מבוא למדעי המחשב 67102 - סמסטר א' 2024
תרגיל 7 - רקורסיה
להגשה בתאריך **28/02/2024** בשעה 22:00

הקדמה

בתרגיל זה נתרגל מבני רקורסיה שונים. התרגיל מורכב ממספר משימות בלתי תלויות. **בתרגיל זה ניתן להניח שהקלט חוקי והגיוני אלא אם צוין מפורשות אחרת.**

הנחיות כלליות לתרגיל:

- התרגיל מורכב ממספר משימות, אשר **אינן בהכרח קשורות אחת לשניה**. יש לממש את כל הפונקציות המפורטות. המימוש של כל הפונקציות צריך להיות **רקורסיבי, וללא שימוש בלולאות, וכן בפעולות שזמן הריצה שלהן הוא O(n) בגודל הקלט**. בפרט, אין להשתמש ב-list comprehension, slicing, שימוש באופרטור in על list (או כל sequence אחר), פונקציות על list שדורשות מעבר על כל הרשימה (למשל הפונקציה sum), וכו'.
- בפתרון תרגיל זה **אין לעשות שימוש באף מודול חיצוני של python**, מלבד המודול `typing` - כלומר, אין לעשות `import` לאף מודול, שאינו המודול `typing`, לצורך הפתרון. בפרט, אין לעשות שימוש במודול `math` או במודול `itertools`.
- בתרגיל אתם נדרשים לבצע בדיקות טיפוסים בכל הפונקציות באמצעות שימוש ב `mypy`.
  לצורך התקנת `mypy` הריצו את הפקודה הבאה ב `terminal`:
  `python -m pip install mypy`
  ולאחר מכן בצעו את בדיקת הטיפוסים בהרצת הפקודה
  `python -m mypy --strict ex7.py ex7_helper.py`
  ההרצה צריכה לעבור בצורה תקינה וללא שגיאות. בנוסף, תהיה בדיקה שהטיפוסים שהגדרתם אינם רחבים מדי. אין להשתמש באף מקום בטיפוס Any, אלא אם צוין אחרת.
- אם במשימה מסוימת לא כתוב במפורש להחזיר ערך - אין להחזיר דבר.
- לאורך כל התרגיל, מותר להשתמש בפונקציות עזר במידת הצורך.
- לאורך כל התרגיל, הניחו שכל הקלטים הינם מטיפוסים (types) תקינים.
- לאורך כל התרגיל, לצורך השוואת טיפוסים, השתמשו בפונקציה isinstance(), ולא בפונקציה type().
- לתרגיל מצורפים קבצי עזר בשם ex7_helper.py ו-hanoi_game.py המכילים פונקציות עזר בהן תצטרכו להשתמש למימוש חלק מהמשימות. **אין להגיש קבצים אלו בהגשת התרגיל.**
- ייתכן ולחלק מהמשימות יש מימוש יעיל יותר שאינו רקורסיבי. **מטרת התרגיל היא לתרגל שימוש ברקורסיה, גם עבור משימות שעבורן רקורסיה אינה הפתרון האידיאלי.**

- **<u>שימו לב</u> - בתרגיל זה יש רכיב שהינו Quiz במודל אודות זמני ריצה. שאלות אלה הינן חובה ואינן במסגרת המעבדה השבועית. חלק מציון התרגיל כולל בדיקה של שאלות אלה.**

חלק ראשון: רקורסיה פשוטה

את המשימות בחלק זה יש לפתור ע"י שימוש בפונקציות רקורסיביות, **ללא שימוש בלולאות מכל סוג שהוא,** כולל לולאות הנמצאות במימוש של פונקציית עזר, או לחלופין פונקציות או פעולות של פייתון המבצעות מעבר על אוסף של איברים (למשל שימוש ב-slicing, קריאה לפונקציה sum או שימוש באופרטור in על רשימות):

1. **הפונקציה:**

```
mult(x: N, y: int) -> N
```

עליכם לממש את הפונקציה **`mult`** , המקבלת מספר **x** (מטיפוס N) ומספר **y** שהינו שלם אי-שלילי (int), ומחזירה את תוצאת החישוב של x כפול y, כאשר הטיפוס **N** מוגדר להיות int או float (אתם מוזמנים להשתמש בהגדרה שלו שנמצאת בקובץ העזר **ex7_helper.py** ולקרוא עוד על <u>TypeVar</u>).

המימוש של הפונקציה צריך להיות רקורסיבי. במשימה זו, במימוש שלכם מותר להשתמש רק בפונקציות הבאות שסיפקנו לכם בקובץ העזר **ex7_helper.py**:

- **add(x: N, y: N)**– המקבלת שני מספרים מטיפוס **N** ומחזירה את סכומם.
- **subtract_1(x: int)** – מקבלת מספר שלם x ומחזירה את המספר הקודם לו (x-1).

אסור להשתמש באף אחד מהאופרטורים המתמטיים בצורה ישירה (כלומר אסור להשתמש באף אחד מבין האופרטורים +,-,*,/,//,%). המימוש שלכם צריך לעבוד בזמן ריצה <u>לינארי</u> (ולא פחות מכך). לדוגמא, עבור הקלטים x=3, y=4 יתקבל הפלט 12.

2. **הפונקציה:**

```
is_even(n: int) -> bool
```

עליכם לממש את הפונקציה **`is_even`**, המקבלת את המספר השלם **n** (int) אי-שלילי, ומחזירה **True** אם **n** הוא מספר זוגי, ו-**False** אחרת. במשימה זו, במימוש שלכם מותר להשתמש רק בפונקציה **subtract_1(x: int)** שסיפקנו לכם בקובץ העזר, המקבלת מספר מטיפוס **int** ומחזירה את המספר הקודם לו (למשל עבור הקלט 7 יוחזר המספר 6). בפרט, אסור להשתמש באף אחד מהאופרטורים המתמטיים בצורה ישירה (כלומר אסור להשתמש באף אחד מבין האופרטורים +,-,*,/,//,%). לדוגמא, עבור הקלט 479: הפלט יהיה False, ועבור הקלט 8: הפלט יהיה True.

3. הפונקציה:

```
log_mult(x: N, y: int) -> N
```

עליכם לממש את הפונקציה **`log_mult`** , הפועלת בדומה לפונקציה **`mult`** מסעיף 1, אך הפעם המימוש שלה חייב להיות בזמן ריצה לוגריתמי. כאשר **N** מוגדר באופן דומה ל-**N** שבפונקציה **`mult`**.

במשימה זו, במימוש שלכם מותר להשתמש רק בפונקציות העזר הבאות שסיפקנו לכם בקובץ העזר **ex7_helper.py**:

- **is_odd(n: int)** - מקבלת מספר שלם **n** ומחזירה **True** אם **n** הוא מספר אי-זוגי, ומחזירה **False** אחרת.
- **add(x: N, y: N)**- מקבלת שני מספרים מטיפוס **N** ומחזירה את סכומם.
- **divide_by_2(n: int)** - מקבלת מספר שלם **n** ומחזירה את תוצאת החלוקה **השלמה** של המספר ב-2 (כלומר חלוקה ב-2 ללא שארית).

אסור להשתמש בפונקציה **`mult`** שמימשתם סעיף 1. אסור להשתמש באף אחד מהאופרטורים המתמטיים בצורה ישירה (כלומר אסור להשתמש באף אחד מבין האופרטורים +,-,*,/,//,%). רמז: היזכרו במימוש לפונקציה **power** עם זמן ריצה לוגריתמי, שראיתם בהרצאה.

4. הפונקציה:

```
is_power(b: int, x: int) -> bool
```

עליכם לממש את הפונקציה **`is_power`**, המקבלת שני מספרים שלמים אי-שליליים **b** (int) ו-**x** (int), ובודקת האם קיים מספר שלם אי-שלילי n כך ש-b בחזקת n שווה ל-x. הפונקציה תחזיר **True** במידה וזה מתקיים, ו-**False** אחרת. בשאלה זו אתם נדרשים לכתוב מימוש שזמן הריצה שלו הוא O(log(b) * log(x)).
אסור להשתמש באף אחד מבין האופרטורים המתמטיים בצורה ישירה (כלומר אסור להשתמש באף אחד מבין האופרטורים +,-,*,/,//,%), אך מותר לכם להשתמש בכל אחת מהפונקציות שסיפקנו לכם בקובץ העזר, או לחלופין, בפונקציות שמימשתם בעצמכם במשימות הקודמות.
לדוגמא: עבור הקלטים b=2, ו-x=16, הפונקציה תחזיר True כי עבור n=4 מתקיים 2 בחזקת 4 שווה ל-16.
לעומת זאת, עבור הקלטים b=3 ו-x=17, הפונקציה תחזיר False כי לא קיים מספר שלם אי-שלילי n שעבורו 3 בחזקת n שווה ל-17.

5. הפונקציה:

```
reverse(s: str) -> str
```

עליכם לממש את הפונקציה **`reverse`**, המקבלת מחרוזת תווים **s** (str), ומחזירה את המחרוזת המכילה את אותם התווים של **s**, אך בסדר הפוך.

במשימה זו, במימוש שלכם מותר להשתמש רק בפונקציה **append_to_end(s: str, c: str)** שסיפקנו לכם בקובץ העזר, המקבלת מחרוזת **s** (str) ותו בודד **c** שגם הוא מטיפוס מחרוזת (str) אך באורך 1, ומחזירה מחרוזת חדשה (str) בה התו **c** נוסף לסוף המחרוזת **s**.

במימוש אסור לכם להשתמש באף פעולה אחרת של פייתון על מחרוזות (כולל שרשור מחרוזות עם האופרטור "+"). כמו כן, אסור לכם לקרוא לפונקציה **list**, וכן אין לבצע היפוך למחרוזת על-ידי **slicing** באופן הבא s[::-1]. לדוגמא: עבור הקלט "s="intro, הפונקציה תחזיר את המחרוזת "ortni".

חלק שני: רקורסיה מתקדמת

6. **הפונקציה:**

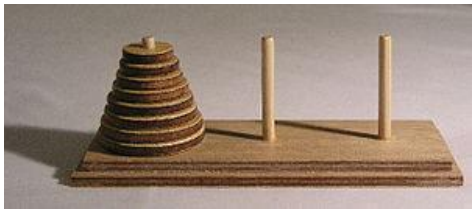
```
play_hanoi(hanoi: Any, n: int, src: Any, dest: Any, temp: Any)
```

עליכם לממש את הפונקציה **`play_hanoi`**, הפותרת משחק "מגדלי האנוי".

משחק "מגדלי האנוי" כולל:

- שלושה מוטות אנכיים ("המגדלים").
- מספר דיסקיות בגדלים שונים שניתן להשחיל על המוטות, כאשר כל דיסקית - בגודל שונה.

בתחילת המשחק, הדיסקיות מסודרות על פי גודלן על אחד המוטות, כשהגדולה ביותר למטה והקטנה ביותר למעלה. מטרת המשחק היא להעביר את כל הדיסקיות ממוט זה אל מוט היעד (dest), בכפוף לשני חוקים:



- מותר להזיז רק דיסקית אחת בכל פעם - מראש מוט אחד לראש מוט אחר.
- אסור להניח דיסקית אחת על דיסקית שקטנה ממנה.

לקריאה והסברים נוספים:

מגדלי האנוי / Tower of Hanoi / برج هانوي

כדי לבדוק את הפונקציה יש למקם את הקובץ **hanoi_game.py** באותה תיקייה שבה נמצא הקובץ **ex7.py** ולהריץ את **hanoi_game.py**.

<u>שימו לב (1)</u> - אין לייבא את הקובץ hanoi_game לתוך הקוד שלכם!

על מנת שהפונקציה אותה אתם כותבים תבצע שינויים במשחק הגרפי, הפונקציה נקראת עם הפרמטרים הבאים:

hanoi - אובייקט מורכב שהוא המשחק הגרפי בו מתבצע השינוי.

n - מספר (int) הדיסקיות אותן על הפונקציה להעביר.

src - אובייקט מורכב המייצג המוט ממנו מעוניינים להעביר את הדיסקיות.

dest - אובייקט מורכב המייצג את המוט אליו מעוניינים להעביר את הדיסקיות.

temp - אובייקט מורכב המייצג את המוט השלישי במשחק.

<u>שימו לב (2)</u> - האובייקטים המורכבים ניתנים לכם בקריאה המקורית לפונקציה play_hanoi שמתבצעת בקובץ **hanoi_game.py**.

על מנת להעביר דיסקית במשחק hanoi ממוט למוט, יש להשתמש בפקודה:

```
hanoi.move(src, dest)
```

כאשר שני הפרמטרים src, dest הם מוטות במשחק. קריאה לפקודה זו תעביר את הדיסקית העליונה מהמוט **src** לראש המוט **dest**. שימו לב כי אם תנסו להזיז דיסקית ממוט ריק תקבלו שגיאה.

תוכלו להניח כי בזמן הקריאה הראשונית לפונקצייה מצב המשחק תקין (כלומר, ישנן בדיוק **n** דסקיות על המוט **src** מסודרות בצורה חוקית, ואין דסקיות על שאר המוטות). **לא ניתן להניח דבר על מימוש האובייקטים המורכבים.**

<u>שימו לב (3)</u> - הקובץ **hanoi_game.py** יקרא לפונקציה שלכם רק עם ערכי **n חיוביים. אך על הפונקציה שלכם להתמודד עם כל ערך שלם!** עבור **n** שלילי, על הפונקציה להתנהג כאילו התקבל 0.

<u>שימו לב (4)</u> - במשימה זו, אתם רשאים להשתמש בטיפוס **Any** לצורך בדיקת הטיפוסים של הפונקציה **play_hanoi**. אין להשתמש בטיפוס **Any** במימוש של אף פונקציה אחרת בתרגיל אלא אם צוין במפורש אחרת.

7. **הפונקציה:**

```
number_of_ones(n: int) -> int
```

עליכם לממש את הפונקציה **number_of_ones** המקבלת מספר טבעי **n** (int), ומחזירה את מספר הפעמים שהספרה '1' מופיעה בכל המספרים מ-1 עד n (כולל), **לרבות כפילויות של הספרה '1' באותו המספר.** לצורך הפתרון שלכם, מותר להשתמש באופרטורי המודולו % והחילוק השלם // וכן בחיבור (+) ובחיסור (-). אסור לבצע המרה ל-str בשום שלב.

לדוגמא: עבור הקלט n=13, יוחזר הפלט 6 כי הספרה '1' מופיעה פעם אחת במספרים: 1, 10, 12, 13, ומופיעה פעמיים במספר 11.

8. **הפונקציה:**

```
compare_2d_lists(l1: List[List[int]], l2: List[List[int]]) -> bool
```

עליכם לממש את הפונקציה **compare_2d_lists** המקבלת שתי רשימות דו-מימדיות של מספרים (כל אחת מהן מיוצגת על-ידי רשימה של רשימות מספרים). הפונקציה תחזיר **True** אם שתי הרשימות הדו-מימדיות זהות על כל ערכיהן, ו-**False** במידה ויש לפחות איבר אחד שבה הן נבדלות. הרשימה החיצונית וכן הרשימות הפנימיות, יכולות להיות ריקות, וכן ייתכן שאורכן של הרשימות הפנימיות בכל אחת מהרשימות הדו-מימדיות אינו זהה. כמו כן, במידה ואורכן של הרשימות החיצוניות l1 ו-l2 שונה, או לחלופין, אורכן של רשימות פנימיות הממוקמות באותו מיקום ברשימות החיצוניות l1 ו-l2 שונה, יש להחזיר גם כן False. אין להשתמש באופרטור == על פני רשימות (חד-מימדיות או דו-מימדיות), אך מותר להשתמש באופרטור == כדי להשוות בין מספרים.

<u>שימו לב:</u> במימוש שלכם לפונקציה אסור לשנות את הקלט

לדוגמא: עבור הקלט l1=[[1,2],[4,5,6]] ו- l2=[[1,2],[4,5,8]] הפונקציה תחזיר **False** כי הן נבדלות בקואורדינטה המסומנת באדום.

9. **הפונקציה:**

```
magic_list(n: int) -> List[Any]
```

עליכם לממש את הפונקציה **magic_list** המקבלת מספר **n** שלם אי-שלילי (int) ומחזירה רשימה בגודל n, המייצגת את האיבר ה-n בסדרה הבאה:

- עבור n=0, הפונקציה תחזיר רשימה ריקה [ ]
- עבור n=1, הפונקציה תחזיר רשימה בגודל 1, הכוללת באינדקס ה-0 את האיבר ה-0 בסדרה: [[ ]]

- עבור n=2, הפונקציה תחזיר רשימה בגודל 2, אשר כוללת באינדקס ה-0 את האיבר ה-0 בסדרה, ובאינדקס ה-1 את האיבר ה- 1 בסדרה: [[]] , [[]]
- עבור n=3, הפונקציה תחזיר רשימה בגודל 3, אשר כוללת את שלושת האיברים הראשונים בסדרה:

  [[] , [[]] , [[]] , [[]]]
- באותו אופן, עבור n כלשהו, תוחזר רשימה בעלת n איברים, כך שבכל אינדקס i ממוקם האיבר ה-i בסדרה (עבור כל i בין 0 ל-(n-1))

<u>שימו לב:</u> עליכם לוודא שהעותקים השונים של הרשימות הפנימיות ברשימת הפלט הם **עותקים עמוקים (deep copy)**, ובפרט לוודא שעל אף רשימה פנימית (מכל עומק) לא יהיו הצבעות משני מקומות שונים ברשימת הפלט החיצונית (בכל עומק). שימו לב גם שאסור לכם לייבא את הספריה copy ולהשתמש בפונקציה copy.deepcopy.

<u>שימו לב (2):</u> גם במשימה זו אתם רשאים להשתמש בטיפוס **Any** לצורך בדיקת הטיפוסים.

<u>שימו לב (3):</u> מותר להשתמש **עד פעם אחת** (בכל קריאה רקורסיבית) בפונקציה **append** הפועלת על רשימות.

נהלי הגשה

הלינק להגשה של התרגיל הוא תחת השם: **ex7**

בתרגיל זה עליכם להגיש את הקובץ **ex7.py** - עם המימושים שלכם לפונקציות. יש להגיש קובץ zip הנקרא **ex7.zip** המכיל את **ex7.py** בלבד.

בהצלחה!