Haute Ecole de Namur - Liège - Luxembourg
Département économique
Implantation IESN

Bachelier en Informatique de Gestion

UE IG226

Modélisation de l'événementiel

Module 2 : Probabilités

Lamia Baghdadi

Corinne Derwa

Année académique 2021-2022

Introduction

Le but de ce premier module de cours est d'évaluer les chances (= la probabilité) qu'une situation (= un événement) a de se produire.
Cela va du problème le plus simple : « en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité de tirer un as ? » à un problème plus compliqué : « Sachant que le revenu annuel des ménages est distribué normalement, avec un revenu moyen de 20 000 € et un écart-type de 10 000 €, quelle est la probabilité qu'un ménage, dont on sait que ses revenus annuels sont supérieurs à 22 000 €, bénéficie de revenus compris entre 27 000 € et 35 000 € ? »

Table des matières

Chapitre 1 : Eléments de Probabilité

1.1 Expérience aléatoire et événements

- Une ***expérience aléatoire***, ou encore épreuve, est une expérience où le hasard intervient ; son issue n'est donc pas connue à priori.

  Exemples :

  1) Tirer une carte dans un jeu de 52 cartes.
  2) Observer si un patient présente une réaction allergique grave suite à l'absorption d'un médicament.
  3) Contrôler le taux d'alcoolémie d'un conducteur au volant.

- L'***espace d'échantillonnage*** est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Cet espace est noté Ω.

  - Pour l'exemple 1,
    Ω = {2 de cœur → as de cœur, 2 de carreau → as de carreau, 2 de trèfle → as de
    trèfle, 2 de pique → as de pique}.

  - Pour l'exemple 2, Ω = {oui, non}.

  - Pour l'exemple 3, Ω = [0 g, 5 g] (quelque fois qu'un inconscient prendrait le volant avec 5g d'alcool dans le sang !)

- On appelle ***événement***, tout sous-ensemble de Ω.

  - Pour l'exemple 1,
    E_1 = {2 de cœur → as de cœur}, E_2 = {rois, dames, valets} sont des événements.

- Pour l'exemple 2,
  E_1 = {oui}, E_2 = {non} sont des événements.

- Pour l'exemple 3,
  E_1 = [0 g, 0.5 g], E_2 = [1 g, 2 g] sont des événements.

➢ Un *événement E est réalisé* si l'issue de l'expérience aléatoire est un élément de E.

- Pour l'exemple 1,
  si E_1 = {2 de cœur → as de cœur} et que l'on tire le 5 de cœur, E_1 sera réalisé.
  Par contre, si on tire le valet de pique, E_1 ne sera pas réalisé.

- Pour l'exemple 2,
  si E_1 = {oui} et que le patient soigné présente une réaction allergique grave, E_1 sera réalisé.
  Par contre, si le patient ne présente aucune réaction allergique grave, E_1 ne sera pas réalisé.

- Pour l'exemple 3,
  si E_1 = [0 g, 0.5 g] et que le conducteur contrôlé présente un taux d'alcoolémie de 0.2 g, E_1 sera réalisé.
  Par contre si le taux est de 0.7 *g*, E_1 ne sera pas réalisé.

➢ <u>Remarques</u>

- ϕ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

- Quelle que soit l'expérience aléatoire, Ω est toujours réalisé.
  C'est l'événement certain.

- Un événement n'est pas nécessairement désigné par la lettre E,
  - E_1 = {2 de cœur → as de cœur} aurait pu être désigné par Co.
  - E_1 = {oui} aurait pu être désigné par O.
  - E_1 = [0 g, 0.5 g] aurait pu être désigné par S(Sobre).

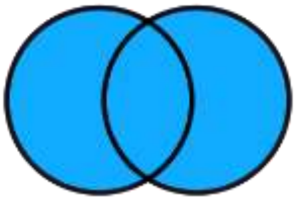
  Dans la pratique, la lettre (ou le groupe de lettres) choisie rappelle le « contenu » de l'événement.

1.2 Quelques rappels sur les notations ensemblistes

- $A \cup B$ (***A union B***) désigne les éléments qui sont dans *A* **ou** dans *B*, le « ou » n'étant pas exclusif.

  Exemple

  Si *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et *B* = {5, 6, 7, 8, 9}, alors $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
  Schématiquement :



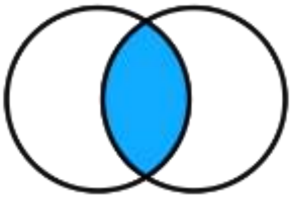
A *B*

  L'événement $A \cup B$ est réalisé ssi l'événement *A* est réalisé ou l'événement *B* est réalisé. Le « ou » n'est pas exclusif.

- $A \cap B$ (***A inter B***) désigne les éléments qui sont à la fois dans *A* **et** dans *B*.

  Exemple

  Si *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et *B* = {5, 6, 7, 8, 9}, alors $A \cap B$ = {5, 6}.
  Schématiquement :



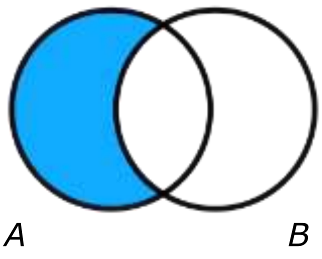
A *B*

  L'événement $A \cap B$ est réalisé ssi les événements *A* et *B* sont réalisés.

- $A \setminus B$ (***A moins B***) désigne les éléments qui sont dans *A* et qui ne sont pas dans *B*.

  Exemple

  Si *A* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} et *B* = {5, 6, 7, 8, 9}, alors $A \setminus B$ = {1, 2, 3, 4}.
  Schématiquement :

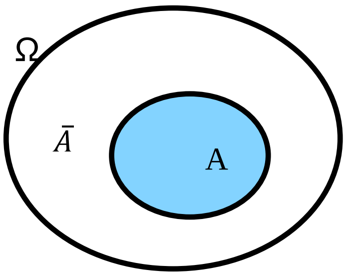


On constate que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
L'événement $A \setminus B$ est réalisé ssi l'événement *A* est réalisé et que l'événement *B* ne l'est pas.

- $\bar{A}$ désigne ***le complémentaire de A***. Il contient les éléments qui ne sont pas dans *A*.

  Exemple

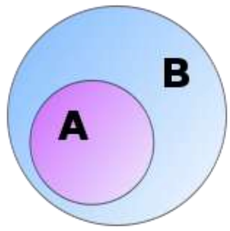
  Si Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} et *A* = {4, 5, 6}, alors $\bar{A}$ = {1, 2, 3, 7, 8}.
  Schématiquement :



- $A \subseteq B$ (***A est inclus B***) ssi tous les éléments de *A* sont éléments de *B.*

  Exemple

  Si *A* = {1, 2, 3} et *B* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, alors on peut dire que $A \subseteq B$.
  Schématiquement :



A est un sous-ensemble de *B.*
Si *A* est réalisé, alors *B* est lui aussi réalisé.

1.3 Notions de probabilité

La probabilité est un concept mathématique qui permet d'évaluer la (mal)chance qu'un événement E a d'être réalisé, elle est notée Pr E.

1.3.1 Définition de Laplace

On utilise souvent et de façon naturelle cette définition sans le savoir :

Quelle est la probabilité de tirer un cœur en tirant une carte dans un jeu de 52 cartes ?
E = {cœurs}.
Il y a 13 cœurs dans un jeu de 52 cartes.
Donc $\Pr E = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Définition :

Soit une épreuve ayant ***n*** issues possibles (*n* = 52).

- Si ces ***n*** issues s'excluent mutuellement (si on tire l'as de pique, on ne tire pas le 2 de carreau).
- Si ces ***n*** issues ont autant de chances les unes que les autres de se produire (on a une chance sur 52 de tirer une carte quelconque).
- Si parmi ces ***n*** issues, $\boldsymbol{n_E}$ sont favorables à la réalisation d'un événement *E.*
  (E = {cœurs} et n_E = 13)

Alors la ***probabilité de E*** est :

$$\boxed{\Pr E = \frac{n_E}{n} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

(Il y a un problème avec cette définition. Lequel ?)

Exemple

Dans un groupe de 20 personnes il y a 6 filles. Parmi ces 20 personnes il faut en choisir 3 au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit 3 filles ?

Nombre de cas possibles : $C_{20}^{3} = 1140$
(choisir 3 éléments parmi 20, l'ordre n'intervenant pas).

Nombre de cas favorables : $C_6^3 = 20$

(choisir 3 éléments parmi 6, l'ordre n'intervenant pas)

Probabilité demandée : $\frac{20}{1140} = 0.01754385965$

1.3.2 Définition comme limite de fréquence

Comme pour la définition de Laplace, on utilise souvent et de façon naturelle cette définition sans le savoir :

> On a observé les réactions allergiques graves suite à l'absorption d'un médicament. Sur 10 000 patients traités, 15 ont développé une réaction allergique grave. Si je consomme ce médicament, quelle est la probabilité que je développe une réaction allergique grave ?
>
> E = {réaction grave} $\Pr E = \frac{15}{10\ 000} = 0.0015$
>
> Le calcul de la probabilité se base ici sur le fait que cette dernière peut être considérée comme limite de fréquence.

Définition

Soit une épreuve répétée ***n*** fois (*n* = 10 000).
A chaque épreuve on note le résultat.
Soit $\boldsymbol{n_E}$ le nombre de fois où l'événement E se réalise au cours des ***n*** épreuves.
(E = {réaction grave} et n_E = 15)

Alors, la ***probabilité de E*** est :

$$PrE = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n}$$

Exemple

> D'après l'IBSR, sur 2 000 000 contrôles du taux d'alcoolémie, 1 725 000 ont révélé un taux inférieur à 0.5*g* (données fictives). Quelle est la probabilité que le prochain conducteur contrôlé puisse poursuivre sa route ?
>
> E = [0 g, 0.5 g] $PrE = \frac{1725000}{2000000} = 0.8625$

1.3.3 Définition par la théorie de la mesure

a) Algèbre de Boole

Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{F}$un ensemble de sous- ensembles de Ω. F est une ***Algèbre de Boole*** de parties de Ω ssi :

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- On a la stabilité pour l'union et le complémentaire, c'est-à-dire :
  - $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \cup B \in \mathcal{F}$
  - $\forall\, A \in \mathcal{F},\ \bar{A} \in \mathcal{F}$

Exemple

Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
$\mathcal{F} = \{\Omega, \Phi, \{5\}, \{6\}, \{5,6\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4\}\}$ est une algèbre de Boole sur Ω. (A vérifier).

Quel que soit Ω, la plus petite algèbre de Boole sur Ω est donnée par $\{\Omega, \Phi\}$ et la plus grande algèbre de Boole est donnée par $\mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble de tous les sous-ensembles de Ω).

Remarque : la stabilité pour l'union et le complémentaire entraîne la stabilité pour l'intersection et la différence.

En effet,
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Car $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B}$
$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

Donc :
$A \text{ et } B \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ $\bar{A} \text{ et } \bar{B} \in \mathcal{F}$ car on a la stabilité pour le complémentaire,
$\Rightarrow$ $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{F}$ car on a la stabilité pour l'union,
$\Rightarrow$ $\overline{A \cap B} \in \mathcal{F}$ car $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
$\Rightarrow$ $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathcal{F}$ car on a la stabilité pour le complémentaire,
$\Rightarrow$ on a la stabilité pour l'intersection.

De plus, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

La stabilité pour le complémentaire et l'intersection permettront de démontrer la stabilité pour la différence.

b) <u>Mesure positive bornée</u>

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une algèbre de Boole sur Ω.
Soit une application $\mu : \mathcal{F} \to R^+ : A \to \mu(A)$.
μ est une ***<u>mesure</u>*** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ ssi

- $\exists\, C \in R^+ : \forall A \in \mathcal{F}, \mu(A) \leq C$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

<u>Exemple</u> :
Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
$\mu : \mathcal{F} \to R^+ : A \to \mu(A) = \#A$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$
(A vérifier)

<u>Remarque</u> : $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

c) <u>Définition d'une « probabilité »</u>

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une algèbre de Boole sur Ω et μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
μ est une ***<u>probabilité</u>*** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ ssi $\mu(\Omega) = 1$.

<u>Exemple</u> :
La mesure définie précédemment n'est pas une probabilité car $\mu(\Omega) = 6$.
Mais, $Pr : \mathcal{F} \to R^+ : A \to \mu(A) = (\#A)/6$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.4 Quelques théorèmes relatifs aux probabilités.

Les ensembles intervenant dans les théorèmes suivants sont censés appartenir à $\mathcal{F}$ et Pr est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1. $\boxed{A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr A + \Pr B}$

   Ceci découle de la définition d'une mesure et du fait qu'une probabilité est une mesure.
   Remarque : Nous pouvons généraliser cette propriété à l'union de plusieurs ensembles disjoints 2 à 2.
   Ainsi, $\boxed{A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B \cup C) = \Pr A + \Pr B + \Pr C}$

2. $\boxed{\Pr \emptyset = 0}$

   En effet,
   $\forall\, A, A \cup \emptyset = A \text{ et } A \cap B \ \ A \cap \emptyset = \emptyset$
   Donc $\Pr A = \Pr(A \cup \emptyset) = \Pr A + \Pr \emptyset$ et par conséquent, $\Pr \emptyset = 0$

3. $\boxed{B \subset A \Rightarrow \Pr(A \backslash B) = \Pr A - \Pr B}$

   En effet,
   $B \subset A \Rightarrow A = (A \backslash B) \cup B$. De plus on sait que $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$.
   Donc $\Pr A = \Pr\big((A \backslash B) \cup B\big) = \Pr(A \backslash B) + \Pr B$
   et par conséquent $\Pr(A \backslash B) = \Pr A - \Pr B$

   Remarque : De cette propriété, nous pouvons déduire que $B \subset A \Rightarrow \Pr B \leq \Pr A$

4. $\boxed{\Pr(A \cup B) = \Pr A + \Pr B - \Pr(A \cap B)}$ (Relation de Boole)

   En effet,
   $A \backslash (A \cap B\,), B \backslash (A \cap B\,)$ et $A \cap B$ sont disjoints 2 à 2.
   Et $A \cup B = \big(A \backslash (A \cap B)\big) \cup \Big(\big(B \backslash (A \cap B)\big)\Big) \cup (A \cap B)$.
   Donc $\Pr(A \cup B) = \Pr\big(A \backslash (A \cap B)\big) + \Pr\big(B \backslash (A \cap B)\big) + \Pr(A \cap B)$
   $= \Pr A - \Pr(A \cap B) + \Pr B - \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B)$
   $= \Pr A + \Pr B - \Pr(A \cap B)$

<u>Les 4 propriétés ci-dessus sont également valables pour les mesures</u>

5. $\boxed{0 \leq \Pr A \leq 1}$

   Ceci découle de la remarque relative à la 3ème propriété : $B \subset A \Rightarrow \Pr B \leq \Pr A$
   $\emptyset \subset A \subset \Omega \Rightarrow \Pr \emptyset \leq \Pr A \leq \Pr \Omega \Rightarrow 0 \leq \Pr A \leq 1$

6. $\boxed{\Pr \bar{A} = 1 - \Pr A}$

1.5 Probabilité conditionnelle et événements indépendants

1.5.1 Probabilité conditionnelle

- Chacun sait qu'à travers le monde, certains travailleurs sont exploités par leur employeur. Chacun sait aussi que la proportion de travailleuses exploitées est supérieure à la proportion de travailleurs exploités ; ce qui fait dire que la probabilité d'être exploité si on est une femme est supérieure à la probabilité d'être exploité si on est un homme. C'est la notion de probabilité conditionnelle.

Soit F l'événement « être une travailleuse (→ femme) ».
Soit H l'événement « être un travailleur (→ homme) ».
Soit E l'événement « être exploité ».
La probabilité de l'événement « être exploité sachant qu'on est une travailleuse » est notée $\Pr(E|F)$.
La probabilité de l'événement « être exploité sachant qu'on est un travailleur » est notée $\Pr(E|H)$.
Comment calculer $\Pr(E|F)$ et $\Pr(E|H)$?

- Supposons une multinationale qui emploie 500 000 personnes à travers le monde[1],

On sait que :
- 30% des personnes employées sont des femmes (par conséquent, 70% sont des hommes) ;
- 10% des personnes employées sont des femmes exploitées ;
- 12% des personnes employées sont des hommes exploités.

En termes de probabilité, cela se traduit par :

$$\Pr F = 0.3, \qquad \Pr H = 0.7, \qquad \Pr(F \cap E) = 0.1, \qquad \Pr(H \cap E) = 0.12$$

- Calcul de $\Pr(E|F)$:

La multinationale emploie 150 000 femmes (30% de 500 000).
La multinationale emploie 50 000 femmes exploitées (10% de 500 000).

[1] Comme on le verra par la suite, cette donnée est superflue mais elle constitue un « bon support » pour établir la formule.

Par conséquent, la probabilité d'être exploitée si on est une femme $\Pr(E|F)$, est donnée par :

$$\frac{50000}{150000} = \frac{1}{3} = 0.333 \ldots$$

Vu que 50 000 = 0.1 * 500 000 et que 150 000 = 0.3 * 500 000, on peut écrire que :

$$\Pr(E|F) = \frac{0.1 * 500000}{0.3 * 500000} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{\Pr(E \cap F)}{\Pr F}$$

- Calcul de $\Pr(E|H)$

La multinationale emploie 350 000 hommes (70% de 500 000).
La multinationale emploie 60 000 hommes exploités (12% de 500 000).
Par conséquent, la probabilité d'être exploité si on est un homme $\Pr(E|H)$, est donnée par :

$$\frac{60000}{350000} = \frac{6}{35} = 0.17142 \ldots$$

Vu que 60 000 = 0.12 * 500 000 et que 350 000 = 0.7 * 500 000, on peut écrire que :

$$\Pr(E|H) = \frac{0.12 * 500000}{0.7 * 500000} = \frac{0.12}{0.7} = \frac{\Pr(E \cap H)}{\Pr H}$$

- De façon générale,

  Si *B* est ***<u>antérieur</u>*** à *A*, $\boxed{\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr B}}$

  à condition que $\Pr B \neq 0$.

<u>1.5.2 Probabilité de l'intersection de deux événements</u>

De la formule $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr B}$, nous pouvons déduire que :

$$\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) * \Pr B}$$

<u>Exemple</u> :
Dans une région, on constate que 65% des ménages sont propriétaires de leur logement. Parmi ces heureux propriétaires, 30 % sont des retraités. Quelle est la probabilité d'être un ménage de retraités propriétaires de son logement ?

Si *P* désigne l'événement « être propriétaire de son logement »,

Si *R* désigne l'événement « être retraité »,
On sait que $\Pr P = 0.65$ et que $\Pr(R|P) = 0.3$.
On demande $\Pr(R \cap P)$.

$$\Pr(R \cap P) = \Pr(R|P) * \Pr P = 0.3 * 0.65 = 0.195$$

Remarque :
Vu que $A \cap B = B \cap A$, nous pouvons inverser *A* et *B* et écrire :

$$\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) * \Pr A}$$

Pour 3 événements *A*, *B* et *C* cette formule devient :

$$\boxed{\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr A * \Pr(B|A) * \Pr\big(C|(A \cap B)\big)}$$

1.5.3 Probabilité des causes (Formule de Bayes)

Il arrive qu'on connaisse une probabilité conditionnelle et qu'on souhaite connaître la probabilité conditionnelle « inverse ».

Plus précisément, on sait que *B* est antérieur à *A* et on connait $\Pr(A|B)$. On souhaiterait connaitre $\Pr(B|A)$. C'est ce qu'on appelle la probabilité des causes.

Nous savons que $\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr B}$, donc, en inversant *A* et *B*, nous pouvons écrire que $\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr A}$.

Or, nous avons vu précédemment que $\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) * \Pr B$.

Donc $\boxed{\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) * \Pr B}{\Pr A}}$ (formule de Bayes)

Exemple 1

Dans une certaine population, on sait que 20% des personnes sont des fumeurs. Parmi ceux-ci, 70% connaissent ou connaîtront des problèmes de santé (non liés à l'âge ou à un accident). Ce pourcentage est de 45 pour l'ensemble de la population (données fictives).
Quelle est la probabilité qu'une personne qui connaît ou connaîtra des problèmes de santé (non liés à l'âge ou à un accident) soit fumeuse ?

Soit *F* l'événement « être fumeur » et *S* l'événement « connaître des problèmes de santé ».
On sait que $\Pr F = 0.2,\ \Pr(S|F) = 0.7,\ \Pr S = 0.45$.
On demande $\Pr(F|S)$.

$$\Pr(F|S) = \frac{\Pr(S|F) * \Pr F}{\Pr S} = \frac{0.7 * 0.2}{0.45} = 0.31111$$

Exemple 2

Le soir, Jules soupe chez lui (6 fois sur 10), chez des amis (3 fois sur 10). Dans les autres cas, il ne soupe pas ou soupe au resto. Lorsqu'il soupe chez lui, il arrive rarement que Jules termine la soirée éméché (2 fois sur 100). Par contre s'il soupe chez des amis, on passe à 2 chances sur 10 et lorsqu'il ne soupe pas ou soupe au resto, on monte à 1 chance sur 2. Un matin, Jules se réveille avec un solide mal de tête dû à une soirée trop arrosée. Quelle est la probabilité qu'il ait soupé la veille chez des amis ?

Soit *L* l'événement « souper chez lui », *A* l'événement « souper chez des amis », *R* l'événement « ne pas souper ou souper au resto » et *E* l'événement « être éméché ».

On sait que $\Pr L = 0.6,\ \Pr A = 0.3,\ \ \Pr R = 0.1$
$\Pr(E|L) = 0.02, \qquad \Pr(E|A) = \ 0.2,\ \ \Pr(E|R) = 0.5$

On demande $\Pr(A|E)$.

$$\Pr(A|E) = \frac{\Pr(E|A) * \Pr A}{\Pr E} = \frac{0.2 * 0.3}{???}$$

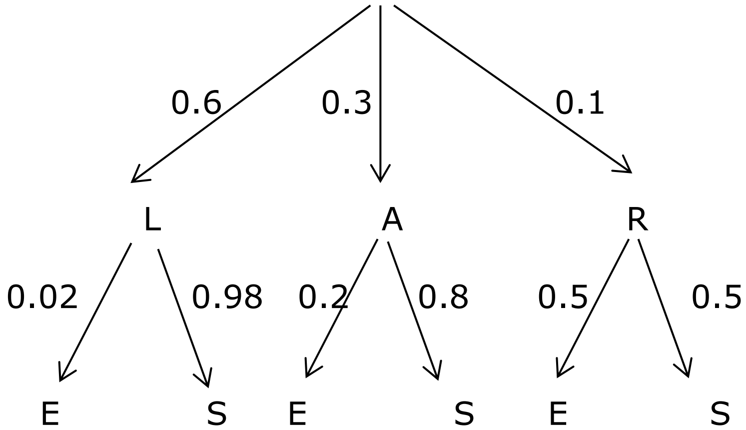
Nous savons que $L \cup A \cup R = \Omega$.
Donc $E = E \cap \Omega = E \cap (L \cup A \cup R) = (E \cap L) \cup (E \cap A) \cup (E \cap R)$.
De plus, les ensembles $E \cap L$, $E \cap A$ et $E \cap R$ sont disjoints.
Par conséquent,
$\Pr E\ = \Pr[(E \cap L) \cup (E \cap A) \cup (E \cap R)]$
$= \Pr(E \cap L) + \Pr(E \cap A) + \Pr(E \cap R)$
$= \Pr(E|L) * \Pr L + \Pr(E|A) * \Pr A + \Pr(E|R) * \Pr R$
Et donc,

$$\Pr(A|E) = \frac{\Pr(E|A) * \Pr A}{\Pr E}$$

$$= \frac{\Pr(E|A) * \Pr A}{\Pr(E|L) * \Pr L + \Pr(E|A) * \Pr A + \Pr(E|R) * \Pr R}$$

$$= \frac{0.2 * 0.3}{0.02 * 0.6 + 0.2 * 0.3 + 0.5 * 0.1} = \frac{0.06}{0.122} = 0.4918032787 \ldots$$

Schématiquement :



De manière générale, nous pouvons écrire que,

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$sont des événements disjoints deux à deux
tels que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
alors $\Pr A = \Pr(A|B_1) * \Pr B_1 + \Pr(A|B_2) * \Pr B_2 + \cdots + \Pr(A|B_n) * \Pr B_n$

$$\boxed{\Pr A = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A|B_i) * \Pr B_i}$$

Ce qui conduit à une formule de Bayes « améliorée » :

$$\boxed{\Pr(B_k|A) = \frac{\Pr(A|B_k) * \Pr B_k}{\Pr A} = \frac{\Pr(A|B_k) * \Pr B_k}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(A|B_i) * \Pr B_i}}$$

1.5.4 Événements statistiquement indépendants

Deux événements *A* et *B* sont statistiquement indépendants

ssi

$$\Pr(A|B) = \Pr A$$

Ce qui est équivalent à $\Pr(B|A) = \Pr B$.

Exemple : Le bon sens conduit à dire que les événements

A = « avoir les yeux bleus

B = « boire du thé au petit déjeuner »

sont statistiquement indépendants.

Contre-exemple : Dans l'exemple concernant les fumeurs, il est clair que les événements « être fumeur » et « connaître des problèmes de santé » ne sont pas statistiquement indépendants.

En effet,

$\Pr F = 0.2$ et $\Pr(F|S) = 0.31111$

$\Pr S = 0.45$ et $\Pr(S|F) = 0.7$

Propriété :

Si *A* et *B* sont statistiquement indépendants, on a

$$\boxed{\Pr(A \cap B) = \Pr A * \Pr B}$$

Application : Filtre bayésien anti-spam

Considérons l'ensemble des messages que l'on peut répartir en deux catégories : les spams et les hams (non-spams). Tout message appartient à une et une seule des deux catégories.

1. Calcul de la probabilité qu'un message soit un spam s'il contient un mot donné

   Choisissons par exemple le mot « viagra ».

$$\Pr(Spam|\text{« viagra »}) = \frac{\Pr(\text{« viagra »}|Spam) * \Pr(Spam)}{\Pr(\text{« viagra »})}$$
$$= \frac{\Pr(\text{« viagra »}|Spam) * \Pr(Spam)}{\Pr(\text{« viagra »}|Spam) * \Pr(Spam) + \Pr(\text{« viagra »}|Ham) * \Pr(Ham)}$$

   Cette quantité est appelée ***spamicité*** du mot « viagra ».
   Elle peut être calculée :
   - La plupart des logiciels bayésiens de détection du spam considèrent qu'il n'y a pas de raison à priori qu'un message reçu soit du spam plutôt que du ham. Dans ce cas, $\Pr(Spam) = \Pr(Ham) = 0.5$.
     Ces probabilités peuvent varier en fonction du contexte.
   - $\Pr(\text{« viagra »}|Spam)$ peut être approchée par la fréquence des messages contenant le mot « viagra » parmi les messages identifiés comme du spam (voir définition d'une probabilité comme limite de fréquence).
     $\Pr(\text{« viagra »}|Ham)$ peut être évaluée de la même façon.

   Pour que ces calculs approximatifs soient réalistes, il faut évidemment que l'ensemble des messages qui serviront à la construction du filtre soit grand et représentatif.

   De manière plus générale, la spamicité d'un mot M vaut :

$$\Pr(S|M) = \frac{\Pr(M|S) * \Pr(S)}{\Pr(M|S) * \Pr(S) + \Pr(M|H) * \Pr(H)}$$

2. Calcul de la probabilité qu'un message soit un spam

   Il faut effectuer le calcul précédent sur chaque mot du message.
   Nous allons :
   - Exclure les mots neutres, c'est-à-dire ceux dont la probabilité est proche de 0.5 (autant de chance que le mot soit dans un

spam que dans un ham). On n'étudie que les mots dont la probabilité est proche de 1 (presque toujours dans un spam) et ceux dont la probabilité est proche de 0.

- Considérer que les mots d'un message sont indépendants les uns des autres (ce qui est naturellement faux puisque les mots constituent des phrases et sont donc liés)

Dans ce cas, la probabilité qu'un message reçu soit un spam sachant qu'il contient 2 mots donnés vaut :

$$\Pr\big(S|(M1 \cap M2)\big) = \frac{\Pr\big((M1 \cap M2)|S\big) * \Pr(S)}{\Pr(M1 \cap M2)}$$
$$= \frac{\Pr(M1|S) * \Pr(M2|S) * \Pr(S)}{\Pr\big((M1 \cap M2)|S\big) * \Pr(S) + \Pr\big((M1 \cap M2)|H\big) * \Pr(H)}$$
$$= \frac{\Pr(M1|S) * \Pr(M2|S) * \Pr(S)}{\Pr(M1|S) * \Pr(M2|S) * \Pr(S) + \Pr(M1|H) * \Pr(M2|H) * \Pr(H)}$$

Pour *n* mots, on obtient :

$$\Pr\big(S|(M1 \cap M2 \cap \ldots \cap Mn)\big)$$
$$= \frac{\Pr(M1|S) * \Pr(M2|S) * \ldots * \Pr(Mn|S) * \Pr(S)}{\Pr(M1|S) * \ldots * \Pr(Mn|S) * \Pr(S) + \Pr(M1|H) * \ldots * \Pr(Mn|H) * \Pr(H)}$$

3. <u>Remarques</u>

Avantage : le filtre bayésien s'adapte à son utilisateur (apprentissage, les probabilités évoluent au cours du temps).
Inconvénient : les spammeurs placent dans le courrier une grande quantité de texte anodin afin de tromper le filtre.

Chapitre 2 : Variables aléatoires

2.1 Introduction

Une variable aléatoire est une quantité qui varie (→ variable) en fonction du hasard (→ aléatoire). Une variable aléatoire est en général notée X

Exemples :

1) On lance deux dés et on définit la variable aléatoire X = « somme des points obtenus ».
   X peut prendre les valeurs 2, 3, … 12.

2) On lance 3 pièces de 2.00 € et on définit la variable aléatoire X = « nombre de fois que la face commune aux pays de l'Euroland est apparue ».
   X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.

3) On s'intéresse aux accidents de travail survenus dans les entreprises et on définit la variable aléatoire X = « nombre d'accidents de travail survenus dans une entreprise durant l'année 2014 ».
   X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, ….

4) On s'intéresse à la fortune des personnes et on définit la variable aléatoire X = « revenus du travail d'une personne ».
   X peut prendre n'importe quelle valeur positive ou nulle.

Comme en Statistique descriptive, il convient de faire la différence entre le caractère ***discret*** et le caractère ***continu*** d'une variable. Une variable aléatoire est qualifiée de discrète si le nombre de valeurs qu'elle peut prendre est fini ou dénombrable. Dans le cas contraire lorsque la variable peut prendre n'importe quelle valeur située dans un intervalle, elle est qualifiée de continue.

Les exemples 1), 2) et 3) concernent des variables aléatoires discrètes tandis que l'exemple 4) concerne une variable aléatoire continue.

2.2 Variables aléatoires discrètes

2.2.1 Définition

Définir une variable aléatoire discrète, c'est donner l'ensemble des valeurs $\{x_i\}$ qu'elle peut prendre et donner la probabilité que la variable a de prendre chacune de ces valeurs.
Reprenons l'exemple 2) à savoir : on lance 3 pièces de 2.00 € et on définit la variable aléatoire X = « nombre de fois que la face commune aux pays de l'Euroland est apparue ».
Nous savons déjà que X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ; donc $\{x_i\} = \{0,1,2,3\}$.
Désignons par F_i l'événement : « pour la i[e] pièce, c'est la face commune aux pays de l'Euroland qui est apparue ». (i = 1, 2, 3).

$$\Pr\{X=0\} = \Pr(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = \Pr \overline{F_1} * \Pr \overline{F_2} * \Pr \overline{F_3} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Pr\{X=1\} = \Pr\big((F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3)\big) = 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\Pr\{X=2\} = \Pr\big((F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3)\big) = 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\Pr\{X=3\} = \Pr(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

<u>Notation</u>

$$X = \binom{x_i}{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad (p_i = \Pr\{X = x_i\})$$

Nous constatons que $\boxed{\sum_i p_i = 1}$.

P = (p_i) est la loi de probabilité associée à X = (x_i).

2.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

La fonction de répartition d'une variable aléatoire *X* est notée FR_X et calcule la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à *x*.
Plus précisément :

$$FR_X : \mathcal{R} \to [0,1] : x \to \Pr\{X \leq x\} = \sum_{i=1}^{k} \Pr\{X = x_i\}$$

Où x_k est la valeur de la variable directement inférieure ou égale à *x*.

Dans l'exemple développé ci-dessus :

$$x < 0 \Rightarrow FR_X(x) = 0$$

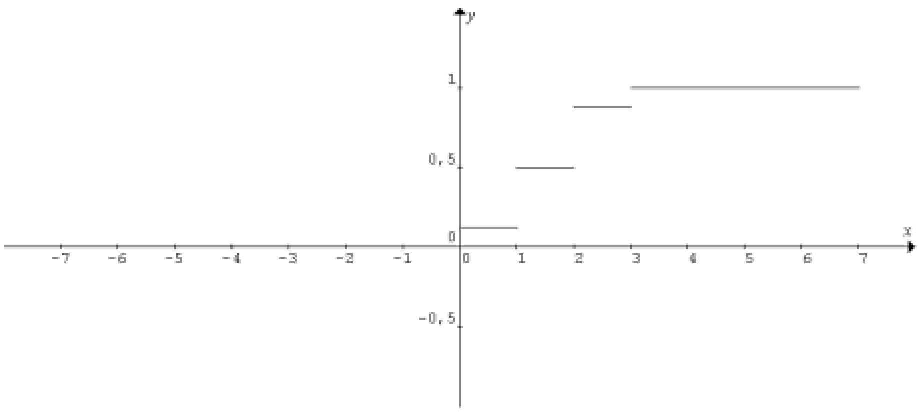
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow FR_X(x) = \frac{1}{8}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow FR_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow FR_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$x \geq 3 \Rightarrow FR_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Le graphique de cette fonction est un graphique en escalier :



2.2.3 Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète

Soit $X = \binom{x_i}{p_i}$ une variable aléatoire discrète.
L'espérance mathématique de X est notée $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \sum_i x_i * p_i \quad \text{et} \quad E\big(f(X)\big) = \sum_i f(x_i) * p_i$$

Pour l'exemple du lancer des pièces,

$$E(X) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

Autre exemple

Considérons une tombola où 1 000 billets ont été émis. Un billet emportera le gros lot : 1 000.00 €, 5 autres billets emporteront chacun 200.00 € et 100 billets emporteront un lot de consolation de 5.00 €. Intéressons-nous à la variable aléatoire
X = « gain brut à la tombola ».

$$X = \binom{x_i}{p_i} = \begin{pmatrix} 1000 & 200 & 5 & 0 \\ \frac{1}{1000} & \frac{5}{1000} & \frac{100}{1000} & \frac{894}{1000} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 1000 * \frac{1}{1000} + 200 * \frac{5}{1000} + 5 * \frac{100}{1000} + 0 * \frac{894}{1000} = \frac{2500}{1000}$$
$$= 2.50€$$

Ceci signifie que si l'organisateur de la tombola souhaite réaliser un bénéfice (ce qui est souvent le cas), le prix du billet doit être supérieur à 2.50 €.

Remarque : l'espérance mathématique d'une variable aléatoire est le concept mathématique qui correspond à la moyenne arithmétique en statistique descriptive.

On peut montrer que :

- $\boxed{E(\alpha * X + \beta) = \alpha * E(X) + \beta}$

- $\boxed{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$
  (X et Y sont des variables aléatoires quelconques)

- $\boxed{E(X * Y) = E(X) * E(Y)}$
  (X et Y sont des variables aléatoires indépendantes)

2.2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

Comme en statistique descriptive, la variance est une mesure de dispersion autour de la moyenne.

Soit $X = \binom{x_i}{p_i}$ une variable aléatoire discrète.

La variance de X est notée $Var(X)$ et on a :

$$\boxed{Var(X) = E[(X - E(X))^2]}$$

L'unité utilisée pour la variance est le carré de celle de X. Ainsi, si X s'exprime en €, la variance de X s'exprimera en €^{2}. On définit alors l'écart-type dont l'unité est la même que celle de X.

L'écart-type de X est noté $\sigma(X)$ et on a :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}}$$

Reprenons l'exemple du lancer des pièces.

$$X = \binom{x_i}{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$X - E(X) = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$[X - E(X)]^2 = \begin{pmatrix} 2.25 & 0.25 & 0.25 & 2.25 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$E[(X - E(X))^2] = 2.25 * \frac{1}{8} + 0.25 * \frac{3}{8} + 0.25 * \frac{3}{8} + 2.25 * \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = 0.75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0.75}$$

Formule simplifiée

On peut montrer que :

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 4 * \frac{3}{8} + 9 * \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1.5^2 = 0.75$$

On peut montrer que :

- $\boxed{Var(\alpha * X + \beta) = \alpha^2 * Var(X)}$

- $\boxed{Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)}$
  (X et Y sont des variables aléatoires indépendantes)

2.3 Variables aléatoires continues

2.3.1 Définition

Définir une variable aléatoire continue *X*, c'est dire dans quel intervalle [*a*, *b*] elle prend ses valeurs, et lui associer une fonction, appelée ***densité (ou taux) de probabilité*** et notée *T*(*X*) qui permet de calculer la probabilité qu'a *X* de se trouver dans un intervalle contenu dans [*a*, *b*].

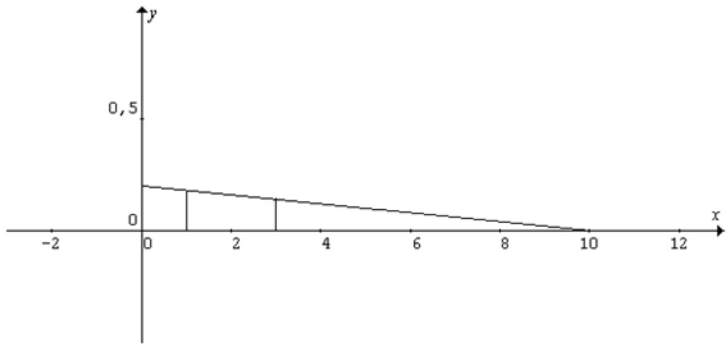
$$\text{Si } [\alpha, \beta] \subseteq [a, b], \text{alors } \boxed{\Pr\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} T(X)dx}$$

Exemple

Soit X la variable aléatoire continue qui étudie le temps consacré par un étudiant à la préparation d'une interrogation de Statistique.

Supposons que [*a*, *b*] = [0 , 10]
(en heures, laissez-nous nos illusions ☺),

et que $T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{10-x}{50} \\ 0 \text{ si } x > 10 \end{cases}$



Nous obtenons :

$$\Pr\{1 \leq X \leq 3\} = \int_{1}^{3} \frac{10-x}{50}dx = \frac{1}{50}\left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{50}\left[30 - \frac{9}{2} - 10 + \frac{1}{2}\right] = \frac{16}{50} = 0.32$$

Nous pouvons remarquer que :

- $\boxed{T(x) \geq 0 \quad \forall\, x}$
- $\Pr\{0 \leq X \leq 10\} = 1$, et donc, de façon générale, $\boxed{\Pr\{a \leq X \leq b\} = 1}$
- $\Pr\{X = 2\} = \Pr\{2 \leq X \leq 2\} = \int_2^2 T(x)dx = 0$, et donc, de façon générale,

$\boxed{\Pr\{X = c\} = 0}$ (c constante).

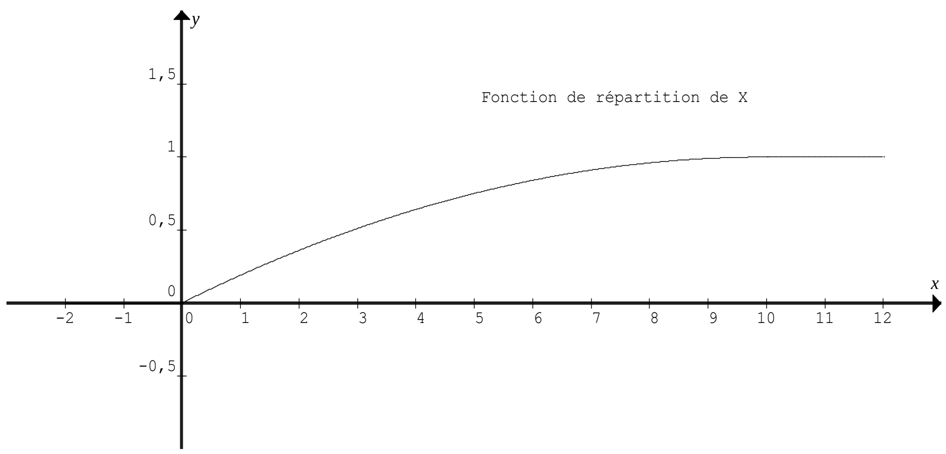
2.3.2 Fonction de répartition associée à une variable aléatoire continue

Comme dans le cas discret, la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est notée FR_X et calcule la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à x. Plus précisément :

$$FR_X : \mathcal{R} \to [0,1] : x \to \Pr\{X \leq x\} = \int_a^x T(t)dt \quad \text{si } x > a \text{ (0 sinon)}$$

Reprenons l'exemple précédent :

- Si $x \leq 0, FR_X(x) = 0$;
- Si $0 < x < 10, FR_X(x) = \int_0^x \frac{10-t}{50} dt = \frac{1}{50}\left[10t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{50}\left(10x - \frac{x^2}{2}\right)$;
- Si $x \geq 10,\ FR_X(x) = 1$.



2.3.3 Grandeurs associées à une variable aléatoire continue

Comme pour les variables discrètes, il s'agit essentiellement de l'espérance mathématique et de la variance.

$$E(X) = \int_a^b x * T(x)\, dx \quad \text{et} \quad E(f(X)) = \int_a^b f(x) * T(x)\, dx$$

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Les formules vues pour les variables aléatoires discrètes restent valables pour les variables aléatoires continues à savoir :

- $\boxed{E(\alpha * X + \beta) = \alpha * E(X) + \beta}$
- $\boxed{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$
  (X et Y sont des variables aléatoires quelconques)
- $\boxed{E(X * Y) = E(X) * E(Y)}$
  (X et Y sont des variables aléatoires indépendantes)
- $\boxed{Var(\alpha * X + \beta) = \alpha^2 * Var(X)}$
- $\boxed{Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)}$
  (X et Y sont des variables aléatoires indépendantes)

2.4 Inégalité de Tchebycheff – Loi faible des grands nombres

2.4.1 L'inégalité de Tchebycheff

Soit *X* une VA suivant une loi de probabilité quelconque (inconnue). Soit *E*(*X*) son espérance mathématique et *Var*(*X*) sa variance supposée finie.

Soit $\theta > 0$ tel que $[E(X) - \theta, E(X) + \theta] \subset [x_{min}, x_{max}]$ si *X* est discrète,
$\subset [a, b]$ si *X* est continue.

Alors

$$\Pr\{E(X) - \theta \leq X \leq E(X) + \theta\} \geq 1 - \frac{Var(X)}{\theta^2}$$

Ce résultat est utilisé lorsqu'on souhaite connaître la probabilité qu'une VA prenne ses valeurs dans un intervalle centré en son espérance, mais que la loi de probabilité de cette VA est inconnue.

Exemple

Le nombre de pages d'un livre d'une certaine collection est une VA de moyenne (espérance) 190 et d'écart-type 20. (La distribution est inconnue).

a) Quelle est la probabilité qu'un livre choisi au hasard dans la collection ait un nombre de pages compris entre 165 et 215 ?
$E(X) = 190, \theta = 190 - 165 = 215 - 190 = 25, \theta^2 = 625$
$\sigma(X) = 20 => Var(X) = 400$
$$\Pr\{165 \leq X \leq 215\} \geq 1 - \frac{400}{625} = \frac{225}{625} = 0.36$$

b) Dans 80% des cas au moins, dans quel intervalle centré en la moyenne se situe le nombre de pages des livres de la collection ?
$$1 - \frac{400}{\theta^2} = 0.8 \Rightarrow \frac{400}{\theta^2} = 0.2 \Rightarrow \theta^2 = \frac{400}{0.2} = 2000 \Rightarrow \theta = 44.72$$
L'intervalle demandé est donc : [190 – 44.72 ; 190 + 44.72] = [145.28 ; 234.72].

2.4.2 Loi (faible) des grands nombres - Bernoulli

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *n* variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont l'espérance est *E*(*X*). Supposons que l'espérance et la variance de ces VA sont finies.
Alors,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - E(X)\right| \leq \varepsilon\right\} = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0}$$

Exemple
Lancement d'un dé 100 fois, 1000 fois, 10 000 fois, …
X_i = « résultat du dé au *i*ᵉ lancer ».

2.5 La variable aléatoire binomiale

2.5.1 Exemple

Admettons que dans une population, 60% des ménages sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent. Choisissons 5 ménages au hasard dans cette population, et essayons de calculer la probabilité que parmi ces 5 ménages, exactement 2 soient propriétaires de l'habitation qu'ils occupent.

Désignons par H_i l'événement « le i^e^ ménage est propriétaire de l'habitation qu'il occupe » (i = 1, 2, 3, 4, 5).

- Si l'événement « $H_1 \cap H_2 \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4} \cap \overline{H_5}$ » est réalisé, il est certain qu'exactement 2 ménages sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent.
  $\Pr\{H_1 \cap H_2 \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_4} \cap \overline{H_5}\} = 0.6 * 0.6 * 0.4 * 0.4 * 0.4 = (0.6)^2 * (0.4)^3$

- Si l'événement « $H_1 \cap \overline{H_2} \cap H_3 \cap \overline{H_4} \cap \overline{H_5}$ » est réalisé, il est certain qu'exactement 2 ménages sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent.
  $\Pr\{H_1 \cap \overline{H_2} \cap H_3 \cap \overline{H_4} \cap \overline{H_5}\} = 0.6 * 0.4 * 0.6 * 0.4 * 0.4 = (0.6)^2 * (0.4)^3$

- Si l'événement « $H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap H_4 \cap \overline{H_5}$ » est réalisé, il est certain qu'exactement 2 ménages sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent.
  $\Pr\{H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3} \cap H_4 \cap \overline{H_5}\} = 0.6 * 0.4 * 0.4 * 0.6 * 0.4 = (0.6)^2 * (0.4)^3$

- …

Plusieurs événements sont donc favorables à la réalisation de « Exactement 2 ménages sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent ».
Pour compter le nombre de ces événements, il suffit de savoir de combien de façons différentes, parmi les 5 ménages, on peut choisir les deux, qui sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent. La réponse est donnée par :

$$C_5^2 = 10$$

Puisque tous les événements favorables à la réalisation de « Exactement 2 ménages sont propriétaires de l'habitation qu'ils occupent » ont la même probabilité

$$(0.6)^2 * (0.4)^3 \ ,$$

la probabilité recherchée est donnée par :

$$C_5^2 * (0.6)^2 * (0.4)^3 = C_5^2 * (0.6)^2 * (1 - 0.6)^3$$

2.5.2 Définition et formules

- Soit *n* épreuves aléatoires identiques et indépendantes.
- Chaque épreuve a seulement 2 issues : succès et échec.
- La probabilité de réalisation du « succès » (la même pour toutes les épreuves) vaut *p*.

La variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours de la réalisation de ces *n* épreuves est appelée variable aléatoire ***binomiale de paramètres n et p*** et est notée $\boldsymbol{B_{n,p}}$.
Cette variable aléatoire peut prendre les valeurs 0, 1, 2, …, *n* et

$$\boxed{\Pr\{B_{n,p} = k\} = C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}}$$

Donc :

$$B_{n,p} = \binom{x_i}{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Dans notre exemple :

L'épreuve = examiner la situation immobilière d'un ménage.
Le succès = le ménage est propriétaire de l'habitation qu'il occupe.
n = 5 et *p* = 0.6

On peut montrer que :

- $\boxed{E(B_{n,p}) = n * p}$
- $\boxed{Var(B_{n,p}) = n * p * (1-p)}$
- $\boxed{B_{n_1,p} + B_{n_2,p} = B_{n_1+n_2,p}}$

Remarque : le mot « succès » n'a pas nécessairement le sens qu'on lui donne en français, il n'est pas nécessairement associé à une notion positive. On pourrait avoir :

Epreuve = examiner une facture.
Succès : cette facture contient au moins une erreur.

2.5.3 Loi des grands nombres pour les épreuves de Bernouilli

Soit $X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, *n* variables aléatoires identiques et indépendantes (*i* = 1 → *n*).

$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{B_{n,p}}{n}$ représente la fréquence de succès $f(n)$.

Nous avons :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \Pr\{|f(n) - p| \leq \varepsilon\} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0}$$

Ce qui signifie que, lorsque *n* → ∞, la fréquence de succès tend vers la probabilité de réalisation du succès. Ceci justifie la définition de probabilité comme limite de fréquence.

2.6 La variable aléatoire de Poisson

2.6.1 Motivation

Dans le cadre de la loi binomiale, nous pourrions être amenés à résoudre des problèmes du type :

Une entreprise fabrique des lampes dont une sur mille est défectueuse. Dans un stock de 1500 lampes, quelle est la probabilité qu'exactement 3 d'entre elles soient défectueuses ?

Epreuve : vérifier la qualité d'une lampe
Succès : la lampe est défectueuse
n = 1 500 (grand)
p = 0.001 (petit)

Des mathématiciens ont voulu savoir ce que devenait « $C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}$ » lorsque *n* → ∞ et *p* → 0.
Si le produit *n* * *p* vaut constamment λ, on peut montrer que $C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}$ tend vers $\frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$.
L'approximation est d'autant meilleure que *n* est grand et que *p* est petit.

Donc $\lim_{n\to\infty} C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$

Dans la pratique, l'approximation de « $C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}$ » par « $\frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$ » est valable pour autant que ***n* > 50** et ***n* * *p* < 5**.

Dans l'exemple ci-dessus :

n = 1500 et *p* = 0.001, donc *n* * *p* = 1.5 et les 2 conditions sont vérifiées

$C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k} = C_{1500}^3 * (0.001)^3 * (0.999)^{1497} = 0.1255420827$

et $\frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} = \frac{1.5^3}{3!} * e^{-1.5} = 0.1255107151$

2.6.2 Définitions et formules

Une variable aléatoire discrète *X* qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3, … et telle que

$$\Pr\{X = k\} = \frac{\lambda^k * e^{-\lambda}}{k!}$$

est appelée variable aléatoire de ***Poisson*** de paramètre λ et notée P_λ.
Donc :

$$P_\lambda = \binom{x_i}{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dfrac{\lambda^k * e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{pmatrix}$$

Les statisticiens admettent qu'une binomiale peut être approximée par une loi de Poisson si $\boxed{n > 50 \text{ et } n * p < 5}$

On peut montrer que :

- $\boxed{E(P_\lambda) = \lambda}$
- $\boxed{Var(P_\lambda) = \lambda}$
- $\boxed{P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} = P_{\lambda_1+\lambda_2}}$

La loi de Poisson est utilisée pour étudier la survenance d'événements rares.

Application : la théorie des files d'attente.
File d'attente de clients au guichet de la poste ou à la caisse d'une grande surface mais aussi file d'attente des paquets de données transmis à un routeur, des jobs destinés à être imprimés, des requêtes adressées à un serveur, …
Le modèle de base de cette théorie considère que le nombre d'arrivées par intervalle de temps suit une loi de Poisson.

2.6.3 Remarque importante

Dans la pratique, on rencontre deux types d'exercices sur Poisson :

Exemple d'exercice du premier type

Une entreprise qui fabrique de la vaisselle en porcelaine sait que 1.5% de sa production est porteuse de défauts. Cette production défectueuse ira directement à la casse après le contrôle de qualité. Sur 200 pièces produites, quelle est la probabilité que 2 d'entre elles soient porteuses de défauts ?

Théoriquement, le nombre de pièces défectueuses dans le lot de 200 suit une loi binomiale.
Epreuve : contrôle d'une pièce.
Succès : la pièce est porteuse de défauts.
n = 200 et p = 0.015
Mais n > 50 et $n * p$ = 200 * 0.015 = 3 < 5.
L'approximation par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$ $(\lambda = n * p)$ est satisfaisante.

Par conséquent, la probabilité demandée est donnée par :

$$\Pr\{P_3 = 2\} = \frac{3^2 * e^{-3}}{2!} = 0.2240418077$$

(La binomiale aurait donné $C_{200}^{2} * (0.015)^2 * (0.985)^{198} = 0.2245997317$)

Lorsque l'énoncé est formulé de cette façon, il n'est pas nécessaire de préciser que la variable aléatoire étudiée suit une loi de Poisson ; le fait qu'il s'agisse d'une binomiale avec n > 50 et $n * p < 5$ suffit pour le déduire.

Exemple d'exercice du deuxième type.

Une entreprise fabrique de la vaisselle en porcelaine. Il arrive que certains clients soient mécontents parce qu'une pièce du service acheté est porteuse de défauts. Les réclamations sont pourtant rares : on estime que le nombre moyen de réclamations par semaine est de 3 et que ces réclamations suivent une loi de Poisson. Quelle est la probabilité que durant cette semaine, on observe 4 réclamations ?

L'énoncé est clair : le nombre de réclamations par semaine suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$ ($\lambda = E(P_\lambda) \approx$ moyenne).

Par conséquent, la probabilité demandée est donnée par :

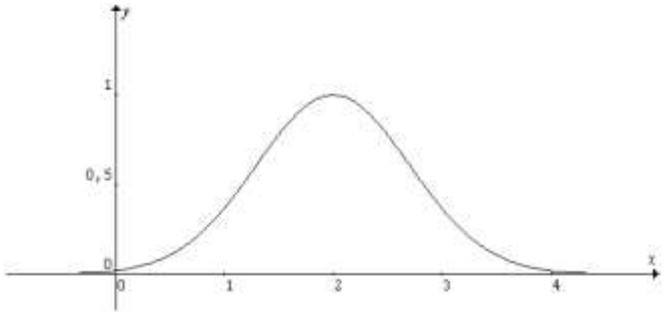
$$\Pr\{P_3 = 4\} = \frac{3^4 * e^{-3}}{4!} = 0.1680313557$$

Lorsque l'énoncé est formulé de cette façon, il est nécessaire de préciser que la variable aléatoire étudiée suit une loi de Poisson car elle pourrait suivre une autre loi.

2.7 La Loi Normale (Laplace - Gauss)

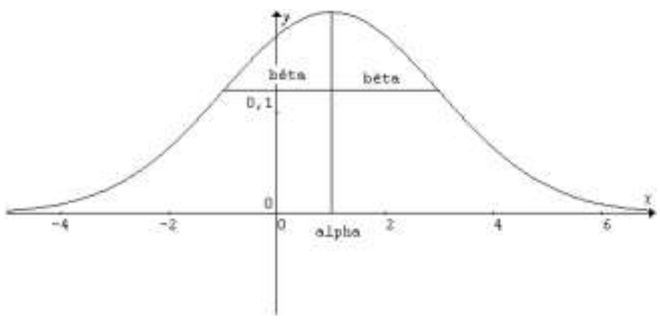
2.7.1 Motivation

Dans la pratique, lorsqu'on étudie la taille des personnes, le Q.I, le poids des bébés à la naissance, la consommation d'eau des ménages…on constate que le graphique de la densité de probabilité associée a l'allure suivante :



Les mathématiciens ont essayé de trouver l'expression analytique d'une telle fonction, ils sont arrivés à la formule suivante :

$$T(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}, \beta > 0$$



Remarque

Le facteur $\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}$ n'est pas là (uniquement) pour perturber les esprits.
Rappelons qu'une densité de probabilité doit vérifier certaines conditions.
Entre autres, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(X)dx = 1$$

Le facteur $\frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}$ est là pour que cette condition soit vérifiée.
Lorsqu'ils ont calculé l'espérance et la variance de la variable aléatoire *X* dont la densité de probabilité est donnée par *T*(*x*), les mathématiciens sont arrivés à :

$$E(X) = \alpha \text{ et } Var(X) = \beta^2$$

Dès lors, les symboles « α » et « β » ont été remplacés par « *m* » et « σ ».

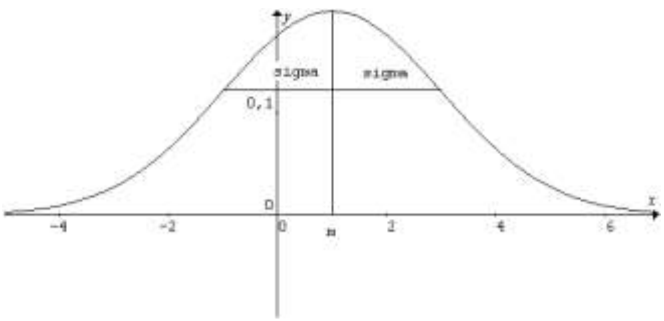
2.7.2 Définitions et formules

Une variable aléatoire *continue* qui prend ses valeurs dans $\mathcal{R}$ tout entier et dont la densité de probabilité est donnée par :

$$\boxed{T(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

est appelée ***variable aléatoire normale*** (ou variable aléatoire de Gauss ou variable aléatoire de Laplace-Gauss) de paramètres *m* et σ.

Le graphique de *T*(*x*) a l'allure suivante :



La variable aléatoire normale est notée X_G ou $N(m, \sigma)$ et la courbe ci-dessus est appelée courbe de Gauss.

$$\boxed{E(X_G) = E\big(N(m, \sigma)\big) = m \quad et \quad Var(X_G) = Var\big(N(m, \sigma)\big) = \sigma^2}$$

La notation « $N(m, \sigma)$ » n'est pas universelle mais a le mérite de préciser les paramètres. C'est cependant la notation « X_G » que nous utiliserons.

Remarque

Bien que théoriquement X_G prenne ses valeurs dans $\mathcal{R}$ tout entier, nous constatons que

$$\Pr\{m - 3\sigma \leq X_G \leq m + 3\sigma\} \geq 0.9973$$

Par conséquent, seulement 0.27% des valeurs sont à l'extérieur de cet intervalle.

Propriété

Soit $X_G^1, X_G^2, X_G^3, \dots, X_G^k$ k variables aléatoires normales de moyenne $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ et d'écart-type $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_k$.
Dès lors la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^{k} X_G^i$$

est une variable aléatoire normale de moyenne $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k$ et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \cdots + \sigma_k^2$.

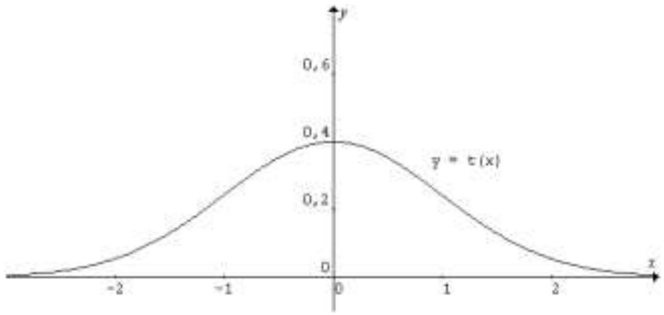
2.7.3 Variable standardisée et table de Laplace- Gauss

Pour les variables aléatoires continues, le calcul de la probabilité que la variable a de se trouver dans un intervalle donné passe par le calcul d'une intégrale. Dans le cas de la loi normale, cette intégrale est difficile à calculer. C'est pourquoi, il a été décidé de construire des tables permettant de calculer la valeur de l'intégrale pour certaines bornes.
La variable aléatoire normale dépend de 2 paramètres *m* et σ.
Construire une table pour tous les couples de valeurs (*m*, σ) et donc toutes les variables aléatoires normales est évidemment impossible.
Les tables ont été dressées uniquement pour la variable normale standardisée. Celle-ci est notée X_G^* (ou *Z* si on utilise la notation « $N(m, \sigma)$ »).
Cette dernière s'obtient de la variable aléatoire de départ en retranchant l'espérance et en divisant par l'écart-type.

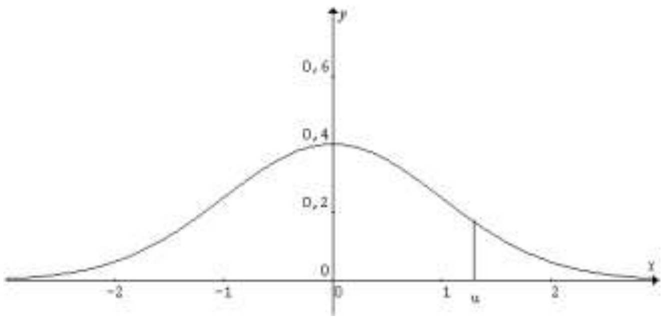
Donc $\boxed{X_G^* = \frac{X_G - m}{\sigma}}$

Propriétés évidentes : $E(X_G^*) = 0$ et $Var(X_G^*) = 1$

Le graphique de la densité de probabilité de X_G^* a l'allure suivante :



La table en annexe donne $\Pr\{X_G^* \leq u\} = \Pr\{X_G^* < u\}$. X_G^* étant une variable aléatoire continue, $\Pr\{X_G^* = u\} = 0$.



Il s'agit de l'aire délimitée par l'axe horizontal, la courbe de Gauss et la droite verticale d'équation x = u (aire située à gauche de cette droite).

<u>Exemples</u>

1) $\Pr\{X_G^* \leq 1.23\} = 0.89065$
2) $\Pr\{X_G^* \geq 1.23\} = 1 - \Pr\{X_G^* < 1.23\} = 1 - 0.89065 = 0.10935$
3) $\Pr\{X_G^* \leq -1.23\} = \Pr\{X_G^* \geq 1.23\} = 0.10935$
   (Pour se convaincre, faire un dessin !)
4) $\Pr\{X_G^* \geq -1.23\} = \Pr\{X_G^* \leq 1.23\} = 0.89065$
5) $\Pr\{1.23 \leq X_G^* \leq 1.82\} = \Pr\{X_G^* \leq 1.82\} - \Pr\{X_G^* \leq 1.23\}$
   $= 0.96562 - 0.89065 = 0.07497$
6) $\Pr\{-1.23 \leq X_G^* \leq 1.82\} = \Pr\{X_G^* \leq 1.82\} - \Pr\{X_G^* \leq -1.23\}$
   $= \Pr\{X_G^* \leq 1.82\} - (1 - \Pr\{X_G^* \leq 1.23\})$
   $= \Pr\{X_G^* \leq 1.82\} + \Pr\{X_G^* \leq 1.23\} - 1 = 0.96562 + 0.89065 - 1$
   $= 0.85627$

7) $\Pr\{-1.23 \leq X_G^* \leq 1.23\} = \cdots = 2 * \Pr\{X_G^* \leq 1.23\} - 1 = 0.7813$

8) $\Pr\{X_G^* \leq 1.237\}$

1.237 ne se trouve pas dans la table, il faut utiliser l'interpolation linéaire.

1.23 → 0.89065
1.237 → *P*
1.24 → 0.89251

$$P \approx 0.89065 + \frac{1.237 - 1.23}{1.24 - 1.23}(0.89251 - 0.89065)$$
$$= 0.891952$$

9) Trouver *u* tel que $\Pr\{X_G^* \leq u\} = 0.975$.

u = 1.96

Trouver *u* tel que $\Pr\{X_G^* \leq u\} = 0.015$.

Les valeurs des probabilités de la table commencent à 0.5.

Il faut donc transformer :

$$\Pr\{X_G^* \leq u\} = 0.015 \Leftrightarrow \Pr\{X_G^* \geq u\} = 0.985 \Leftrightarrow \Pr\{X_G^* \leq -u\} = 0.985$$
$$-u = 2.17 \Longrightarrow u = -2.17$$

10) Trouver *u* tel que $\Pr\{X_G^* \leq u\} = 0.75$

Il faut utiliser l'interpolation linéaire.

0.74857 → 0.67
0.75 → *u*
0.75175 → 0.68

$$u = 0.67 + \frac{0.75 - 0.74857}{0.75175 - 0.74857}(0.68 - 0.67)$$
$$= 0.6744968553$$

2.7.4 Utilisation de la table pour des problèmes concrets

Dans la vie courante, il est très rare que la variable normale utilisée soit la variable standardisée !

Exemples

1) Admettons que le temps passé par un étudiant à préparer une interrogation de Statistique soit distribué normalement avec une moyenne de 5 heures et un écart-type de 2 heures.
   Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait travaillé moins de 6 heures pour préparer son interrogation de statistique ?

   On doit calculer $\Pr\{X_G \leq 6\}$.

   $$X_G \leq 6 \Leftrightarrow X_G - 5 \leq 6 - 5 \Leftrightarrow \frac{X_G - 5}{2} \leq \frac{6-5}{2} \Leftrightarrow X_G^* \leq \frac{1}{2}$$

   Et donc, $\Pr\{X_G \leq 6\} = \Pr\left\{X_G^* \leq \frac{1}{2}\right\} = 0.69146$

2) Admettons que le budget mensuel consacré aux loisirs par un ménage soit distribué normalement. Admettons également que ce budget soit en moyenne égal à
   300.00 € et que l'écart-type soit évalué à 125.00 €.
   En dessous de quelle valeur se situe le budget mensuel consacré aux loisirs de 80% des ménages ?

   On cherche *b* (comme budget) tel que $\Pr\{X_G \leq b\} = 0.80$

   $$X_G \leq b \Leftrightarrow X_G - 300 \leq b - 300 \Leftrightarrow \frac{X_G - 300}{125} \leq \frac{b - 300}{125} \Leftrightarrow X_G^* \leq \frac{b-300}{125}$$

   En posant $u = \frac{b-300}{125}$,il faut trouver *u* tel que $\Pr\{X_G^* \leq u\} = 0.80$.

   0.79955 → 0.84
   0.8 → *u*
   0.80234 → 0.85

   $$u = 0.84 + \frac{0.8 - 0.79955}{0.80234 - 0.79955}(0.85 - 0.84) = 0.8416129032$$

   Comme $u = \frac{b-300}{125}$, on a $\frac{b-300}{125} = 0.8416129032$.
   Et donc $b = 0.8416129032 * 125 + 300 = 405.20$ €

80% des ménages dépensent au maximum 405.20 € chaque mois pour leurs loisirs.

De façon générale, il faut repasser à la loi normale standardisée en utilisant la formule

$$\boxed{X_G \leq b \Leftrightarrow X_G^* \leq \frac{b-m}{\sigma}}$$

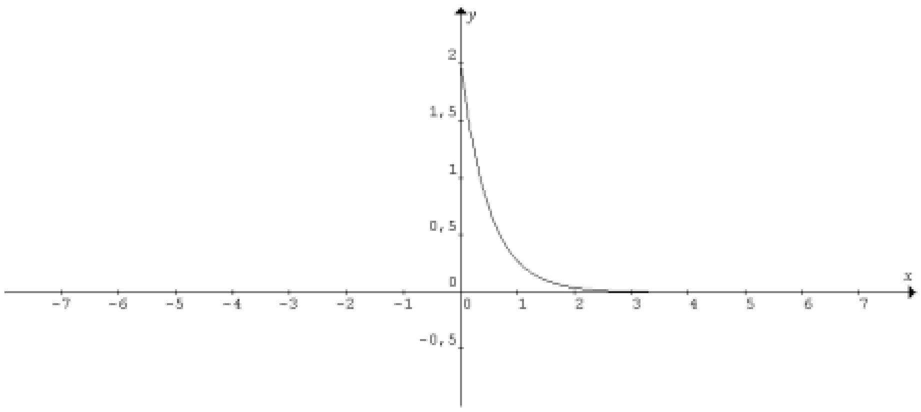
2.8 La variable aléatoire exponentielle négative

2.8.1 Définitions

Une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans $\mathcal{R}^+$ tout entier et dont la densité de probabilité est donnée par

$$T(x) = \mu\, e^{-\mu x} \qquad \mu > 0$$

est appelée variable aléatoire ***exponentielle négative de paramètre μ***.



Nous pouvons observer que

$$\int_0^{+\infty} \mu\, e^{-\mu x}\, dx = \mu \int_0^{+\infty} e^{-\mu x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \mu \int_0^{b} e^{-\mu x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \mu \left[\frac{e^{-\mu x}}{-\mu}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [- e^{-\mu x}]_0^b = \lim_{b \to +\infty} (- e^{-\mu b} + e^0) = 1$$

Application

En gestion des files d'attente, un des principaux modèles mathématiques repose sur les hypothèses selon lesquelles la durée de service à un guichet suit une exponentielle négative (et le nombre d'arrivées par intervalle de temps suit une loi de Poisson).

2.8.2 Formules

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\mu}}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1}{\mu^2}}$$

2.8.3 Calcul des probabilités et exemple d'utilisation

$\Pr\{a \le X \le b\} = \int_a^b \mu\, e^{-\mu x}\, dx = [- e^{-\mu x}]_a^b = e^{-\mu a} - e^{-\mu b}$

$\Pr\{X \le a\} = \Pr\{0 \le X \le a\} = 1 - e^{-\mu a}$

$\Pr\{X \ge b\} = 1 - \Pr\{X \le b\} = e^{-\mu b}$

Le calcul de ces probabilités (en l'absence de calculatrice) peut se faire en utilisant la loi de Poisson :

Exemple

Soit X une variable aléatoire exponentielle négative de paramètre $\mu = 0.5$

$\Pr\{X \ge 3\} = e^{-0.5*3} = e^{-1.5} = \Pr\{P_{1.5} \le 0\} = 0.223$

Exemple concret d'utilisation

Un jobiste a été engagé par une grande surface pour emballer les cadeaux durant les fêtes de fin d'année. Le temps mis pour emballer un cadeau suit une exponentielle négative avec une durée moyenne de 2 min par cadeau.

a) Quelle est la valeur de μ ?
Que représente-t-elle dans ce contexte ?
$E(X) = \frac{1}{\mu} = 2 \Rightarrow \mu = 0.5$ cadeau/minute.
On emballe donc 1/2 cadeau à la minute.

b) Quelle est la probabilité que le temps mis pour emballer un cadeau se situe entre une et deux minutes ?
$\Pr\{1 \leq X \leq 2\} = e^{-0.5*1} - e^{-0.5*2} = e^{-0.5} - e^{-1} = 0.239$

2.9 La variable aléatoire Khi-carré

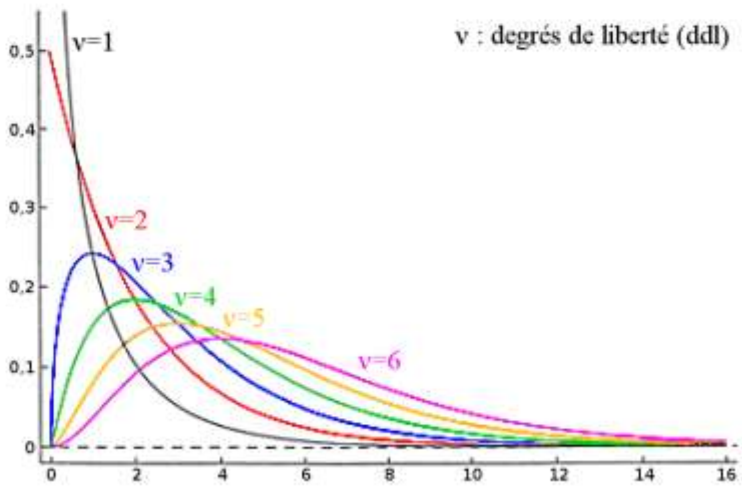
2.9.1 Définition

Une variable aléatoire continue qui prend ses valeurs dans $\mathcal{R}^+$ tout entier et dont la densité de probabilité est donnée par

$$T(x) = \frac{x^{\frac{v}{2}-1} * e^{\frac{-x}{2}}}{\int_0^{+\infty} x^{\frac{v}{2}-1} * e^{\frac{-x}{2}}\, dx} \qquad (v \in \mathbb{N}_0)$$

est appelée variable aléatoire Khi-carré à *v* degrés de liberté et notée χ^2_v.

Le graphique d'une variable aléatoire Khi-carré dépend de son degré de liberté. Lorsque celui-ci augmente, le graphique se rapproche de celui de la loi normale.



2.9.2 Résultats théoriques

- On peut montrer que :

$$E(\chi^2_\nu) = \nu \quad \text{et que} \quad Var(\chi^2_\nu) = 2\nu$$

- Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires normales standardisées et indépendantes.
  Alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \chi^2_n$$

  La somme des carrés de *n* variables aléatoires normales standardisées et indépendantes est une variable aléatoire Khi-carré à *n* degrés de liberté.

2.9.3 Tables de Khi-carré

- α et ν étant donnés, la table permet de trouver *a* tel que $\Pr\{\chi^2_\nu > a\} = \alpha$.
  Ainsi, si ν = 21 et α = 0.05, $\Pr\{\chi^2_{21} > 32.6706\} = 0.05$ et *a* vaut donc 32.6706.

- Si *v* > 30, on utilise le fait que la Khi-carré s'approche d'une loi normale.
  Plus précisément,

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\sqrt{2 * \chi^2_\nu} - \sqrt{2 * \nu - 1}\right) = X^*_G$$

  Pour trouver *a* tel que $\Pr\{\chi^2_\nu > a\} = \alpha$,
  On cherche *b* tel que $\Pr\{X^*_G > b\} = \alpha$
  Si $X^*_G > b$, $\sqrt{2 * \chi^2_\nu} - \sqrt{2 * \nu - 1} > b$ (pourvu que ν soit suffisamment grand)

$$\Rightarrow \sqrt{2 * \chi^2_\nu} > b + \sqrt{2 * \nu + 1}$$

$$\Rightarrow 2 * \chi^2_\nu > \left(b + \sqrt{2 * \nu + 1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \chi^2_\nu > \frac{\left(b + \sqrt{2 * \nu + 1}\right)^2}{2}$$

  Par conséquent,

  si $\Pr\{X^*_G > b\} = \alpha, \text{alors} \Pr\left\{\chi^2_\nu > \frac{\left(b+\sqrt{2*\nu+1}\right)^2}{2}\right\} = \alpha$

  et donc $a = \frac{\left(b+\sqrt{2*\nu+1}\right)^2}{2}$

Exemple
Trouver *a* tel que $\Pr\{\chi^2_{75} > a\} = 0.05$.
On sait que $\Pr\{X_G^* > 1.645\} = 0.05$, donc *b* = 1.645.

$$\Longrightarrow a = \frac{\left(1.645 + \sqrt{2 * 75 + 1}\right)^2}{2} = 95.93$$