Théorie des matrices aléatoires, devoir maison 1

Guillaume Houry guillaume.houry@live.fr
Dorian Gailhard dorian.gailhard@telecom-paris.fr

June 27, 2023

1 Préliminaires

1) Soit $k \neq l$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kl}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial Re(X_{kl})} - i\frac{\partial Q_{ij}}{\partial Im(X_{kl})}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(Q_{ik}Q_{lj} + Q_{il}Q_{kj}) - \frac{i^2}{\sqrt{n}}(Q_{ik}Q_{lj} - Q_{il}Q_{kj})\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{ik}Q_{lj}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \overline{X_{kl}}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial Re(X_{kl})} + i\frac{\partial Q_{ij}}{\partial Im(X_{kl})}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(Q_{ik}Q_{lj} + Q_{il}Q_{kj}) + \frac{i^2}{\sqrt{n}}(Q_{ik}Q_{lj} - Q_{il}Q_{kj})\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{il}Q_{kj}.\end{aligned}$$

2) On a d'abord :

$$\mathbb{E}[X_{kl}\phi(X)] = \mathbb{E}[Re(X_{kl})\phi(X)] + i\mathbb{E}[Im(X_{kl})\phi(X)].$$

On peut ensuite voir ϕ comme une fonction des X_{kk}, $Re(X_{ij})$ et $Im(X_{ij})$ avec $j > i$ et où les $Re(X_{ij})$ et $Im(X_{ij})$ sont des gaussiennes centrées de variance $\frac{1}{2}$ (à cause du facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Alors en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Re(X_{kl})\phi(X)] = &\sum_{i=1}^{n} Cov(X_{ii}, Re(X_{kl}))\cdot\mathbb{E}\frac{\partial\phi(X)}{\partial Re(X_{kl})} + \sum_{j>i} Cov(Re(X_{ij}), Re(X_{kl}))\cdot\mathbb{E}\frac{\partial\phi(X)}{\partial Re(X_{kl})}\\ &+\sum_{j>i} Cov(Im(X_{ij}), Re(X_{kl}))\cdot\mathbb{E}\frac{\partial\phi(X)}{\partial Re(X_{kl})},\end{aligned}$$

puis

$$\mathbb{E}[Re(X_{kl})\phi(X)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\frac{\partial \phi(X)}{\partial Re(X_{kl})},$$

car les variables X_{ij}, sont iid, et $Re(X_{kl})$ est indépendant de $Im(X_{kl})$: par conséquent, la covariance vaut 0 partout sauf $Cov(Re(X_{kl}), Re(X_{kl}))$ qui vaut $\frac{1}{2}$. On a enfin, en appliquant la formule symmétrique pour $\mathbb{E}[Im(X_{kl})\phi(X)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{kl}\phi(X)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\frac{\partial \phi(X)}{\partial Re(X_{kl})} + \frac{i}{2}\mathbb{E}\frac{\partial \phi(X)}{\partial Im(X_{kl})} \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \phi(X)}{\partial Re(X_{kl})} + \frac{i}{2}\frac{\partial \phi(X)}{\partial Im(X_{kl})}\right] \\
&= \mathbb{E}\frac{\partial \phi(X)}{\partial \overline{X_{kl}}}.
\end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$\mathbb{E}[\overline{X_{kl}}\phi(X)] = \mathbb{E}\frac{\partial \phi(X)}{\partial X_{kl}}.$$

3) On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 - 2Im\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right)\right)
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 + 2Im\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant la somme, on obtient:

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2\right).$$

4) Les variables X_{kk}, $Re(X_{kl})$, $Im(X_{kl})$ sont toutes indépendantes (pour $k < l$). Dans l'inégalité de Poincaré, seuls les termes correspondant à une variance sont donc non nuls, ce qui donne :

$$\begin{aligned} var(\phi(X)) \leq & \sum_{k=1}^{n} Cov(X_{kk}, X_{kk}) \cdot \mathbb{E}\frac{\partial\phi(X)}{\partial X_{kk}}\overline{\frac{\partial\phi(X)}{\partial X_{kk}}} + \sum_{k<l} Cov(Re(X_{kl}), Re(X_{kl})) \cdot \mathbb{E}\frac{\partial\phi(X)}{\partial Re(X_{kl})}\overline{\frac{\partial\phi(X)}{\partial Re(X_{kl})}} \\ & + \sum_{k<l} Cov(Im(X_{kl}), Im(X_{kl})) \cdot \mathbb{E}\frac{\partial\phi(X)}{\partial Im(X_{kl})}\overline{\frac{\partial\phi(X)}{\partial Im(X_{kl})}}; \end{aligned}$$

donc

$$var(\phi(X)) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\frac{\partial\phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\phi(X)}{\partial Re(X_{kl})}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\phi(X)}{\partial Im(X_{kl})}\right|^2.$$

Finalement, en se servant de l'identité de la question 3) :

$$var(\phi(X)) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\frac{\partial\phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\phi(X)}{\partial X_{kl}}\right|^2 + \sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\phi(X)}{\partial \overline{X_{kl}}}\right|^2.$$

5) $g_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_{ii}$, donc:

$$\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial X_{kk}} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Q_{ik}Q_{ki} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}[Q^2]_{kk}.$$

De même, en utilisant les formules de la question 1),

$$\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kl}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial X_{kl}} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Q_{ik}Q_{li} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}[Q^2]_{lk}$$

et

$$\frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{kl}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}}{\partial \overline{X_{kl}}} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Q_{il}Q_{ki} = -\frac{1}{n\sqrt{n}}[Q^2]_{kl}.$$

6) g_n est une fonction polynomiale en les coefficients de $\frac{X}{\sqrt{n}} - zI_n$ (on peut le voir avec la formule de la comatrice) donc elle vérifie les hypothèses de la fonction ϕ plus haut. On peut donc appliquer:

$$
\begin{aligned}
var(g_n(X)) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kl}}\right|^2 + \sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{kl}}}\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|[Q^2]_{kk}\right|^2 + \sum_{k<l}\mathbb{E}\left|[Q^2]_{lk}\right|^2 + \sum_{k<l}\mathbb{E}\left|[Q^2]_{kl}\right|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Q^2]_{kk}\overline{[Q^2]_{kk}} + \sum_{k<l}\mathbb{E}[Q^2]_{lk}\overline{[Q^2]_{lk}} + \sum_{k<l}\mathbb{E}[Q^2]_{kl}\overline{[Q^2]_{kl}}\right] \\
&\leq \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Q(z)^2]_{kk}[Q(\overline{z})^2]_{kk} + \sum_{k<l}\mathbb{E}[Q^2]_{lk}[Q(\overline{z})^2]_{lk} + \sum_{k<l}\mathbb{E}[Q(z)^2]_{kl}[Q(\overline{z})^2]_{kl}\right] \\
&\leq \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[\mathbb{E}[Q(z)^2]_{kl}[Q(\overline{z})^2]_{lk}\right) \\
&\leq \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[Q(z)^2Q(\overline{z})^2]_{kk}\right) \\
&\leq \frac{1}{n^3}\mathbb{E}Trace(Q(z)^2Q(\overline{z})^2).
\end{aligned}
$$

Reste à montrer que $\mathbb{E}Trace(Q(z)^2Q(\overline{z})^2) = \mathcal{O}_z(n)$ pour conclure.

Pour cela, on remarque que Q^*Q est symmétrique positive, et donc:

$$
\begin{aligned}
|Trace((QQ^*)(Q^*Q))| &\leq \|QQ^*\|Tr(Q^*Q) \\
&\leq \|QQ^*\|Tr(QQ^*) \\
&\leq n\|QQ^*\|^2.
\end{aligned}
$$

Or on sait que les valeurs propres de QQ^* sont majorées par $Im(z)^{-2}$, donc sa norme spectrale l'est également. Par conséquent:

$$|Trace((QQ^*)^2)| \leq \frac{n}{Im(z)^4} = \mathcal{O}_z(n),$$

puis

$$var(g_n(X)) \leq \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7) On va utiliser le théorème de Herglotz pour montrer que $g(z) = -\frac{1}{z+f(z)}$ est une transformée de Stieltjes.

Tout d'abord, prenons $z \in \mathbb{C}^+$ et écrivons $g(z) = -\frac{\overline{z}+\overline{f(z)}}{|z+f(z)|^2}$. Vu que $Im(z) > 0$ et $Im(f(z)) > 0$ (car f est une TS), on a bien $Im(g(z)) > 0$.

Ensuite, g est bien analytique sur $\mathbb{C}^+$ comme inverse d'une fonction analytique sur $\mathbb{C}^+$ qui ne s'annule pas (en effet, $z + f(z) \neq 0$ sur $\mathbb{C}^+$ car $Im(z + f(z)) > 0$).

Enfin, pour $z \in \mathbb{C}^+$:

$$|z + f(z)| \geq |Im(z + f(z))| \geq Im(z),$$

car $Im(z) > 0$ et $Im(f(z)) > 0$. On en déduit que :

$$|g(z)| \leq \frac{1}{Im(z)}.$$

g est donc la TS d'une mesure. De plus, pour $y \in \mathbb{R}$:

$$-iyg(iy) = \frac{iy}{iy + f(iy)} = \left(1 + \frac{f(iy)}{iy}\right)^{-1}.$$

Or, f est une TS donc il existe M tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, $|f(z)| \leq \frac{M}{Im(z)}$. Alors:

$$|\frac{f(iy)}{iy}| \leq \frac{M}{y^2} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0,$$

et $\lim_{y \to +\infty} -iyg(iy) = 1$. g est donc la TS d'une mesure de probabilité. De plus, comme montré ci-dessus:

$$|z + f(z)|^{-1} \leq \frac{1}{Im(z)}.$$

8) On sait que les solutions du trinôme $Z^2 + zZ + 1 = \delta$ sont de la forme $\frac{-z+u}{2}$, où u est une racine carrée du discriminant $z^2 - 4(1 - \delta)$. Soit u_δ l'unique de ces racines appartenant à $\mathbb{C}^+$, et $u = u_0$. On a alors:

$$|g_\delta(z) - g_{sc}(z)| = \frac{1}{2}|u - u_\delta|.$$

Soit h la détermination de la racine carrée sur le demi-plan $\mathbb{C}^+$ qui prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^+$. On a donc $u_\delta = h(z^2 - 4 + 4\delta)$, et $u = h(z^2 - 4)$. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{C}^+$ tel que $xy \in \mathbb{C}^+$, on a $h(x)h(y) = h(xy)$. Cela permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |u - u_\delta| &= \left|h(z^2 - 4) - h(z^2 - 4 + 4\delta)\right| \\ &= \left|h(z^2 - 4)\right| \left|1 - h\left(1 - \frac{4\delta}{z^2 - 4}\right)\right|. \end{aligned}$$

h étant analytique, elle est localement lipschitzienne; on dispose donc d'un $C > 0$ tel que si $|\frac{4\delta}{z^2-4}|$ est suffisamment petit:

$$\left|1 - h(1 - \frac{4\delta}{z^2 - 4})\right| \leq C\left|\frac{4\delta}{z^2 - 4}\right| \leq C\left|\frac{4\delta}{Im(z)^2}\right|.$$

Enfin, $|h(z^2-4)| = \sqrt{|z^2-4|}$ qui est asymptotiquement borné par $|z|$ à l'infini.

On en déduit donc que $|g_\delta(z) - g_{sc}(z)| = \mathcal{O}_z(\delta)$.

2 Convergence de la mesure spectrale

9) On a

$$I_n = Q^{-1}Q = \left(\frac{X}{\sqrt{n}} - zI_n\right)Q = \frac{1}{\sqrt{n}}XQ - zQ.$$

En évaluant cette égalité aux coordonnées (i, j) :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_{ik}Q_{kj} - zQ_{ij} = \delta_{ij}.$$

Enfin, en prenant l'espérance et en sortant le terme $k = i$ de la somme :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}X_{ii}Q_{ij} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\neq i}\mathbb{E}(X_{ik}Q_{kj}) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}.$$

10) En utilisant les formules de la question 2)

$$\mathbb{E}X_{ii}Q_{ij} = \mathbb{E}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \overline{X_{ii}}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}Q_{ii}Q_{ij}$$

et

$$\mathbb{E}X_{ik}Q_{kj} = \mathbb{E}\frac{\partial Q_{kj}}{\partial \overline{X_{ik}}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}Q_{ki}Q_{kj}$$

l'égalité de la question précédente devient :

$$-\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(Q_{ij}\sum_{k=1}^{n} Q_{kk}\right) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}.$$

11) On a

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(Q_{ij}\sum_{k=1}^{n} Q_{kk}\right) + z\mathbb{E}Q_{ij} + \delta_{ij} = 0.$$

En sommant sur i avec $j = i$ et en divisant par n :

$$\mathbb{E}[g_n(z)^2] + z\mathbb{E}g_n(z) + 1 = 0,$$

car $g_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_{kk}$.

Ensuite, la formule de Huygens donne :

$$var(g_n(z)) = \mathbb{E}[g_n(z)^2] - \mathbb{E}[g_n(z)]^2$$

donc

$$\mathbb{E}[g_n(z)]^2 + z\mathbb{E}g_n(z) + 1 = -var(g_n(z)) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

12) Il s'agit d'une application directe de la question 8) : vu que

$$\mathbb{E}[g_n(z)]^2 + z\mathbb{E}g_n(z) + 1 = -var(g_n(z)),$$

et $\mathbb{E}[g_n(z)] \in \mathbb{C}^+$, on obtient :

$$\mathbb{E}[g_n(z)] - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z(var(g_n(z))) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

13) Soit $z \in \mathbb{C}^+$. D'après la question précédente, $\mathbb{E}[g_n(z)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_{sc}(z)$. Or, on sait également que, pour $n \in \mathbb{N}$, si on fixe $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|g_n(z) - \mathbb{E}[g_n(z)]| \leq \varepsilon) \leq \frac{var(g_n(z))}{\varepsilon^2} = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc les $\mathbb{P}(|g_n(z) - \mathbb{E}[g_n(z)]| > \varepsilon)$ sont de somme finie. Par Borel-Cantelli, la limite supérieure de ces événements est de probabilité nulle, et donc:

$$\mathbb{P}(\exists N, \forall n \geq N, |g_n(z) - \mathbb{E}[g_n(z)]| \leq \varepsilon) = 1.$$

L'intersection dénombrable d'événement presque sûrs étant presque sûre, on obtient, en prenant $\varepsilon = 1/m$ pour chaque $m \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{P}\left(\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists N, \forall n \geq N, |g_n(z) - \mathbb{E}[g_n(z)]| \leq \frac{1}{m}\right) = 1,$$

ce qui implique que $g_n(z) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[g_n(z)]$. On obtient donc que $g_n(z) \xrightarrow{p.s.} g_{sc}(z)$.

Soit D un ensemble dénombrable de $\mathbb{C}^+$ contenant un point d'accumulation. L'intersection d'un nombre dénombrable d'événements presque sûrs étant presque sûre, alors presque sûrement, la fonction g_n converge ponctuellement vers g_{sc} sur D. Or, les g_n sont les TS des mesures spectrales L_n, et g_{sc} est la TS de $\mathbb{P}_{sc}$ (qui est une mesure de probabilité). Le théoràme de convergence des TS nous assure donc que presque sûrement:

$$L_n \xrightarrow{etr.} \mathbb{P}_{sc}$$

qui est exactement la convergence en distribution recherchée.

3 Le théorème de Wigner isotrope

14) $u_n^* Q(z) v_n$ est polynomiale en les X_{ij} donc vérifie les conditions pour la majoration de la question 4). On a alors (en notant $u_n = u$ et $v_n = v$ pour simplifier les notations) :

$$var(u^*Q(z)v) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\frac{\partial u^*Q(z)v}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \sum_{k<l} \mathbb{E}\left|\frac{\partial u^*Q(z)v}{\partial X_{kl}}\right|^2 + \sum_{k<l} \mathbb{E}\left|\frac{\partial u^*Q(z)v}{\partial \overline{X_{kl}}}\right|^2.$$

Or:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*Q(z)v}{\partial X_{kk}} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i \frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kk}} v_j \\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i Q_{ik} Q_{kj} v_j \\
&= -\frac{1}{\sqrt{n}} (u^*Q)_k (Qv)_k.
\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial u^*Q(z)v}{\partial X_{kl}} = -\frac{1}{\sqrt{n}} (u^*Q)_k (Qv)_l$$

et

$$\frac{\partial u^*Q(z)v}{\partial X_{\overline{kl}}} = -\frac{1}{\sqrt{n}} (u^*Q)_l (Qv)_k.$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
var(u^*Q(z)v) &\leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} |(u^*Q)_k|^2 |(Qv)_k|^2 + \sum_{k<l} |(u^*Q)_k|^2 |(Qv)_l|^2 + \sum_{k<l} |(u^*Q)_l|^2 |(Qv)_k|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} |(u^*Q)_k|^2 \sum_{l=1}^{n} |(Qv)_l|^2\right] \\
&\leq \frac{1}{n} \|u^*Q\|^2 \|Qv\|^2.
\end{aligned}$$

Or, on sait par la formule de Ward que $\|Q\|_{op} \leq \frac{1}{Im(z)}$. Par conséquent, $\|u^*Q\| \leq \|Q\|_{op}\|u\| \leq \frac{\|u\|}{Im(z)}$ et $\|Qv\| \leq \frac{\|v\|}{Im(z)}$. De plus, les $\|u_n\|$ et $\|v_n\|$ sont uniformément bornées. Par conséquent, les normes $\|u^*Q\|$ et $\|Qv\|$ sont $\mathcal{O}_z(1)$. On en conclut :

$$var(u^*Q(z)v) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n}\right).$$

15) En partant de l'identité de la question 10) :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(Q_{ij}\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}) + z\mathbb{E}Q_{ij} + \delta_{ij} = 0$$

et en multipliant à gauche par u_{ni}^* et à droite par v_{nj} puis en sommant sur i et j, on obtient l'équation suivante:

$$\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n g_n(z)] + z\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] + \langle u_n, v_n \rangle = 0.$$

Or, l'espérance d'un produit est lié au produit des espérances par la covariance :

$$\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n \cdot g_n(z)] - \mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n]\mathbb{E}g_n(z) = Cov(u_n^* Q(z) v_n, g_n(z)).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous assure que:

$$Cov\,(u_n^* Q(z) v_n, g_n(z)) \leq \sqrt{Var\,(u_n^* Q(z) v_n)\; Var\,(g_n(z))}.$$

Les estimations des questions 6) et 14) nous assurent alors que cette covariance est $\mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, ce qui permet de conclure:

$$\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n]\mathbb{E}g_n(z) + z\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] + \langle u_n, v_n \rangle = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

16) En multipliant l'équation de la question précédente par $\mathbb{E}g_n(z)$, on obtient:

$$\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n](\mathbb{E}[g_n(z)]^2 + z\mathbb{E}g_n(z)) + \langle u_n, v_n \rangle \mathbb{E}[g_n(z)] = \mathcal{O}_z\left(\frac{\mathbb{E}g_n(z)}{n\sqrt{n}}\right).$$

Or, d'après la question 11), on sait que $\mathbb{E}[g_n(z)]^2 + z\mathbb{E}g_n(z) = -1 + \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi:

$$-\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] + \langle u_n, v_n \rangle \mathbb{E}[g_n(z)] = \mathcal{O}_z\left(\frac{\mathbb{E}g_n(z)}{n\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}_z\left(\frac{\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n]}{n^2}\right).$$

De plus, $g_n(z)$ étant une TS, son module est $\mathcal{O}_z(1)$; par conséquent, $\mathbb{E}g_n(z) = \mathcal{O}_z(1)$. De plus, $|u_n^* Q(z) v_n| \leq \|Q(z)\|_{op}\|u_n\|\|v_n\|$ avec $\|Q(z)\|_{op} = \mathcal{O}_z(1)$ et $\|u_n\|$, $\|v_n\|$ uniformément bornés; donc de même, $|u_n^* Q(z) v_n| = \mathcal{O}_z(1)$. Finalement, on peut conclure:

$$\langle u_n, v_n \rangle \mathbb{E}[g_n(z)] - \mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

17) Tout d'abord, remarquons que d'après les questions 12) et 16):

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] - \langle u_n, v_n\rangle g_{sc}(z)| &\leq |\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] - \langle u_n, v_n\rangle \mathbb{E} g_n(z)| + |\langle u_n, v_n\rangle||\mathbb{E} g_n(z) - g_{sc}(z)| \\ &= \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),\end{aligned}$$

car $|\langle u_n, v_n\rangle| = \mathcal{O}_z(1)$ (les normes des u_n et v_n étant uniformément bornées). Ainsi:

$$\mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n] - \langle u_n, v_n\rangle g_{sc}(z) \to 0.$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Markov, pour un $\varepsilon > 0$ fixé:

$$\mathbb{P}(|u_n^* Q(z) v_n - \mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n]| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^4} \mathbb{E}|u_n^* Q(z) v_n - \mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n]|^4 = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La famille étant sommable en n, on peut appliquer le même argument que la question 13) pour montrer que $u_n^* Q(z) v_n \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[u_n^* Q(z) v_n]$. Cela permet de prouver que :

$$u_n^* Q(z) v_n - \langle u_n, v_n\rangle g_{sc}(z) \xrightarrow{p.s.} 0.$$