Module 3
La logique des propositions

Outils mathématiques pour l'informatique

Informatique B1 *2023-2024*

- **Principe du tiers exclu**

  Les éléments manipulés en logique mathématique sont des phrases qui ne peuvent être que vraies ou fausses, blanches ou noires sans niveau de gris.

- Cette théorie mathématique sert de base à de nombreux domaines d'étude tels que:
  - la conception de circuits électriques,
  - la construction de conditions dans les algorithmes,
  - le stockage d'informations dans une mémoire informatique…

Logique des propositions

- **Qu’est-ce qu’une proposition ?**
- **Construire des propositions**
  - Connecteurs logiques : non, et, ou, ou exclusif…
  - Implications logiques
  - Doubles implications logiques
  - Priorité des opérateurs
- **Principales portes logiques**
- **Comment construire une table de vérité?**
- **Négation d’une proposition**
  - Loi de De Morgan
- **Propositions inverses, converses, contraposée**

Qu'est-ce qu'une proposition ?

- C'est une phrase qui est soit vraie (**V**) soit fausse (**F**)
- C'est une phrase dont la valeur de vérité est **V** ou **F**.

- Exemples :
  - *Bruxelles est la capitale de la Belgique.*
  - *Namur est située sur la côte belge.*
  - *1 + 1 = 2*
  - *3 * 5 = 35*

Qu'est-ce qu'une **proposition** ?

- Donc, ce n'est pas…
  - une **question** : *À quelle heure commence le cours ?*
  - un **ordre** : *Relis tes notes avant de venir au cours !*
  - **imprécis** : *Il pleuvait.*

    Par contre « Hier, à 20h, il pleuvait sur Namur. » est une proposition !
  - avec une **inconnue** : $x + 2 = 17$.

    Par contre, « $\pi + 2 = 17$ *» est une proposition !*

Vocabulaire et notations

- Une **assertion** = une proposition qu'on présente comme vraie (« J'affirme / je prétends que … »).

- Propositions notées par des lettres $p, q, r, \ldots$

$p \equiv$ Il n'y a que des étudiants en DA dans cette classe.

$q \equiv$ Il fait plus de 20° C dehors.

Ce symbole indique une équivalence.
Il relie deux manières différentes de dire la même chose.
Ici, on peut le lire « est défini comme ».

Négation

- La **négation** d'une proposition p se note $\neg \boldsymbol{p}$ (« non p »).

$p \equiv$ Il n'y a que des étudiants en DA dans cette classe.
$\neg p \equiv$ Il est faux qu'il n'y a que des étudiants en DA dans cette classe.
$\neg p \equiv$ Il n'y a **pas** que des étudiants en DA dans cette classe.

$q \equiv$ Il fait plus de 20 °C dehors.
$\neg q \equiv$ Il ne fait pas plus de 20°C dehors.
$\neg q \equiv$ Il fait 20°C ou moins dehors.

Construire des propositions

Utilisation de divers connecteurs :

Négation	NOT	¬a	$\bar{a}$
Conjonction (« et »)	AND	a ∧ b	a.b
Disjonction (« ou »)	OR	a ∨ b	a+b
Disjonction exclusive	XOR	a $\dot{\vee}$ b	a ⊕ b
Implication	a ⇢ b	$a \Rightarrow b$	$\bar{a} + b$
Double-implication	NXOR	$a \Leftrightarrow b$	$\overline{a \oplus b}$

Conjonction et disjonction

- La **conjonction** des propositions p et q se note $\boldsymbol{p \wedge q}$ (et se lit « p et q »).

  $p \equiv$ Il y a du soleil.

  $q \equiv$ Il pleut.

  $p \wedge q \equiv$ Il y a du soleil <u>et</u> il pleut.

- La **disjonction** des propositions p et q se note $\boldsymbol{p \vee q}$ (et se lit « p ou q »).

  $p \equiv$ Il y a du soleil.

  $q \equiv$ Il pleut.

  $p \vee q \equiv$ Il y a du soleil <u>ou</u> il pleut *(ou les deux)*.

La lettre « u » a un creux comme « V ».

Propositions et valuations

- Proposition **simple/élémentaire** : $p, q, r, \ldots$
  Proposition **composée** : $p \vee q, q \wedge (r \vee \neg p), \ldots$

- La valeur de vérité d'une proposition composée dépend de la valeur des propositions simples qui y figurent.

  Exemples :

  Si p *est* **V** et q *est* **F**, *alors* $p \wedge q$ est **F**.
  Si p *est* **V** et q *est* **V**, *alors* $p \wedge q$ est **V**.

  Il s'agit de deux **valuations** possibles parmi … ?

Tables de vérité

- Une table de vérité
  - comporte 1 ligne pour chaque **valuation** possible (l'ordre n'a pas vraiment d'importance) et
  - indique la valeur de vérité de la proposition composée sous chacune des valuations.

p	q	$p \wedge q$ **p . q**
F/0	**F/0**	**F/0**
F/0	**V/1**	**F/0**
V/1	**F/0**	**F/0**
V/1	**V/1**	**V/1**

p	q	$p \vee q$ **p + q**
F/0	**F/0**	**F/0**
F/0	**V/1**	**V/1**
V/1	**F/0**	**V/1**
V/1	**V/1**	**V/1**

p	$\neg p$ $\bar{p}$
F/0	**V/1**
V/1	**F/0**

Tables de vérité

- **Valuation** = une manière possible d'attribuer une valeur de vérité à chacune des propositions simples

Exercice 2

- Combien de valuations possibles pour une proposition
  - à 3 propositions simples ? à 4 propositions simples ?
  - à n propositions simples ?

Disjonction exclusive

- La **disjonction exclusive** des propositions p et q se note $p \dot{\vee} q$ (et se lit « p ou-exclusif q »).

$p \equiv$ Il y a du soleil. $q \equiv$ Il pleut.

$p \dot{\vee} q \equiv$ Il y a du soleil <u>ou</u> il pleut <u>mais pas les deux ensemble</u>.

p	q	$p \dot{\vee} q$
F/0	F/0	F/0
F/0	V/1	V/1
V/1	F/0	V/1
V/1	V/1	F/0

p	q	$p \vee q$
F/0	F/0	F/0
F/0	V/1	V/1
V/1	F/0	V/1
V/1	V/1	V/1

$$\boldsymbol{p} \dot{\vee} \boldsymbol{q} = \mathrm{p} \oplus \mathrm{q} = \bar{p}q + \bar{p}q = (\neg \boldsymbol{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \neg \mathbf{q})$$

Disjonction exclusive

- À la fin du repas, on te servira du fromage ou du dessert.
  *Soit l'un… soit l'autre… mais **pas** les deux*

  = **disjonction exclusive**

- Tu auras ton diplôme si tu réussis tes examens ou si tu me verses 50 000 €.
  L'un… ou l'autre… ou les deux.

  = **disjonction non exclusive**

Les lois de De Morgan

(trouvées par Augustus De Morgan)

- Les lois de De Morgan (pour la logique) :

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

- Pour nier une conjonction/disjonction :
  - nier chacun des membres
  - changer l'opérateur ($\vee \rightarrow \wedge$, $\wedge \rightarrow \vee$)

Implication

- L'**implication** construite à partir des propositions p et q se note $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ (« p implique q »).

$p \equiv$ Il y a du soleil.

$q \equiv$ Le chien va jouer dehors.

$p \Rightarrow q \equiv$ S'il y a du soleil, <u>alors</u> le chien va jouer dehors.

prémisse hypothèse condition antécédent	⇒	$p \Rightarrow q$	⇐	conclusion conséquence thèse

Implication

- Dans $p \Rightarrow q$, on dit que
  - p est une **condition suffisante** pour q et que
  - q est une **condition nécessaire** pour p.

- S'il y a du soleil, alors, le chien ira jouer dehors.
  - « Il y a du soleil » suffit pour conclure que le chien ira dehors.
  - Si on sait que le chien n'est pas dehors, que peut-on conclure ? Donc, « le chien joue dehors » est une « condition » nécessaire à « il y a du soleil ».

Table de vérité de l'implication

Attention à ne pas faire d'interprétation inexacte !

- Si la règle est "S'il y a du soleil, alors, le chien va jouer dehors", que peut-on conclure dans les cas suivants ?
  a) On constate qu'il y a du soleil.
  b) On constate qu'il n'y a pas de soleil.
  c) On constate que le chien est dehors.
  d) On constate que le chien n'est pas dehors.
- Quelles sont les situations où la règle est respectée ?

	Chien dehors	Chien pas dehors
Soleil	situation A	~~situation B~~
Pas de soleil	situation C	situation D

- **Mathématique** : interprétation précise
  - **≠ langage courant** : souvent des sous-entendus
  - *Exemple :* "Si tu manges tes épinards, tu auras du dessert."

Table de vérité de l'implication

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Si p est **F**, on ne peut rien exiger au sujet de q… donc, dans tous les cas, l'implication est vérifiée (du moins, elle n'est pas mise en défaut).

Si p est **V**, alors, l'implication $p \Rightarrow q$ nécessite que q soit vrai également.

$$\boldsymbol{p \Rightarrow q \equiv \mathbf{q} \vee \neg p}$$

Les lois de De Morgan

(trouvées par Augustus De Morgan)

- Comment **nier une disjonction** ?

$p \equiv$ ce programme est écrit en C

$q \equiv$ ce programme est écrit en Java

$p \vee q \equiv$ ce programme est écrit en C <u>ou</u> en Java

$\neg(p \vee q) \equiv$ ce programme n'est pas écrit en C <u>ni</u> en Java.

$\equiv$ il n'est pas écrit en C <u>et</u> il n'est pas écrit en Java

$\equiv \neg p \wedge \neg q$

$$\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \equiv \neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q}$$

Les lois de De Morgan

(trouvées par Augustus De Morgan)

- Comment **nier une conjonction** ?

$p \equiv$ ce café est chaud

$q \equiv$ ce café est bon

$p \wedge q \equiv$ ce café est bon <u>et</u> chaud

$\neg(p \wedge q) \equiv$ il est faux que ce café est bon et chaud.

$\equiv$ il n'est pas bon <u>ou</u> il n'est pas chaud.

$\equiv \neg p \vee \neg q$

$$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$$

Double-implication

- La **double-implication/équivalence** construite à partir des propositions p et q se note $p \Leftrightarrow q$ (« p ssi q »).

  $p \equiv$ La figure géométrique est un triangle.

  $q \equiv$ La figure géométrique a 3 côtés.

  $p \Leftrightarrow q \equiv$ La figure géométrique est un triangle ssi elle a 3 côtés.

  On dit que p est une **condition nécessaire et suffisante** pour q (idem pour q par rapport à p).

Double-implication

- (Rappel) Attention aux imprécisions du français !

  « Si tu finis ta soupe, tu auras du dessert ! » cache une équivalence !

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F/0	F/0	V/1
F/0	V/1	F/0
V/1	F/0	F/0
V/1	V/1	V/1

La proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie uniquement dans les cas où p et q ont la même valeur de vérité.

$$p \Leftrightarrow q = \overline{\mathrm{p} \oplus q} = \bar{p}\bar{q} + pq$$

$$= (\neg p \wedge \neg q) \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$$

Inverse, converse, contraposée

- À partir de l'implication $p \Rightarrow q$, on peut définir…

  Exemple : « S'il y a du soleil, le chien jouera dehors. »

  Lesquelles disent la même chose ?

  - son **inverse** $\neg p \Rightarrow \neg q$
    (on nie les deux membres)

    « S'il n'y a pas de soleil, le chien ne jouera pas dehors. »

  - son **converse** $q \Rightarrow p$
    (on intervertit les deux membres)

    « Si le chien joue dehors, alors, c'est qu'il y a du soleil. »

  - sa **contraposée** $\neg q \Rightarrow \neg p$
    (on nie + intervertit les membres)

    « Si le chien ne joue pas dehors, alors, c'est qu'il n'y a pas de soleil. »

Principales portes logiques

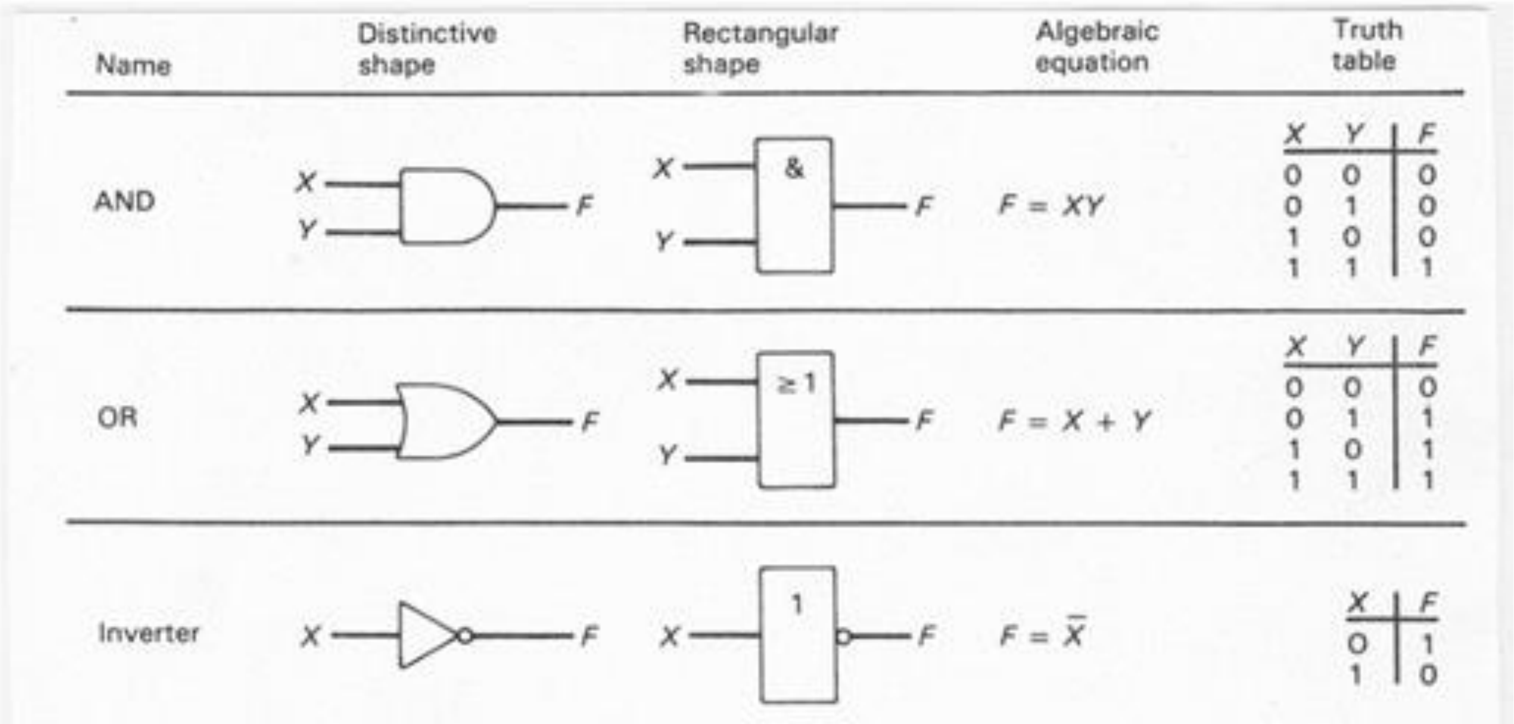
NOT

OR AND

NOR NAND

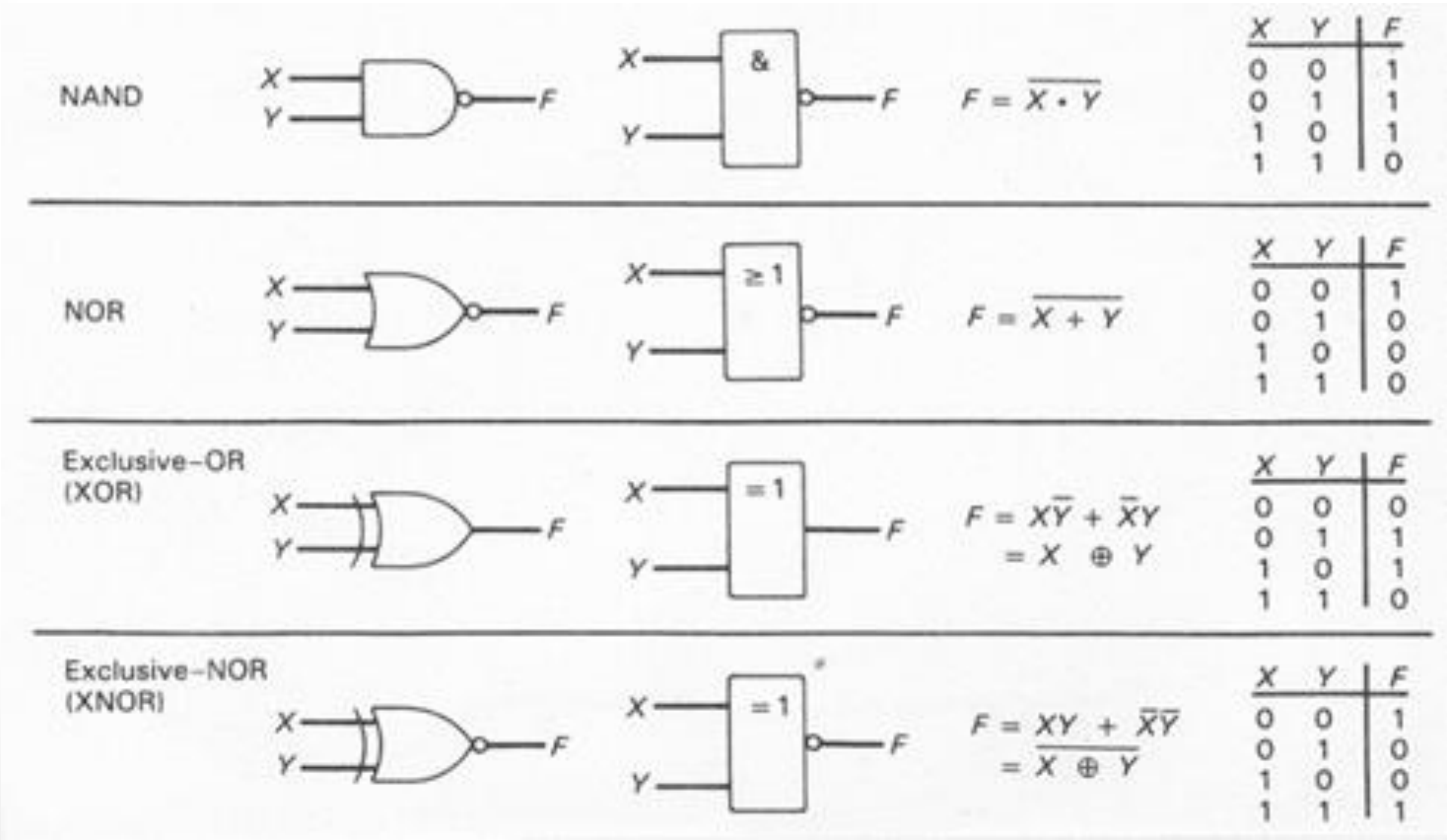
XOR NXOR

Principales portes logiques



Name	Distinctive shape	Rectangular shape	Algebraic equation	Truth table
AND	X, Y → F	&	$F = XY$	X Y | F: 0 0 | 0; 0 1 | 0; 1 0 | 0; 1 1 | 1
OR	X, Y → F	≥1	$F = X + Y$	X Y | F: 0 0 | 0; 0 1 | 1; 1 0 | 1; 1 1 | 1
Inverter	X → F	1	$F = \bar{X}$	X | F: 0 | 1; 1 | 0

Principales portes logiques



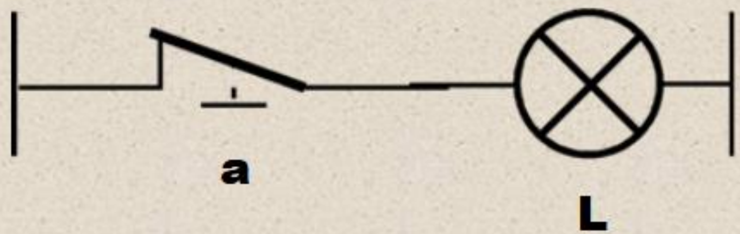
Principales portes logiques

CETTE VIDEO EXPLIQUE LE TABLEAU PRECEDENT SUR LES PORTES LOGIQUES

https://slideplayer.fr/slide/2573820/

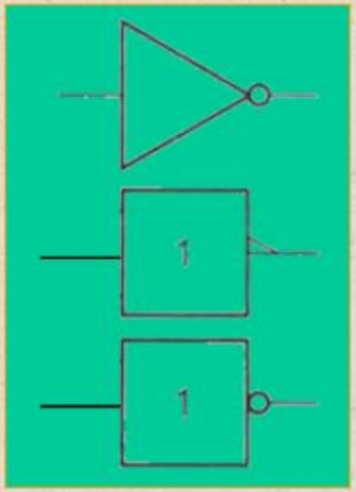
Principales portes logiques

Fonction **NON** ou **PAS**



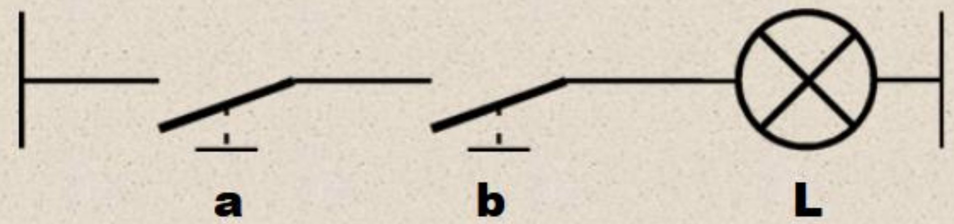
a	L
0	1
1	0

$$L = \overline{a}$$



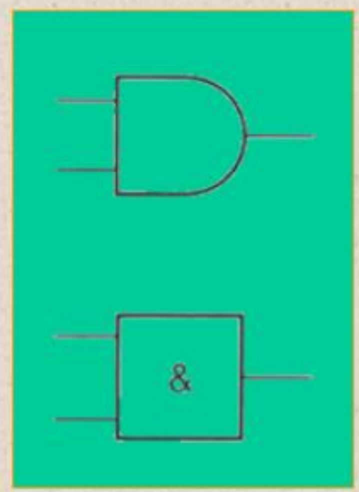
Principales portes logiques

Fonction **ET**



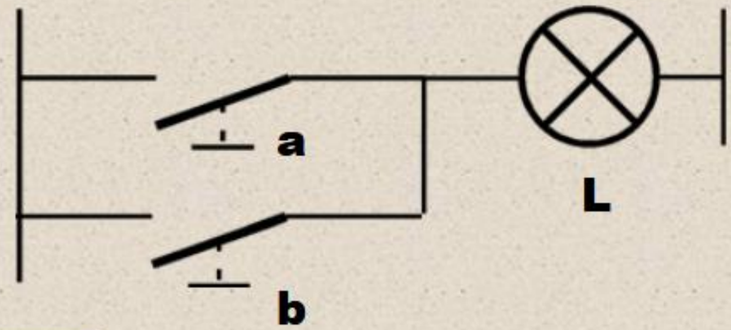
a	b	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L = a . b



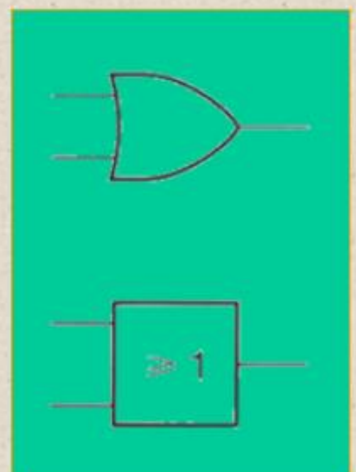
Principales portes logiques

Fonction **OU**



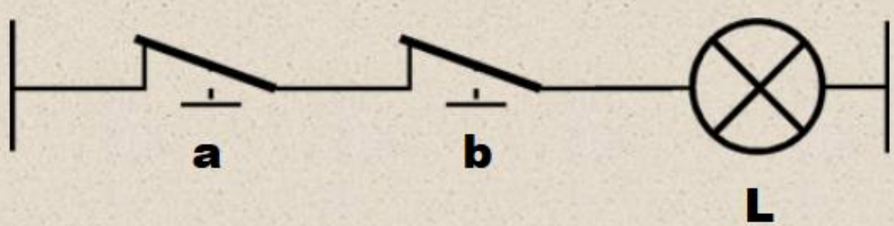
a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

L = a + b



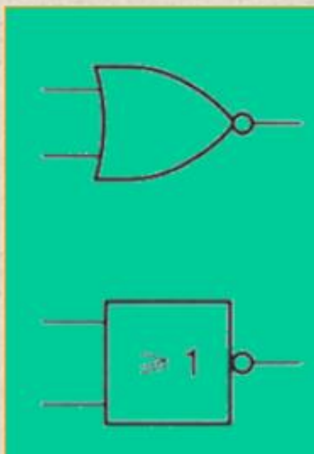
Principales portes logiques

Fonction **NOR *(NON OU)***



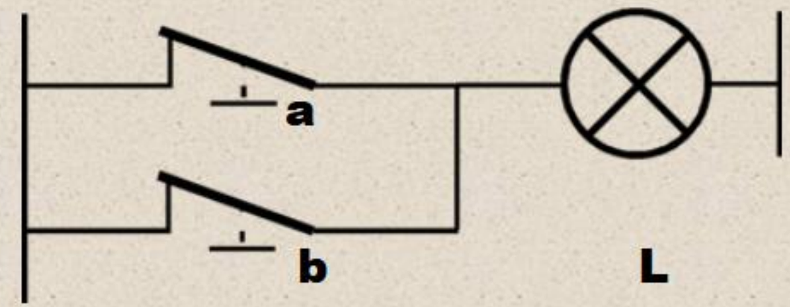
a	b	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$L = \overline{a + b} = \overline{a} \, . \, \overline{b}$$



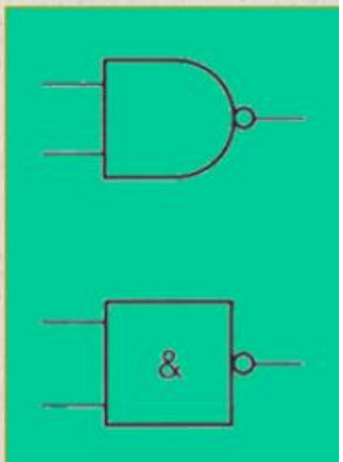
Principales portes logiques

Fonction **NAND *(NON ET)***



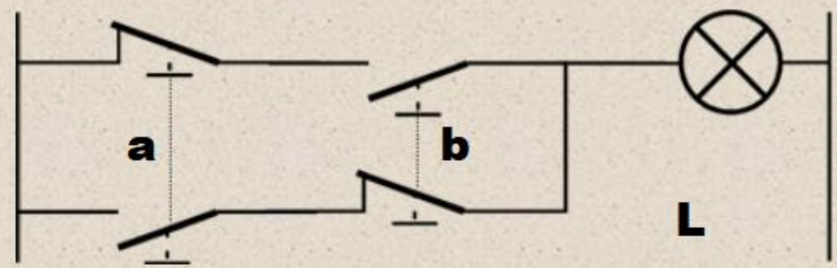
a	b	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$L = \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$



Principales portes logiques

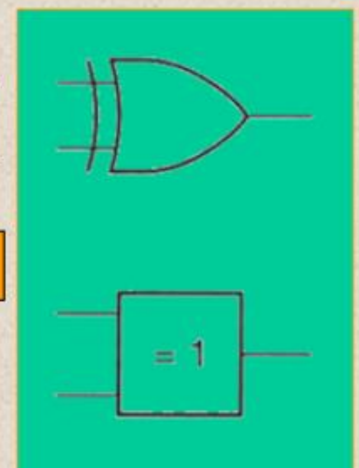
Fonction **OU EXCLUSIF**



a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$L = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$$

$$L = a \oplus b$$



Introduction à l'algèbre booléenne

1. Les identités de base

1. $A+B=B+A$
2. $A.B=B.A$
3. $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$
4. $A.(B.C)=(A.B).C=A.B.C$
5. $A.(B+C)=A.B+A.C$
6. $A+0=A$
7. $A+1=1$
8. $A.0=0$
9. $A.1=A$
10. $A+A=A$
11. $A+\overline{A}=1$
12. $A.A=A$
13. $A.\overline{A}=0$
14. $\overline{\overline{A}}=A$
15. $A+A.B=A$
16. $A+\overline{A}.B=A+B$
17. $(A+B).(A+C)=A+B.C$

Traduction de l'implication logique en équation logique

x → y se traduit par $\bar{x} + y$

$p \Rightarrow q \equiv \mathbf{q} \vee \neg p$

Formules bien formées

- La logique des propositions joue avec divers symboles qui permettent de construire des propositions
$p \quad q \quad r \quad s \quad \ldots \quad \wedge \vee \dot{\vee} \Rightarrow \Leftarrow \Leftrightarrow \quad \neg \; + \dashrightarrow \oplus$

- On ne peut toutefois pas agencer ces symboles n'importe comment. Par exemple, « $p\neg q \vee\Rightarrow q \wedge$ » n'est <u>pas</u> une « **formule bien formée** ».

Formules bien formées

Règles (inductives) pour construire des formules bien formées

1) Toute proposition élémentaire est une formule bien formée.

p q r

2) Si α est une formule bien formée, c'est aussi le cas de $\neg\alpha$.

$\neg p$ $\neg q$ $\neg\neg q$ $\neg(\neg p \dot{\vee} q)$

3) Si α et β sont des formules bien formées, alors c'est aussi le cas de $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \dot{\vee} \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ et $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$.

$(p \vee q)$ $(q \Rightarrow r)$ $(\neg p \dot{\vee} q)$ $(\neg(\neg p \dot{\vee} q) \Leftrightarrow \neg q)$

Formules bien formées

- Ces règles permettent
  - non seulement de **construire** des formules bien formées (par « petits pas », des plus simples vers les plus complexes),
  - mais aussi de **décomposer** des formules complexes en leurs parties.

- En décomposant une formule en ses composantes, on peut dresser, pas à pas, sa table de vérité.

Priorité des opérateurs

- Les règles inductives créent des formules comportant beaucoup de parenthèses. Pour simplifier l'écriture, on introduit des **règles de précédence**.
- Exemple en algèbre : 3 + 2 * 5 = 3 + 10, pas 5 * 5 !

Précédence	Opérateur	
grande	$\neg$	négation
	$\wedge$	conjonction
	$\vee$, $\dot{\vee}$	disjonction (exclusive)
	$\Rightarrow$	implication
petite	$\Leftrightarrow$	double-implication/équivalence

Construire une table de vérité

- Exemple :

$$\boxed{(\boxed{p} \vee \boxed{\neg \boxed{q}})} \Rightarrow \boxed{(\boxed{p} \wedge \boxed{q})}$$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge q)$
F/0	F/0	V/1	V/1	F/0	F/0
F/0	V/1	F/0	F/0	F/0	V/1
V/1	F/0	V/1	V/1	F/0	F/0
V/1	V/1	F/0	V/1	V/1	V/1

Cas particuliers

- Si la valeur de vérité d'une proposition est…
  - toujours **V**, on dit que c'est une **tautologie**.
  - au moins parfois **V**, on dit que c'est une **proposition satisfaisable** (et qu'elle est satisfaite par les valuations qui la rendent **V**).
  - toujours **F**, on dit que c'est une **ineptie** (ou une contradiction ou une proposition insatisfaisable).

- Si deux propositions ont toujours la même valeur de vérité, on dit qu'elles sont **équivalentes** (voir l'exemple précédent).

Équivalences logiques

- Deux propositions sont **équivalentes** si elles possèdent la même valeur de vérité sous toutes les valuations.

- Objectif : remplacer une formule complexe par une formule équivalente et plus simple !

- Premières équivalences :
  - $\boldsymbol{\alpha \equiv \neg\neg\alpha}$ (double-négation)
  - $\boldsymbol{\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha}$ (commutativité)
  - $\boldsymbol{\alpha \vee \alpha \equiv \alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha}$ (Idempotence)

Rappel : vrai ou faux ?

1. **Si $t \Rightarrow r$ alors r $\Rightarrow t$**
2. **Si $t \Rightarrow r$ alors $\neg t \Rightarrow \neg r$**
3. **Si $t \Rightarrow r$ alors $\neg r \Rightarrow \neg t$**