Devoir maison - Modèles génératifs

Dorian Gailhard dorian.gailhard@telecom-paris.fr

June 27, 2023

1)

$$\mathbb{E}[\|M_t^f\|] = \mathbb{E}[\|f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t \left\{ \langle -b(T-s, Y_s) + \nabla log p_{T-s}(Y_s), \nabla f(Y_s) \rangle + \frac{1}{2}\Delta f(Y_s) \right\} ds\|] \tag{1}$$

$$\leq \mathbb{E}[\|f(Y_t)\| + \|f(Y_0)\| + \int_0^t \|\langle -b(T-s, Y_s) + \nabla log p_{T-s}(Y_s), \nabla f(Y_s) \rangle + \frac{1}{2}\Delta f(Y_s)\| ds] \tag{2}$$

f est supposée continue et à support compact, elle est donc bornée. Ensuite en appliquant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\langle -b(T-s, Y_s) + \nabla log p_{T-s}(Y_s), \nabla f(Y_s) \rangle + \frac{1}{2}\Delta f(Y_s)\| \tag{3}$$

$$\leq \|b(T-s, Y_s)\| \|\nabla f(Y_s)\| + \|\langle \nabla log p_{T-s}(Y_s), \nabla f(Y_s) \rangle\| + \frac{1}{2}\|\Delta f(Y_s)\| \tag{4}$$

b est supposée bornée et comme ∇f est continue et à support compact (car f est à support compact), sa norme est aussi bornée. Ensuite la fonction $y \to \langle \nabla log p_{T-s}(y), \nabla f(y) \rangle$ est continue (car $log p_{T-s}$ et ∇f sont continues) et à support compact (car ∇f est à support compact car f est à support compact), et est donc aussi bornée. Il reste enfin le terme $\frac{1}{2}\|\Delta f(Y_s)\|$ qui est lui aussi majoré car Δf est continue à support compact.

Tout ceci donne qu'à t fixé, $\mathbb{E}[\|M_t^f\|]$ est bien majoré donc fini.

2) $\Rightarrow$: Supposons que $(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $(Y_t)_{t\in[0,T]}$-martingale. Alors :

$$\mathbb{E}[M_t^f | Y_s] = M_s^f \tag{5}$$

En multipliant l'égalité par $g(Y_s)$:

$$\mathbb{E}[g(Y_s) M_t^f | Y_s] = g(Y_s) M_s^f \tag{6}$$

donc comme M_s^f est une constante sachant Y_s:

$$\mathbb{E}[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f) | Y_s] = 0 \tag{7}$$

Et en prenant l'espérance contre Y_s :

$$\mathbb{E}[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f)] = 0 \tag{8}$$

$\Leftarrow$: Supposons que pour toute fonction $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{E}[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f)] = 0$. On aimerait prendre $g = \frac{\delta_{Y_s}}{p_s(Y_s)}$ pour une valeur particulière de s et Y_s, mais cette fonction n'est pas $\mathscr{C}^\infty$. Prenons $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers g (par exemple des gaussiennes "contractées" entre $X_s - \frac{1}{n}$ et $X_s + \frac{1}{n}$, i.e. $\forall n, \forall x, f_n(x) = \begin{cases} p_s(X_s)^{-1} e^{1-1/(1-(nx)^2)} \text{ si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, qui converge bien uniformément vers la fonction voulue et est $\mathscr{C}^\infty$). On a donc bien :

$$\mathbb{E}[f_n(Y_s)(M_t^f - M_s^f)] \to_{+\infty} \mathbb{E}[M_t^f - M_s^f | Y_s] \tag{9}$$

D'autre part, $\forall n, \mathbb{E}[f_n(Y_s)(M_t^f - M_s^f)] = 0$ donc on a bien $\mathbb{E}[M_t^f - M_s^f | Y_s] = 0$ ie $\mathbb{E}[M_t^f | Y_s] = M_s^f$ donc comme $\mathbb{E}[\|M_t^f\|] < +\infty$, $(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $(Y_t)_{t\in[0,T]}$-martingale.

3) $\Rightarrow$: Supposons que $(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $(Y_t)_{t\in[0,T]}$-martingale. Alors d'après 2), pour $t \geq s$ (et alors $T - t \leq T - s$) :

$$\mathbb{E}[(M_{T-s}^f - M_{T-t}^f) g(Y_{T-t})] = 0 \tag{10}$$

En développant l'expression de M_{T-t}^f et M_{T-s}^f, on se retrouve avec :

$$\mathbb{E}[g(X_t) \left\{ f(X_s) - f(X_t) - \int_{T-t}^{T-s} \{ \langle -b(T-u, X_{T-u}) + \nabla log p_{T-u}(X_{T-u}), \nabla f(X_{T-u}) \rangle + \frac{1}{2} \Delta f(X_{T-u}) \} du \right\}] = 0 \tag{11}$$

Et par changement de variable dans l'intégrale :

$$\mathbb{E}[g(X_t) \left\{ f(X_s) - f(X_t) + \int_t^s \{ \langle -b(u, X_{T-u}) + \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u) \rangle + \frac{1}{2} \Delta f(X_u) \} du \right\}] = 0 \tag{12}$$

Soit

$$\mathbb{E}[g(X_t) \{ f(X_s) - f(X_t) \}] = \mathbb{E}[g(X_t) \int_t^s \{ \langle b(u, X_{T-u}) - \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u) \rangle - \frac{1}{2} \Delta f(X_u) \} du] \tag{13}$$

Soit en multipliant les deux côtés par -1 pour avoir l'ordre souhaité :

$$\mathbb{E}[g(X_t) f(X_t) - g(X_t) f(X_s)] = \mathbb{E}[g(X_t) \int_s^t \left\{ \langle b(u, X_u) - \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u) \rangle - \frac{1}{2} \Delta f(X_u) \right\} du] \tag{14}$$

$\Leftarrow$: Supposons l'égalité précédente vraie, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f)] &= \mathbb{E}[g(X_{T-s})(M_t^f - M_s^f)] \\ &= \mathbb{E}[g(X_{T-s}) f(X_{T-t}) - g(X_{T-s}) f(X_{T-s}) - g(X_{T-s}) \int_s^t \{ \langle -b(T-u, X_{T-u}) \\ &\quad + \nabla log p_{T-u}(X_{T-u}) \rangle + \frac{1}{2} \Delta f(X_{T-u})] \} du] \end{aligned} \tag{15}$$

Comme $t \geq s$, on a bien $T-t \leq T-s$ donc on peut appliquer la formule à $\mathbb{E}[g(X_{T-s})f(X_{T-t}) - g(X_{T-s})f(X_{T-s})]$ soit :

$$\mathbb{E}[g(X_{T-s})f(X_{T-t}) - g(X_{T-s})f(X_{T-s})] \tag{16}$$
$$= -\mathbb{E}[g(X_{T-s})f(X_{T-s}) - g(X_{T-s})f(X_{T-t})] \tag{17}$$
$$= -\mathbb{E}[g(X_{T-s}) \int_{T-t}^{T-s} \left\{ \langle b(u, X_u) - \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u) - \frac{1}{2}\Delta f(X_u) \right\} du] \tag{18}$$
$$= \mathbb{E}[g(X_{T-s}) \int_{s}^{t} \left\{ \langle b(T-u, X_{T-u}) - \nabla log p_{T-u}(X_{T-u}), \nabla f(X_{T-u}) - \frac{1}{2}\Delta f(X_{T-u}) \right\} du] \tag{19}$$

En remplaçant dans $\mathbb{E}[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f)]$, on obtient que $\mathbb{E}[g(Y_s)(M_t^f - M_s^f)] = 0$ pour tout $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc par 2), $(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $(Y_t)_{t\in[0,T]}$-martingale.

4) Par définition, $h^{g,t}(s,x) = \mathbb{E}[g(X_t)|X_s = x] = \int_{\mathbb{R}} g(X) p_{t|s}(X|x) dX$.

Comme g est à support compact et $(C)^\infty$ et que A est un compact et p_u est $(C)^\infty$, $s, t, x_s, x_t \to g(x_t)p_{t|s}(x_t|x_s) \in \mathscr{C}^\infty(A \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est $(C)^\infty$ et à support compact. Ses dérivées sont donc toutes continues et à support compact et donc bornées et on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour les dérivées à tout ordre sous le signe intégrale dans l'expression plus haut, ce qui permet de montrer que $h^{g,t} \in \mathscr{C}^\infty([0,t] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

5) En utilisant la formule d'Itô :

$$\mathbb{E}[\psi(X_s)\left\{h^{g,t}(u, X_u) - h^{g,t}(s, X_s)\right\}] = \mathbb{E}[\psi(X_s)\mathbb{E}[h^{g,t}(u, X_u) - h^{g,t}(s, X_s)|X_s]] \tag{20}$$
$$= \mathbb{E}[\psi(X_s) \int_s^u \left\{ \partial_w h^{g,t}(w, X_w) + b(w, X_w), \nabla h^{g,t}(w, X_w) + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(w, X_w) \right\} dw] \tag{21}$$

d'où l'égalité demandée.

6) On peut utiliser une suite de fonctions comme dans la question 2) pour obtenir que :

$$\mathbb{E}[h^{g,t}(u, X_u) - h^{g,t}(s, X_s)|X_s] = \mathbb{E}[\int_s^u \left\{ \partial_w h^{g,t}(w, X_w) + b(w, X_w), \nabla h^{g,t}(w, X_w) + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(w, X_w) \right\} dw|X_s] \tag{22}$$

Mais $\mathbb{E}[h^{g,t}(u, X_u)|X_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X_t)|X_u]|X_s] = \mathbb{E}[g(X_t)|X_s] = h^{g,t}(s, X_s)$.

Donc $\mathbb{E}[h^{g,t}(u, X_u) - h^{g,t}(s, X_s)|X_s] = 0$ et en dérivant par rapport à u (possible car tout est dérivable, majoré et à support compact donc le théorème de convergence dominée s'applique) :

$$0 = \partial_u \mathbb{E}[\int_s^u \left\{ \partial_w h^{g,t}(w, X_w) + b(w, X_w), \nabla h^{g,t}(w, X_w) + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(w, X_w) \right\} dw|X_s] \tag{23}$$
$$= \mathbb{E}[\partial_u \int_s^u \left\{ \partial_w h^{g,t}(w, X_w) + b(w, X_w), \nabla h^{g,t}(w, X_w) + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(w, X_w) \right\} dw|X_s] \tag{24}$$
$$= \mathbb{E}[\partial_u h^{g,t}(u, X_u) + b(u, X_u), \nabla h^{g,t}(u, X_u) + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(u, X_u)|X_s] \tag{25}$$

En évaluant cette égalité pour $u = s$, et car connaissant X_s c'est une constante et l'espérance disparaît, on a bien :

$$\partial_s h^{g,t}(s, x) + b(s, x), \nabla h^{g,t}(s, x) + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(s, x) = 0 \tag{26}$$

7) En appliquant la formule d'Itô à $\varphi = f \cdot h^{g,t}$:

$$\mathbb{E}[g(X_t)f(X_t) - g(X_t)f(X_s)] \tag{27}$$
$$= \mathbb{E}[g(X_t)\mathbb{E}[f(X_t) - f(X_s)|X_t]] \tag{28}$$
$$= \mathbb{E}[g(X_t)\mathbb{E}[-\int_t^s \left\{\partial_u(f \cdot h^{g,t})(u, X_u) + \langle b(u, X_u), \nabla(h^{g,t}(u,\cdot)f)(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta(h^{g,t}(u,\cdot)f)\right\} du|X_t]] \tag{29}$$
$$= \mathbb{E}[g(X_t)\int_t^s \left\{f(X_u)\partial_u h^{g,t}(u, X_u) + \langle b(u, X_u), \nabla(h^{g,t}(u,\cdot)f)(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta(h^{g,t}(u,\cdot)f)\right\} du] \tag{30}$$

8) Il suffit de voir que $\nabla(h^{g,t}(u,\cdot)f) = h^{g,t}(u,\cdot)\nabla f + f\nabla h^{g,t}(u,\cdot)$ et $\Delta(h^{g,t}(u,\cdot)f) = h^{g,t} \cdot \Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h^{g,t}(u,\cdot)\rangle + f \cdot \Delta h^{g,t}(u,\cdot)$.

Alors en se servant du résultat de la 6), i.e. $\partial_s h^{g,t}(s,x) + \langle b(s,x), \nabla h^{g,t}(s,x)\rangle + \frac{1}{2}\Delta h^{g,t}(s,x) = 0$ et en développant les termes dans l'expression obtenue en 7), on obtient bien :

$$\mathbb{E}[g(X_t)f(X_t) - g(X_t)f(X_s)] \tag{31}$$
$$= \mathbb{E}[\int_s^t \{h^{g,t}(u, X_u)\langle b(u, X_u), \nabla f(X_u)\rangle + h^{g,t}(u, X_u)\frac{1}{2}\Delta f(X_u) + \tag{32}$$
$$\langle \nabla f(X_u), \nabla h^{g,t}(u, X_u)\rangle\}du] \tag{33}$$

9) En utilisant la formule rappelée à la fin de l'introduction du sujet avec $g = h^{g,t}$ et $F = p_u \cdot \nabla f$:

$$\mathbb{E}[\int_s^t \langle \nabla f(X_u), \nabla h^{g,t}(u, X_u)\rangle du] = \int_{\mathbb{R}^d}\int_s^t \langle \nabla f(X_u), \nabla h^{g,t}(u, X_u)\rangle p_u(X) du dX \tag{34}$$
$$= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(X_u) \cdot p_u(X), \nabla h^{g,t}(u, X_u)\rangle dX du \tag{35}$$
$$= -\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} h^{g,t}(u, X) div(p_u \cdot \nabla f)(X) dX du \tag{36}$$
$$= -\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} h^{g,t}(u, X)\{\Delta f(X)p_u(X) + \langle \nabla p_u(X), \nabla f(X)\rangle\} dX du \tag{37}$$
$$= -\int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} h^{g,t}(u, X)\{\Delta f(X) + \langle \frac{\nabla p_u(X)}{p_u(X)}, \nabla f(X)\rangle\} p_u(X) dX du \tag{38}$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_s^t h^{g,t}(u, X)\{\Delta f(X)p_u(X) + \langle \nabla log p_u(X), \nabla f(X)\rangle\} p_u(X) du dX \tag{39}$$
$$= -\mathbb{E}[\int_s^t h^{g,t}(u, X_u)\{\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle\} du] \tag{40}$$

10) En remplaçant, dans l'expression obtenue en 8), l'expression obtenue en 9), on obtient :

$$\mathbb{E}[g(X_t)f(X_t) - g(X_t)f(X_s)] \tag{41}$$

$$= \mathbb{E}[\int_s^t \{h^{g,t}(u,X_u)\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + h^{g,t}(u,X_u)\frac{1}{2}\Delta f(X_u) - h^{g,t}(u,X_u)[\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle]\}du \tag{42}$$

$$= \mathbb{E}[\int_s^t \{\mathbb{E}[g(X_t)|X_u]\{\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta f(X_u) - h\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle\}du] \tag{43}$$

$$= \mathbb{E}[\int_s^t \mathbb{E}[g(X_t)\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta f(X_u) - h\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle|X_u]du] \tag{44}$$

$$= \int_s^t \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X_t)\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta f(X_u) - h\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle|X_u]]du \tag{45}$$

$$= \int_s^t \mathbb{E}[g(X_t)\{\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta f(X_u) - h\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle\}]du \tag{46}$$

$$= \mathbb{E}[g(X_t)\int_s^t \{\langle b(u,X_u), \nabla f(X_u)\rangle + \frac{1}{2}\Delta f(X_u) - h\Delta f(X_u) + \langle \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\rangle\}du] \tag{47}$$

d'où $\mathbb{E}[g(X_t)f(X_t) - g(X_t)f(X_s)] = \mathbb{E}[g(X_t)\int_s^t \{\langle b(u,X_u) - \nabla log p_u(X_u), \nabla f(X_u)\} - \frac{1}{2}\Delta f(X_u)]$.

Donc par 3), $(M_t^f)_{t\in[0,T]}$ est une $(Y_t)_{t\in[0,T]}$-martingale.