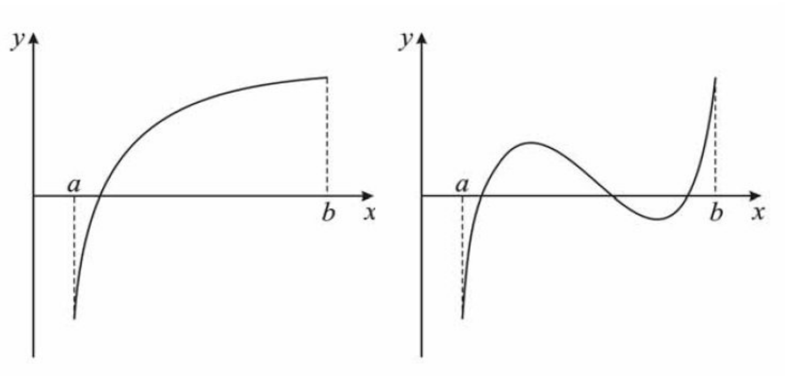
Politechnika Świętokrzyska Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki **Katedra Zastosowań Informatyki**	
Metody obliczeniowe *– laboratorium*	
Instrukcja laboratoryjna nr 7: Równania nieliniowe	*Opracował:* ***dr inż. Andrzej Kułakowski*** *Data:* ***12.05.2012 r.***

1. Wprowadzenie

W tej instrukcji przedstawiono przybliżone metody rozwiązywania równań nieliniowych, czyli metody szukania miejsc zerowych dla wybranego równania.

Przedział izolacji pierwiastka



Przebieg funkcji między punktami a i b

Przykład 1:

Sprawdzić czy podany przedział jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka równania F(x)=0.

$$F(x)=x^3-3\cdot x^2-2\cdot x+5 \qquad [a,b]=[1,2]$$

$$F(a)=F(1)=1^3-3\cdot 1^2-2\cdot 1+5=1$$

$$F(b)=F(2)=2^3-3\cdot 2^2-2\cdot 2+5=-3$$

Ponieważ: $F(1)\cdot F(2)<0$ to wiadomo, że pomiędzy punktami a i b znajduje się co najmniej jeden pierwiastek równania: $F(x)=0$

$$F'(x)=\frac{d\,F(x)}{d\,x}=3\cdot x^2-6\cdot x-2$$

$$F'(a)=F'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1-2=-5$$

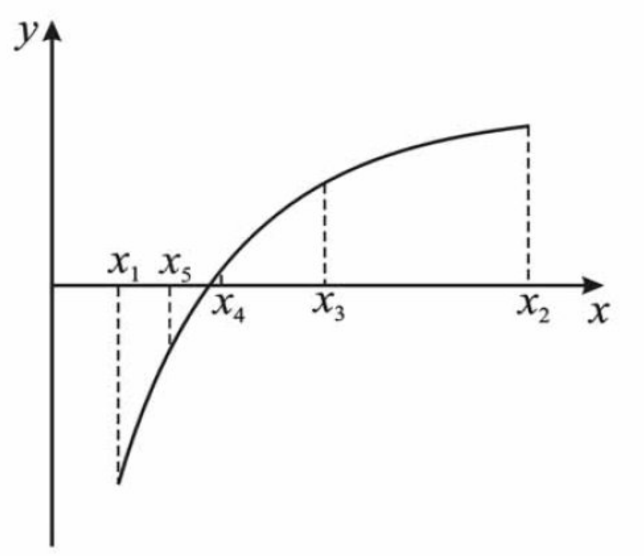
$$F'(b)=F'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2-2=-2$$

Ponieważ $sgn\,F'(x)=const$ dla x∈[a,b]

czyli funkcja ma stały znak w przedziale [a,b],

to przedział [a,b] jest przedziałem izolacji jednego pierwiastka równania *F(x)=0*

2. Metoda bisekcji



Algorytm:

$$\begin{cases} x_1=a, \quad x_2=b \quad i=1,2,...,m \\ x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=F(x), \quad y_1=F(x_1) \\ \textbf{jeżeli } y \cdot y_1>0 \textbf{ to } x_1=x \quad \textbf{w przeciwnym wypadku } x_2=x \end{cases}$$

<u>Przykład 2:</u>

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą bisekcji pierwiastek równania F(x)=0 z dokładnością ε.

$F(x)=x^3-3\cdot x^2-2\cdot x+5 \qquad [a,b]=[1,2]$

$x_1=a=1, \quad x_2=b=2, \quad \varepsilon=0.1$

$|F(x_i)|<\varepsilon$

1. iteracja

$x_1=1, \qquad x_2=2$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$$

$y=F(x)=F(1.5)= -1.375$

$|F(x_i)|>\varepsilon$

$y_1=F(x_1)=F(1)=1$

$y\cdot y_1= -1.375 <0 \Rightarrow \quad x_2=x=1.5$

2. iteracja

$x_1=1, \qquad x_2=1.5$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+1.5}{2}=1.25$$

y=F(x)=F(1.25)= -0.234

$|F(x_i)|>\varepsilon$

$y_1=F(x_1)=F(1)=1$

$y \cdot y_1$= -0.234 <0 => $x_2=x=1.25$

3. iteracja

$x_1=1$, $x_2=1.25$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+1.25}{2}=1.125$$

y=F(x)=F(1.125)= 0.376

$|F(x_i)|>\varepsilon$

$y_1=F(x_1)=F(1)=1$

$y \cdot y_1$= 0.376 >0 => $x_1=x=1.125$

4. iteracja

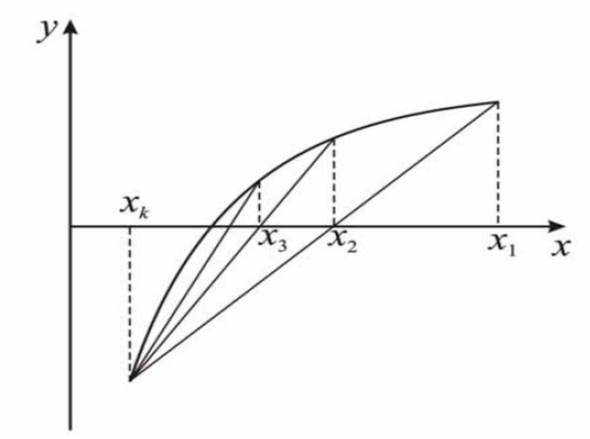
$x_1=1.125$, $x_2=1.25$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1.125+1.25}{2}=1.1875$$

y=F(x)=F(1.1875)= 0.069

$|F(x_i)|<\varepsilon$ Pierwiastek x=1.1875

3. Metoda cięciw (siecznych)



Przykład 3:

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą cięciw pierwiastek równania F(x)=0 z dokładnością ε.

$F(x)=x^3-3\cdot x^2-2\cdot x+5$ $\quad [a,b]=[1,2]$ $\quad$ ε=0.1

$F'(x)=3\cdot x^2-6\cdot x-2$

$F''(x)=6\cdot x-6$

Określenie punktu pęku cięciw x_k:

$z=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$

$F'(z)=F'(1.5)=-4.25$ $\quad F''(z)=F''(1.5)=\mathbf{3}$

$F'(z)\cdot F''(z)<0$ => $x_k=a=1$ $F(x_k)=1$

$x_1=b=2$ $F(x_1)=-3$

1. iteracja

$$x_2=x_1-F(x_1)\cdot\frac{x_k-x_1}{F(x_k)-F(x_1)}=1.25$$

$F(x_2)=F(1.25)=-0.234$

$|F(x_i)|>\varepsilon$

2. iteracja

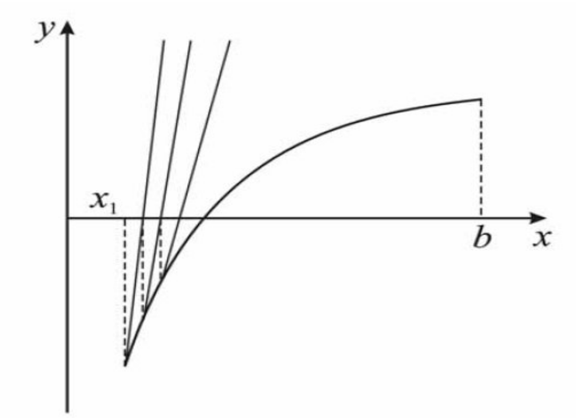
$$x_3=x_2-F(x_2)\cdot\frac{x_k-x_2}{F(x_k)-F(x_2)}=1.202$$

$F(x_3)=F(1.202)=-0.0017576$

$|F(x_i)|<\varepsilon$

Pierwiastek $x=x_3=1.202$

4. Metoda stycznych (Newtona)



Przykład 4:

Dla funkcji i przedziału izolacji z poprzedniego przykładu obliczyć metodą stycznych pierwiastek równania F(x)=0 z dokładnością ε.

$F(x)=x^3-3\cdot x^2-2\cdot x+5$ $[a,b]=[1,2]$ ε=0.1

$F^{'}(x)=3\cdot x^2-6\cdot x-2$

$F^{''}(x)=6\cdot x-6$

Określenie punktu początkowego x_1:

$z=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1.5$

$F^{'}(z)=F^{'}(1.5)=-4.25$

$F^{''}(z)=F^{''}(1.5)=\mathbf{3}$

$F^{'}(z)\cdot F^{''}(z)<0$ => $x_1=a=1$ $F(x_1)=1$ $F^{'}(x_1)=-5$

1. iteracja

$x_2=x_1-\frac{F(x_1)}{F^{'}(x_1)}=1.2$

$F(x_2)=F(1.2)= 0.008$

$|F(x_i)|<\varepsilon$ można przerwać obliczenia

$F^{'}(x_2)=F^{'}(1.2)=-4.88$

2. iteracja

$x_3=x_2-\frac{F(x_2)}{F^{'}(x_2)}=1.202$

$F(x_3)=F(1.202)= -0.0017576$

$|F(x_i)|<\varepsilon$

Pierwiastek $x=x_3=1.202$

5. Zadania do wykonania

a) dla podanego przez prowadzącego zajęcia przykładu, rozwiązać równanie nieliniowe.

b) dla podanego przez prowadzącego zajęcia zadania domowego:

- na podstawie wykresu funkcji ustalić przybliżony przedział zawierający pierwiastek równania,
- napisać program komputerowy rozwiązujący podane równanie nieliniowe przy pomocy wybranej metody.