
 M1 = 9.1;  
 M2 = 7.7;  
 teta = 0;  
  
 equation  
 s\_1 = (c1\*a2-b\*c2)/(a1\*a2-b\*b);  
 s\_2 = (a1\*c2-b\*c1)/(a1\*a2-b\*b);  
 teta = time/c1;  
 der(M1)/der(teta)=M1-(b/c1)\*M1\*M2-(a1/c1)\*M1^2;  
 der(M2)/der(teta)=(c2/c1)\*M2-(b/c1)\*M1\*M2-(a2/c1)\*M2^2;  
  
 end lab08case1;

График изменения оборотных средств двух фирм(рис. [-@fig:001]):  


## 2. Случай 2

Код на Modelica:

model lab08case2  
  
 constant Real p\_cr = 35; //критическая стоимость продукта  
 constant Real N = 44; //число потребителей производимого продукта  
 constant Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени  
 constant Real tau\_1 = 21; //длительность производственного цикла фирмы 1  
 constant Real tau\_2 = 20; //длительность производственного цикла фирмы 2  
 constant Real p\_1 = 13; //себестоимость продукта фирмы 1  
 constant Real p\_2 = 10; //себестоимость продукта фирмы 2  
 constant Real a1 = p\_cr/((tau\_1^2)\*(p\_1^2)\*N\*q);  
 constant Real a2 = p\_cr/((tau\_2^2)\*(p\_2^2)\*N\*q);  
 constant Real b = p\_cr/((tau\_1^2)\*(p\_1^2)\*(tau\_2^2)\*(p\_2^2)\*N\*q);  
 constant Real c1 = (p\_cr-p\_1)/(tau\_1\*p\_1);  
 constant Real c2 = (p\_cr-p\_2)/(tau\_2\*p\_2);  
  
 Real M1; //оборотные средства предприятия 1  
 Real M2; //оборотные средства предприятия 2  
 Real teta; //безразмерное время  
  
 initial equation  
 M1 = 9.1;  
 M2 = 7.7;  
 teta = 0;  
  
 equation  
 teta = time/c1;  
 der(M1)/der(teta)=M1-(b/c1)\*M1\*M2-(a1/c1)\*M1^2;  
 der(M2)/der(teta)=(c2/c1)\*M2-(b/c1+0.00025)\*M1\*M2-(a2/c1)\*M2^2;  
  
 end lab08case2;

График изменения оборотных средств двух фирм(рис. [-@fig:002]):  


# Выводы

* Научился строить конкуренции двух фирм.
* Научился строить графики изменения оборотных средств двух фирм без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для двух случаев.

# Список литературы

* [Кулябов Д.С. *Лабораторная работа №8*](https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=831057)
* [Кулябов Д.С. *Задания к лабораторной работе №8 (по вариантам)*](https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=831058)