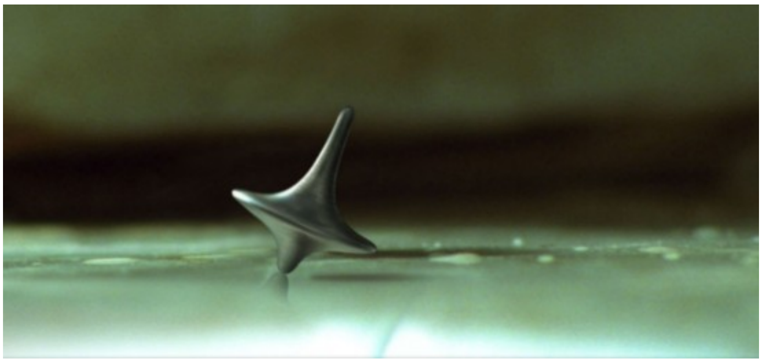


Mécanique Générale

Dorian Depriester
2017
Arts et Métiers ParisTech,
2 Cours des Arts et Métiers, 13617 Aix-en-Provence

Table des matières

Table des matières 2

Liste des symboles 5

1 Rappel : éléments de calcul vectoriel 7
- 1.1 Produit vectoriel . . . 7
  - 1.1.1 Définition . . . 7
  - 1.1.2 Propriétés . . . 7
  - 1.1.3 Calcul . . . 7
- 1.2 Extension : produit mixte . . . 8
  - 1.2.1 Définition . . . 8
  - 1.2.2 Propriétés . . . 8
- 1.3 Torseur . . . 8
  - 1.3.1 Champ de vecteurs équiprojectif . . . 8
  - 1.3.2 Élements de réduction d'un torseur . . . 9
  - 1.3.3 Champ de moments de torseur . . . 9
  - 1.3.4 Axe central d'un torseur . . . 9
  - 1.3.5 Opérations entre torseurs . . . 9

2 Modélisation des actions entre solides 11
- 2.1 Torseur des actions mécaniques . . . 11
  - 2.1.1 Définition . . . 11
  - 2.1.2 Cas particuliers . . . 11
- 2.2 Champ de pesanteur . . . 11
  - 2.2.1 Centre d'inertie . . . 11
  - 2.2.2 Actions du champ de pesanteur . . . 12
- 2.3 Actions de contact . . . 13
  - 2.3.1 Contact ponctuel . . . 13
  - 2.3.2 Lois de Coulomb . . . 13

3 Cinématique 15
- 3.1 Vecteur position d'un point d'un solide . . . 15
- 3.2 Vecteur vitesse d'un point d'un solide . . . 15
- 3.3 Vecteur accélération . . . 15
- 3.4 Vecteur vitesse de rotation . . . 15
- 3.5 Calcul des vecteurs vitesse et accélération . . . 16
- 3.6 Angles d'Euler . . . 16
  - 3.6.1 Définition . . . 16
  - 3.6.2 Vitesse de rotation . . . 17
- 3.7 Champ des vecteurs vitesse . . . 17
  - 3.7.1 Torseur cinématique . . . 17
  - 3.7.2 Cas particuliers de torseurs . . . 18
  - 3.7.3 Centre instantané de rotation . . . 18
- 3.8 À propos du champ des accélérations . . . 19
- 3.9 Composition des mouvements . . . 19
- 3.10 Composition des vitesses . . . 19
- 3.11 Vitesse de glissement . . . 20
  - 3.11.1 Définition . . . 20
  - 3.11.2 Roulement sans glissement . . . 20

3.12 Rotations de roulement et de pivotement . . . 20
3.13 Composition des accélérations . . . 21

4 Cinétique **23**
4.1 Principe de conservation de la masse . . . 23
4.2 Torseur cinétique . . . 23
4.2.1 Définition . . . 23
4.2.2 Calcul de la résultante cinétique . . . 23
4.2.3 Cas particulier . . . 24
4.2.4 Champ de moments de torseur . . . 24
4.3 Torseur dynamique . . . 24
4.3.1 Définition . . . 24
4.3.2 Calcul de la résultante dynamique . . . 24
4.3.3 Cas particulier . . . 25
4.3.4 Champ de moments de torseur . . . 25
4.4 Relation entre moment cinétique et moment dynamique . . . 26
4.4.1 Formule générale . . . 26
4.4.2 Cas particuliers . . . 26
4.5 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe . . . 27
4.5.1 Définition . . . 27
4.5.2 Calcul du moment d'inertie . . . 27
4.5.3 Appellations . . . 28
4.6 Opérateur d'inertie . . . 28
4.6.1 Définition . . . 28
4.6.2 Matrice d'inertie . . . 28
4.6.3 Propriétés de la matrice d'inertie . . . 29
4.6.4 Théorème de Huygens . . . 29
4.7 Calcul du moment cinétique . . . 31
4.7.1 Formule générale . . . 31
4.7.2 Cas particuliers . . . 31
4.8 Énergie cinétique . . . 32
4.8.1 Définition . . . 32
4.8.2 Calcul . . . 32
4.8.3 Cas particuliers . . . 32

5 Dynamique **33**
5.1 Principe Fondamental de la Dynamique . . . 33
5.1.1 Énoncé . . . 33
5.1.2 Théorème de la résultante . . . 33
5.1.3 Théorème du moment . . . 33
5.2 Théorème des actions mutuelles . . . 33
5.3 Cas des repères non galiléens . . . 34

6 Énergétique **37**
6.1 Puissances mécaniques . . . 37
6.1.1 Puissance d'une action extérieure à un ensemble matériel . . . 37
6.1.2 Cas d'un solide . . . 37
6.1.3 Changement de repère . . . 38
6.1.4 Puissance des actions mutuelles . . . 38
6.2 Travail . . . 39
6.3 Énergie potentielle . . . 39
6.3.1 Définition . . . 39
6.3.2 Relation avec le travail . . . 39
6.4 Théorème de l'énergie cinétique . . . 40
6.4.1 Appliqué à un solide . . . 40
6.4.2 Appliqué à un ensemble de solides . . . 41

Liste des symboles

$\{\mathscr{C}(S/\mathcal{R})\}$ Torseur cinétique de S par rapport à $\mathcal{R}$. 21, 22, 30

$\{\mathscr{D}(S/\mathcal{R})\}$ Torseur dynamique de S par rapport à $\mathcal{R}$. 22, 23, 31–33, 38

$\overrightarrow{\delta}_A(S/\mathcal{R})$ Moment dynamique en A de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. 22–24, 31

$E_c(S/\mathcal{R})$ Énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. 30, 38, 39

$\{\mathscr{F}(1 \to 2)\}$ Torseur des efforts du solide 1 sur le solide 2. 11, 31–33, 35–38

$\overrightarrow{\Gamma}(P \in S/\mathcal{R})$ Accélération du point P dans le mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$. 13, 17, 19, 22–24, 31–33, 38

$\underline{\underline{I_O(S)}}$ Matrice d'inertie en O du solide S. 26–28

$\overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \overrightarrow{u})$ Opérateur d'inertie en O du solide S appliqué à $\overrightarrow{u}$. 26, 27, 29

$\overrightarrow{M}_A(1 \to 2)$ Moment en A des actions mécaniques du solide 1 sur le solide 2. 9, 10, 31, 35, 36

$\overrightarrow{\Omega}(S/\mathcal{R})$ Vitesse de rotation de S par rapport à $\mathcal{R}$. 13–19, 29, 30, 32, 35, 36, 38

$\mathcal{P}(E_1 \to E_2/\mathcal{R})$ Puissance des actions de l'ensemble de solides E_1 sur l'ensemble de solides E_2 dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. 35–39

$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2)$ Puissance des actions mutuelles entre les solides S_1 et S_2. 36, 39

$\mathcal{R}$ Repère orthonormé direct. 13–19, 21–30, 32, 33, 35–37

$\mathcal{R}_G$ Repère galiléen. 31–33, 38, 39

$\overrightarrow{R}(1 \to 2)$ Résultante des actions mécaniques du solide 1 sur le solide 2. 9–12, 31, 35, 36

$\overrightarrow{\sigma}_A(S/\mathcal{R})$ Moment cinétique en A de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. 21, 22, 24, 29, 30

$\{\mathscr{V}(S/\mathcal{R})\}$ Torseur cinématique de S par rapport à $\mathcal{R}$. 16, 17, 30, 35–38

$\overrightarrow{V}(P \in S/\mathcal{R})$ Vitesse du point P dans le mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$. 11–13, 16–19, 21–24, 29, 30, 32, 35, 36, 38

1 Rappel : éléments de calcul vectoriel

1.1 Produit vectoriel

1.1.1 Définition

Définition 1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On notera $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur tel que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$. On a alors, par définition du produit vectoriel :*

- *$\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,*
- *la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est directe*[1],
- $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cdot |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$.

La figure 1.1 illustre ces propriétés.

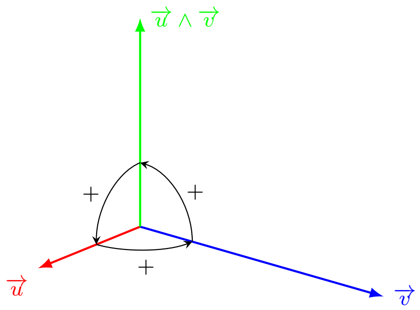


FIGURE 1.1 – Représentation 3D du produit vectoriel.

D'après la définition précédente, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires[2].

1.1.2 Propriétés

Le produit vectoriel respecte les propriétés suivantes :

- Il est distributif sur l'addition :

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \tag{1.1}$$

- Il est compatible avec la multiplication par un scalaire :

$$(\lambda \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \tag{1.2}$$

- Il est antisymétrique :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} \tag{1.3}$$

1.1.3 Calcul

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées suivantes :

$$\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right. \quad \text{et } \overrightarrow{v} \left| \begin{array}{l} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right. . \tag{1.4}$$

1. C'est-à-dire qu'elle respecte la règle dite « des trois doigts de la main droite ».
2. Si l'un des vecteurs est nul, alors il est colinéaire à l'autre.

Si $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, on a alors :

$$\overrightarrow{w} \left| \begin{array}{l} u_y v_z - v_y u_z \\ u_z v_x - v_z u_x \\ u_x v_y - v_x u_y \end{array} \right. \tag{1.5}$$

1.2 Extension : produit mixte

1.2.1 Définition

Définition 2. *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs. On note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le scalaire, appelé produit mixte de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, tel que :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} \tag{1.6}$$

où $\cdot$ est le produit scalaire.

1.2.2 Propriétés

Outre ses propriétés de linéarité, qui découlent directement de celles du produit vectoriel, le produit mixte respecte les propriétés suivantes :

— Il est identique par permutation circulaire :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \tag{1.7}$$

— Il est anticommutatif :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] \tag{1.8}$$

1.3 Torseur

1.3.1 Champ de vecteurs équiprojectif

On considère un champ de vecteur de l'espace E. On note $\overrightarrow{M}_X$ la valeur de ce champ au point X. Le champ est alors un champ de moment si et seulement si il est équiprojectif, c'est-à-dire si :

$$\forall A \in E \quad \forall B \in E \quad \overrightarrow{M}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M}_B \cdot \overrightarrow{AB} \tag{1.9}$$

Une illustration de cette propriété est donnée en figure 1.2

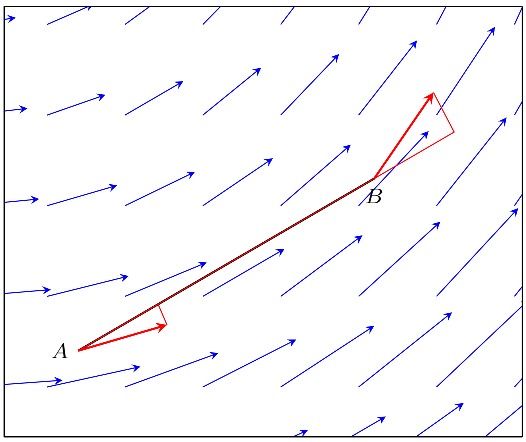


FIGURE 1.2 – Représentation d'un champ de vecteurs équiprojectif (flèches) : la projection sur le segment AB de la valeur du champ en A est identique à la projection sur ce même segment de la valeur du champ en B.

1.3.2 Élements de réduction d'un torseur

Un torseur est un object mathématique constitué :

— d'un vecteur, appelé résultante

— d'un champ de moment

Comme le champ de moment respecte la formule du champ de moment (voir ci-après), la connaissance de la valeur de ce champ en un point suffit à déterminer la valeur du champ en tout point de l'espace. Soient $\overrightarrow{R}$ la résultante et $\overrightarrow{M}_A$ le moment en A du torseur $\{\mathcal{T}\}$. Ce dernier peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_A \end{array} \right\}_A \tag{1.10}$$

$\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_A$ sont les éléments de réduction du torseur.

1.3.3 Champ de moments de torseur

La valeur du moment en tout point B de l'espace E, notée $\overrightarrow{M}_B$, peut se calculer ainsi :

$$\forall B \in E \quad \overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R} \tag{1.11}$$

1.3.4 Axe central d'un torseur

On appelle axe central d'un torseur l'ensemble des points où la norme du moment est minimale. Cet axe est aussi caractérisé par le fait que résultante et moment y sont colinéaires.

1.3.5 Opérations entre torseurs

Soient deux torseurs $\{\mathcal{T}\}$ et $\{\mathcal{T}'\}$ avec :

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_A \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}'\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}' \\ \overrightarrow{M}'_A \end{array} \right\}_A \tag{1.12}$$

Somme

La somme de deux torseurs se calcule comme la somme de ses éléments de réduction, calculés en un même point :

$$\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}'\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}' \\ \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{M}'_A \end{array} \right\}_A \tag{1.13}$$

Produit

Le produit de deux torseurs se calcule comme la somme des produits croisés de leurs éléments de réduction, calculés en un même point :

$$\{\mathcal{T}\} \cdot \{\mathcal{T}'\} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{M}'_A + \overrightarrow{M}_A \cdot \overrightarrow{R}' \tag{1.14}$$

Cette somme est indépendante du point auquel sont calculés les moments.

Égalité

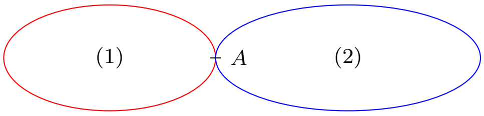
Deux torseurs sont égaux si et seulement si leurs éléments de réductions, calculés au même point, sont égaux deux à deux :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}'\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}' \\ \overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}'_A \end{array} \right\} \tag{1.15}$$

2 Modélisation des actions entre solides

2.1 Torseur des actions mécaniques

2.1.1 Définition



Soient deux solides (1) et (2), en contact mutuel en A. L'action de (1) sur (2) est représenté par le torseur des actions mécaniques suivant :

$$\{\mathscr{F}(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2) \\ \overrightarrow{M}_A(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_A \tag{2.1}$$

$\overrightarrow{R}(1 \rightarrow 2)$ est la force appliquée par (1) sur (2) tandis que $\overrightarrow{M}_A(1 \rightarrow 2)$ est le moment en A de l'effort appliqué par (1) sur (2).

2.1.2 Cas particuliers

- Si la résultante des efforts de (1) sur (2) est nulle, alors on dit que l'action de (1) sur (2) est un couple pur. Ce couple est constant, d'après la formule du champ de moments de torseur.
- Si le moment est nul en un point A, alors le torseur est un *glisseur*.

2.2 Champ de pesanteur

2.2.1 Centre d'inertie

Définition 3. *Soit G un point d'un solide S. G est d'inertie de S si et seulement si :*

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m = \overrightarrow{0} \tag{2.2}$$

Théorème 1. *Soit un solide S de masse m. Le centre d'inertie G de S vérifie alors :*

$$\forall A \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \mathrm{d}m \tag{2.3}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP} \\
\Longrightarrow\ & \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m = \int_{P\in S} \overrightarrow{AG}\mathrm{d}m + \int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\mathrm{d}m \\
\Longleftrightarrow\ & \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m = \overrightarrow{AG} \int_{P\in S}\mathrm{d}m + \overrightarrow{0} \\
\Longleftrightarrow\ & \int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m = \overrightarrow{AG}m
\end{aligned}
$$

□

2.2.2 Actions du champ de pesanteur

Théorème 2. *Soit S un solide de masse m soumis au champ de pesanteur, supposé uniforme et dirigé suivant une direction $-\overrightarrow{z}$: $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{z}$. Le torseur des actions de pesanteur s'écrit alors :*

$$\{\mathscr{F}(g \to S)\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit un petit élément de masse dm de S. L'action de pesanteur sur cet élément vaut alors :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}\overrightarrow{R}(g \to S) = -\overrightarrow{g}\mathrm{d}m \\
\Longrightarrow\ & \overrightarrow{R}(g \to S) = \int_{P\in S} \overrightarrow{g}\mathrm{d}m = \int_{P\in S} -g\overrightarrow{z}\mathrm{d}m = -g\overrightarrow{z}\int_{P\in S}\mathrm{d}m \\
\Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{R}(g \to S) = -mg\overrightarrow{z}
\end{aligned}
$$

De la même façon, si on calcule le moment en A :

$$\overrightarrow{M}_A(g \to S) = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge (-g\overrightarrow{z})\,\mathrm{d}m = -g\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{z}\mathrm{d}m = -g\left(\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m\right) \wedge \overrightarrow{z}$$

Soit G le centre de gravité de S. On a alors (2.2) :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}\mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$$

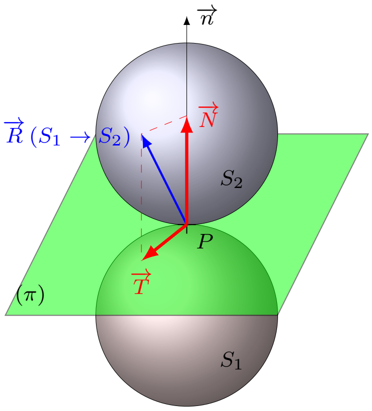
On a alors :

$$\overrightarrow{M}_G(g \to S) = \overrightarrow{0}$$

□

2.3 Actions de contact

2.3.1 Contact ponctuel



Théorème 3. *Soient deux solides S_1 et S_2, en contact ponctuel en un point P. On note (π) le plan tangent à S_1 et S_2 en P. L'action qu'exerce S_1 sur S_2 peut alors être représentée un glisseur, d'axe central passant par P :*

$$\{\mathscr{F}(S_1 \to S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P \tag{2.5}$$

On décompose la résultante comme la somme d'un composante normale à (π), notée $\vec{N}$ et d'un composante tangentielle, notée $\vec{T}$:

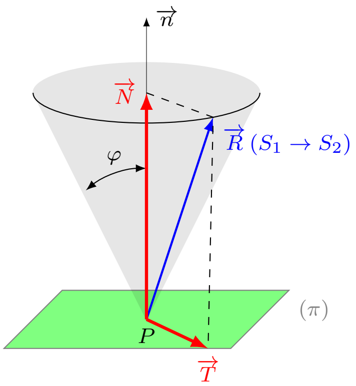
$$\vec{R}(S_1 \to S_2) = \vec{N} + \vec{T} \tag{2.6}$$

Si on note $\vec{n}$ la normale à (π), on a donc :

$$\vec{N} \parallel \vec{n} \tag{2.7a}$$
$$\vec{T} \perp \vec{n} \tag{2.7b}$$

2.3.2 Lois de Coulomb

Glissement



Théorème 4. *Si les solides S_1 et S_2 glissent l'un sur l'autre, c'est-à-dire si $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$ (cf. §3.11.1 p.20), on a alors :*

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\| \tag{2.8}$$

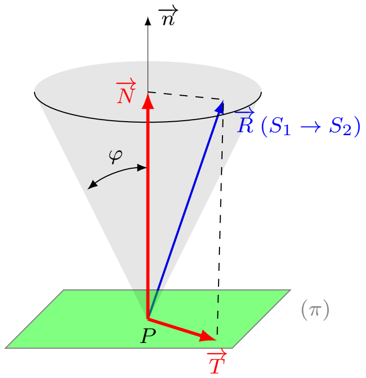
et $\vec{T}$ qui est opposé à la vitesse de glissement $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$. μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

Définition 4. *On appelle angle de frottement l'angle φ tel que :*

$$\mu_d = \tan\varphi \tag{2.9}$$

Lors du glissement, la résultante de l'effort est sur le cône de frottement.

Adhérence



Théorème 5. *Si les solides S_1 et S_2 ne glissent pas l'un sur l'autre, c'est-à-dire si $\vec{V}\,(P{\in}S_2/S_1) = \vec{0}$, on a alors :*

$$\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\| \tag{2.10}$$

avec μ_s le coefficient de frottement statique.

Il y a adhérence si la résultante de l'effort est à l'intérieur du cône de frottement.

Généralement, le coefficient de frottement dynamique est plus faible que le coefficient de frottement statique :

$$\mu_d \leq \mu_s \tag{2.11}$$

3 Cinématique

3.1 Vecteur position d'un point d'un solide

Définition 5. *Soient t la variable de temps et S un solide en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Le vecteur position du point $P(t)$ du solide dans le repère $\mathcal{R}$ à la date t est le vecteur $\overrightarrow{OP}(t)$ avec O origine de $\mathcal{R}$.*

3.2 Vecteur vitesse d'un point d'un solide

Définition 6. *Le vecteur vitesse d'un point $P(t)$ du solide S par rapport au repère $\mathcal{R}$, à la date t, est la dérivée par rapport à t du vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$, pour un observateur lié au repère $\mathcal{R}$. On le notera :*

$$\vec{V}\,(P\in S/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \tag{3.1}$$

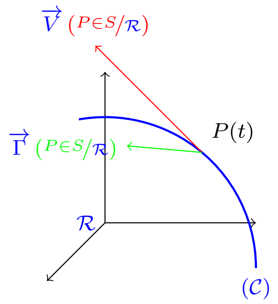
3.3 Vecteur accélération

Définition 7. *Le vecteur accélération d'un point $P(t)$ du solide S par rapport au repère $\mathcal{R}$, à la date t, est la dérivée par rapport à t du vecteur vitesse $\overrightarrow{OP}(t)$, pour un observateur lié au repère $\mathcal{R}$. On le notera :*

$$\vec{\Gamma}\,(P\in S/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}\,(P\in S/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} \tag{3.2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la trajectoire de $P(t)$, c'est-à-dire l'ensemble des positions balayées par $P(t)$ au cours du temps. $\vec{V}\,(P\in S/\mathcal{R})$ et $\vec{\Gamma}\,(P\in S/\mathcal{R})$ présentent alors les propriétés suivantes :

- $\vec{V}\,(P\in S/\mathcal{R})$ est tangent à $(\mathcal{C})$,
- $\vec{\Gamma}\,(P\in S/\mathcal{R})$ est orienté vers l'intérieur de la courbure de $(\mathcal{C})$.



3.4 Vecteur vitesse de rotation

On suppose deux repères $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On peut passer de la base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par une unique rotation. Soient $\vec{u}$ l'axe de cette rotation et α son angle :

$$\mathcal{R}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow[\alpha]{\vec{u}} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \tag{3.3}$$

On appelle alors vecteur vitesse de rotation du repère $\mathcal{R}_1$ par rapport au repère $\mathcal{R}$ le vecteur suivant :

$$\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\alpha}\,\vec{u} \quad \text{avec : } \dot{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

Note : De la même façon, on note habituellement $\ddot{\alpha}$ la dérivée seconde de α par rapport au temps :

$$\ddot{\alpha} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.5}$$

3.5 Calcul des vecteurs vitesse et accélération

Théorème 6. *Soient $\vec{U}(t)$ un vecteur quelconque et $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ deux repères orthonormés directs, $\mathcal{R}_1$ étant en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. On a alors :*

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{U}(t) \tag{3.6}$$

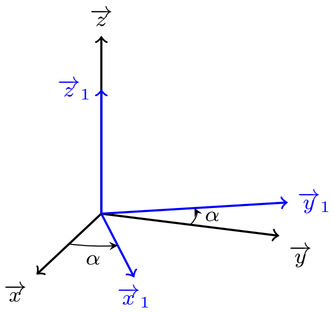
où $\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ est le vecteur vitesse de rotation.

Démonstration. On se place dans le cas où $\vec{z} = \vec{z}_1$. On décompose $\vec{U}(t)$ dans la base $\mathcal{R}_1$:

$$\vec{U}(t) = a(t)\vec{x}_1 + b(t)\vec{y}_1 + c(t)\vec{z}_1 \tag{3.7}$$

Soit α l'angle $(\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

$$\vec{x}_1 = \cos\alpha\,\vec{x} + \sin\alpha\,\vec{y} \tag{3.8a}$$
$$\vec{y}_1 = -\sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{y} \tag{3.8b}$$



Ainsi :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}} = -\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{x} + \dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{y} \tag{3.9a}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right]_{\mathcal{R}} = -\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{x} - \dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{y} \tag{3.9b}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = 0 \tag{3.9c}$$

On peut donc écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{x}_1 \tag{3.10a}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{y}_1 \tag{3.10b}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\alpha}\vec{z} \wedge \vec{z}_1 \tag{3.10c}$$

En dérivant terme à terme les composantes de l'équation (3.7), on trouve :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = a(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + b(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + c(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{z}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \dot{a}(t)\vec{x}_1 + \dot{b}(t)\vec{y}_1 + \dot{c}(t)\vec{z}_1 \tag{3.11}$$

Soit $\vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\alpha}\vec{z}$. L'équation (3.11) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \Big(a(t)\vec{x}_1 + b(t)\vec{y}_1 + c(t)\vec{z}_1\Big) + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{U}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1}$$

□

3.6 Angles d'Euler

3.6.1 Définition

Objectif : décrire de façon unique l'orientation d'une base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à un autre base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On peut passer d'une base à l'autre par trois rotations successives. La convention d'Euler, illustrée en figure 3.1, nous donne la séquence suivante :

1. Précession : $\mathcal{B}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \xrightarrow[\psi]{\overrightarrow{z}} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z})$
2. Nutation : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}) \xrightarrow[\theta]{\overrightarrow{v}} (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}_1)$
3. Rotation propre : $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}_1) \xrightarrow[\varphi]{\overrightarrow{z}_1} \mathcal{B}_1(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1)$

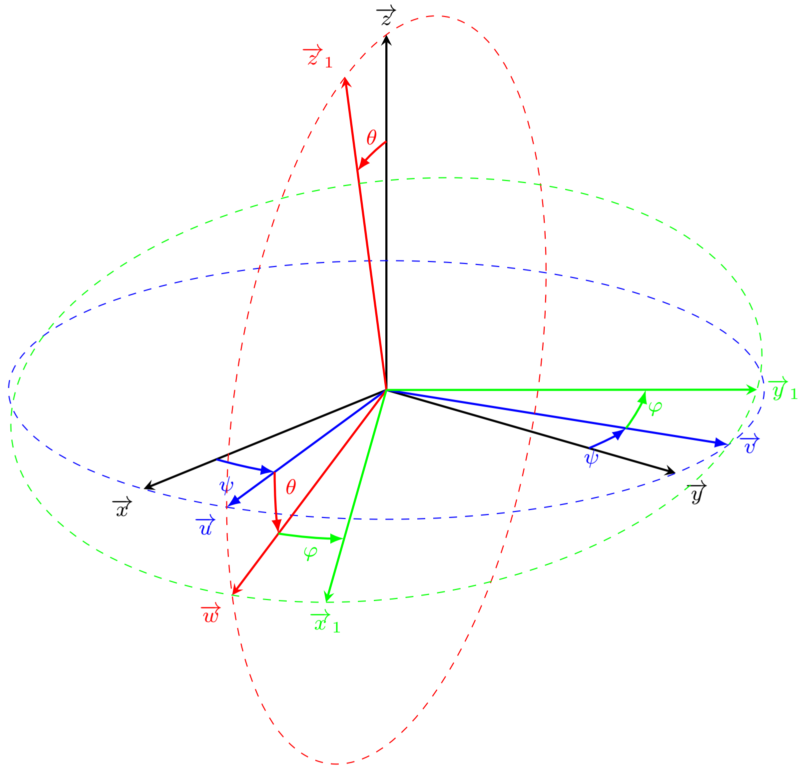


FIGURE 3.1 – Représentation des angles d'Euler

Note : La séquence proposée ici (appelée $z - y - z$) n'est pas universelle : on trouve souvent la séquence $z - x - z$, la deuxième rotation se faisant alors autour de $\overrightarrow{u}$.

3.6.2 Vitesse de rotation

D'après la définition des angles donnée précédemment, le vecteur vitesse de rotation vaut alors :

$$\overrightarrow{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\psi}\overrightarrow{z} + \dot{\theta}\overrightarrow{v} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z}_1 \tag{3.12}$$

où $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ désignent respectivement les dérivées temporelles de ψ, θ et φ.

3.7 Champ des vecteurs vitesse

3.7.1 Torseur cinématique

Soit un solide rigide S en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$.

Théorème 7. *Le champ des vitesses des points de S peut être exprimé à l'aide du torseur cinématique :*

$$\{\mathscr{V}\,(S/\mathcal{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \\ \overrightarrow{V}\,(A\in S/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A \tag{3.13}$$

Note : La notation $\overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R})$ signifie en fait « vecteur vitesse de rotation d'un repère associé au solide S par rapport au repère $\mathcal{R}$ ».

Démonstration. Soit A et B deux points de S. D'après le théorème 6, on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{S} + \overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{3.14}$$

Comme A et B sont fixes par rapport à S, alors $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{S} = \overrightarrow{0}$. Soit O un point fixe par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} - \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \tag{3.15}$$

$$= \overrightarrow{V}\,(B\in S/\mathcal{R}) - \overrightarrow{V}\,(A\in S/\mathcal{R}) \tag{3.16}$$

Les équations (3.14) et (3.16) nous donnent donc :

$$\overrightarrow{V}\,(B\in S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}\,(A\in S/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} \tag{3.17}$$

$$= \overrightarrow{V}\,(A\in S/\mathcal{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \tag{3.18}$$

Le champ des vitesses respecte donc la formule du champ des moments de torseurs. □

3.7.2 Cas particuliers de torseurs

Si le torseur cinématique est un couple pur :

$$\{\mathscr{V}\,(S/\mathcal{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{O} \\ \overrightarrow{V}\,(A\in S/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A \tag{3.19}$$

alors S est en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

Si le torseur cinématique est un glisseur, c'est-à-dire s'il existe un point A tel que le moment en ce point soit nul [1] :

$$\{\mathscr{V}\,(S/\mathcal{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_A \tag{3.20}$$

alors S est en rotation autour de A par rapport à $\mathcal{R}$.

3.7.3 Centre instantané de rotation

On appelle Centre Instantanée de Rotation (CIR) l'axe central du torseur cinématique. On suppose que la norme de la résultante est non nulle [2]. Soit I un point de l'axe central. Si $\overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R})$ est la vitesse de rotation de S par rapport à $\mathcal{R}$ et $\overrightarrow{V}\,(O\in S/\mathcal{R})$ est la vitesse d'un point O dans le mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$, on a alors :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{V}\,(O\in S/\mathcal{R})}{\overrightarrow{\Omega}\,(S/\mathcal{R})^2} \tag{3.21}$$

L'ensemble des positions que décrit I par rapport à $\mathcal{R}$ est la *base*. L'ensemble des positions que décrit I dans le repère associé à S la *roulante*.

À une date t donnée, ces deux courbes sont tangentes en I et roulent sans glisser l'une sur l'autre lors du mouvement.

1. Il en existe alors une infinité : c'est l'axe central du torseur.
2. Si la résultante est nulle, alors le moment est constant en tout point de l'espace, donc tout l'espace E est axe central.

3.8 À propos du champ des accélérations

Théorème 8. *Il n'existe pas de torseur des accélérations.*

Démonstration. Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$. Soient A et B deux point de S. On sait que :

$$\overrightarrow{V}\left({}^{B\in S}/_{\mathcal{R}}\right) = \overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)$$

On en déduit donc par dérivation :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left({}^{B\in S}/_{\mathcal{R}}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{B\in S}/_{\mathcal{R}}\right) = \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{BA} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \cancelto{\overrightarrow{0}}{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{BA}}{\mathrm{d}t}\right|_{S}} + \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{B\in S}/_{\mathcal{R}}\right) = \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{BA} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left(\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \tag{3.22}$$

Le champ des accélérations ne vérifie pas la formule du champ de moments de torseur. □

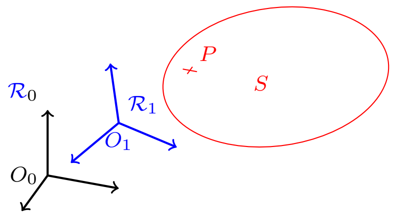
3.9 Composition des mouvements

3.10 Composition des vitesses

Théorème 9. *Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_1$, lui-même en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$. On a alors composition des vitesses :*

$$\left\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}_0}\right)\right\} = \left\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}_1}\right)\right\} + \left\{\mathscr{V}\left({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_0}\right)\right\} \tag{3.23}$$

Démonstration. Soient P un point de S et O_0 et O_1 deux points, fixes respectivement par rapport à $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$.



Par définition :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}_0}\right) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0O_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}_0}\right) = \overrightarrow{V}\left({}^{O_1\in \mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_0}\right) + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_0}\right) \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

Or :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}_1}\right) \tag{3.24}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}_0}\right) = \overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}_1}\right) + \overrightarrow{V}\left({}^{O_1\in \mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_0}\right) + \overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_0}\right) \wedge \overrightarrow{O_1P} \tag{3.25}$$

D'après la formule du champ de moments des vitesses, on sait que :

$$\overrightarrow{V}\,(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\Omega}\,(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{V}\,(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \tag{3.26}$$

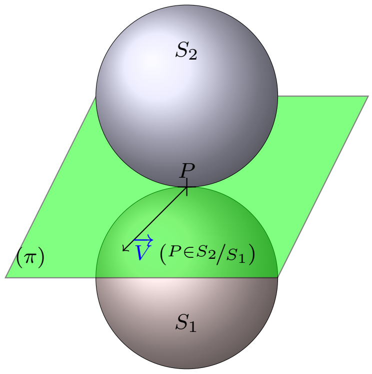
L'équation (3.25) peut donc s'écrire :

$$\overrightarrow{V}\,(P \in S/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{V}\,(P \in S/\mathcal{R}_1) + \overrightarrow{V}\,(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \tag{3.27}$$

On a donc composition du champ des vitesses. Comme on a aussi composition du champ des vecteurs vitesse de rotation, on a composition des torseurs cinématiques. □

3.11 Vitesse de glissement

3.11.1 Définition



Définition 8. *Soient deux solides S_1 et S_2, en contact mutuel en P. On appelle vecteur de glissement de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}\,(P \in S_2/S_1)$.*

Théorème 10. *Soit (π) le plan tangent à S_1 et à S_2 en P. $\overrightarrow{V}\,(P \in S_2/S_1)$ est alors compris dans le plan (π). C'est la condition dite de non-pénétration.*

3.11.2 Roulement sans glissement

Définition 9. *On dit que S_2 roule sans glisser sur S_1 si et seulement si :*

$$\boxed{\overrightarrow{V}\,(P \in S_2/S_1) = \overrightarrow{0}} \tag{3.28}$$

3.12 Rotations de roulement et de pivotement

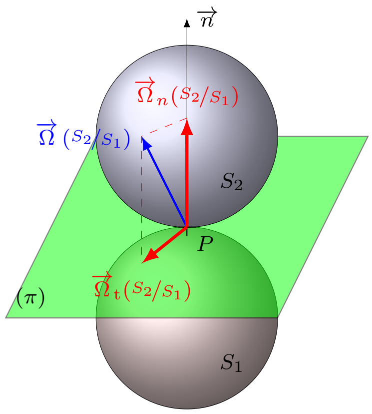
On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal au plan (π). On peut décomposer le vecteur vitesse de rotation de S_2 par rapport à S_1 selon :

une rotation de pivotement portée par $\overrightarrow{n}$ et notée $\overrightarrow{\Omega}_n(S_2/S_1)$.

une rotation de roulement comprise dans le plan (π) et notée $\overrightarrow{\Omega}_t(S_2/S_1)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega}\,(S_2/S_1) = \overrightarrow{\Omega}_n(S_2/S_1) + \overrightarrow{\Omega}_t(S_2/S_1) \tag{3.29}$$



3.13 Composition des accélérations

Théorème 11. *Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_1$, lui-même en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$. On note P un point de S. On a alors :*

$$\overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right) = \overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) + \overrightarrow{\Gamma}\left(P\in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) + 2\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) \tag{3.30}$$

Les composantes de cette équation sont :

L'accélération absolue $\overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right)$

L'accélération relative $\overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right)$

L'accélération d'entraînement $\overrightarrow{\Gamma}\left(P\in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right)$

L'accélération de Coriolis $2\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right)$

Démonstration. En dérivant l'expression (3.25) on trouve :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = {} & \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(O_1\in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_1P} \\ & + \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Par définition de l'accélération, on sait que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right) \tag{3.32a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(O_1\in S/\mathcal{R}_0\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Gamma}\left(O_1\in S/\mathcal{R}_0\right) \tag{3.32b}$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \left(\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \tag{3.33}$$

$$= \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) + \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \tag{3.34}$$

et :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) \tag{3.35}$$

$$= \overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) + \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) \tag{3.36}$$

En remplaçant les termes de l'équation (3.31) par ceux déterminés en (3.32), (3.34) et (3.36), on trouve :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right) = {} & \overrightarrow{\Gamma}\left(O_1\in S/\mathcal{R}_0\right) + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \\ & + \overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) + 2\overrightarrow{\Omega}\left(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_1\right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Or on a vu en (3.22) que :

$$\overrightarrow{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_0\right) = \overrightarrow{\Gamma}\left(O_1\in S/\mathcal{R}\right) + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_0\right) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_0\right) \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \tag{3.38}$$

On peut donc simplifier l'équation (3.37) pour aboutir à l'équation (3.30). □

4 Cinétique

4.1 Principe de conservation de la masse

Définition 10. *Soit E un ensemble matériel. E vérifie le principe de conservation de la masse si pour tout sous-ensemble e de E, la masse de ce dernier est constante a cours du temps :*

$$\forall e \subset E \quad m(e) = \mathrm{cst} \tag{4.1}$$

Théorème 12. *Sous l'hypothèse de conservation de la masse, on peut « dériver sous la somme » :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{P\in E}\varphi(P,t)\mathrm{d}m\right) = \int_{P\in E}\frac{\mathrm{d}\varphi(P,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}m \tag{4.2}$$

4.2 Torseur cinétique

4.2.1 Définition

Définition 11. *On appelle torseur cinétique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ le torseur suivant :*

$$\{\mathscr{C}\,(E/\mathcal{R})\} = \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in E}\overrightarrow{V}\,(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m \\ \displaystyle\overrightarrow{\sigma}_A\,(E/\mathcal{R}) = \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}\,(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A \tag{4.3}$$

La résultante de ce torseur est appelée résultante cinétique, ou quantité de mouvement. Le moment de ce torseur, donné ici en A, est le moment cinétique en A, noté $\overrightarrow{\sigma}_A\,(E/\mathcal{R})$.

4.2.2 Calcul de la résultante cinétique

Théorème 13. *Si G est le centre d'inertie de E et m sa masse, on a alors :*

$$\int_{P\in E}\overrightarrow{V}\,(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m = m\overrightarrow{V}\,(G\in E/\mathcal{R}) \tag{4.4}$$

Démonstration. Par définition du centre d'inertie (voir §2.2 p. 11) :

$$m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in S}\overrightarrow{OP}\mathrm{d}m$$

Si E vérifie la condition de conservation de la masse (4.1), on en déduit :

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\left(\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}\mathrm{d}m\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \int_{P\in E}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}\mathrm{d}m$$

$$m\overrightarrow{V}\,(G\in E/\mathcal{R}) = \int_{P\in E}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}\mathrm{d}m = \int_{P\in E}\overrightarrow{V}\,(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m$$

□

On peut donc écrire le torseur cinétique sous la forme suivante :

$$\{\mathscr{C}(E/\mathcal{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{V}(G\in E/\mathcal{R}) \\ \overrightarrow{\sigma}_A(E/\mathcal{R}) \end{array} \right\}_A$$

4.2.3 Cas particulier

Si la masse de E est localisée en G, c'est-à-dire dans le cas d'un système ponctuel, le moment cinétique est alors nul en G :

$$\{\mathscr{C}(E/\mathcal{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{V}(G\in E/\mathcal{R}) \\ \overrightarrow{O} \end{array} \right\}_G \tag{4.5}$$

4.2.4 Champ de moments de torseur

Théorème 14. *Le moment cinétique respecte la formule du champ de moments de torseur :*

$$\overrightarrow{\sigma}_B(E/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\sigma}_A(E/\mathcal{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \left(m\overrightarrow{V}(G\in E/\mathcal{R})\right) \tag{4.6}$$

Démonstration. Soit B un point quelconque. La définition du moment cinétique (4.3) nous donne :

$$\overrightarrow{\sigma}_B(E/\mathcal{R}) = \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{V}(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m$$

En décomposant $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$ on a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma}_B(E/\mathcal{R}) &= \int_{P\in E} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{V}(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V}(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P\in E} \overrightarrow{V}(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m + \overrightarrow{\sigma}_A(E/\mathcal{R})\end{aligned}$$

D'après l'équation (4.4), on trouve donc :

$$\overrightarrow{\sigma}_B(E/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\sigma}_A(E/\mathcal{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \left(m\overrightarrow{V}(G\in E/\mathcal{R})\right)$$

□

D'après le théorème 14, $\{\mathscr{C}(E/\mathcal{R})\}$ est bien un torseur.

4.3 Torseur dynamique

4.3.1 Définition

Définition 12. *On appelle torseur dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ le torseur suivant :*

$$\{\mathscr{D}(E/\mathcal{R})\} = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma}(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\delta}_A(E/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(P\in E/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m \end{array} \right\}_A \tag{4.7}$$

La résultante de ce torseur est appelée résultante dynamique, ou quantité d'accélération. Le moment de ce torseur, donné ici en A, est le moment dynamique en A, noté $\overrightarrow{\delta}_A(E/\mathcal{R})$.

4.3.2 Calcul de la résultante dynamique

Théorème 15. *Si G est le centre d'inertie de E et m sa masse, on a alors :*

$$\int_{P\in E} \overrightarrow{V}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m = m\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \tag{4.8}$$

Démonstration. En dérivant les termes de l'équation (4.4), on trouve :

$$\begin{aligned} m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\left(\int_{P\in E} \overrightarrow{V}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \\ m\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) &= \int_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m \end{aligned}$$

□

On peut donc écrire le torseur dynamique sous la forme suivante :

$$\left\{\mathscr{D}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \\ \overrightarrow{\delta}_{A}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \end{array} \right\}_{A}$$

4.3.3 Cas particulier

Si la masse de E est localisée en G, c'est-à-dire dans le cas d'un système ponctuel, le moment cinétique est alors nul en G :

$$\left\{\mathscr{D}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right)\right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \\ \overrightarrow{O} \end{array} \right\}_{G} \tag{4.9}$$

4.3.4 Champ de moments de torseur

Théorème 16. *Le moment dynamique respecte la formule du champ de moments de torseur :*

$$\overrightarrow{\delta}_{B}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) = \overrightarrow{\delta}_{A}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{BA} \wedge \left(m\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right)\right) \tag{4.10}$$

Démonstration. Soit B un point quelconque. La définition du moment dynamique (4.7) nous donne :

$$\overrightarrow{\delta}_{B}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) = \int_{P\in E} \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m$$

On décomposant $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$ on a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{B}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) &= \int_{P\in E} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \int_{P\in E} \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m + \overrightarrow{\delta}_{A}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) \end{aligned}$$

D'après l'équation (4.8), on trouve donc :

$$\overrightarrow{\delta}_{B}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) = \overrightarrow{\delta}_{A}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{BA} \wedge \left(m\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{G\in E}/{}_{\mathcal{R}}\right)\right)$$

D'après le théorème 14, $\left\{\mathscr{D}\left({}^{E}/{}_{\mathcal{R}}\right)\right\}$ est bien un torseur. □

4.4 Relation entre moment cinétique et moment dynamique

4.4.1 Formule générale

Théorème 17. *Soit un ensemble E de masse m, en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$. Soient A un point quelconque et G le centre d'inertie de E. On a alors :*

$$\vec{\delta}_A\left(E/\mathcal{R}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A\left(E/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + m\vec{V}\left(A\in E/\mathcal{R}\right) \wedge \vec{V}\left(G\in E/\mathcal{R}\right) \tag{4.11}$$

Démonstration. Par définition du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_A\left(E/\mathcal{R}\right) = \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A\left(E/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} &= \int_{P\in E} \left.\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \mathrm{d}m \\
&= \int_{P\in E} \left(\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{AP} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \right)\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Soit O un point fixe dans $\mathcal{R}$. En décomposant $\overrightarrow{AP}$ on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} - \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right) - \vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A\left(E/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} &= -\int_{P\in E} \vec{V}\left(A\in E/\mathcal{R}\right) \wedge \vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m + \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \\
&= -\vec{V}\left(A\in E/\mathcal{R}\right) \wedge \left(\int_{P\in E} \vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m\right) + \vec{\delta}_P\left(E/\mathcal{R}\right) \\
&= -m\vec{V}\left(A\in E/\mathcal{R}\right) \wedge \vec{V}\left(G\in E/\mathcal{R}\right) + \vec{\delta}_P\left(E/\mathcal{R}\right)
\end{aligned}$$

□

4.4.2 Cas particuliers

— Si un point A est fixe par rapport à $\mathcal{R}$:

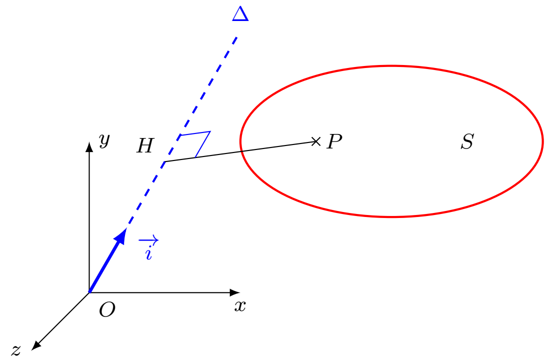
$$\vec{\delta}_A\left(E/\mathcal{R}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A\left(E/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \tag{4.12}$$

— Moment dynamique en G :

$$\vec{\delta}_G\left(E/\mathcal{R}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_G\left(E/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \tag{4.13}$$

4.5 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

4.5.1 Définition



Soient S un solide de masse m, et Δ un axe passant par un point O. Pour tout point P de S, on note H la projection orthogonale de P sur Δ. Le moment d'inertie de S par rapport à l'axe Δ est alors :

$$I\left({}^{S}\!/\!_{\Delta}\right) = \int_{P\in S} \left\|\overrightarrow{PH}\right\|^2 \mathrm{d}m \tag{4.14}$$

4.5.2 Calcul du moment d'inertie

On suppose P de coordonnées (x, y, z) dans une base $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Soit $\vec{i}$ vecteur directeur unitaire de Δ avec :

$$\vec{i} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} \tag{4.15}$$

Théorème 18. *Le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ vaut :*

$$I\left({}^{S}\!/\!_{\Delta}\right) = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\gamma\beta D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F \tag{4.16}$$

avec :

$$A = \int_{P\in S} \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m \tag{4.17a}$$

$$B = \int_{P\in S} \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}m \tag{4.17b}$$

$$C = \int_{P\in S} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m \tag{4.17c}$$

$$D = \int_{P\in S} yz\mathrm{d}m \tag{4.17d}$$

$$E = \int_{P\in S} xz\mathrm{d}m \tag{4.17e}$$

$$F = \int_{P\in S} xy\mathrm{d}m \tag{4.17f}$$

Démonstration. Par définition du produit vectoriel :

$$\left\|\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}\right\| = \cancelto{1}{\left\|\vec{i}\right\|} \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cdot \left|\sin\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP}\right)\right|$$

Par projection, on sait que :

$$\left\|\overrightarrow{PH}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cdot \left|\sin\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP}\right)\right|$$

On a donc :

$$\left\|\overrightarrow{PH}\right\| = \left\|\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}\right\|$$

Connaissant les coordonnées de P et de $\vec{i}$:

$$\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP} = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{matrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{matrix}\right. \wedge {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{matrix}x \\ y \\ z\end{matrix}\right. = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{matrix}\beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x\end{matrix}\right.$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{PH}\right\| &= (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 \\
&= \alpha^2 \left(y^2 + z^2\right) + \beta^2 \left(x^2 + z^2\right) + \gamma^2 \left(x^2 + y^2\right) - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz - 2\alpha\beta xy
\end{aligned}
$$

D'après la définition du moment d'inertie, donnée en (4.14) :

$$
\begin{aligned}
I\left(S/\Delta\right) = \alpha^2 \int_{P\in S} \left(y^2+z^2\right) \mathrm{d}m + \beta^2 \int_{P\in S} \left(x^2+z^2\right) \mathrm{d}m + \gamma^2 \int_{P\in S} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}m \\
-2\beta\gamma \int_{P\in S} yz\mathrm{d}m - 2\alpha\gamma \int_{P\in S} xz\mathrm{d}m - 2\alpha\beta \int_{P\in S} xy\mathrm{d}m
\end{aligned}
$$

□

4.5.3 Appellations

On appelle :

— A le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{x})$

— B le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{y})$

— C le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z})$

— D le produit d'inertie de S par rapport aux axes $(O, \overrightarrow{y})$ et $(O, \overrightarrow{z})$

— E le produit d'inertie de S par rapport aux axes $(O, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{z})$

— F le produit d'inertie de S par rapport aux axes $(O, \overrightarrow{x})$ et $(O, \overrightarrow{y})$

4.6 Opérateur d'inertie

4.6.1 Définition

L'opérateur d'inertie d'un solide S en un point O est l'opérateur qui, à tout vecteur $\overrightarrow{u}$, associe le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{I}}_O\left(S, \overrightarrow{u}\right)$ tel que :

$$
\overrightarrow{\mathcal{I}}_O\left(S, \overrightarrow{u}\right) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \mathrm{d}m \tag{4.18}
$$

Cet opérateur est linéaire ; on peut donc le représenter sous forme matricielle.

4.6.2 Matrice d'inertie

Théorème 19. *L'opérateur d'inertie peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :*

$$
\overrightarrow{\mathcal{I}}_O\left(S, \overrightarrow{u}\right) = \underline{\underline{I_O\left(S\right)}}\,\overrightarrow{u} \quad \textit{avec :}\ \underline{\underline{I_O\left(S\right)}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \tag{4.19}
$$

Démonstration. On cherche à déterminer les composantes de la matrice $\underline{\underline{I_O\left(S\right)}}$ telles que :

$$
\forall \overrightarrow{u} \quad \overrightarrow{\mathcal{I}}_O\left(S, \overrightarrow{u}\right) = \underline{\underline{I_O\left(S\right)}}\,\overrightarrow{u}
$$

Pour ce faire, on détermine chaque colonne en appliquant l'opérateur aux vecteurs de base $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$:

$$
\underline{\underline{I_O\left(S\right)}} = \left[\begin{pmatrix} C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \end{pmatrix}\right]
$$

avec :

$$C_1 = \overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \vec{x}) \tag{4.20a}$$
$$C_2 = \overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \vec{y}) \tag{4.20b}$$
$$C_3 = \overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \vec{z}) \tag{4.20c}$$

Le calcul de la première colonne nous donne :

$$C_1 = \overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \vec{x}) = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \mathrm{d}m$$

Soit $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$, on a alors :

$$\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \wedge \left({}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \wedge {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \right) = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \wedge {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} 0 \\ -z \\ y \end{array}\right. = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} y^2+z^2 \\ -xy \\ -xz \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \vec{x}) = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} \int_{P\in S} \left(y^2+z^2\right) \mathrm{d}m = A \\ \quad -\int_{P\in S} xy\mathrm{d}m = -F \\ \quad -\int_{P\in S} xz\mathrm{d}m = -E \end{array}\right.$$

En appliquant la même procédure pour les directions $\vec{x}$ et $\vec{z}$, on trouve donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{I}}_O(S, \vec{u}) = \underline{\underline{I_O(S)}}\,\vec{u} \quad \text{avec : } \underline{\underline{I_O(S)}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

□

4.6.3 Propriétés de la matrice d'inertie

La matrice d'inertie d'un solide respecte les propriétés suivantes :

— Ses composantes dépendent de la base choisie

— Elle est symétrique, donc diagonalisable [1]

4.6.4 Théorème de Huygens

Théorème 20. *Soit O un point quelconque d'un solide S, de masse m et de centre d'inertie G avec :*

$$\overrightarrow{OG} = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} x_G \\ y_G \\ z_G \end{array}\right. \tag{4.21}$$

On a alors :

$$\underline{\underline{I_O(S)}} = \underline{\underline{I_G(S)}} + m \begin{bmatrix} y_G^2+z_G^2 & -x_Gy_G & -x_Gz_G \\ -x_Gy_G & x_G^2+z_G^2 & -y_Gz_G \\ -x_Gz_G & -y_Gz_G & x_G^2+y_G^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \tag{4.22}$$

1. D'après le *théorème spectral.*

Démonstration. On pose :

$$\overrightarrow{OP} = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GP} = {}_{\mathcal{R}}\left|\begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right.$$

Comme on a $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$, on a :

$$x = x_G + x_1 \tag{4.23a}$$
$$y = y_G + y_1 \tag{4.23b}$$
$$z = z_G + z_1 \tag{4.23c}$$

Soient :

$$\underline{\underline{I_O\,(S)}} = \begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{I_G\,(S)}} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Commençons par déterminer le moment d'inertie A_O. D'après la définition donnée en (4.17a) :

$$A_O = \int_{P\in S} \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m = \int_{P\in S} \left((y_G + y_1)^2 + (z_G + z_1)^2\right) \mathrm{d}m \tag{4.24}$$
$$= \int_{P\in S} \left(y_1^2 + y_G^2 + 2y_1 y_G + z_1^2 + z_G^2 + 2z_1 z_G\right) \mathrm{d}m \tag{4.25}$$
$$= \int_{P\in S} \left(y_1^2 + z_1^2\right) \mathrm{d}m + 2y_G \int_{P\in S} y_1 \mathrm{d}m + 2z_G \int_{P\in S} z_1 \mathrm{d}m + m\left(z_G^2 + y_G^2\right) \tag{4.26}$$

D'après la définition du centre d'inertie (2.2) :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$$

On en déduit donc :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m \cdot \overrightarrow{y} = \int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{y}\, \mathrm{d}m = \int_{P\in S} y_1 \mathrm{d}m = 0 \tag{4.27a}$$
$$\int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \mathrm{d}m \cdot \overrightarrow{z} = \int_{P\in S} \overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{z}\, \mathrm{d}m = \int_{P\in S} z_1 \mathrm{d}m = 0 \tag{4.27b}$$

L'équation (4.26) s'écrit donc :

$$A_O = A_G + m\left(y_G^2 + z_G^2\right)$$

En procédant de la même manière pour B_O et C_O, on trouve :

$$B_O = B_G + m\left(x_G^2 + z_G^2\right) \tag{4.28a}$$
$$C_O = C_G + m\left(x_G^2 + y_G^2\right) \tag{4.28b}$$

Calculons maintenant D_O :

$$\begin{aligned} D_O &= \int_{P\in S} yz \mathrm{d}m = \int_{P\in S} (y_G + y_1)(z_G + z_1) \mathrm{d}m \\ &= \int_{P\in S} (y_G z_G + y_G z_1 + z_G y_1 + y_1 z_1) \mathrm{d}m \\ &= m y_G z_G + y_G \cancelto{0}{\int_{P\in S} z_1 \mathrm{d}m} + z_G \cancelto{0}{\int_{P\in S} y_1 \mathrm{d}m} + \int_{P\in S} y_1 z_1 \mathrm{d}m \\ &= m y_G z_G + D_G \end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour E_O et F_O, on trouve :

$$E_O = E_G + m x_G z_G \tag{4.29a}$$
$$F_O = F_G + m x_G y_G \tag{4.29b}$$

□

4.7 Calcul du moment cinétique

4.7.1 Formule générale

Théorème 21. *Le moment cinétique en un point A d'un solide S de masse m, dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ vaut :*

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\mathcal{R}\right) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}\right) + \vec{\mathcal{I}}_A\left(S, \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)\right) \tag{4.30}$$

Démonstration. Par définition du moment cinétique, donné en (4.3) :

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\mathcal{R}\right) = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}\right) \mathrm{d}m$$

En décomposant $\vec{V}\left(P\in E/\mathcal{R}\right)$:

$$\vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}\right) = \vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)$$

on a donc :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A\left(S/\mathcal{R}\right) &= \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}\right) \mathrm{d}m + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)\right) \mathrm{d}m \\ &= \left(\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m\right) \wedge \vec{V}\left(A\in E/\mathcal{R}\right) + \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right) \wedge \overrightarrow{AP}\right) \mathrm{d}m\end{aligned}$$

Par définition du centre de gravité, on sait que :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{AP}\mathrm{d}m = m\overrightarrow{AG}$$

De plus, d'après la définition de l'opérateur d'inertie, donnée en (4.18) :

$$\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right) \wedge \overrightarrow{AP}\right) \mathrm{d}m = \vec{\mathcal{I}}_A\left(S, \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)\right) \tag{4.31}$$

□

4.7.2 Cas particuliers

On distingue de l'équation (4.31) trois cas particuliers :

— Si A est fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{\sigma}_A\left(S/\mathcal{R}\right) = \vec{\mathcal{I}}_A\left(S, \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)\right) \tag{4.32}$$

— En G :

$$\vec{\sigma}_G\left(S/\mathcal{R}\right) = \vec{\mathcal{I}}_G\left(S, \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right)\right) \tag{4.33}$$

— Si S est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $\vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}\right) = \vec{0}$:

$$\vec{\sigma}_G\left(S/\mathcal{R}\right) = \vec{0} \tag{4.34}$$

4.8 Énergie cinétique

4.8.1 Définition

Définition 13. *Soit S un solide en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$. On définit l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$:*

$$E_c\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{2}\int_{P\in S}\left\|\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\right\|^2 \mathrm{d}m \tag{4.35}$$

4.8.2 Calcul

Théorème 22. *Soient $\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\}$ et $\{\mathscr{C}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\}$ respectivement les torseurs cinématique et cinétique de S dans son mouvement par rapport un repère $\mathcal{R}$. L'énergie cinétique associée à ce mouvement vaut alors :*

$$E_c = \frac{1}{2}\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\}\cdot\{\mathscr{C}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\} \tag{4.36}$$

Démonstration. D'après la définition de l'énergie cinétique donnée en (4.35), on a :

$$\begin{aligned}
2E_c\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) &= \int_{P\in S}\left(\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\right)\mathrm{d}m \\
&= \int_{P\in S}\left(\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_{P\in S}\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right)\mathrm{d}m \\
&= \left(\int_{P\in S}\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\mathrm{d}m\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \int_{P\in S}\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\right)\mathrm{d}m \\
&= m\overrightarrow{V}\left({}^{G\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\mathrm{d}m \\
&= m\overrightarrow{V}\left({}^{G\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{\sigma}_A\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

L'équation (4.37) peut s'écrire comme le produit des torseurs cinématique et cinétique :

$$2E_c\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) = \{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\}\cdot\{\mathscr{C}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\}$$

□

4.8.3 Cas particuliers

On distingue de l'équation (4.36) deux cas particuliers :

— Si S est en translation par rapport à $\mathcal{R}$:

$$E_c\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{2}m\left\|\overrightarrow{V}\left({}^{G\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\right\|^2 \tag{4.38}$$

— Si S est en rotation autour d'un axe $(O, \overrightarrow{z})$:

$$\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) = \dot{\theta}\overrightarrow{z} \tag{4.39a}$$

$$\overrightarrow{V}\left({}^{O\in S}/_{\mathcal{R}}\right) = \vec{O} \tag{4.39b}$$

$$\Longrightarrow \quad E_c\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) = \frac{1}{2}I_{Oz}\dot{\theta}^2 \tag{4.40}$$

avec I_{Oz} le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z})$.

5 Dynamique

5.1 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

5.1.1 Énoncé

Théorème 23. *Soit un ensemble matériel E. Il existe un repère $\mathcal{R}_G$ tel que, pour tout sous-ensemble e de E, le torseur dynamique de e dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_G$ soit égal au torseur des actions extérieures à e :*

$$\forall e \subset E \quad \{\mathscr{D}\left(e/\mathcal{R}_G\right)\} = \{\mathscr{F}\left(\overline{e} \rightarrow e\right)\} \tag{5.1}$$

Le repère $\mathcal{R}_G$ est dit galiléen.

5.1.2 Théorème de la résultante

Du PFD (5.1), on en déduit le théorème de la résultante dynamique :

$$m\overrightarrow{\Gamma}\left(G\in e/\mathcal{R}_G\right) = \overrightarrow{R}\left(\overline{e} \rightarrow e\right) \tag{5.2}$$

5.1.3 Théorème du moment

Du PFD (5.1), on en déduit le théorème du moment dynamique :

$$\forall A \quad \overrightarrow{\delta}_A\left(e/\mathcal{R}_G\right) = \overrightarrow{M}_A\left(\overline{e} \rightarrow e\right) \tag{5.3}$$

5.2 Théorème des actions mutuelles

Théorème 24. *Soient deux ensembles de solides (e_1) et (e_2) distincts. L'action mécanique de (e_1) sur (e_2) est opposée à l'action mécanique de (e_2) sur (e_1) :*

$$\{\mathscr{F}\left(e_1 \rightarrow e_2\right)\} = -\{\mathscr{F}\left(e_2 \rightarrow e_1\right)\} \tag{5.4}$$

Démonstration. Le PFD appliqué à l'ensemble (e_1) nous donne :

$$\{\mathscr{D}\left(e_1/\mathcal{R}_G\right)\} = \{\mathscr{F}\left(\overline{e_1} \rightarrow e_1\right)\} \tag{5.5}$$

On pose :

$$E = e_1 \cup e_2 \tag{5.6}$$

On a donc :

$$\overline{e_1} = e_2 \cup \overline{E}$$

Ainsi, (5.5) s'écrit alors :

$$\{\mathscr{D}\left(e_1/\mathcal{R}_G\right)\} = \{\mathscr{F}\left(e_2 \rightarrow e_1\right)\} + \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \rightarrow e_1\right)\right\} \tag{5.7}$$

Par le même raisonnement, on a :

$$\{\mathscr{D}\left(e_2/\mathcal{R}_G\right)\} = \{\mathscr{F}\left(e_1 \rightarrow e_2\right)\} + \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \rightarrow e_2\right)\right\} \tag{5.8}$$

On trouve donc, d'après (5.7) et (5.8) :

$$\{\mathscr{D}\left({}^{e_1}/\mathcal{R}_G\right)\} + \{\mathscr{D}\left({}^{e_2}/\mathcal{R}_G\right)\} = \{\mathscr{F}\left(e_2 \to e_1\right)\} + \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \to e_1\right)\right\} + \{\mathscr{F}\left(e_1 \to e_2\right)\} + \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \to e_2\right)\right\} \tag{5.9}$$

D'après la définition (5.6), on a :

$$\{\mathscr{D}\left({}^{e_1}/\mathcal{R}_G\right)\} + \{\mathscr{D}\left({}^{e_2}/\mathcal{R}_G\right)\} = \{\mathscr{D}\left({}^{E}/\mathcal{R}_G\right)\} \tag{5.10a}$$

$$\left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \to e_1\right)\right\} + \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \to e_2\right)\right\} = \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \to E\right)\right\} \tag{5.10b}$$

Or, en appliquant le PFD à E, on trouve :

$$\{\mathscr{D}\left({}^{E}/\mathcal{R}_G\right)\} = \left\{\mathscr{F}\left(\overline{E} \to E\right)\right\}$$

En simplifiant (5.9), on obtient donc :

$$\{0\} = \{\mathscr{F}\left(e_2 \to e_1\right)\} + \{\mathscr{F}\left(e_1 \to e_2\right)\}$$

□

5.3 Cas des repères non galiléens

Théorème 25. *Soient e un ensemble matériel, $\mathcal{R}$ un repère quelconque et $\mathcal{R}_G$ un repère galiléen. Le PFD appliqué à e nous donne alors :*

$$\{\mathscr{D}\left({}^{e}/\mathcal{R}\right)\} = \{\mathscr{F}\left(\overline{e} \to e\right)\} + \{\mathcal{D}_{\mathrm{ie}}\left(e, {}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\} + \{\mathcal{D}_{\mathrm{ic}}\left(e, {}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\} \tag{5.11}$$

Avec $\{\mathcal{D}_{\mathrm{ie}}\left(e, {}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\}$ le torseur des effets d'inertie d'entrainement et $\{\mathcal{D}_{\mathrm{ic}}\left(e, {}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\}$ le torseur des effets d'inertie de Coriolis :

$$\{\mathcal{D}_{\mathrm{ie}}\left(e, {}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\} = \left\{\begin{array}{c} -\displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \\ -\displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A \tag{5.12a}$$

$$\{\mathcal{D}_{\mathrm{ic}}\left(e, {}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\} = \left\{\begin{array}{c} -\displaystyle\int_{P\in e} 2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \\ -\displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \left[2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\right]\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A \tag{5.12b}$$

Démonstration. D'après la composition des accélérations (eq. 3.30 p. 21), on a :

$$\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}_G\right) = \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in S}/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in \mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) + 2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/\mathcal{R}\right)$$

On a donc :

$$\{\mathscr{D}\left({}^{e}/\mathcal{R}_G\right)\} = \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in e} \left[\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in \mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) + 2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\right]\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right) + \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in \mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) + 2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\right]\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in \mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in \mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right)\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A$$

$$+ \left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in e} 2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{P\in e} \overrightarrow{AP} \wedge \left[2\overrightarrow{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}}/\mathcal{R}_G\right) \wedge \overrightarrow{V}\left({}^{P\in e}/\mathcal{R}\right)\right]\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A$$

Or :

$$\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{P\in e}\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/_{\mathcal{R}}\right)\mathrm{d}m\\ \displaystyle\int_{P\in e}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma}\left({}^{P\in e}/_{\mathcal{R}}\right)\mathrm{d}m\end{array}\right\}_A=\left\{\mathscr{D}\left({}^{e}/_{\mathcal{R}}\right)\right\}$$

et d'après le PFD (5.1) appliqué à e :

$$\left\{\mathscr{D}\left({}^{e}/_{\mathcal{R}_{\mathrm{G}}}\right)\right\}=\left\{\mathscr{F}\left(\overline{e}\rightarrow e\right)\right\}$$

On a donc :

$$\left\{\mathscr{F}\left(\overline{e}\rightarrow e\right)\right\}=\left\{\mathscr{D}\left({}^{e}/_{\mathcal{R}}\right)\right\}-\left\{\mathcal{D}_{\mathrm{ie}}\left(e,{}^{\mathcal{R}}/_{\mathcal{R}_{\mathrm{G}}}\right)\right\}-\left\{\mathcal{D}_{\mathrm{ic}}\left(e,{}^{\mathcal{R}}/_{\mathcal{R}_{\mathrm{G}}}\right)\right\}$$

□

6 Énergétique

6.1 Puissances mécaniques

6.1.1 Puissance d'une action extérieure à un ensemble matériel

Soient deux ensembles matériels E_1 et E_2 distincts, en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$. On suppose que l'ensemble E_1 exerce sur chaque élément de masse $\mathrm{d}m$ de E_2, centrée en un point P, une action $\overrightarrow{f}$.

Définition 14. *La puissance à la date t de l'action mécanique de E_1 sur E_2, dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ vaut :*

$$\mathcal{P}\left(E_1 \rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = \int_{P\in E_2} \overrightarrow{f}(P) \cdot \overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m \tag{6.1}$$

6.1.2 Cas d'un solide

Théorème 26. *Soit un ensemble E et un solide S. La puissance des actions mécaniques de E sur S, dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est égale au produit du torseur des efforts de E sur S et du torseur cinématique du mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$:*

$$\mathcal{P}\left(E \rightarrow {}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) = \left\{\mathscr{F}(E \rightarrow S)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right\} \tag{6.2}$$

Démonstration. Dans le cas des solides indéformables, le mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$ peut être décrit à l'aide du torseur cinématique :

$$\left\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \\ \overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) \end{array}\right\}_A$$

On peut donc, d'après la relation du champ de moment de torseur, calculer la vitesse en chaque point de S :

$$\overrightarrow{V}\left({}^{P\in S}/_{\mathcal{R}}\right) = \overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)$$

L'équation (6.1) devient donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(E \rightarrow {}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) &= \int_{P\in S} \overrightarrow{f}(P) \cdot \left(\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right) \mathrm{d}m \\
&= \int_{P\in S} \overrightarrow{f}(P) \cdot \overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m + \int_{P\in S} \overrightarrow{f}(P) \cdot \left(\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right) \mathrm{d}m \\
&= \int_{P\in S} \overrightarrow{f}(P) \cdot \overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}m + \int_{P\in S} \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{f}(P) \wedge \overrightarrow{PA}\right) \mathrm{d}m \\
&= \overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right) \cdot \int_{P\in S} \overrightarrow{f}(P)\, \mathrm{d}m + \overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right) \cdot \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{f}(P) \wedge \overrightarrow{PA}\right) \mathrm{d}m
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Soit $\left\{\mathscr{F}(E \rightarrow S)\right\}$ le torseur des efforts de E sur S :

$$\left\{\mathscr{F}(E \rightarrow S)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R}(E \rightarrow S) \\ \overrightarrow{M}_A(E \rightarrow S) \end{array}\right\}_A$$

avec :

$$\overrightarrow{R}\left(E\rightarrow S\right)=\int_{P\in S}\overrightarrow{f}\left(P\right)\mathrm{d}m \tag{6.4a}$$

$$\overrightarrow{M}_A\left(E\rightarrow S\right)=\int_{P\in S}\left(\overrightarrow{f}\left(P\right)\wedge\overrightarrow{PA}\right)\mathrm{d}m \tag{6.4b}$$

L'équation (6.3) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(E\rightarrow {}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)&=\overrightarrow{V}\left({}^{A\in S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{R}\left(E\rightarrow S\right)+\overrightarrow{\Omega}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\cdot\overrightarrow{M}_A\left(E\rightarrow S\right)\\&=\left\{\mathscr{F}\left(E\rightarrow S\right)\right\}\cdot\left\{\mathscr{V}\left({}^{S}/_{\mathcal{R}}\right)\right\}\end{aligned}$$

□

6.1.3 Changement de repère

Théorème 27. *Soient deux repères $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et deux ensembles matériels E_1 et E_2. On a alors :*

$$\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)-\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)=\left\{\mathscr{F}\left(E_1\rightarrow E_2\right)\right\}\cdot\left\{\mathscr{V}\left({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2}\right)\right\} \tag{6.5}$$

Démonstration. Par définition de la puissance (6.1) :

$$\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)=\int_{P\in E_2}\overrightarrow{f}\left(P\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)\mathrm{d}m \tag{6.6a}$$

$$\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)=\int_{P\in E_2}\overrightarrow{f}\left(P\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)\mathrm{d}m \tag{6.6b}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)-\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)&=\int_{P\in E_2}\left(\overrightarrow{f}\left(P\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)-\overrightarrow{f}\left(P\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)\right)\mathrm{d}m\\&=\int_{P\in E_2}\left(\overrightarrow{f}\left(P\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)-\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)\right)\right)\mathrm{d}m\end{aligned}$$

Or, d'après la relation de composition des vitesses (cf. §3.10 p. 19) :

$$\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)-\overrightarrow{V}\left({}^{P\in E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)=\overrightarrow{V}\left({}^{P\in \mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right)-\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right)&=\int_{P\in E_2}\overrightarrow{f}\left(P\right)\cdot\overrightarrow{V}\left({}^{P\in \mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2}\right)\mathrm{d}m\\&=\left\{\mathscr{F}\left(E_1\rightarrow E_2\right)\right\}\cdot\left\{\mathscr{V}\left({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2}\right)\right\}\end{aligned}$$

□

6.1.4 Puissance des actions mutuelles

Définition 15. *Soit deux ensembles matériels distincts E_1 et E_2. La puissance des actions mutuelles entre E_1 et E_2, dans leurs mouvements par rapport à un repère $\mathcal{R}$ vaut :*

$$\mathcal{P}\left({}^{E_1\leftrightarrow E_2}/_{\mathcal{R}}\right)=\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)+\mathcal{P}\left(E_2\rightarrow {}^{E_1}/_{\mathcal{R}}\right) \tag{6.7}$$

Théorème 28. *La puissance des actions mutuelles est indépendante du repère utilisé.*

On note donc simplement :

$$\mathcal{P}\left({}^{E_1\leftrightarrow E_2}/_{\mathcal{R}}\right)=\mathcal{P}\left(E_1\rightarrow E_1\right) \tag{6.8}$$

Démonstration. Soient deux repère $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. En reprenant la relation de changement de repère (6.5) on trouve :

$$\mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right) - \mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right) = \{\mathscr{F}(E_1 \to E_2)\} \cdot \{\mathscr{V}({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2})\} \tag{6.9a}$$

$$\mathcal{P}\left(E_2 \to {}^{E_1}/_{\mathcal{R}_2}\right) - \mathcal{P}\left(E_2 \to {}^{E_1}/_{\mathcal{R}_1}\right) = \{\mathscr{F}(E_2 \to E_1)\} \cdot \{\mathscr{V}({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2})\} \tag{6.9b}$$

En additionnant les équations (6.9a) et (6.9b) on trouve :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right) - \mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right) + \mathcal{P}\left(E_2 \to {}^{E_1}/_{\mathcal{R}_2}\right) - \mathcal{P}\left(E_2 \to {}^{E_1}/_{\mathcal{R}_1}\right) \\ = \{\mathscr{F}(E_1 \to E_2)\} \cdot \{\mathscr{V}({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2})\} + \{\mathscr{F}(E_2 \to E_1)\} \cdot \{\mathscr{V}({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2})\}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{P}\left({}^{E_1 \leftrightarrow E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right) - \mathcal{P}\left({}^{E_1 \leftrightarrow E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right) = \{\mathscr{V}({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}_2})\} \cdot \Big(\{\mathscr{F}(E_1 \to E_2)\} + \{\mathscr{F}(E_2 \to E_1)\}\Big)$$

D'après le théorème des actions mutuelles (cf. §5.2 p. 33), on a donc :

$$\mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_2}\right) - \mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}_1}\right) = 0$$

□

6.2 Travail

Définition 16. *Le travail de l'action mécanique d'un ensemble de solides E_1 sur un ensemble de solides E_2 est, calculé entre les dates t_1 et t_2, dans le mouvement de E_2 par rapport à un repère $\mathcal{R}$ vaut :*

$$W_{t_1}^{t_2}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}t \tag{6.10}$$

6.3 Énergie potentielle

6.3.1 Définition

Définition 17. *Une énergie potentielle est associée à l'action mécanique de E_1 sur E_2, dans le mouvement de E_2 par rapport à $\mathcal{R}$, s'il existe une fonction scalaire $\mathrm{E_p}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)$ telle que :*

$$\mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{E_p}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)\Big) \tag{6.11}$$

6.3.2 Relation avec le travail

Théorème 29. *Si une énergie potentielle $\mathrm{E_p}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)$ est associée à l'action mécanique de E_1 sur E_2, on a alors :*

$$W_{t_1}^{t_2}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = -\Big(\mathrm{E_p^{t_2}}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) - \mathrm{E_p^{t_1}}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)\Big) \tag{6.12}$$

avec $\mathrm{E_p^{t_1}}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)$ et $\mathrm{E_p^{t_2}}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)$ respectivement l'énergie potentielle aux dates t_1 et t_2.

Démonstration. D'après les définitions du travail (6.10) et de l'énergie potentielle (6.11) :

$$W_{t_1}^{t_2}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{P}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{E_p}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)\Big)$$

Ainsi :

$$W_{t_1}^{t_2}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right) = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{E_p}\left(E_1 \to {}^{E_2}/_{\mathcal{R}}\right)\Big)\mathrm{d}t$$

□

6.4 Théorème de l'énergie cinétique

6.4.1 Appliqué à un solide

Théorème 30. *Soient un solide S et un repère galiléen $\mathcal{R}_G$. La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_G$ est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures à S, calculé dans $\mathcal{R}_G$:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_c\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right) = \mathcal{P}\left(\overline{S} \to S/\mathcal{R}_G\right) \tag{6.13}$$

Démonstration. D'après le PFD (cf. §5.1.1 p. 33) :

$$\begin{aligned} \left\{\mathscr{D}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} &= \left\{\mathscr{F}\left(\overline{S} \to S\right)\right\} \\ \Longrightarrow \quad \left\{\mathscr{D}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} &= \left\{\mathscr{F}\left(\overline{S} \to S\right)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \\ &= \mathcal{P}\left(S \to \overline{S}/\mathcal{R}_G\right) \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} \left\{\mathscr{D}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m \\ \displaystyle\int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m \end{array} \right\}_A \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right) \\ \vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}_G\right) \end{array} \right\}_A \\ &= \int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m \cdot \vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}_G\right) + \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m \end{aligned}$$

D'après la relation de champ de moments de torseurs :

$$\vec{V}\left(A\in S/\mathcal{R}_G\right) = \vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \left\{\mathscr{D}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} = \int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m + \int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right) \mathrm{d}m \\ + \int_{P\in S} \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right)\right) \mathrm{d}m \end{aligned} \tag{6.15}$$

D'après la propriété d'anticommutativité du produit mixte :

$$\int_{P\in S} \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right)\right) \mathrm{d}m = -\int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right) \mathrm{d}m$$

L'équation (6.15) devient donc :

$$\left\{\mathscr{D}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} = \int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m \tag{6.16}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right)\right\|^2\right) &= 2\vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \\ \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{P\in S} \left\|\vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right)\right\|^2 \mathrm{d}m\right) &= 2\int_{P\in S} \vec{\Gamma}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \cdot \vec{V}\left(P\in S/\mathcal{R}_G\right) \mathrm{d}m \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_c\left(S/\mathcal{R}_G\right)}{\mathrm{d}t} &= 2\left\{\mathscr{D}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \cdot \left\{\mathscr{V}\left(S/\mathcal{R}_G\right)\right\} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (6.14) les termes précédents, on aboutit au théorème de l'énergie cinétique (6.13). □

6.4.2 Appliqué à un ensemble de solides

Théorème 31. *Soient E un ensemble de solides S_1, S_2,..., S_n et $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ un repère galiléen. La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ est égale à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures à E et des actions mutuelles, calculées dans $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(E_{\mathrm{c}}\left(E/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)\Big) = \mathcal{P}\left(\overline{E} \to E/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mathcal{P}\left(S_i \to S_i\right) \tag{6.17}$$

Démonstration. Pour chaque solide S_i, le théorème de l'énergie cinétique (6.13) donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(E_{\mathrm{c}}\left(S_i/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)\Big) =\mathcal{P}\left(\overline{S_i} \to S_i/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)\\
\Longrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}E_{\mathrm{c}}\left(S_i/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)\right) =\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}\left(\overline{S_i} \to S_i/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)\\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(E_{\mathrm{c}}\left(E/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)\Big) =\mathcal{P}\left(\overline{E} \to E/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}\left(S_j \to S_i/\mathcal{R}_{\mathrm{G}}\right)
\end{aligned}$$

□