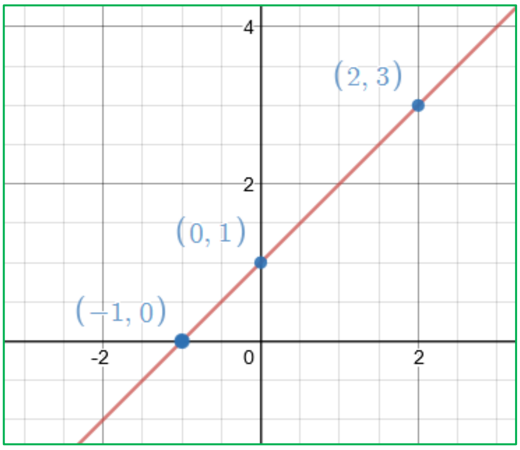
Module 2 : Atelier sur la modélisation par équations

Objectifs

- Comprendre le lien entre une équation et son lieu
- Comprendre et savoir manipuler les équations linéaires
- S'exercer à utiliser des notations de manière rigoureuse
- S'exercer à réfléchir de manière abstraite

A. Équation et lieu mathématique



(1) Quand on parle de droite en mathématique, on pense souvent à une équation du type $y = ax + b$ (certains préfèrent utiliser les lettres m et p pour écrire $y = mx + p$, ce qui est tout à fait équivalent), mais quel est le lien entre cette équation et une droite exactement ?

Par exemple, à l'équation $y = x + 1$, on associe la droite représentée sur le graphique ci-contre.

Une **droite** est (la représentation graphique d') un ensemble de points alignés (en fait, un ensemble infini de points). Sur le graphique ci-contre, on a repéré trois de ces points en indiquant leurs coordonnées.

(2) **Question de réflexion** : avant d'aller plus loin, posez-vous la question : qu'est-ce qui fait que l'équation $y = x + 1$ est liée à cette droite (plutôt qu'à une autre ou à une autre courbe) ? Quel est le lien entre l'équation $y = x + 1$ et cet ensemble de points ?

(3) De manière générale, un **lieu mathématique** (ou **lieu géométrique**) est un ensemble de points (généralement un ensemble de points qu'on compte représenter et considérer d'un point de vue graphique). Les droites sont des cas particuliers de lieux mathématiques. Beaucoup de types de lieux mathématiques portent un nom ; voici quelques exemples : droite, courbe (plus générique), triangle, cercle, parabole…

(4) Si on vous donne l'équation qui définit un lieu mathématique et qu'on vous demande de trouver ce lieu, deux méthodes peuvent être mises en place :

Soit vous reconnaissez le format de l'équation (un sujet sur lequel on travaillera dans la section suivante, pour le cas des droites) et vous analysez l'équation pour déterminer le lieu.

Soit vous ne reconnaissez pas le format de l'équation et vous recherchez des valeurs (x, y) vérifiant l'équation donnée. Chaque fois que vous trouvez des coordonnées (x, y) qui correspondent à l'équation, vous pouvez être certain que le point en question se trouve dans le lieu. Répétez le procédé jusqu'à ce que vous ayez une idée générale du lieu.

(5) **Exercice.** On considère l'équation $y = |x| + 1$ définissant un lieu mathématique, où $|x|$ représente la valeur absolue de x.

a) Complétez le tableau suivant reprenant les coordonnées de points vérifiant cette équation (et donc faisant partie du lieu).

x	0	1	-1		
y				3	3

b) Reportez ces points sur un papier quadrillé. Voyez-vous à quoi ressemble le lieu correspondant à cette équation ?
Indice : le lieu ressemblera à une lettre écrite en majuscule ; laquelle ? où se trouvera la « pointe » ?

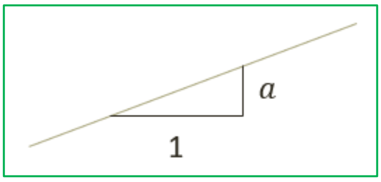
c) Vérifiez votre réponse en vous rendant sur le site **desmos.com** ; cliquez sur « Start graphing » pour accéder à l'interface. À gauche, entrez l'équation $y = |x| + 1$ dans la case, et le lieu mathématique se dessinera sur le graphique.

(6) **Exercice.** Pour cet exercice, on considère l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

a) Le lieu mathématique associé à cette équation comporte-t-il des points qui se trouvent sur les axes (l'axe horizontal ou l'axe vertical) ?

b) Complétez le tableau suivant (ajoutez éventuellement des points jusqu'à ce que vous ayez une assez bonne idée de la forme du lieu mathématique).



x	2	4	3/2		-1/2	-4		
y				-1				

c) Vérifiez votre réponse sur Desmos. Un des points représentés sur le graphe construit par Desmos n'est en fait pas dans le lieu mathématique. Lequel ?

(7) **Exercice.** Dessinez les lieux mathématiques qui correspondent aux équations suivantes. Vérifiez éventuellement vos réponses en utilisant Desmos.

a) $y = 5x$
b) $y = x^2$
c) $y^2 = 4$
d) $x + y = 3$
e) $x + y \leq 0$ (ici, on n'a pas une équation mais une **inéquation**)
f) $(optionnel)\ \ x^2 + y^2 = 4$
g) $(optionnel)\ \ (y - x)^2 = 1$
h) $(optionnel)\ \ y^2 = (x + 1)^2$
i) $(optionnel)\ |x| + |y| = 2$

B. Équations de droite

(8) Comme indiqué plus haut, le format standard des équations de droite est

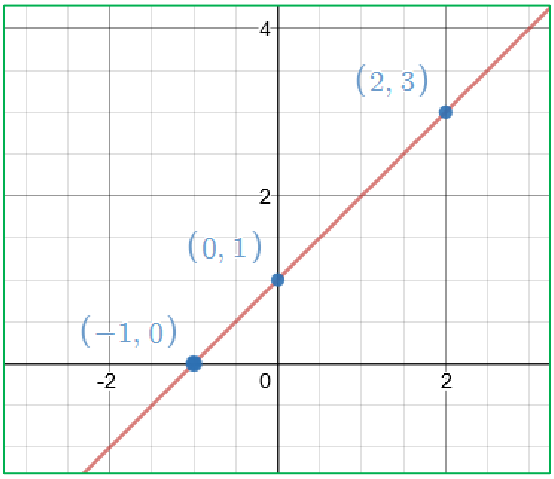
$$y = ax + b,$$

où a et b sont des nombres réels. Ces deux valeurs, qui déterminent de quelle droite il s'agit, correspondent respectivement au **coefficient angulaire** (ou pente) de la droite et **terme indépendant** de la droite.

(9) Le **coefficient angulaire** a de la droite indique sa pente. Graphiquement, a est la quantité dont la droite s'élève en allant de 1 unité vers la droite (voir ci-contre).

Concrètement, cela signifie que, plus a est grand et plus la droite « grimpe » rapidement. Si a est négatif, cela veut dire que la droite « descend ».

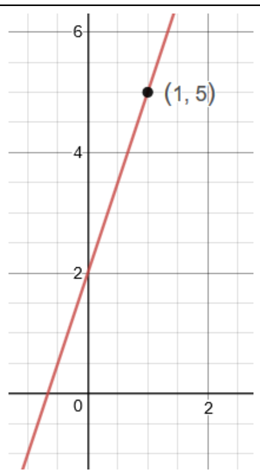
(10) Le **terme indépendant** b de l'équation indique à quelle hauteur la droite coupe l'axe vertical. En effet, le point $(0, b)$ vérifie l'équation $y = ax + b$; c'est donc en ce point que la droite coupe l'axe vertical.

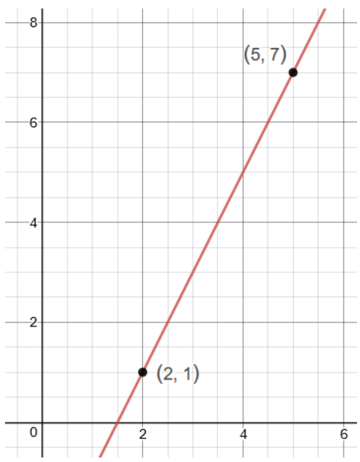


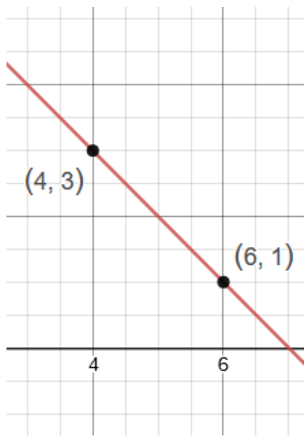
(11) Si on revient au graphique donné plus haut (et repris ci-contre), on voit que la droite dessinée coupe l'axe vertical à la hauteur 1, au point $(0,1)$; on sait donc déjà que $b = 1$ dans son équation.

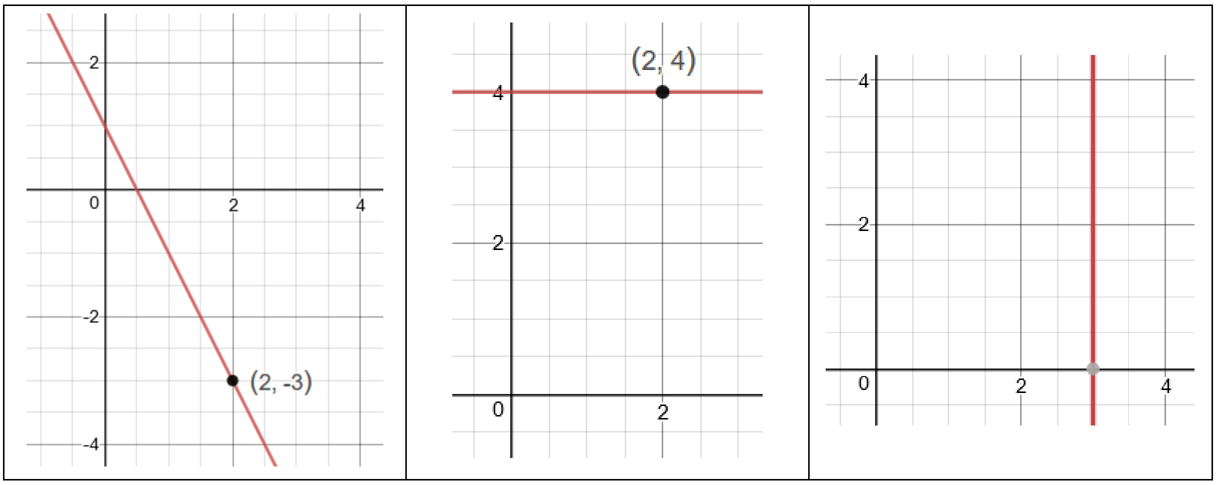
(12) On constate aussi qu'elle passe par les points $(0,1)$ et $(2,3)$. Donc, en se déplaçant de 2 unités vers la droite, elle « grimpe » de 2 unités. Cela signifie que, si on suit la droite et qu'on se déplace de 1 unité vers la droite, on « monte » de 1 unité : $a = 1$. En regroupant ces deux informations, on peut déduire que l'équation de la droite est $y = x + 1$, c'est-à-dire $y = ax + b$ avec $a = 1$ et $b = 1$.

(13) **Exercice.** Déterminez les coefficients angulaires et les termes indépendants des six droites suivantes puis donnez-en les équations.









C. Construire l'équation d'une droite

(14) Si vous connaissez le coefficient angulaire a et le terme indépendant b d'une droite, vous pouvez directement donner son équation : $y = ax + b$.

Comment faire quand on se trouve dans d'autres situations, où on connaît d'autres types d'informations à propos de la droite ? Cette section présente diverses méthodes pour obtenir l'équation de la droite dans ces cas-là.

Efforcez-vous de les <u>comprendre</u> plutôt que de les voir comme de simples recettes à appliquer, ce qui vous permettra également de vous en sortir dans d'autres cas non traités ici !

(15) Comment trouver l'équation de la droite si on connaît son coefficient angulaire a et un de ses points (x_1, y_1) ?

- Comme on dispose de a, on sait que l'équation sera $y = ax + b$, où il ne reste plus que b à déterminer.
- Dire que la droite passe par (x_1, y_1) revient à dire que ce point vérifie l'équation, c'est-à-dire que $y_1 = ax_1 + b$. De là, on peut déduire la valeur de b.

Notez que le fait de dire que deux droites sont <u>**parallèles**</u> revient à dire qu'elles ont le même coefficient angulaire. Ainsi, plutôt que de donner le coefficient angulaire de la droite recherchée, on pourrait vous indiquer qu'elle est parallèle à une droite donnée. L'information fournie serait la même.

(16) **Exercice.** On s'intéresse à une variété de plante qui croît de manière linéaire. Chaque jour, la plante gagne 3 mm de hauteur.

a) Sachant que 10 jours après avoir été plantée, la plante atteignait 5 cm de hauteur, établissez l'équation donnant sa hauteur en fonction du nombre de jours depuis le moment où elle a été plantée.
b) Sur base de l'équation, déterminez la hauteur de la plante après 4 jours ? Après 20 jours ?

(17) Une autre manière de cibler une droite en particulier est de donner deux de ses points (« Par deux points distincts passe une et une seule droite. »). Si on sait qu'une droite passe

par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), comment trouver son équation ? Une fois encore, on se ramène à un cas précédent en déterminant son coefficient angulaire.

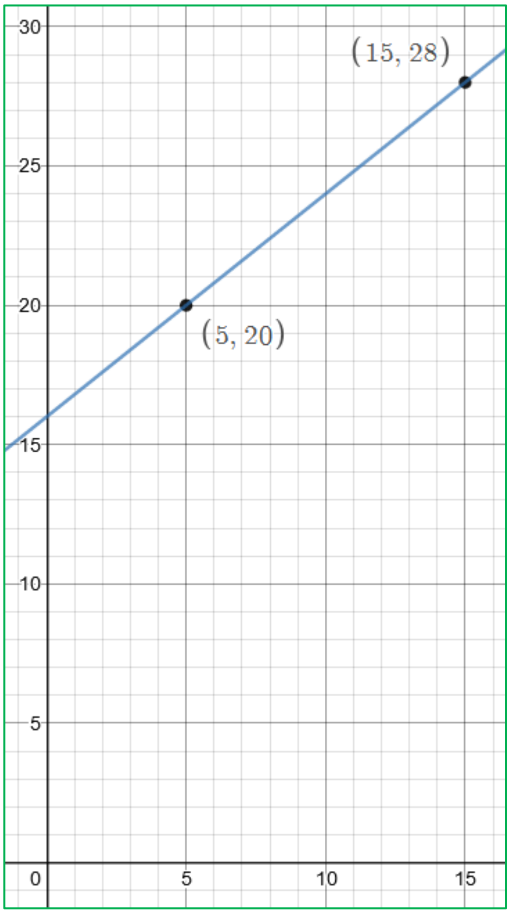
- La droite passe de (x_1, y_1) à (x_2, y_2), ce qui revient à dire qu'en se déplaçant de $x_2 - x_1$ vers la droite, elle « grimpe » de $y_2 - y_1$. Si on suit la droite en se déplaçant de 1 unité vers la droite, on va donc « monter » de
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
unités, ce qui correspond au coefficient angulaire de la droite.
- On peut ensuite se servir du fait que les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) se trouvent sur la droite pour déterminer le terme indépendant de l'équation.

(18) **Exercice.** Une autre variété de plante croît aussi de manière linéaire. Sachant qu'après 10 jours, elle mesurait 70 mm et qu'au bout de 20 jours, elle atteignait 110 mm, établissez l'équation de sa croissance.

(19) **Exercice.** La quantité d'eau présente dans une piscine évolue de manière linéaire au fil des semaines. Cinq semaines après le moment où elle a été remplie, la piscine contenait 117 000 litres d'eau. Vingt semaines après le remplissage, elle ne contenait plus que 114 000 litres d'eau. Établissez l'équation indiquant le nombre de litres restant en fonction du nombre de semaines écoulées depuis son remplissage.

(20) **Exercice.** Le prix d'une course de taxi comprend une prise en charge de 50 euros et un prix au kilomètre de 2 Euros. Établissez l'équation exprimant le prix en fonction du nombre de kilomètres. Si un individu paie 84 Euros, combien de kilomètres aura-t-il parcouru ? Exprimez finalement le nombre de kilomètres en fonction du prix.

(21) **Exercice.** Le prix de vente d'une certaine marchandise dépend linéairement des coûts de production. Sachant qu'un coût de production de 100 € donnera un prix de vente de 250 € et que toute augmentation du coût de production de 10 € engendrera une augmentation du prix de vente de 4 €, exprimez le prix de vente en fonction du coût de production. Exprimez également le bénéfice en fonction du coût de production.



(22) La modélisation linéaire est utilisée dans le cadre des problèmes dits d'**interpolation linéaire**. Il s'agit de problèmes où on dispose d'informations à propos de deux situations précises et où on décide d'utiliser ces informations pour déterminer ce qu'il se passerait dans une troisième situation « située entre les deux premières ». Un exemple concret rendra cela plus compréhensible.

Il y a deux ans, l'IRM a déterminé qu'il a plu exactement 5% du temps pendant les mois de juillet et août. L'année passée, les pluies ont atteint 15% du temps pendant ces deux mois. Un fermier s'est intéressé à la croissance de ses plantations au cours de ces deux mois. Il y a deux ans, il a remarqué une croissance moyenne de 20 cm. L'année passée, il a mesuré une croissance moyenne de 28 cm. Cette année-ci, l'IRM prévoit des pluies pendant 12% du temps en juillet et en août. À quelle croissance moyenne le fermier peut-il s'attendre ?

Les données sont les suivantes : avec 5% de temps de pluie, on a obtenu 20 cm de croissance ; et avec 15% de temps de pluie, 28 cm de croissance. On dispose de données à propos des situations correspondant à 5% et à 15% de pluie… et on cherche des informations à propos d'une troisième situation intermédiaire, à savoir 12% de pluie.

Le principe de base de l'interpolation linéaire consiste à supposer que les choses évoluent en ligne droite entre les deux situations extrêmes (voir graphique ci-contre).

Pour répondre à la question « Que se passera-t-il avec 12% de pluie ? », on se base sur l'équation de la droite passant par les deux points donnés.

(23) **Exercice.** Déterminez l'équation de la droite passant par les points (5,20) et (15,28). On s'intéresse au point de coordonnées $(12, y_1)$ par lequel la droite passe. Déterminez la valeur de y_1 et déduisez-en la croissance moyenne à laquelle le fermier peut s'attendre pour cette année-ci.

(24) **Exercice.** On a déterminé expérimentalement qu'un programme de gestion de stocks mettait 1 minute pour traiter 1000 commandes et 2 minutes 30 secondes pour en traiter 10000. En supposant que le temps d'exécution évolue linéairement, quel sera le temps nécessaire pour traiter 7000 données ? Combien de données au maximum pourra-t-on traiter si on désire que l'exécution ne dépasse pas 5 minutes ?

(25) **Exercice.** Dans le cadre d'études statistiques sur les températures relevées quotidiennement dans une ville donnée, on envisage d'utiliser deux programmes. Les températures seraient reçues sous la forme d'un tableau dont on note n la taille (le nombre de températures relevées).

Pour calculer les résultats désirés, le **programme A** effectue 5 opérations sur chacune des températures du tableau puis 11 opérations après le parcours du tableau. Exprimez le nombre total d'opérations en fonction de la taille du tableau pour le programme A.

Le **programme B**, quant à lui, effectue 4 opérations sur chacune des températures du tableau puis 70 opérations après le parcours du tableau. Exprimez le nombre total d'opérations en fonction de la taille du tableau pour le programme B.´

- À quoi correspond la notion de coefficient angulaire dans ce cas-ci ?
- Quel programme est le plus efficace ? Rédigez éventuellement votre réponse en fonction du nombre de données à traiter.

(26) **Exercice (examen août 2019).** Une grande surface a mené pendant plusieurs mois une étude sur les ventes de deux variétés de pommes appelées A et B. Chaque mois, on a noté le pourcentage des ventes de pommes correspondant à chacune des deux variétés. Quand on transpose les résultats sur un graphique, on remarque que l'évolution est linéaire (le graphique est une droite) tant pour la variété A que pour la variété B.

Lors du mois numéro 10 de l'étude, les deux variétés se sont vendues à quantité égale, correspondant à 40% des ventes totales (les deux droites se croisent donc au point $x = 10$ et $y = 40$). La variété A a connu une évolution négative constante, perdant 2% chaque mois. La variété B, par contre, a connu une évolution positive, atteignant 55% pour le mois numéro 20.

Donnez l'équation de chacune des droites. Calculez également la différence entre les pourcentages de ventes correspondant à A et B lors du premier mois (mois numéro 0) de l'étude.

(27) **Exercice (examen janvier 2019).** Donnez l'équation de la droite D qui passe par le point $(3,5)$ et possède un coefficient angulaire de 4. Déterminez x et y pour que les points $(-2, y)$ et $(x, 41)$ se trouvent sur D.