Modélisation et traitement des données

HAUTE ÉCOLE DE
NAMUR-LIÈGE-LUXEMBOURG

Objectifs du cours

- Manipuler des notions de base du calcul matriciel et de la théorie des graphes et construire des outils informatiques (en python) permettant de les exploiter ;
- Face à au moins une situation se prêtant à la mise en oeuvre de méthodes de traitement de données opérationnelles par l'outil statistiques :
  - Formuler des hypothèses nulles et alternatives et les tester en recourant à des techniques appropriées
  - Interpréter les résultats de ces test d'hypothèse et en déduire leur conséquence
- (Résoudre un problème d'optimisation de façon analytique et numérique)

Evaluation

- Partie 1 (HORS SESSION : 50%) - Sur le module "statistiques inférentielles" - Travail en groupe sur une base de données de votre choix; remise d'un rapport et évaluation orale **individuelle.**
- Partie 2 (EN SESSION 50%) - Sur les autres modules - examen écrit sur papier

Matrices : vocabulaire et notations

Candy Sonveaux

sur base des notes de Hamdi Z. et de Leclere C.

Premières définitions et notations

Commençons par définir l'objet principal de ce chapitre.

Matrice

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Une **matrice A de dimension** $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau rectangulaire de réels se composant de m lignes et de n colonnes. On notera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

où a_{ij} désigne l'élément de la matrice à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On désigne par $\mathbb{R}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de dimension $m \times n$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On dira de A qu'elle est

- rectangulaire si $m \neq n$. De plus, on dira qu'elle est
  - horizontale si $m < n$
  - verticale si $m > n$
- carrée si $m = n$. Et alors on parlera de **la** dimension de A pour désigner m.
- un vecteur colonne si $m > 1$ et $n = 1$
- un vecteur ligne si $m = 1$ et $n > 1$

Exemple

- Une matrice rectangulaire (horizontale) :
- Une matrice carrée : avec $a_{12} = -5$ et $a_{32} = 7$
- Un vecteur ligne :
- Un vecteur colonne :

Exemple

- Une matrice rectangulaire (horizontale) : $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & -12 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$
- Une matrice carrée : $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 98 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 7 & \pi \end{pmatrix}$, avec $a_{12} = -5$ et $a_{32} = 7$
- Un vecteur ligne : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 421 & -8 \end{pmatrix}$
- Un vecteur colonne : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Les éléments a_{ii}, $1 \leq i \leq n$ sont les coefficients diagonaux de A.
Qu'on désignera plus directement avec **la diagonale de** A.
On dira que A est une matrice diagonale si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note alors $A = diag\,(a_{11},\, a_{22},\, \ldots,\, a_{nn})$.

Exemple

La matrice diagonale $A = diag\,(5, 4, 0, 0, 3, 1)$ est donnée explicitement par

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Les éléments a_{ii}, $1 \leq i \leq n$ sont les coefficients diagonaux de A.
Qu'on désignera plus directement avec **la diagonale de A.**
On dira que A est une matrice diagonale si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note alors $A = diag\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Exemple

La matrice diagonale $A = diag\,(5, 4, 0, 0, 3, 1)$ est donnée explicitement par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut également définir d'autres types de matrices, les matrices *triangulaires* !

Definition

Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Elle est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- Elle est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Exemple

Donner deux matrices A et B respectivement de dimension 3 et 4, triangulaires supérieure et inférieure.

On peut également définir d'autres types de matrices, les matrices *triangulaires* !

Definition

Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Elle est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- Elle est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Exemple

Donner deux matrices A et B respectivement de dimension 3 et 4, triangulaires supérieure et inférieure.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 0 & \sqrt{2} & 56 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \pi & 0 & 0 \\ 65 & 8 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières

Definition

- La **matrice identité** d'ordre n est la matrice carrée de dimension n ayant des 1 sur sa diagonale et des zéros sinon. On la note I_n ou bien Id_n. Certains parlent aussi de matrice *unité* pour la désigner.
- La **matrice nulle** de dimension $m \times n$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls. On la note $0_{m\times n}$.

Exemple

On a

$$I_4 = \quad \text{et} \quad O_{3\times 2} =$$

Matrices particulières

Definition

- La **matrice identité** d'ordre n est la matrice carrée de dimension n ayant des 1 sur sa diagonale et des zéros sinon. On la note I_n ou bien Id_n. Certains parlent aussi de matrice *unité* pour la désigner.
- La **matrice nulle** de dimension $m \times n$ est la matrice dont tous les éléments sont nuls. On la note $0_{m \times n}$.

Exemple

On a

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Maintenant qu'on sait écrire une matrice, on va apprendre à en combiner plusieurs, càd. **effectuer des opérations.**

Égalité de matrices

Definition

Soient A, B deux matrices de dimension $m \times n$. Les matrices A et B sont **égales** ssi

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$$

C'est ce qu'on appelle "l'égalité composante à composante".
On note évidemment $A = B$.

Exercice

Quelles sont les conditions à imposer aux paramètres x, y et z pour que les deux matrices suivantes soient égales ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x+y \\ y & z^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x-1 & 7 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Égalité de matrices

Definition

Soient A, B deux matrices de dimension $m \times n$. Les matrices A et B sont **égales** ssi

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$$

C'est ce qu'on appelle "l'égalité composante à composante".
On note évidemment $A = B$.

Exercice

Quelles sont les conditions à imposer aux paramètres x, y et z pour que les deux matrices suivantes soient égales ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x+y \\ y & z^2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x-1 & 7 \\ y & x \end{pmatrix}$$

$x = 4; y = 3; z = \pm 2$

Addition

Definition

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deux matrices. **La somme des matrices** A et B est notée $A + B$ et est une matrice C de dimension $m \times n$ telle que ses éléments sont donnés par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Exemple

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \quad \text{et } B + C =$$

Addition

Definition

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deux matrices. **La somme des matrices** A et B est notée $A + B$ et est une matrice C de dimension $m \times n$ telle que ses éléments sont donnés par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Exemple

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et } B + C \text{ n'est pas définie !}$$

L'addition des matrices possède des propriétés similaire à l'addition sur les réels :

- Commutativité :
$$A + B = B + A$$
- Associativité :
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- Existence d'un neutre :
$$A + 0 = A = 0 + A$$

Quel est le "zéro" dans le cas des matrices ?

L'addition des matrices possède des propriétés similaire à l'addition sur les réels :

- Commutativité :
$$A + B = B + A$$
- Associativité :
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
- Existence d'un neutre :
$$A + 0 = A = 0 + A$$

Quel est le "zéro" dans le cas des matrices ?
La matrice nulle de même dimension que la matrice A.

Soustraction

Definition

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deux matrices. **La différence des matrices** A et B est notée $A - B$ et est une matrice C de dimension $m \times n$ telle que ses éléments sont donnés par

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Exemple

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B =$$

Soustraction

Definition

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deux matrices. **La différence des matrices** A et B est notée $A - B$ et est une matrice C de dimension $m \times n$ telle que ses éléments sont donnés par

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$$

Exemple

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplication externe

On peut envisager de multiplier une matrice par un réel.

Definition

Soient A une matrice de dimension $m \times n$ et $r \in \mathbb{R}$, un réel. Le **produit (externe)** de la matrice A avec r, rA (ou Ar) est la matrice B obtenue en multipliant les éléments de A par r :

$$rA = (ra_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ \pi & 10 & 1 \end{pmatrix} =$$

L'opposé d'une matrice A est la matrice notée $-A$ obtenue en remplaçant chaque composante a_{ij} par $-a_{ij}$ (ce qui revient à multiplier A par le réel -1).

Multiplication externe

On peut envisager de multiplier une matrice par un réel.

Definition

Soient A une matrice de dimension $m \times n$ et $r \in \mathbb{R}$, un réel. Le **produit (externe)** de la matrice A avec r, rA (ou Ar) est la matrice B obtenue en multipliant les éléments de A par r :

$$rA = (ra_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ \pi & 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & -5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

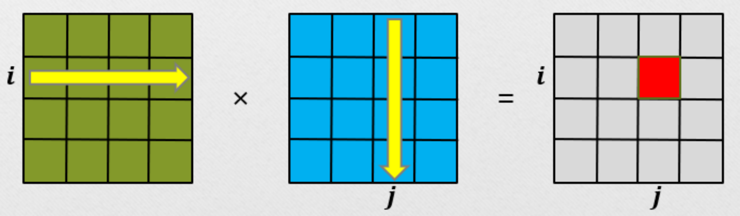
L'opposé d'une matrice A est la matrice notée $-A$ obtenue en remplaçant chaque composante a_{ij} par $-a_{ij}$ (ce qui revient à multiplier A par le réel -1).

Multiplication interne

Definition

Soient A, B deux matrices, respectivement de dimension $m \times n$ et $n \times p$. **Le produit de la matrice** A **par** B est noté AB et est une matrice C de dimension $m \times p$ telle que ses éléments sont donnés par

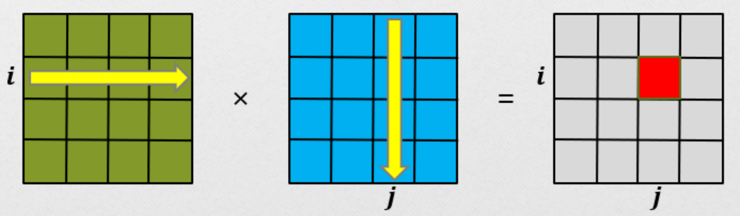
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \quad \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., p$$



Remarque

- Le produit matriciel s'effectue donc **ligne par colonne**
- Chaque élément *ij* de *AB* est construit à partir de
  - la ligne *i* de *A*
  - la colonne *j* de *B*

  en multipliant leurs composantes deux par deux et en additionnant les résultats.



Exemple

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$$AC =$$

Exemple

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}} . \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$AC = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}} . \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \text{ pas défini !}$$

La multiplication possède les propriétés suivantes :

- Associativité :

$$A\,(BC) = (AB)\,C$$

- Neutre :

$$A.1 = A = 1.A$$

Quel est le "un" dans le cas des matrices ?

- Distributivité :

$$A(B + C) = AB + AC$$

- !!! La multiplication n'est **pas commutative** !!!

$$AB \neq BA$$

La multiplication possède les propriétés suivantes :

- Associativité :
$$A\,(BC) = (AB)\,C$$
- Neutre :
$$A.1 = A = 1.A$$
Quel est le "un" dans le cas des matrices ?
La matrice identité
- Distributivité :
$$A(B + C) = AB + AC$$
- !!! La multiplication n'est **pas commutative** !!!
$$AB \neq BA$$

Transposition

Voyons maintenant une opération *unaire* pour les matrices.

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. **La matrice tranposée de** A est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et inversement. On la note $\widetilde{A}$ ou A^T. Plus formellement,

$$A^T = (a_{\mathbf{ji}})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 4 & 9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$. On a alors

$$A^T =$$

Transposition

Voyons maintenant une opération *unaire* pour les matrices.

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. **La matrice tranposée de** A est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et inversement. On la note $\widetilde{A}$ ou A^T.
Plus formellement,

$$A^T = (a_{\mathbf{ji}})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 4 & 9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$. On a alors

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \sqrt{2} & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition vérifie les propriétés suivante

Propriété

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On a que la transposée de la transposée de A donne A elle-même :

$$(A^T)^T = A$$

Propriété

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$. On a

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(rA)^T = rA^T$$
$$(AC)^T = C^T A^T$$

L'opération de transposition nous permet de définir une classe de matrices particulières : les matrices symétriques.

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La matrice A est dite **symétrique** si

$$A = A^T$$

Remarques

On peut en déduire que si A est symétrique, elle est nécessairement **carrée** !

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a bien $A = A^T$.

Transformations élémentaires

Les **transformations élémentaires** sont des opérations qui reviennent dans de nombreux algorithmes sur les matrices.

Il y a 3 types de transformations élémentaires :

- la permutation,
- la multiplication,
- la combinaison linéaire.

1ère transformation élémentaire : la permutation

- Permutation de 2 lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Permutation de 2 colonnes : $C_i \leftrightarrow C_j$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow}$$

1ère transformation élémentaire : la permutation

- Permutation de 2 lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Permutation de 2 colonnes : $C_i \leftrightarrow C_j$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{-15} \\ -6 & 5 \\ \mathbf{8} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

2ème transformation élémentaire : la multiplication

- Multiplier une ligne par un réel : $L_i \leftarrow rL_i$
- Multiplier une colonne par un réel : $C_i \leftarrow rC_i$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 10L_2}{\Longrightarrow}$$

2ème transformation élémentaire : la multiplication

- Multiplier une ligne par un réel : $L_i \leftarrow rL_i$
- Multiplier une colonne par un réel : $C_i \leftarrow rC_i$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 10L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ \textbf{-60} & \textbf{50} \\ 30 & -15 \end{pmatrix}$$

3ème transformation élémentaire : la combinaison linéaire (simple)

- Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + rL_j$
- Ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne : $C_i \leftarrow C_i + rC_j$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longrightarrow}$$

3ème transformation élémentaire : la combinaison linéaire (simple)

- Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + rL_j$
- Ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne : $C_i \leftarrow C_i + rC_j$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathbf{20} & \mathbf{0} \\ -6 & 5 \\ 30 & -15 \end{pmatrix}$$

Transformations et produit

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Calculez le produit $E_iA, i = 1, 2, 3$ pour chacune des matrices E_i suivantes puis indiquez quelle(s) transformation(s) élémentaire(s) appliquer à A pour obtenir le même résultat.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformations et produit

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Calculez le produit $E_i A$, $i = 1, 2, 3$ pour chacune des matrices E_i suivantes puis indiquez quelle(s) transformation(s) élémentaire(s) appliquer à A pour obtenir le même résultat.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

Appliquez les transformations suivantes à une matrice carrée A revient à prémultiplier A par une certaine matrice E. Précisez laquelle.

1. $L_1 \leftarrow \dfrac{L_1}{2}$ (sur une matrice d'ordre 3)
2. $L_5 \leftarrow L_5 + 3L_2$(sur une matrice d'ordre 5)
3. $L_2 \leftrightarrow L_3$ (sur une matrice d'ordre 4)

Appliquez les transformations suivantes à une matrice carrée A revient à prémultiplier A par une certaine matrice E. Précisez laquelle.

1. $L_1 \leftarrow \dfrac{L_1}{2}$ (sur une matrice d'ordre 3)
2. $L_5 \leftarrow L_5 + 3L_2$(sur une matrice d'ordre 5)
3. $L_2 \leftrightarrow L_3$ (sur une matrice d'ordre 4)

$$1.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice

Déterminant

Concept

Le **déterminant** d'une matrice **carrée** A de dimension n est un nombre qu'on associe à une matrice. Il est noté $|A|$ ou $detA$.
Sa définition est récursive :

- Cas de base : On indique comment calculer le déterminant pour une matrice d'ordre 1.
- Cas de récurrence : On indique comment calculer le déterminant pour une matrice d'ordre n en se ramenant au calcul de déterminants pour des matrices d'ordre $n - 1$.

Rem : Même si cela n'est pas nécessaire, on donnera aussi une définition du déterminant pour les matrices d'ordre 2 et 3, ce qui accélère les calculs.

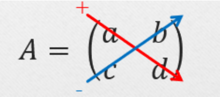
Déterminant

- Pour une matrice d'ordre 1 :

$$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \qquad |A| = a$$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} -9 \end{pmatrix}$, on a $|A| = -9$

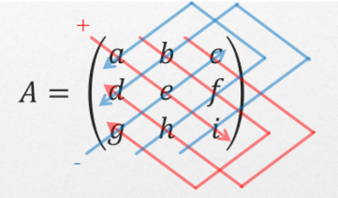
- Pour une matrice d'ordre 2 :



$$|A| = ad - bc$$

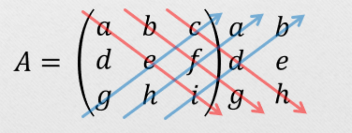
Exemple : $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 6 = 14$

- Pour une matrice d'ordre 3 :



$$\begin{aligned} |A| = & aei + bfg + cdh \\ & - gec - hfa - idb \end{aligned}$$

Autre méthode pour "retenir" la formule :



Définitions préliminaires

Définitions

Soit A une matrice carrée

- On appelle la **matrice mineure** de l'élément a_{ij} la matrice M_{ij} obtenue en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne.
- On appelle **mineur** de l'élément a_{ij} le déterminant de la matrice M_{ij}. On le notera m_{ij}.
- On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij}, la valeur $cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

On peut alors parler de la matrice des cofacteurs d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Elle est notée $cof(A)$ et est donnée par

$$cof(A) = (cof_{ij}(A))_{1 \leq i,j \leq n}$$

Exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminons sa matrice des cofacteurs. On a

$$cof_{11}(A) =$$

$$\vdots$$

$$cof_{32}(A) =$$

$$\vdots$$

Ainsi,

$$cof(A) =$$

Exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminons sa matrice des cofacteurs. On a

$$cof_{11}(A) = (-1)^{1+1}.m_{11}(A) = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\vdots$$

$$cof_{32}(A) = (-1)^{3+2}.m_{32}(A) = -1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\vdots$$

Ainsi,

$$cof(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut enfin définir le déterminant.

Loi ou règle des mineurs

Soit A une matrice carrée de dimension n. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}.cof_{ki}(A) && \text{(colonne)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}.cof_{jk}(A) && \text{(ligne)} \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour calculer un déterminant d'une matrice de dimension n, il nous suffira de calculer des déterminants de sous-matrices de dimension $n - 1$.

Méthodologie pour calculer le déterminant

- Déterminant d'une matrice A d'ordre $n > 1$:
  1. Choisir une ligne ou une colonne de A.
  2. Pour chaque élément de cette ligne/colonne, calculer le produit $a_{ij} \times cof_{ij}(A)$ (élément $\times$ cofacteur).
  3. Calculer la somme de ces produits.
  4. Le résultat est le déterminant de A.

  Rem : Quelle que soit la ligne/colonne choisie, on arrive au même résultat. Autant choisir une ligne/colonne qui comporte le plus de zéros !

Exemple

Calcul de $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$|A| = 4\,(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 5\,(-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)\left(5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}\right) + 5\left(2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-4)\big(5 \times (-29) - 2 \times (-24)\big) + 5(2 \times (-14) - 9)$$

$$= (-4)(-145 + 48) + 5(-28 - 9) = 388 - 185 = 203$$

Quelques propriétés immédiates :

- Si A possède une ligne (ou colonne) entièrement nulle, alors, $|A| = 0$.
- Quelle que soit la matrice carrée A, on a $|A^T| = |A|$ (travailler sur les lignes ou sur les colonnes, cela revient au même pour le déterminant)

Vocabulaire

- Si $|A| = 0$, on dit que A est une matrice **singulière**.
  Si $|A| \neq 0$, on dit que A est une matrice **régulière**.

Considérons à présent le cas de la matrice d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On va appliquer la règle des mineurs à la $j^{\text{ème}}$ colonne, ce qui va nous donner

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1j} . cof_{1j}(A) + a_{2j} . cof_{2j}(A) + \ldots + a_{nj} . cof_{nj}(A)$$

$$= a_{1j} . (-1)^{1+j} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{2j} . (-1)^{2+j} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + a_{nj} . (-1)^{n+j} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On devrait donc calculer n déterminants de dimension $n-1$ afin d'en calculer un de dimension n. Cela est loin d'être une bonne nouvelle... Cependant, le déterminant a les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- Si on multiplie une ligne/colonne de A par $r \in \mathbb{R}$, le déterminant de A est multiplié par r.
- $|rA| = r^n|A|$.
- Si A possède deux lignes/colonnes identiques ou multiples l'une de l'autre, $|A| = 0$.
- Si on invertit deux lignes/colonnes de A (transformation élémentaire $\leftrightarrow$), le déterminant de A change de signe
- Appliquer une transformation élémentaire de type "combinaison linéaire" ne modifie pas le déterminant.

Grâce à ces dernières propriétés, on pourra essayer de faire apparaître des 0 sur toute une ligne ou colonne à l'exception d'un élément en appliquant des transformations adaptées, avant d'appliquer la règle des mineurs !

Exemple

Calculons $det(A)$ sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculons $det(A)$ sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2.L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -10 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 6. - 1 + (-10).(-1). - 1 \quad = -16
\end{aligned}
$$

Remarquons qu'on aurait pu aussi simplifier les calculs en mettant en évidence :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Présentons quelques propriétés supplémentaires du déterminant.

Propriété

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice diagonale ou triangulaire (supérieur/inférieure), telle que sa diagonale est composée des éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. On a

$$det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33}. \ldots .a_{nn}$$

Exemple

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.5.2 = 10$$

On peut déduire facilement le résultat suivant

Corollaire

Le déterminant de la matrice identité vaut 1. çàd.

$$det(I_n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Concernant le produit matriciel, nous avons la propriété suivante pour le déterminant :

Propriété

Soient A, B deux matrices de dimension n. On a

$$det(AB) = det(A).det(B)$$

Algorithme de calcul du déterminant

Voici un algorithme général pour calculer le déterminant :

- Si la matrice est nulle, son déterminant est nul.
- Sinon, par permutation de lignes/colonnes, amener une valeur non nulle en a_{11} (= pivot).
- Transformer a_{11} en 1 par $L_1 \leftarrow \dfrac{L_1}{a_{11}}$.
- Utiliser des combinaisons linéaires $L_k \leftarrow L_k - a_{k1} L_1$ pour amener des zéros sur la 1^{ere} colonne ou ligne en $a_{21}, ..., a_{n1}$ (ou en $a_{12}, ..., a_{1n}$).
- On se ramène au calcul du déterminant de la matrice obtenue en supprimant la 1^{ere} ligne et la 1^{ere} colonne.

Application de l'algorithme

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & 3 \\ 1/2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftrightarrow C_2$ $\qquad$ $C_1 \leftarrow C_1/2$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ -2 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & -10 & -8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 4 & 12 & 6 \\ 1 & -10 & -8 \end{vmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - 5C_1$

$C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$

$$-2\begin{vmatrix} \boxed{3} & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 4 & 12 & 6 \\ 1 & -10 & -8 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} \boxed{1} & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{4}{3} & 12 & 6 \\ \frac{1}{3} & -10 & -8 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1/3$

$$= -6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 12 - \frac{7}{2} \times \frac{4}{3} & 6 + \frac{7}{2} \times \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -10 - \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} & -8 + \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{22}{3} & \frac{32}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{67}{6} & -\frac{41}{6} \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} \frac{22}{3} & \frac{32}{3} \\ -\frac{67}{6} & -\frac{41}{6} \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - (7/2)C_1$

$C_3 \leftarrow C_3 - (-7/2)C_1$

$$= (-6) \times \left(-\frac{22}{3} \times \frac{41}{6} + \frac{67}{6} \times \frac{32}{3}\right) = (-6) \times 69 = -414$$

Inverse d’une matrice

Qu'est-ce que l'inverse ?

- "L'inverse" pour les **réels**.
  - L'inverse de x est $1/x$ (qui n'existe que pour $x \neq 0$)
  - L'inverse de x est noté x^{-1}.

Définition

x^{-1} est l'unique valeur qui vérifie

$$x^{-1}.x = 1 = x.x^{-1}$$

- "L'inverse" pour les **matrices** carrées.
  - L'inverse de A est noté A^{-1} (s'il existe).

Définition

A^{-1} est l'unique matrice qui vérifie

$$A^{-1}.A = I = A.A^{-1}$$

Pourquoi l'inverse ?

Dans les réels, l'inverse permet de résoudre des équations.

$$\text{Ex : } 7x = 31$$

Pour résoudre cette équation, on calcule l'inverse de 7 (càd $1/7$) et on multiplie les deux membres de l'égalité par cette valeur.

$$\frac{1}{7}.7x = \frac{1}{7}.31$$

Comme $\dfrac{1}{7}.7 = 1$, on obtient la réponse :

$$x = \frac{31}{7}.$$

De nombreux problèmes se modélisent sous la forme de systèmes d'équations linéaires.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7x+2y+3z & = & 1 \\ x+3y-z & = & 2 \\ 2x-2y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

A leur tour, ces systèmes d'équations linéaires peuvent s'écrire sous la forme d'équation matricielle.

De nombreux problèmes se modélisent sous la forme de systèmes d'équations linéaires.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7x+2y+3z & = & 1 \\ x+3y-z & = & 2 \\ 2x-2y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

A leur tour, ces systèmes d'équations linéaires peuvent s'écrire sous la forme d'équation matricielle.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc une équation matricielle de la forme $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on connait l'inverse A^{-1} de A, on peut calculer

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow & A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ \Leftrightarrow & Ix = x = A^{-1}b \end{aligned}$$

On obtient directement la solution du système : $A^{-1}b$.

Comment calculer l'inverse ?

Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée A ?

Matrice inverse

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice régulière (càd. $|A| \neq 0$). On a

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.cof(A)^T$$

On dit alors que A est *inversible*.

Rem : $cof(A)^T := adj(A)$, c'est la matrice adjointe de A.

Quelques propriétés de la matrice inverse :

Propriété

Soit A une matrice inversible, on a

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Propriété

Si A et B sont des matrices carrées inversibles d'ordre n,

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Exemple

Déterminons l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Commençons par calculer

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 4.(-1)^{1+2}. \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -4.(9.(-2)) \\
&= 72
\end{aligned}
$$

La matrice A est donc inversible. Reste à trouver la matrice des cofacteurs.

Exemple

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $|A| = 72$. Par la suite,

$$cof(A) = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 18 & -18 & -18 \end{pmatrix}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{72} . \begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 18 & -18 & -18 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{72} . \begin{pmatrix} 4 & 8 & 18 \\ 14 & 1 & -18 \\ 2 & 4 & -18 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{36} & \frac{1}{72} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Systèmes d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires à n inconnues et p équations est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + & \ldots + a_{pn}x_n = & b_p \end{cases}$$

On peut cependant renoter ce système sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Qu'on peut noter de façon plus compacte

$$Ax = b$$

Théorème

Si la matrice A est inversible (cad. carrée et régulière) alors le système d'équations

$$Ax = b$$

possède une unique solution donnée par $x = A^{-1}.b$.

Dans les autres cas (matrice non carrée ou carrée et singulière), on ne peut pas calculer A^{-1} pour résoudre le système...
De plus, comme on a pu le constater précédemment, le calcul de A^{-1} peut s'avérer compliqué.
Voyons donc une démarche qui peut demander moins d'effort ...

On verra ici la méthode dite *simple* du pivot de Gauss.

Tout d'abord, on prendra soin de renoter le système

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sous la forme épurée $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$

On appelle cette nouvelle matrice la **matrice augmentée** du système. Elle est formée à partir de la matrice des coefficients et du vecteur des termes indépendants.

On peut réaliser diverses **transformations élémentaires** sans que cela ne modifie les solutions du système :

- Multiplication d'une ligne par un réel

$$L_i \leftarrow rL_i$$

- Permutation de deux lignes

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

- Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne (combinaison linéaire simple sur les lignes)

$$L_i \leftarrow L_i + rL_j$$

L'objectif du pivot de Gauss est d'utiliser ces différentes transformations élémentaires afin d'obtenir un système triangulaire supérieur équivalent, càd. de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

Bien plus simple à résoudre !

Marche à suivre

Comment effectuer le pivot :
On pose $dim = n$, on va itérer les étapes suivantes tant que $dim > 1$

1. On sélectionne un élément **non nul** de la matrice A qui sera le pivot
   1. Si nécessaire, on permute ligne et colonne afin que le pivot soit en position $(1, 1)$
   2. Il est courant que le pivot soit égal à 1
2. On effectue le changement $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k1}}{\text{pivot}}.L_1, \forall k \neq 1$
3. On omet la première ligne et la première colonne ce qui nous donne *dim* - -

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 4x + 2z = 6 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 4x + 2z = 6 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ y = 1 \\ 6z = -2 \end{cases}$$

On trouve donc $S = \{(\frac{5}{3}, 1, -\frac{1}{3})\}$ en résolvant de proche en proche !

Solutions d'un système d'équations

Dans le cas où A est une matrice carrée

- régulière (càd. inversible) : une unique solution
- singulière (càd. de déterminant nul):
  - soit 0 solution (**système impossible**)
  - soit une infinité de solutions (**système indéterminé**)

De manière générale, on parle de **l'ensemble de solutions** S, qui peut être un singleton, vide ou infini.

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3/2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

L_2 et L_3 sont redondantes. On obtient donc $S = \{(x, y, z)\}$ tels que $x = z + 1$ et $y = z$, ou encore

$$S = \{(z + 1, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme

Exemple

Résolvons le système

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

L_2 et L_3 sont incompatibles. On obtient qu'il n'y a aucune solution, ce qu'on note

$$S = \emptyset$$

Vecteurs propres et valeurs propres

On peut définir d'autres éléments associés à une matrice. L'objectif ici sera de simplement les présenter, leur utilité est laissée à d'autres cours.

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Le réel λ est une **valeur propre** de A si

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \; Ax = \lambda x$$

On appelle le spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A, et on note cet ensemble $Sp(A)$.

Definition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda \in Sp(A)$. Le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est un **vecteur propre** de A de associé à la valeur propre λ si

$$Av = \lambda v$$

Une question légitime se pose assez rapidement : comment déterminer les valeurs propres d'une matrice ? Pour ce faire, abordons l'objet suivant.

Definition

Soit A une matrice de dimension n. Le polynôme de variable λ donné par

$$\chi_A(\lambda) = det\left(A - \lambda.Id_n\right)$$

est le **polynôme caractéristique** de la matrice A.

Théorème

Soient A une matrice de dimension n, et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda_0 \in Sp(A) \;\Leftrightarrow\; \chi_A(\lambda_0) = 0$$

càd. λ_0 est valeur propre de A *ssi* λ_0 est racine du polynôme caractéristique de A.

Exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour déterminer ses valeurs propres, trouvons premièrement

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2.(1-\lambda) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &\chi_A(\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow &(2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow &\lambda = 2 \textbf{ ou } \lambda = 1 \end{aligned}$$

Et on conclut en déclarant

$$Sp(A) = \{1; 2\}$$

Rapidement,

Definition

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La **trace** de A est la somme de ses éléments diagonaux, on la note $tr(A)$. çàd.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Et les valeurs propres d'une matrice jouissent notamment des propriétés suivantes.

Propriété

Soient A une matrice de dimension n et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité comme racine de χ_A. On a

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

càd. le déterminant est le produit des valeurs propres, et la trace est la somme des valeurs propres.