Module 1 : Matrices

Exercices analytiques

Question 1. Complétez le tableau ci-dessous à propos des huit matrices définies plus bas, en indiquant pour chacune d'elles (a) son type, (b) si la matrice est carrée et/ou possède une autre forme particulière, (c) son ordre [si c'est pertinent], (d) la valeur de la composante demandée et (e) la notation correspondant à la composante indiquée.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice	Type	(b)	Ordre	(d)	(e)
A				$a_{22} =$	-2 est $a_{??}$
B				$b_{13} =$	-4 est ...
C				$c_{31} =$	1 est ...
D				$d_{12} =$	1 est ...
E				$e_{43} =$	Le dernier 7 est ...
F				$f_{11} =$	Le 0 en bas à gauche est ...
G				$g_{33} =$	Le -3 en bas à droite est ...
H				$h_{23} =$	Le 0 en bas est ...

Question 2. Donnez la forme extensive (écriture complète) des matrices définies ci-dessous.

(a) $L = (l_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ où $\forall i, \forall j,\ l_{ij} = i - j$

(b) $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ où $\forall i, \forall j,\ m_{ij} = \begin{cases} 2i + j & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(c) $N = (n_{ij})_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5}$ où $\forall i, \forall j,\ n_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(d) $R = (r_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ où $\forall i, \forall j,\ r_{ij} = \begin{cases} 2i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

(e) $S = (s_{ij})_{1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 4}$ où $\forall i, \forall j,\ s_{ij} = \begin{cases} j & \text{si } i + j = 7 \\ i & \text{sinon} \end{cases}$

Question 3. L'exercice inverse du précédent : cette fois-ci, on vous donne la forme extensive des matrices et on vous demande de les décrire via une propriété.

Comme dans les énoncés de l'exercice précédent, il vous faudra parfois distinguer plusieurs cas (notation avec une accolade et des conditions sur i et/ou j). L'objectif sera alors d'exprimer la propriété avec le minimum de cas (à l'idéal un seul cas, c'est-à-dire une seule formule pouvant servir pour toutes les composantes).

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$$

Question 4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

(a) Quel est le genre de A ?

(b) Quel sera le genre de $B = A^T$, la transposée de A ?

(c) Calculez B

Question 5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Toutes les matrices carrées A d'ordre 2 vérifient $A^T = A$.

(b) Il existe plusieurs matrices carrées A d'ordre 2 qui vérifient $A^T = A$.

(c) Toutes les matrices identités I_n sont égales à leur propre transposée.

(d) Seules les matrices carrées A vérifient $(A^T)^T = A$.

(e) Quand on transpose une matrice, ses lignes deviennent des colonnes et ses colonnes, des lignes.

Question 6. Soit B la matrice carrée d'ordre 3 générique définie par

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des réels a priori quelconques. Quelles sont les conditions à imposer à tous ces réels pour que $B^T = B$?

Question 7. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) On peut toujours additionner deux matrices.

(b) On peut toujours multiplier deux matrices.

(c) On peut toujours calculer le déterminant d'une matrice.

(d) Le produit matriciel est commutatif.

(e) Un déterminant est toujours positif ou nul.

(f) Le produit matriciel est associatif.

(g) Lorsqu'on multiplie une matrice par un réel, on ne multiplie que les éléments de la première colonne par ce nombre.

Question 8. Déterminez les valeurs des paramètres pour que les matrices soient égales.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 6 & 5+c & 0 \\ 2a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2b & 5-c & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x-y & z+2t \\ x+y & 2z-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Question 9. Les sommes suivantes sont-elles définies ? Si oui, calculez-les.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 18 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 4 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$

Question 10. Les produits AB et BA sont-ils définis ? Si oui, calculez-les.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -7 & 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \\ \frac{11}{2} & 5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & 5 \\ 6 & 2-a & 5 \\ b & b & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Question 11. Si A est une matrice de dimension $m \times n$ et B une matrice telle que AB et BA sont définis, quelle doit être la dimension de B ?

Question 12. Effectuer, si possible, les opérations suivantes.

(1) Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) $3A + 2B + D$

(b) $AB + 3C$

(c) $(A + B)\,E$

(d) DEC

(2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer C telle que $(A - 2I)\,C = I$.

(b) Est ce qu'il existe une matrice D telle que $(B - 2I)\,D = I$?

Question 13. Calculez, si possible, les déterminants suivants.

(a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} \frac{11}{2} & 4 \\ \frac{17}{2} & 3 \end{vmatrix}$

(c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(f) $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

(h) $\det \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$

Question 14. Résoudre l'équation $\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 8 & -x \end{vmatrix} = 0$

Question 15. Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Montrez que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Question 16. Résolvez les systèmes suivants par la méthode d'élimination de Gauss.

(a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+5y=5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x+7y=11 \\ -x+3y=12 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ x-y+z=5 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ 2x+2y-z+2=0 \\ 4x-y+2z=9 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y-3z+5=0 \\ 2x+y-2z+9=0 \\ 3x-y+5z+20=0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} u-2v+w=0 \\ v-8w=8 \\ -4u+5v+9w=-9 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} s-2t+3u=1 \\ 2s-4t+6u=2 \\ s+5t-u=2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x+2y-5z=8 \\ 4x+6y-2z=5 \\ x+2y-5z=5 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 4x+3y+6z=1 \\ 8x+6y+12z=2 \\ 20x+15y+30z=5 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} w+2x+y-z=1 \\ 3w-x-y+2z=3 \\ -x+y-z=1 \\ 2w+3x+3y-3z=3 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 3x-3y+3z+2t=0 \\ x-y+z=0 \\ 5x-5y+5z+7t=0 \end{cases}$

Question 17. Utilisez l'élimination de Gauss pour déterminer pour quelles valeurs des paramètres les systèmes suivants admettent des solutions.

(a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+2y+az=b \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=a \\ x_1+x_2-x_3+x_4=b \\ x_1+7x_2-5x_3-x_4=c \end{cases}$

Question 18. Le comportement du marché pour 3 produits A, B et C est donné par les fonctions d'offre et de demande suivantes :

$$\begin{cases} D_A=10-x+3y-z \\ D_B=6+x-3y+3z \\ D_C=10+3x+3y-z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} O_A=12+x \\ O_B=4+3y \\ O_C=12+z \end{cases}$$

où x, y et z représentent respectivement les prix unitaires des biens A, B et C. Déterminez les prix qui équilibrent les fonctions d'offre et de demande.

Question 19. Une entreprise fabrique trois produits A, B et C. Tous sont passés par trois processus qui se réalisent dans trois machines M_1, M_2 et M_3. Le temps (exprimé en heures) nécessaire pour la fabrication d'une unité de chaque produit dans chaque machine est donné par :

- Produit A : 3h dans M_1, 1h dans M_2, 2h dans M_3.
- Produit B : 1h dans M_1, 2h dans M_2, 1h dans M_3.
- Produit C : 2h dans M_1, 4h dans M_2, 1h dans M_3.

(a) On dispose de la machine M_1 durant 850h, de la machine M_2 durant 1200h, et de la machine M_3 durant 550h. Combien d'unités de chaque produit peut-on fabriquer si on désire utiliser tout le temps disponible pour les trois machines ?

(b) Même question si on dispose de respectivement 1200h, 900h, et 1100h pour les machines M_1, M_2 et M_3. Que se passe-t-il dans ce cas ?

Question 20. La distribution stationnaire du modèle de Markov du chômage satisfait le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (q-1)x+py=0 \\ (1-q)x-py=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

où x représente le nombre de personnes employées et y représente le nombre de personnes au chômage (ça arrive).

(a) Sachant p et q sont compris dans $[0,1]$, combien de solutions ce système a-t-il ?

(b) En ignorant la condition précédente, trouvez les valeurs de p et q telles que le système n'admet pas de solutions.

Exercices numériques

Question 1. Implémenter, en python, des fonctions permettant d'effectuer les opérations suivantes sur les matrices (sans avoir recours à la libraire numpy) :

(a) addition de deux matrices

(b) multiplication externe d'une matrice par un réel

(c) soustraction de deux matrices

(d) transposition d'une matrice

(e) multiplication interne de deux matrices

Vérifier votre programme certains exercices de la partie analytique.

Question 2. Nous avons vu que la résolution d'un système d'équation repose sur une combinaison d'opérations élémentaires sur les matrices. Dans cette exercice, l'objectif est d'implémenter en python ces trois transformations élémentaires :

(a) la permutation de lignes

(b) la multiplication d'une ligne par un réel

(c) la combinaison linéaire sur les lignes

Ces fonctions nous serviront dans l'exercice, consistant en l'implémentation d'un programme python pour résoudre un système linéaire d'équations.

Question 3. Coder, en python, une fonction *resolution* permettant d'appliquer la méthode du pivot de Gauss à un système linéaire de n équations à n inconnues. Elle prend en argument une matrice M des coefficients et un vecteur b des termes indépendants. Elle retourne un vecteur X donnant les solutions.

Pour ce faire, voici une suggestion de procédé :

- Coder une fonction *matriceAugmentee*, qui retourne la matrice augmentée du système
- Coder une fonction *donneLePivot*, qui sélectionne le pivot de la matrice

Question 4. Résoudre, via votre fonction de la méthode d'élimination de Gauss, les systèmes suivants.

(a) $\begin{cases} y - 8z = 8 \\ x - 2y + z = 0 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ 2x + 2y - z + 2 = 0 \\ 4x - y + 2z = 9 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y - 3z + 5 = 0 \\ 2x + y - 2z + 9 = 0 \\ 3x - y + 5z + 20 = 0 \end{cases}$

Solutions

Solution de la question 1.

Matrice	Type	(b)	Ordre	(d)	(e)
A	3×3	carrée	3	$a_{22} = 2$	a_{13}
B	3×3	carrée	3	$b_{13} = 3$	a_{21}
C	3×1	vect.-col.	KO	$c_{31} = -2$	c_{21}
D	1×3	vect.-ligne	KO	$d_{12} = 2$	d_{13}
E	4×3	rect. vert.	KO	$e_{43} = 7$	e_{43}
F	4×4	matrice identité	4	$f_{11} = 1$	f_{41}
G	4×3	rect. vert.	KO	$g_{33} = 3$	g_{43}
H	3×3	symétrique	3	$h_{23} = 0$	h_{32}

Solution de la question 2.

(a) $L = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 & 1-4 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 & 2-4 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 & 3-4 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(2)+1 & 0 & 0 & 0 \\ 2(3)+1 & 2(3)+2 & 0 & 0 \\ 2(4)+1 & 2(4)+2 & 2(4)+3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $N = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 & 1+5 \\ 0 & 2+2 & 2+3 & 2+4 & 2+5 \\ 0 & 0 & 3+3 & 3+4 & 3+5 \\ 0 & 0 & 0 & 4+4 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $R = \begin{pmatrix} 2(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Solution de la question 3.

- $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5}$ où $t_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ j - i & \text{si } i < j \text{ et } j > 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ où $u_{ij} = (i - j)^2$
- $V = (v_{ij})$ où $v_{ij} = (i + 1)^{j-1}$

Solution de la question 4.

(a) 2×3

(b) 3×2

(c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 20 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}$

Solution de la question 5.

(a) Faux

(b) Vrai

(c) Vrai

(d) Faux

(e) Vrai

Solution de la question 6. Il faut que $b = d$, $c = g$, et $f = h$.

Solution de la question 7.

(a) Faux
(b) Faux
(c) Faux
(d) Faux
(e) Faux (encore)
(f) Vrai (surpriiiiiisseee)
(g) Faux

Solution de la question 8. Il faut que

(a) $a = 2$, $b = 3$ et $c = 0$.

(b) $(x, y, z, t) = (3, 2, 1, 4)$

Solution de la question 9. On a une somme

(a) $\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 11 \\ \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$

(b) non définie.

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 10 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solution de la question 10. Les produits AB et BA sont respectivement

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -2 & 17 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 26 & 3 \\ 6 & -22 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 14 & 6 & -12 \\ 35 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & -22 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{39}{2} & 3 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{63}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -29 & 27 & \frac{31}{2} \\ 25 & -1 & \frac{-11}{2} \\ -24 & 37 & 18 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 8 - 4a + 11 \\ 36 - a \\ 5b + 2 \end{pmatrix}$ et pas défini

Solution de la question 11. Il faut que B soit de dimension $n \times m$.

Solution de la question 12. On a

(1)

$\begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) Impossible

(2) (a) $C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 24 & 48 & 32 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 22 & 19 & 44 \\ 54 & 45 & 104 \end{pmatrix}$

(b) Nope, il n'en existe pas !

Solution de la question 13. Les déterminants sont

(a) 13

(b) $-\frac{35}{2}$

(c) 36

(d) non défini

(e) -135

(f) 45

(g) $4ab$

(h) 1

Solution de la question 14. On a $S = \{-2, 4\}$.

Solution de la question 15. On a bien $\det(AB) = \det(A)\det(B) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$.

Solution de la question 16. On a

(a) $S = \{(5, -2)\}$

(b) $S = \left\{(-\frac{51}{13}, \frac{35}{13})\right\}$

(c) $S = \left\{(\frac{20}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{22}{9})\right\}$

(d) $S = \{(1, -1, 2)\}$

(e) $S = \{(17, -199, -38)\}$

(f) $S = \left\{(-\frac{49}{11}, -\frac{32}{11}, -\frac{15}{11})\right\}$

(g) $S = \left\{(\frac{7}{4} - \frac{13}{4}t, t, \frac{7t-1}{4}) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$

(h) $S = \emptyset$

(i) $S = \left\{(\frac{1-3y-6z}{4}, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\}$

(j) $S = \{(\alpha, \frac{3\alpha}{2}, \frac{5\alpha}{2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(k) $S = \left\{(\alpha, -\frac{\alpha}{3}, 5 - 4\alpha, 4 - \frac{11\alpha}{3}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

(l) $S = \{(y - z, y, z, 0) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

Solution de la question 17. On a

(a)
- Si $a \neq \frac{-5}{2}$ (et $b \in \mathbb{R}$), alors on a une solution unique
- Si $(a, b) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, alors on a une infinité de solutions.

(b) il faut $c - 3b + 2a = 0$.

Solution de la question 18. Il faut que $(x; y; z) = (1, 3, 5)$.

Solution de la question 19. On a

(a) $S = \{(100, 150, 200)\}$

(b) $S = \emptyset$ (snif)

Solution de la question 20. On a

(a)
- Si $(p, q) \neq (0, 1)$, alors le système admet une solution.
- Sinon (*i.e.* $(p, q) = (0, 1)$), le système admet une infinité de solutions.

(b) la condition $q = 1 + p$, avec $p \neq 0$.

Solution de la question 4. On a

(a) $S = \left\{(-\frac{49}{11}, -\frac{32}{11}, -\frac{15}{11})\right\}$

(b) $S = \left\{(\frac{20}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{22}{9})\right\}$

(c) $S = \{(1, -1, 2)\}$

(d) $S = \{(17, -199, -38)\}$