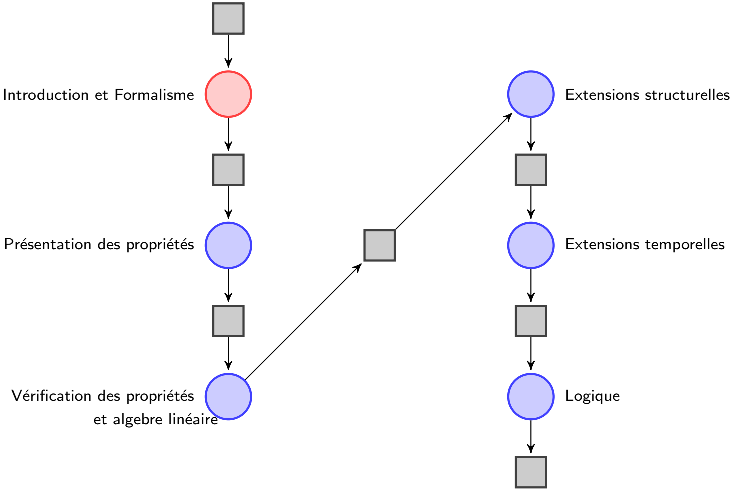
Réseaux de Petri: Formalisme

Pascal Racloz, Didier Buchs

Université de Genève

25 septembre 2017

Le formalisme



Les concepts introduits

- Définitions
- Représentation matricielle
- Fonctionnement
- Séquence de transitions
- Graphes de marquages

Définitions

Un réseau Place/Transition ou simplement réseau, est un quadruplet
R = (P, T, Entrée, Sortie)
où

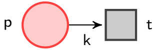
- P est un ensemble fini de *places*
- T est un ensemble fini de *transitions*
- Entrée est une application, Entrée : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *application d'incidence avant*
- Sortie est une application, Sortie : $PxT \rightarrow \mathbb{N}$, appelée *application d'incidence arrière*

Rappel sur les notations formelles :

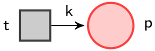
- Ensembles : ensembles, produit cartesien, power-set,
- Fonctions : domaine, co-domaine, fonctions partielles vs totales.
- Logique : prédicats, formules, quantificateurs.

(Cont'd)

- Vocabulaire : Soit p une place($p \in P$) et t une transition ($t \in T$),
  - p est une *place d'entrée* de t si k=Entrée$(p, t) > 0$:

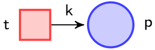


  - p est une *place de sortie* de t si k=Sortie$(p, t) > 0$:

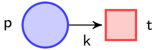


TRANSITIONS :

  - t est une *transition d'entrée* de p si k=Sortie$(p, t) > 0$:



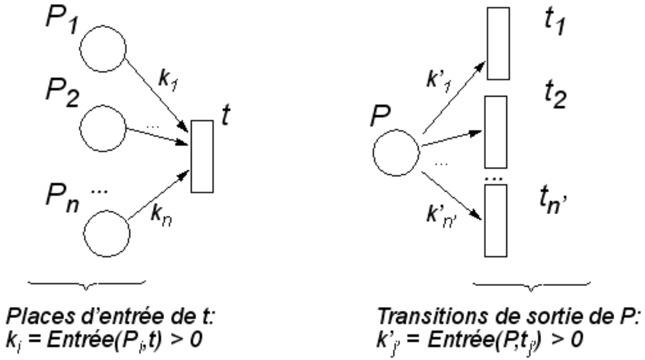
  - t est une *transition de sortie* de p si k=Entrée$(p, t) > 0$:



k ,k',l,l' sont les valuations des arcs

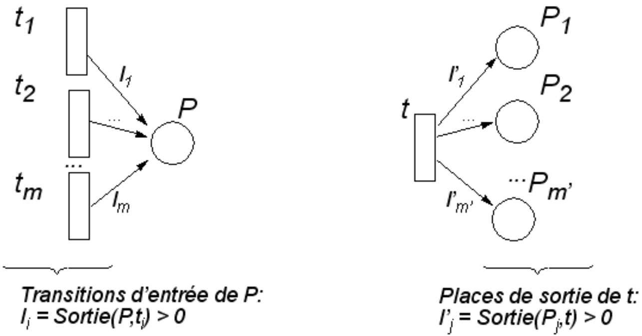
Entrée

Application d'incidence avant



Sortie

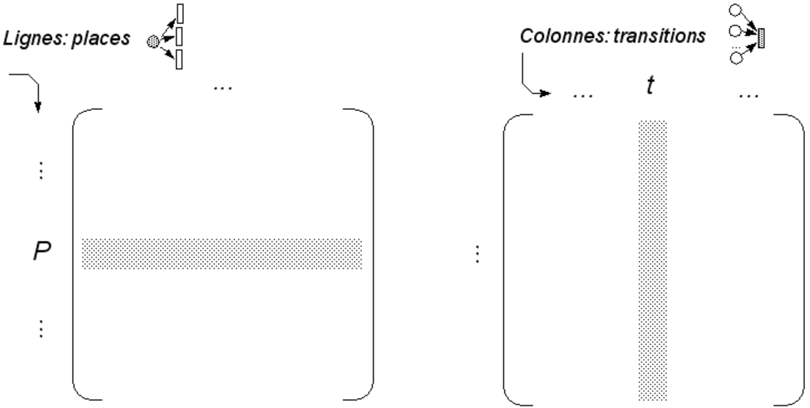
Application d'incidence arrière



(Contd)

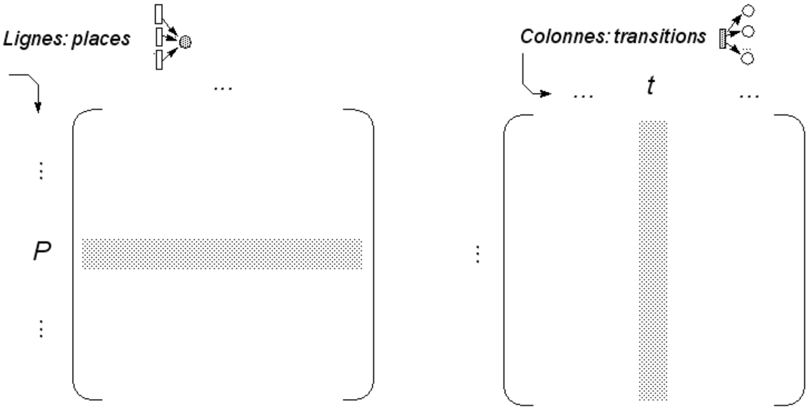
- Vers une représentation matricielle

Entrée

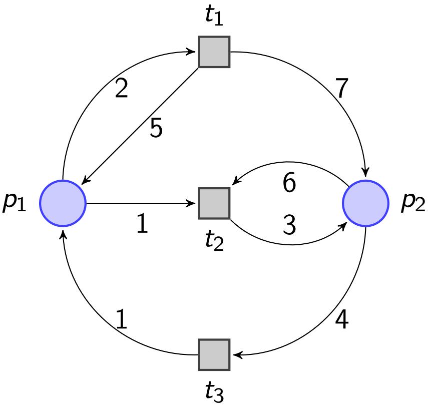


- Vers une représentation matricielle

Sortie

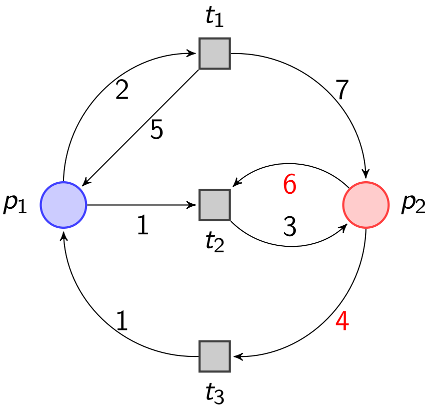


Représentation matricielle



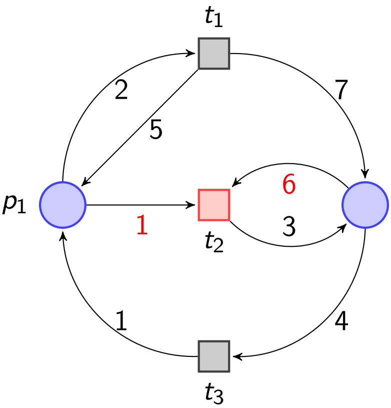
$$\begin{array}{cc} \textit{Entree} & \textit{Sortie} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Représentation matricielle



Entree

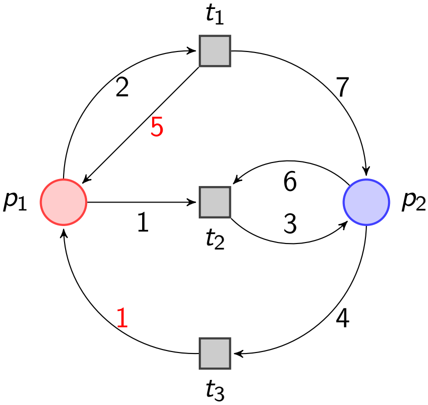
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ \color{red}{p_2} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{6} & \color{red}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

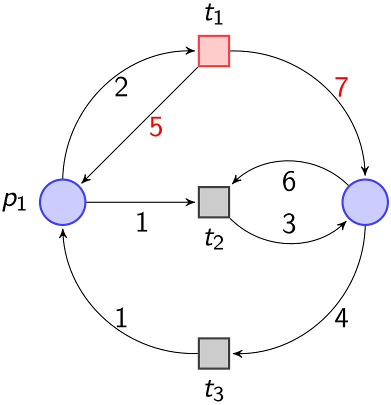


Entree

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & \color{red}{t_2} & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & \color{red}{6} & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Représentation matricielle





Sortie

$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sortie

$$\begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice

- Représentation graphique d'un réseau

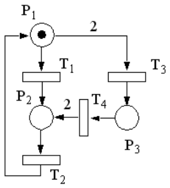
Construire le graphe du réseau décrit par les fonctions d'Entrée et de Sortie suivantes :

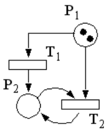
$$\text{Entrée} \quad \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Sortie} \quad \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Représentation graphique d'un réseau

Donner les matrices d'incidence pour les réseaux ci-dessous





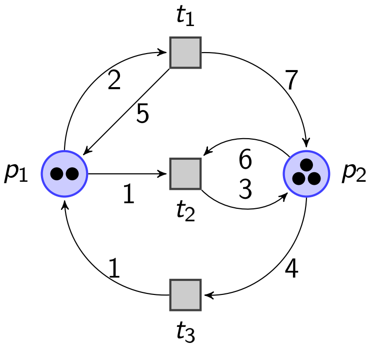
Posent-ils des problèmes ?

Marquage

Le marquage d'un réseau est son état. Formellement, un marquage est une application

$$M : P \to \mathbb{N}$$

donnant pour chaque place le nombre de jetons qu'elle contient. Le marquage initial est généralement noté M_0.



$$\begin{array}{cc} p_1 & \\ p_2 & \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fonctionnement d'un réseau (sémantique)

- Une transition t est tirable pour un marquage M si et seulement si

$$\forall p \in P,\ \ M(p) \geq \text{Entrée(p,t)}$$

Il s'agit de la condition de franchissement de t depuis M.

- Si t est franchissable depuis M, le tir (ou le franchissement) de t produit un nouveau marquage M' donné par

$$\forall p \in P,\ \ M'(p) = M(p) - \text{Entrée(p,t)} + Sortie(p, t)$$

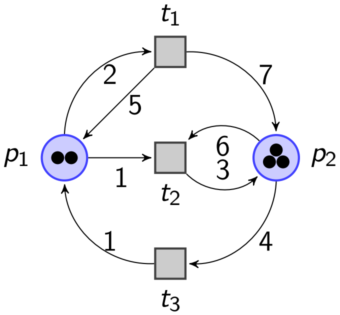
(Cont'd)

- Notations
  - t tirable depuis M :
$$M \xrightarrow{t}$$
  - tir de t depuis M donnant M' :
$$M \xrightarrow{t} M'$$
  - M' = M - Entree(.,t) + Sortie(.,t)
- Définition La *matrice d'incidence* d'un réseau, notée C, est définie par

$$\forall p \in P,\ \forall t \in T\ \ C(p,t) = Sortie(p,t) - Entree(p,t)$$

Si $M \xrightarrow{t} M'$ alors M' = M + C(.,t)

Exemple



$$\text{Entrée}(., t_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq M_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

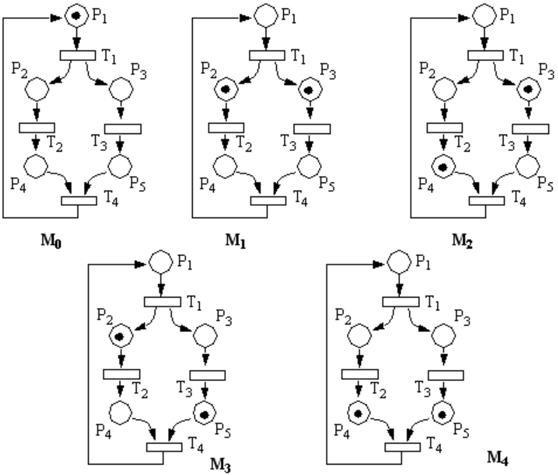
$$M_0 \xrightarrow{t_1} M$$

Exemple(cont'nd)

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 - \text{Entrée}(., t_1) \; + Sortie(., t_1) \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 + C(., t_1) \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Séquence de transitions : un exemple



(Cont'd)

La séquence $T_1 T_2$ est une séquence de franchissements. On peut écrire

$$s = T_1 T_2$$
$$et \; M_0 \xrightarrow{s} M_2$$

- La séquence est définie à partir d'un marquage donné.
- C'est une suite de transitions franchissables successivement.

La séquence $T_1 T_2$ n'est pas une séquence de franchissement à partir de $M_0 \xrightarrow{s} M_3$

Vecteur caractéristique :

où $\overline{s}$ est le *vecteur caractéristique* de la séquence de transitions

$$s = t_1 t_2 ... t_n$$

tel que $\overline{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

$$\overline{s} : T \rightarrow \mathbb{N}$$

Etant donné la séquence $t_1 t_2 t_2 t_3 t_1$

le vecteur caractéristique est : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Propriétés :

$$s = s_1 . s_2$$

$$\Rightarrow \overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$$

Séquence de transitions

- Etant donnée la situation où

$$M \xrightarrow{t_1} M_1,\ M_1 \xrightarrow{t_2} M_2\ \ldots\ M_n \xrightarrow{t_n} M'$$

alors

$$M' = M + C.\overline{s}$$

où $\overline{s}$ est le *vecteur caractéristique* de la séquence de transitions

$$s = t_1 t_2 ... t_n$$

tel que $\overline{s}(t)$ donne le nombre d'occurrences de la transition t dans s

$$\overline{s} : T \rightarrow \mathbb{N}$$

On note

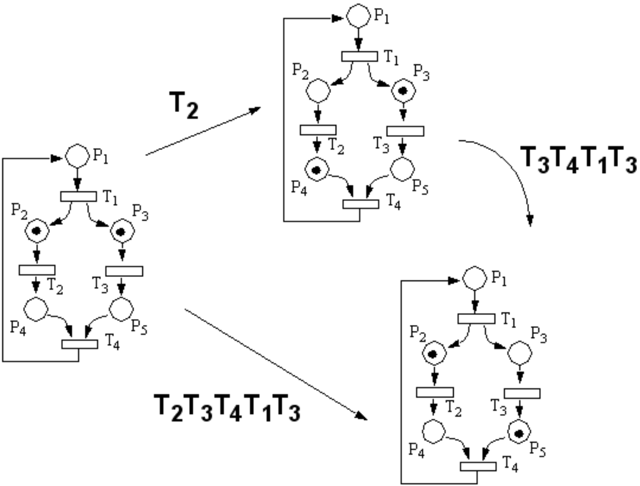
$$M \xrightarrow{s} M'$$

Equation Fondamentale

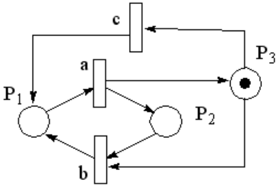
$$M' = M + C \,.\, \overline{s}$$

- *Rqs* : $s = s1.s2 \Rightarrow \overline{s} = \overline{s1} + \overline{s2}$
  $\overline{s1} = \overline{s2} \Rightarrow M + C.\overline{s1} = M + C.\overline{s2}$

Exemple

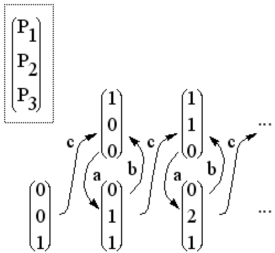


Exercice :Séquence de transitions



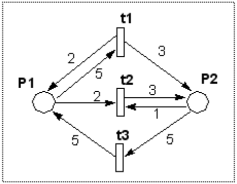
Matrice d'incidence:

$$\begin{array}{c} \\ P1 \\ P2 \\ P3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



- Vérifier que la séquence de transitions 'cabacacab' est franchissable
- Donner le marquage résultat en utilisant son vecteur caractéristique

Exercice (...)



- Quels sont les marquages minimums de ce réseau tels que respectivement les séquences suivantes soient franchissables ?
  - $s_1 = t_2 t_3$
  - $s_2 = t_3 t_2$
- Pouvez-vous 'généraliser' ?
  Vérifier avec la séquence $s = t_2 t_2 t_3 t_1$. Que dire de $M_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Corrections :

$s_{i+1} = s_i t_i$

Supposons M_i solution du problème pour S_i

$M_i + C.\overline{s_i} + C.\overline{t_i} = M_i + C.\overline{s_{i+1}}$

M_i est une solution ssi

$Entree(., ti) \leq M_i + C.\overline{s_i}$

Encore quelques définitions...

- Marquages accessibles (ou successeurs)
  Un marquage M' est un *marquage accessible* (successeur de M) s'il existe une suite de transitions $s \in T*$ tel que

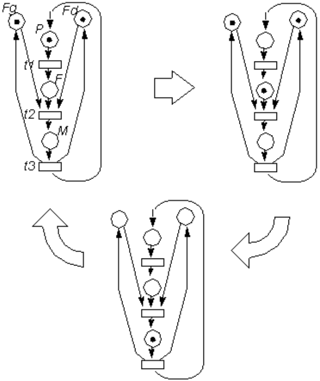
  $$M \xrightarrow{s} M'$$

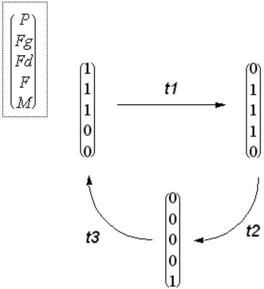
  L'ensemble des marquages accessibles depuis M est noté A(R,M)

- Graphe des marquages accessibles
  Le *graphe des marquages accessibles*, noté GA(R,M), est le graphe ayant comme sommets les marquages de A(R,M) et tel qu'il existe un arc entre deux sommets $M_1 et M_2$ si et seulement si

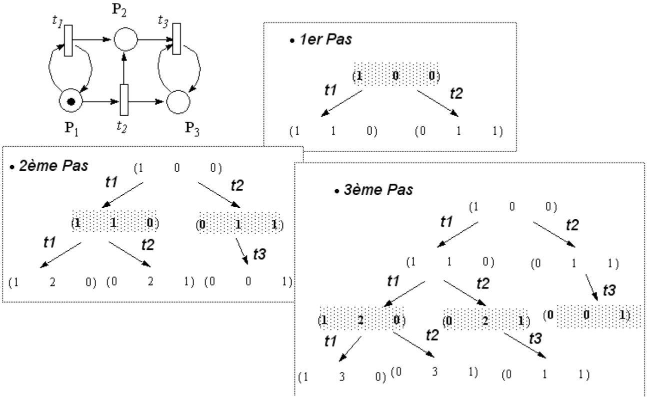
  $$M_1 \xrightarrow{t} M_2 \ ou\ t \in T$$

Graphe des marquages accessibles et fonctionnement





Marquages accessibles : exemple



Résumé

- Définition des fonctions Entrée, Sortie et Marquage
- Représentation sous forme de matrices et vecteurs
- Tirabilité et tir d'une transition
- Séquence de transitions et son utilisation dans l'équation fondamentale
- Marquages accessibles et graphe de ces marquages