Module 1 : Atelier sur les ensembles

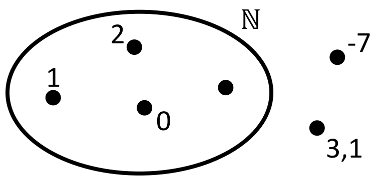
Objectifs

- Comprendre et savoir manipuler le vocabulaire et les notions des ensembles
- S'exercer à utiliser des notations de manière rigoureuse
- S'exercer à réfléchir de manière abstraite
- Se familiariser avec des notions de base ensemblistes utilisées dans le reste du cours ainsi que dans de nombreux autres cours.

A. La notion d'ensemble

(1) Quand on parle d'ensembles, on pense souvent à la représentation sous forme de « patates », ce qu'on appelle de manière plus technique un **<u>diagramme de Venn</u>** (dans ce document, les mots soulignés et gras désigneront des termes de vocabulaire). On y représente un ensemble par une forme ovale à l'intérieur de laquelle on indique les « choses » qui se trouvent dans l'ensemble.

Dans l'exemple à droite, on présente un ensemble qu'on a choisi d'appeler $\mathbb{N}$ (c'est un nom standard que vous connaissez peut-être, on en reparle plus loin). Dans cet ensemble se trouvent plusieurs nombres ; on a indiqué 0, 1 et 2 mais il y en a d'autres. Par contre, les valeurs -7 et 3,1 elles ont été placées en-dehors de l'ensemble.



(2) Avant d'aller plus loin, commençons par donner une définition pour la notion d'**<u>ensemble</u>**, dont on décortiquera ensuite chacun des mots.

« Un **<u>ensemble</u>** est une collection d'éléments sans ordre. »

C'est donc *une collection*… Cela signifie qu'un ensemble peut regrouper plusieurs choses ; plus précisément, un ensemble pourra rassembler zéro, une ou plusieurs choses.

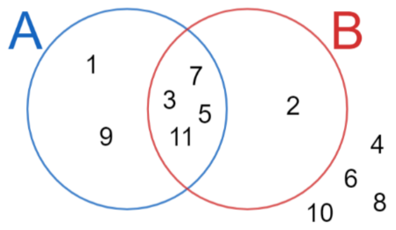
Ça rassemble *des éléments*… Le mot **<u>élément</u>** désigne de manière générale les « choses » qu'on trouve dans un ensemble. Il n'y a, a priori, aucune restriction sur la nature de ces éléments. Ainsi, on pourra parler de l'ensemble des étudiants inscrits à l'Henallux, de l'ensemble des entiers positifs pairs, de l'ensemble des meubles qui se trouvent dans votre chambre, de l'ensemble des programmes qui fonctionnent… voire même de l'ensemble regroupant les 4 ensembles qu'on vient de citer ici !

Un ensemble n'a *pas d'ordre*… Cela signifie que les éléments d'un ensemble sont rassemblés comme dans un sac ou un plumier. Si on vous demande de citer les éléments d'un ensemble, il faudra bien entendu les donner dans un certain ordre… mais vous pouvez choisir l'ordre que vous voulez : l'ensemble lui-même n'impose aucun ordre. Et donc, que l'on vous parle de l'ensemble qui contient les lettres A, B et C ou de l'ensemble qui contient les lettres C, A et B, il s'agit en fait d'un seul et même ensemble.

(3) **Premières notations concernant les ensembles.** Généralement, quand on veut donner un nom à un ensemble, on utilise une lettre majuscule : l'ensemble A, l'ensemble B. Certains ensembles bien spécifiques portent des noms standards qui sont également des lettres majuscules et qu'on distingue parfois en ajoutant une barre supplémentaire dans leur écriture : l'ensemble $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ (voir plus loin).

Quand on veut présenter un ensemble en citant ses éléments, on entoure généralement ceux-ci d'accolades. Ainsi, on pourrait définir l'ensemble B des numéros de blocs constituant le cursus en DA ou en IA en écrivant $B = \{1, 2, 3\}$. Notez qu'on aurait pu tout aussi bien écrire $B = \{2, 3, 1\}$ vu que l'ordre dans lequel on cite les éléments n'a pas d'importance.

Pour indiquer qu'un élément se trouve dans un ensemble, on utilise le symbole $\in$, comme par exemple $2 \in B$, ce qui se lit « 2 **appartient** à (l'ensemble) B. » Pour préciser qu'un élément ne se trouve pas dans un ensemble, on note $7 \notin B$, ce qui se lit « 7 **n'appartient pas** à B. »



(4) **Exercice.** Répondez aux questions suivantes en vous basant sur le diagramme de Venn ci-contre.

a) Complétez par $\in$ ou $\notin$: $9 \ldots A$
b) Complétez par $\in$ ou $\notin$: $9 \ldots B$
c) Complétez par $\in$ ou $\notin$: $5 \ldots A$
d) Complétez par $\in$ ou $\notin$: $5 \ldots B$
e) Tous les éléments de A sont des nombres impairs : vrai ou faux ?
f) Tous les éléments de B sont impairs : vrai ou faux ?
g) Tous les éléments de B sont des nombres premiers : vrai ou faux ?
h) Tous les nombres premiers sont des éléments de B : vrai ou faux ?

B. Quelques ensembles standards

(5) On a choisi des noms standards pour plusieurs ensembles qui sont régulièrement utilisés en mathématiques. En voici quelques-uns.

L'ensemble $\mathbb{N}$. La lettre $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des **naturels**, c'est-à-dire des nombres qu'on peut rencontrer dans la nature quand on compte des choses (les vaches dans un champ, les mots dans une phrase…). Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc.

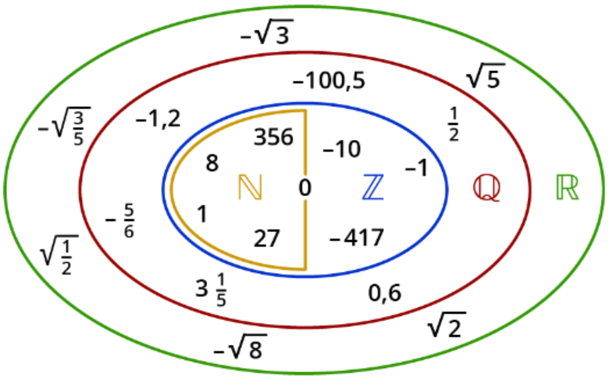
L'ensemble $\mathbb{Z}$. Quand on veut mesurer des choses telles que la température ou la hauteur par rapport au niveau de la mer, on se rend compte que les naturels ne sont pas suffisants : on a également besoin de nombres négatifs. On obtient alors l'ensemble noté $\mathbb{Z}$ qu'on appelle ensemble des **entiers**. Cet ensemble regroupe les entiers positifs (c'est-à-dire les naturels) ainsi que les entiers négatifs tels que -2, -7 ou -512.

L'ensemble $\mathbb{Q}$. Si on veut pouvoir calculer le résultat de n'importe quelle division (sauf la division par zéro bien sûr), on doit encore ajouter de nouvelles valeurs : les fractions. Celles-ci correspondent à ce qu'on appelle les nombres **rationnels** (de ratio = un rapport entre deux valeurs), comme 3,5 (correspondant à 7/2) ou encore 0,333333… (correspondant à 1/3). L'ensemble noté $\mathbb{Q}$ (Q pour quotient) reprend tous les nombres rationnels, c'est-à-dire tous les nombres qu'il est possible d'écrire sous la forme d'une fraction, qu'ils soient positifs ou négatifs.

L'ensemble $\mathbb{R}$. Et une fois encore, on se rend compte que les fractions ne suffisent pas pour résoudre tous les problèmes… Plusieurs nombres ne peuvent en effet tout simplement pas s'écrire sous la forme de fraction : c'est par exemple le cas de $\sqrt{2}$ ou encore de π. Si on ajoute ces nombres, qu'on dit **irrationnels**, à l'ensemble $\mathbb{Q}$, on obtient l'ensemble des **réels** noté $\mathbb{R}$.

Il existe encore d'autres ensembles standards (comme, entre autres, les nombres complexes) mais ceux-ci dépassent le cadre de ce cours.

(6) Notez que tous les ensembles cités ci-dessus s'emboîtent, dans le sens qu'ils sont de plus en plus grands : les naturels font partie des entiers ; les entiers sont des rationnels (par exemple, 8 peut s'écrire 8/1 et -417 correspond à la fraction -417/1) ; et les rationnels sont des réels.



(7) On accole parfois trois symboles aux noms de ces ensembles standards :

- un + en exposant indique qu'on ne considère que les valeurs positives ou nulles (par exemple $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls) ;
- un – en exposant indique qu'on ne considère que les valeurs négatives ou nulles (par exemple $\mathbb{Z}^-$ est l'ensemble des nombres négatifs $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$;
- un 0 en indice indique qu'on ne prend pas le nombre 0 (par exemple $\mathbb{Q}_0$ est l'ensemble de tous les nombres rationnels sauf zéro).

On peut également combiner un signe (+ ou -) avec l'indice 0 : par exemple, pour parler de l'ensemble des nombres réels *strictement* positifs, on peut utiliser $\mathbb{R}_0^+$.

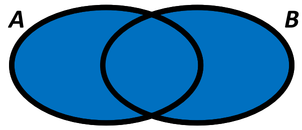
(8) **Exercice.** Répondez aux questions suivantes sur les ensembles standards.

a) Complétez par ∈ ou ∉ : $3{,}14 \dots \mathbb{Q}$
b) Complétez par ∈ ou ∉ : $\pi \dots \mathbb{Q}$
c) Complétez par ∈ ou ∉ : $9/3 \dots \mathbb{Z}$
d) Complétez par ∈ ou ∉ : $\sqrt{9} \dots \mathbb{N}$
e) Complétez par ∈ ou ∉ : $42/3\ \dots\ \mathbb{Q}^-$
f) Comment noter « l'ensemble des rationnels positifs ou nuls » ?
g) Comment noter « l'ensemble des entiers strictement négatifs » ?

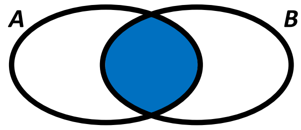
C. Opérations sur les ensembles

(9) Il existe plusieurs catégories d'opérations sur les ensembles. Commençons par les trois opérations sans doute les plus connues : l'**union** $\cup$, l'**intersection** $\cap$ et la **différence** $\setminus$.

Union de deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles, on définit leur **union** $A \cup B$ comme étant l'ensemble contenant tous les éléments de A ainsi que tous les éléments de B. Ainsi, un élément x appartiendra à l'ensemble $A \cup B$ s'il appartient à A ou s'il appartient à B.

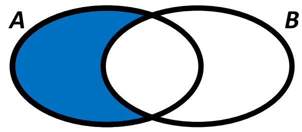


Intersection de deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles, on définit leur **intersection** $A \cap B$ comme étant l'ensemble contenant tous les éléments qui se trouvent à la fois dans A et dans B. Ainsi, un élément x appartiendra à l'ensemble $A \cap B$ s'il appartient à A et à B.



Si les ensembles A et B n'ont aucun élément en commun, leur intersection $A \cap B$ est un ensemble qui ne contient rien, aucun élément. Cet ensemble, qu'on appelle l'**ensemble vide**, se note $\{\}$ ou encore $\emptyset$. Si $A \cap B$ est vide, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.

Différence de deux ensembles. Si A et B sont deux ensembles, on définit leur **différence** $A \setminus B$ comme étant l'ensemble contenant tous les éléments qui se trouvent dans A mais *pas* dans B. Ainsi, un élément x appartiendra à l'ensemble $A \setminus B$ s'il appartient à A et qu'il n'appartient pas à B.



(10) Les trois opérations présentées ci-dessus (union, intersection et différence) s'appliquent sur deux ensembles et produisent un ensemble comme résultat. Les trois opérations suivantes s'appliquent elles aussi sur deux ensembles mais elles produisent un résultat qui est un booléen (vrai ou faux) au lieu d'un ensemble.

Inclusion. Si A et B sont des ensembles, $A \subseteq B$ est vrai si chaque élément de A est également un élément de B. Dans ce cas-là, on dit que A est **inclus** dans B ou encore que A est **une partie** ou **un sous-ensemble** de B. On a vu plus haut que, par exemple, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Égalité. Si A et B sont des ensembles, $A = B$ est vrai (on dit que les deux ensembles sont **égaux**) si les deux ensembles contiennent les mêmes éléments. Notez que cela revient à dire que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ sont vrais. Souvenez-vous aussi que l'ordre n'a pas d'importance dans un ensemble, donc on a bien par exemple $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$.

Inclusion stricte. Si A et B sont des ensembles, $A \subset B$ est vrai si chaque élément de A est également un élément de B et que les ensembles A et B ne sont pas égaux. Dans ce cas-là, on dit que A est **strictement inclus** dans B, ou encore que A est **une partie propre** ou **un sous-ensemble strict** de B.

Notez que l'opération $\subset$ sur les ensembles est à $\subseteq$ ce que $<$ est à $\leq$ quand on compare deux nombres. C'est pour cela que leurs notations sont similaires.

(11) *Note*. On a choisi de voir $\subseteq$, $=$ et $\subset$ comme des opérations à résultat booléen parce que c'est un point de vue qui correspond à leurs équivalents en informatique. On peut tout aussi bien les voir comme des relations au même sens que $<$, $\leq$ ou même encore $\in$. Les deux approches sont complètement équivalentes !

(12) **Exercice.** On considère B1 l'ensemble des étudiants et étudiantes inscrits en B1 à l'IESN . On note E l'ensemble des étudiantes en B1 et V, l'ensemble des personnes inscrites en B1 ayant moins de 20 ans. Réalisez un diagramme de Venn avec les ensembles B1, E et V.

a) À quoi correspond l'ensemble $E \cap V$ (sur le diagramme et description en français) ?
b) À quoi correspond l'ensemble $E \cup V$ (sur le diagramme et description en français) ?
c) À quoi correspond l'ensemble $E \setminus V$ (sur le diagramme et description en français) ?
d) À quoi correspond l'ensemble $V \setminus E$ (sur le diagramme et description en français) ?
e) Qu'est-ce que cela signifie si $E \subseteq V$?
f) Qu'est-ce que cela signifie si $E \subset V$?
g) Traduisez en notation ensembliste : tous les inscrits en B1 de moins de 20 ans sont des filles.

(13) **Exercice.** On considère les produits vendus dans un supermarché. Si F est l'ensemble des articles à conserver au frais, A l'ensemble des articles alimentaires et L l'ensemble des articles liquides, quel ensemble correspond…
(note : réalisez un diagramme de Venn avec les ensembles A, L et F)

a) aux articles alimentaires qui doivent être conservés au frais ?
b) aux boissons (c'est-à-dire aux articles alimentaires qui sont liquides) ?
c) aux articles nécessitant un camion de transport particulier (on a besoin d'un transport particulier pour les articles liquides et pour les articles à conserver au froid) ?
d) aux aliments solides (à savoir non liquides) ?
e) aux liquides qui ne peuvent pas être consommés ?

(14) **Exercice.** Répondez aux questions suivantes.

a) Soient $A = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $D = \{3, 4, 5\}$. Si on sait que l'ensemble X est une partie de A et que X et B sont disjoints, que peut-on affirmer au sujet de X et de C ?
b) Avec les mêmes ensembles que précédemment mais, cette fois-ci, on sait que X est une partie de A, que $X \subseteq D$ est vrai mais que $X \subseteq B$ est faux. Citez toutes les possibilités pour X.
c) On définit parfois l'opération appelée « différence symétrique » comme suit : si A et B sont deux ensembles, leur différence symétrique $A \bowtie B$, est l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Représentez cet ensemble sur un diagramme de Venn.

d) Si A est l'ensemble des nombres pairs et B, l'ensemble des multiples de 3, quels sont les 8 premiers (au sens de plus petits) éléments de $A \bowtie B$?

D. Exprimer un ensemble

(15) Dans les sections précédentes, on a déjà vu plusieurs manières de présenter un ensemble. On peut par exemple faire référence à un ensemble standard comme $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}_0^+$, ou encore utiliser des opérations ensemblistes comme $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{N}$, ou encore citer les éléments appartenant à l'ensemble.

(16) Lorsqu'on cite les éléments qui font partie d'un ensemble, on dit qu'on définit l'ensemble **en extension**. Par exemple, $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ est une définition en extension de l'ensemble des chiffres pairs. Si l'ensemble est infini, on peut utiliser des points de suspension, comme dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Note. Deux mots de vocabulaire importants à distinguer : chiffres et nombres. Les chiffres sont les dix symboles 0, 1, 2, 3, …, 9 qui sont utilisés pour écrire des nombres. La différence entre un chiffre et un nombre est donc la même qu'entre une lettre et un mot.

On oppose souvent la définition en extension à la définition **en compréhension**. Définir un ensemble **en compréhension**, c'est indiquer une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble, c'est-à-dire une propriété que les éléments de l'ensemble, et seulement eux, vérifient. Dans le cas de l'ensemble P du paragraphe précédent, on peut utiliser la propriété « être un chiffre pair » et définir P en compréhension par « P est l'ensemble des chiffres pairs. » Cette définition peut être écrite en français ou de manière plus symbolique : $P = \{x : x \text{ est un chiffre pair}\}$.

(17) **Exercice.** Présentez les ensembles suivants de la manière demandée.

a) A, l'ensemble des noms des jours de la semaine qui se terminent par la lettre i, en extension.
b) $B = \{x : x \text{ est une consonne apparaissant dans le mot « Belgique »}\}$, en extension.
c) $C = \{x : x \text{ est un chiffre qui peut apparaître à la fin d'un multiple de } 5\}$, en extension.
d) $D = \{e, a, u\}$ en compréhension.
e) $E = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ en compréhension.

(18) Quand on veut parler de l'ensemble de tous les nombres réels compris dans une fourchette entre deux valeurs données, on peut utiliser des notations spécifiques pour ces **intervalles** de réels. On écrit les deux valeurs qui délimitent la fourchette, on les sépare par une virgule (ou un point-virgule si les nombres sont décimaux) et on place des crochets] ou [avant et après ces valeurs, selon qu'on veut que les valeurs fassent partie de l'ensemble ou pas. Graphiquement, on peut voir les crochets comme des paires de bras qui enserrent la valeur (si on la veut dans l'intervalle) ou s'en détournent (si on ne la veut pas).

Ainsi, $[3,5]$ est l'ensemble de tous les réels x vérifiant $3 \leq x \leq 5$. Les réels 3 et 5 sont dans cet ensemble (les bras des crochets les embrassent). Pour parler des réels x vérifiant $3 < x \leq 5$, c'est-à-dire *sans* le 3, on noterait $]3,5]$. Les deux autres variations possibles sont $[3,5[$: avec 3 mais sans 5, et $]3,5[$: sans le 3 ni le 5.

Cette notation peut aussi servir à désigner tous les nombres plus grands qu'une valeur donnée, en utilisant le symbole $+\infty$. Par exemple, $[3,+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geq 3$ alors que $]3,+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x > 3$. Notez que ∞ n'est pas un véritable réel et qu'il ne fait jamais partie de l'ensemble : il est donc suivi du crochet [et jamais de].

On peut aussi utiliser le symbole $-\infty$ de la même manière. Par exemple, $]-\infty,7]$ correspond à l'ensemble $\{x : x \leq 7\}$.

(19) **Exercice.** Écrivez sous forme d'intervalle les ensembles de réels suivants.

a) $\{x : -10 < x \leq 5\}$, sous forme d'intervalle
b) $\{x : 17 \leq x < 23\}$, sous forme d'intervalle
c) $\mathbb{R}_0^+$ sous forme d'intervalle
d) $]-10,7] \cap]4,10[$ sous forme d'intervalle
e) $[3,15[\cup]-3,5]$ sous forme d'intervalle
f) $[1,10] \setminus [5,10]$ sous forme d'intervalle

(20) Finalement, on utilise parfois des expressions pour présenter des ensembles qu'on peut obtenir en appliquant un certain calcul sur les éléments d'un ensemble de départ. Par exemple, la notation $2\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble obtenu en remplaçant chaque élément x de $\mathbb{N}$ par $2x+1$. Comme $\mathbb{N}$ est l'ensemble $\{0,1,2,3,4,\dots\}$, le résultat obtenu est l'ensemble $\{1,3,5,7,9,\dots\}$ vu que $2\times 0+1=1$, $2\times 1+1=3$, $2\times 2+1=5$, etc. L'ensemble $2\mathbb{N}+1$ est donc l'ensemble des naturels impairs.

De même, $6\mathbb{Z}$ est l'ensemble obtenu en remplaçant chaque élément x de $\mathbb{Z}$ par $6x$. Comme $\mathbb{Z}$ contient les valeurs 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, …, le résultat est l'ensemble $\{0,6,-6,12,-12,18,-18,\dots\}$ de tous les multiples de 6.

De manière générale, si k est un naturel, la notation $k\mathbb{Z}$ correspondra donc à l'ensemble de tous les multiples de k, positifs ou négatifs. Si on ne veut prendre en compte que les multiples positifs, on utilisera plutôt $k\mathbb{N}$.

(21) **Exercice.** Présentez les ensembles suivants de la manière demandée.

a) $10\mathbb{N}$, en compréhension
b) $7\mathbb{N}+2$, en extension
c) l'ensemble des entiers pairs positifs ou nul, sous forme d'expression
d) $2\mathbb{Z}+4$, sous forme d'une autre expression
e) $3\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}$, sous forme d'expression
f) $3\mathbb{N} \cup 2\mathbb{N}$, en compréhension
g) $3\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, en compréhension et sous forme d'expression

E. Taille d'un ensemble

(22) Il existe des ensembles de tailles différentes. Le plus « petit » ensemble, celui qui ne contient aucun élément, est l'**ensemble vide** (voir plus haut) $\emptyset$. Viennent ensuite les ensembles qui ne contiennent qu'un seul élément et qu'on appelle des **singletons** ; c'est par exemple le cas de l'ensemble $\{0\}$ qui ne contient que le nombre 0. Les ensembles qui contiennent exactement deux éléments portent eux aussi un nom : ce sont des **paires**. Les écritures $\{4,2\}$ et $\{2,4\}$ désignent toutes les deux la même paire, à savoir l'ensemble qui contient les nombres 2 et 4.

Tant que le nombre d'éléments d'un ensemble correspond à un naturel (0, 1, 2, 3, …), on dit que l'ensemble est **fini**. L'ensemble P des provinces de Belgique, l'ensemble L des lettres de l'alphabet, et même l'ensemble H de tous les humains vivants et ayant vécu sont des ensembles finis. Dans le cas d'un ensemble fini, on définit son **cardinal**, comme étant le nombre d'éléments qui lui appartiennent. Le cardinal d'un ensemble A se note $\#A$ (hash-tag, croisillon, dièse ou cardinal selon les générations) ; on a par exemple $\#L = 26$.

Certains ensembles possèdent un nombre d'éléments qui est plus grand que n'importe quel naturel. On parle alors d'ensemble **infini**. C'est par exemple le cas de l'ensemble $\mathbb{N}$: il a plus de 4 éléments, mais aussi plus de 5 éléments, mais aussi plus de 6 éléments… Pour information, même parmi les ensembles infinis, il y en a certains qui sont « plus grands » que d'autres ; par exemple, on peut énumérer les éléments de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ alors que $ce\ n'est\ pas\ possible\ pour\ \mathbb{R}$. Pour les distinguer, on dit que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles **infinis dénombrables** alors que $\mathbb{R}$ est **infini indénombrable**.

(23) **Exercice.** Répondez aux questions suivantes.

a) Que vaut $\#\{x : x$ est une lettre du mot « infini »$\}$?
b) Si $A = 3\mathbb{N} \cap [-3, 6[$, que vaut $\#A$?
c) Si X et Y sont deux ensembles, à quelle condition a-t-on $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$?
d) Si X et Y sont deux ensembles, à quelle condition a-t-on $\#(X \backslash Y) = \#X - \#Y$?
e) Parmi les sous-ensembles de $B = \{1,2,3,4,5\}$, combien sont des singletons ?
f) Parmi les sous-ensembles de $B = \{1,2,3,4,5\}$, combien sont des paires ?