מבוא ללמידה חישובית – תרגיל בית 6

שם : דורי רימון

ת"ז : 323996843

שאלות תיאורטיות:

שאלה 1:

.1

א)

$$L(a,\lambda) = \|a\|^2 + \lambda^t (Xa - y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{d} a_j^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \lambda_i (X_{i,j} a_j - y_i)$$

$$\nabla L_{a_j} = 2a_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{i,j} = 0$$

$$\nabla L_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{d} (X_{i,j} a_j - y_i) = 0$$

$$\Rightarrow a_j^* = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{i,j}$$

$$\Rightarrow a^* = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{i,j}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} X_{i,1} \\ \vdots \\ X_{i,d} \end{pmatrix} \lambda_i$$

$$\Rightarrow \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n), \quad \alpha_i = -\frac{1}{2}\lambda_i$$

$$\Rightarrow a^* = X^t \alpha$$

ב)

$$x^t a^* = \sum_{j=1}^{d} x_j a_j^* = \sum_{j=1}^{d} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{i,j}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} x_j \alpha_i X_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{d} x_j X_{i,j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x, \underbrace{X_i}_{i\text{-th row of } X} \rangle$$

ומכאן שהביטוי הוא $x^t a^*$ כצירוף ליניארי של מכפלות פנימיות.

שאלה 2:

.2

א)

$$\bar{K}'_{i,j} = \langle v_i , v_j \rangle =$$

$$= \left\langle \phi(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\phi(x_t) \, , \, \phi(x_j) - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\phi(x_t) \right\rangle =$$

$$= \langle \phi(x_i) , \phi(x_j) \rangle - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \langle \phi(x_i) , \phi(x_t) \rangle -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \langle \phi(x_t) , \phi(x_j) \rangle + \frac{1}{n^2} \left\langle \sum_{t=1}^{n} \phi(x_t) , \sum_{t=1}^{n} \phi(x_t) \right\rangle =$$

$$= \bar{K}_{i,j} - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} \left(\bar{K}_{i,t} + \bar{K}_{t,j} \right) \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{z=1}^{n} \bar{K}_{k,z}$$

והראנו [illegible] את ערכי $\bar{K}$ באופן כללי.

ב) כיוון ברור כי ה- PC של $\Sigma_{i,j} = \frac{1}{n} \langle \phi(x_i) , \phi(x_j) \rangle = \frac{1}{n} \bar{K}_{i,j}$ בנוסף לא משתנים, הם הו"ע של K

$. \frac{1}{n} \Sigma^t \cdot \Sigma$

יהי u_j ו"ע של K המשויך ל- R.

$$\Rightarrow \Sigma u_j = \frac{1}{n} \Sigma \phi(x_i) \phi(x_i)^t u_j =$$

$$= \frac{1}{n} \Sigma \phi(x_i) \underbrace{\beta_i}_{\phi(x_i)^t \cdot u_j} = \lambda_j u_j$$

$$\frac{\beta_i}{\lambda_j n}$$

$$\Rightarrow u_j = \Sigma \alpha_i \phi(x_i)$$

והראנו כי u_j נתון ע"י K ו- $\phi(x_i)$.

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\lambda_j n} = \frac{\phi(x_i)^t u_j}{\lambda_j \cdot n}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{\phi(x_i)^t \cdot \sum_t \alpha_t \phi(x_t)}{\lambda_j \cdot n} \Rightarrow \alpha_i \lambda_j n = \sum_t \alpha_t \bar{K}_{i,t} = (\bar{K}\alpha)_i$$

$$\Rightarrow \lambda_j \cdot n \cdot \alpha = \bar{K}\alpha$$

לכן α הוא ו״ע של $\bar{K}$ עם ע״ע $n\lambda_j$. מכיוון שאנו רוצים למצוא את המקדמים של $\phi(x_i)$ עבור ביטוי u_j, נוכל למצוא את הו״ע של $\bar{K}$ עם הע״ע $n \cdot \lambda_j$.

5) ראינו כי $u_j = \sum_i \alpha_i \phi(x_i)$.

$$\Rightarrow \langle u_j, \phi(x) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(x_i), \phi(x) \rangle =$$

$$= \sum_i \alpha_i \langle \phi(x_i), \phi(x) \rangle$$

החישוב הסופי תלוי בהפעלה הפונקציה באמצעות הקרנל. סיבוכיות — הפעלת K - הקרנל, היא $\Theta(d)$ (כמימד הוקטורים). כיוון שיש n מחוברים נקבל $O(n \cdot d)$.

<u>מטלה מעשית:</u>

שאלה 1:

א)

ניתן לראות את המימוש בקוד.

ב)

אלו הם עשרת ה Principal Components הראשונים של אוסף התמונות של אריאל שרון:

ניתן לראות את הדמיון הבסיסי שבין התמונות הכלליות של אריאל שרון לבין אלו, ולהבין מדוע קומבינציות של אלו ייצגו באופן טוב תמונות שונות של אריאל שרון.

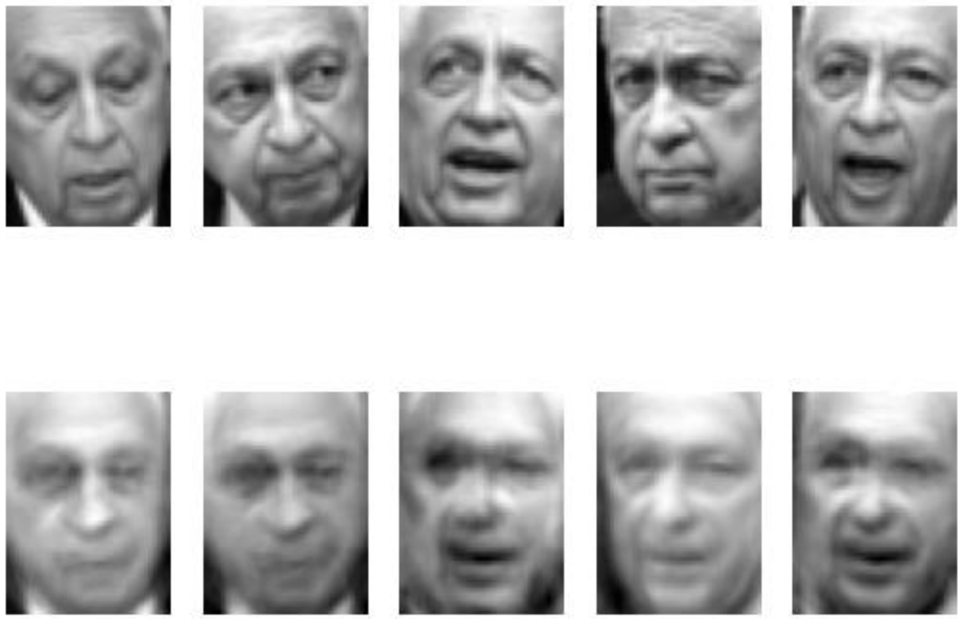
ג)

בכל עשירייה של תמונות, חמשת העליונות הן תמונות שנבחרו באקראי, ומתחתן התמונות בעזרת הבסיס המצומצם.

$k = 1$:

$k = 5$:

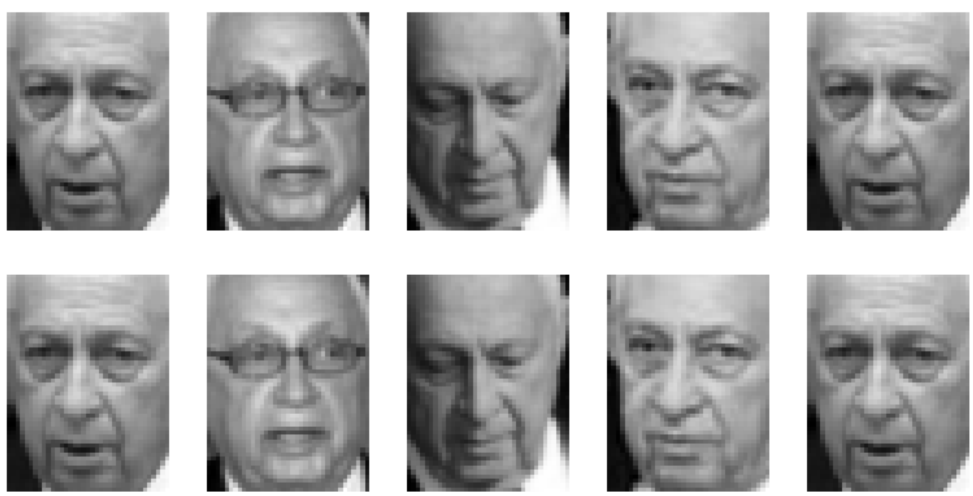
:k = 10



:k = 30

:k = 50

:k = 100



ניתן לראות כי ככל שמשתמשים ביותר וקטורים עצמיים כך התמונות נראות דומות יותר למקוריות. יתרה מכך, ניתן לראות זאת בגרף הבא: