Correction du CC octobre 2020

- Ex 1 -

Calculs de O : la plupart du temps → Calcul de limites !
Et lemme 3 du cours.

ⓐ $\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n^2/2 + 10n}{3n^2 - 2n}$ polynômes de même degré
limite → rapport des coef dominants.

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\text{ou } \frac{\frac{n^2}{2} + 10n}{3n^2 - 2n} = \frac{n^2\left(\frac{1}{2} + \frac{10}{n}\right)}{n^2\left(3 - \frac{2}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \overbrace{\frac{10}{n}}^{\to 0}}{3 - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{6} \right)$$

Du coup (lemme 3 et 2) $\boxed{f(n) = O(g(n)) \text{ et } g(n) = O(f(n))}$

ⓑ $\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $\left(\frac{\text{"polynome"}}{\text{présence de log}} : \text{lemme 4} \right)$

Donc $\boxed{f(n) \neq O(g(n)) \text{ et } g(n) = O(f(n))}$

ⓒ $g(n) = 2^{1+\log n} = 2 \times 2^{\log n} = 2.n$

$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2n^2}{2n} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ $\boxed{\begin{array}{c} f(n) \neq O(g(n)) \\ \text{et } g(n) = O(f(n)) \end{array}}$

- Exercice 2 -

ALGO 1

```
L1  Pour i de 1 à n-1
L2     Pour j de 0 à i
L3        <op>
L4  Pour i de 0 à n-1
L5     <op>
```

L_2 exécute $i+1$ fois la ligne 3 qui prend un tps constant.

tps de la L_2 : $c.(i+1)$,

ou on peut majorer par $c.n$,

En tout la $L1$:

soit $\sum_{i=1}^{n-1} c.(i+1) = c\,(n-1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = O(n^2)$

soit $(n-1).c.n. \le c.n^2 = O(n^2).$

L_4 et L_5 : $O(n)$ en tout

ALGO1 : $O(n^2) + O(n) = \boxed{O(n^2)}$

ALGO 2

```
<op>
tant que n>1 faire
   n <- n/3
<op>
```

Complexité : proportionnelle aux nbre de boucle de "tant que".

Combien de fois diviser n par 3 pour avoir une valeur ≤ 1 ? :

$$\frac{n}{3^k} \le 1 \qquad n \le 3^k \qquad \log n \le \log 3^k = k \log 3$$

$$k \ge \frac{\log n}{\log 3}$$

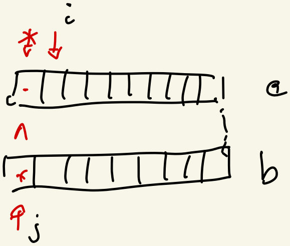
On aura cste $\times \log n$ boucles de "tant que" $\rightarrow \boxed{O(\log n)}$.

- Ex 3 -

(a)

Pour $i = 1$ à n
  Pour $j = 1$ à n
    si $b_i = e_j$ retourner (i,j)
Retourner FAUX.

(b)



$i = 1$, $j = 1$;
Tant que ($i \leq n$ et $j \leq n$)
  si ($e_i < b_j$) $i{+}{+}$;
  si ($e_i > b_j$) $j{+}{+}$;
  si ($e_i = b_j$) retourner (i,j)
retourner FAUX;

A chaque tour de tant que : i ou j augmente
c.a.d $i+j$ augmente.
$i+j$ va de 2 à au plus $2n$

Au plus $2n$ tours de "tant que" $\rightarrow O(n)$.

(c) Algo de tri + algo du (b)

- Ex 4 -

(1) (i) Considérons une solution optimale de taille de vêtements $(o_1, o_2, \dots, o_p)$ rangée dans l'ordre $\nearrow$.

Si $o_1 \neq v_1$ alors comme $v_1 \leq o_1$ (v_1 est la + petite taille de vêtement) $(v_1, o_2, \dots, o_p)$ est aussi une solution à p vêtements, donc optimale.

(ii) Considérons une solution optimale $(v_1, o_2, \dots, o_p)$.

Si $(o_2, \dots o_p)$ n'est pas une solution optimale au pb sur $(V_2, \dots, V_n)$ pour une armoire de taille $L - v_1$, alors il existerait $(o_2', \dots, o_{p'}')$ avec $p' > p$, solution sur $(V_2, \dots, V_n)$ pour une armoire de taille $L - v_1$.

Si on ajoute v_1 : $(v_1, o_2', \dots, o_{p'}')$ est une solution sur $(V_1, \dots, V_n)$ pour une armoire de taille L.

Ce qui est exclu car on rangerait p' vêtements alors que $(v_1, o_2, \dots o_n)$ est optimale avec p vêtements.

(2) et (3) : Glouton générique (cf cours)

Comme (i) et (ii) sont vrais, on peut appliquer le théo de validité de Glouton Générique (théo 3 cours).

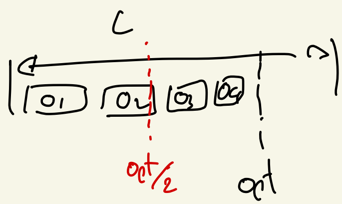
(4) tri : $O(n \log n)$ et glouton générique $O(n) \rightsquigarrow O(n \log n)$

⑤ $\begin{cases} L = 100 \\ v_1 = 10 \\ v_2 = 50 \\ v_3 = 50 \end{cases}$ Sol opt : V_2 et V_3

⑥ Même algo que ② mais en triant les vêtements par taille ↘.

⑦ $\begin{cases} L = 100 \\ V_1 = 50 \\ V_2 = 50 \\ V_3 = 60 \end{cases}$ Sol opt : V_1 et V_2

⑧



avec $o_1 \geq o_2 \geq \dots \geq o_p$

Si $o_1 \geq opt/2$ Glouton 2 va choisir O_1 ou plus grand.

Sinon $o_1 < opt/2$ et $\forall i = 1..p$ $o_i < opt/2$

Si la solution donnée par glouton2 ne remplit pas au moins $opt/2$ alors $\forall i = 1..p$ o_i rentre encore dans l'armoire : on peut stocker $(O_1, \dots, O_p)$ → contradiction.