DM : Algèbre linéaire et calcul matriciel

À rendre lundi 24 février

Copies identiques $\Rightarrow$ 0

Exercice 1

Soit la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer M^2, M^3, M^4, M^5 et M^6.

(b) En déduire une formule dépendant de n entier naturel pour M^n.

(c) La matrice M est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

(d) Vérifier utilisent deux méthodes (Gauss et cofacteur) le résultat de la partie précèdent.

Exercice 2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.

(b) En déduire que A est invertible et donner son inverse A^{-1}.

(c) Vérifier utilisent deux méthodes (Gauss et cofacteur) le résultat de la partie précèdent.

Exercice 3

On considère le système linéaire $AX = B$, où m est un paramètre réel,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m-1 \\ 2 & -1 & m \\ -m & 2+m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Appliquer la méthode d'élimination de Gauss pour donner une forme échelonnée du système.

(b) On pose $m = 0$, déterminer l'ensemble des solutions du système $AX = B$.

(c) On pose $m = -1$, déterminer l'ensemble des solutions du système $AX = B$.

(d) On pose $m = 1/2$, déterminer l'ensemble des solutions du système $AX = B$.

Exercice 4

Dans les bases canoniques $\mathcal{B} = \{I, J, K, L\}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = \{i, j, k\}$ de $\mathbb{R}^3$, on désigne l'application linéaire ψ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considére deux nouvelles bases $\mathcal{B}' = \{I', J', K', L'\}$ et $\mathcal{C}' = \{i', j', k'\}$, respectivement pour $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, avec

$$\begin{cases} I' = I, \\ J' = J, \\ K' = 4I + J - 3L, \\ L' = -7I + K + 5L, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} i' = 4i + 2j + k, \\ j' = 5i + j - k, \\ k' = k. \end{cases}$$

Donner la matrice A' de ψ relativement aux nouvelles bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 5

Soient trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note φ l'application linéaire définie par

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = e_3, \\ \varphi(e_2) = e_3 + e_2 - e_1, \\ \varphi(e_3) = e_3. \end{cases}$$

(a) Écrire la matrice A de φ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Déterminer le noyau de cette application.

(b) On pose

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3, \\ f_2 = e_1 - e_2, \\ f_3 = e_3 - e_1 + e_2. \end{cases}$$

Calculer e_1, e_2 et e_3 en fonction de f_1, f_2 et f_3. Les vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Calculer $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ et $\varphi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2 et f_3. Écrire la matrice B de φ dans la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(d) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifier que P est inversible et calculer P^{-1} utilisent deux méthodes (Gauss et cofacteur). Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 6

Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a & \dots & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & a+b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \dots & t_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

☆☆☆☆☆☆