

《计算机辅助几何设计》作业

ID号: 048 姓名: 郑涛

2024年10月16日

1. Prove: Let $f(x) \in C^2[a, b]$ be any interpolating function, and $S(x)$ be the natural interpolating cubic spline function (with second derivative equal to zero at both endpoints), then:

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

where the equality holds if and only when $f(x) \equiv S(x)$

证明: 令 $g(x) = f(x) - S(x)$, $g(x)$ 在插值节点上的函数值为0, 内部节点的一阶导数值、二阶导数值均为0.

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b (g'' + S'')^2 dx = \int_a^b (S'')^2 dx + 2 \int_a^b g'' S'' dx + \int_a^b (g'')^2 dx$$

只需证明 $\int_a^b g'' S'' dx$ 非负即可。

$$\begin{aligned} \int_a^b g'' S'' dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S'' g'' dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} S'' g' \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} S''' g' dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i [g(t_{i+1}) - g(t_i)] = 0 \end{aligned}$$

因此有 $\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b (S'')^2 dx + \int_a^b (g'')^2 dx \geq \int_a^b (S'')^2 dx$, 当且仅当 $g(x) \equiv 0$ 即 $f(x) \equiv S(x)$ 时等号成立。

2. Implement an interactive program for generating cubic Bézier spline curves. Reference the interactive interface of the drawing tool in Microsoft Word or PowerPoint under "Insert" - "Shapes" - "Curve"

1 问题描述

实现三阶Bézier样条曲线绘制。

2 程序思路说明

2.1 Bézier曲线

固定点 $p_i (i = 0, 1, \dots, n)$, Bézier曲线上的点 $x(t)$ 为所有固定点的一个插值, 在 $t \in [0, 1]$ 时刻的 $x(t)$ 有如下公式:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) p_i$$

其中:

$$B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

2.2 如何实现三阶Bézier样条曲线

设插值点为 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 三阶Bézier曲线需要四个控制点, 因此 p_1, \dots, p_n 内部需要添加 $2n - 2$ 个控制点。本次实验假设参数间隔均匀, 即 $\Delta t = \text{const}$ 。

不妨设控制点与插值点按顺序排列为 $z_i (i = 1, 2, \dots, 3n - 2)$ 满足样条插值的条件如下:

1. C^0 连续

$$z_{3i-2} = p_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

2. C^1 连续

$$z_{3i-3} - 2z_{3i-2} + z_{3i-1} = 0, i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (2)$$

3. C^2 连续

$$z_{3i-4} - 2z_{3i-3} + 2z_{3i-1} - z_{3i} = 0, i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3)$$

上述共 $3n-4$ 个条件，还缺两个条件，本次实验我选用的是自然样条的额外条件，即端点处的二阶导为0：

$$\begin{aligned} z_1 - 2z_2 + z_3 &= 0 \\ z_{3n-4} - 2z_{3n-3} + z_{3n-2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

根据如上条件构造线性方程组，求得 z_i ，分段求出Bézier曲线即可。

3 编译环境

本代码用matlab R2022b编译

4 使用说明

本代码可直接运行。

5 结果展示

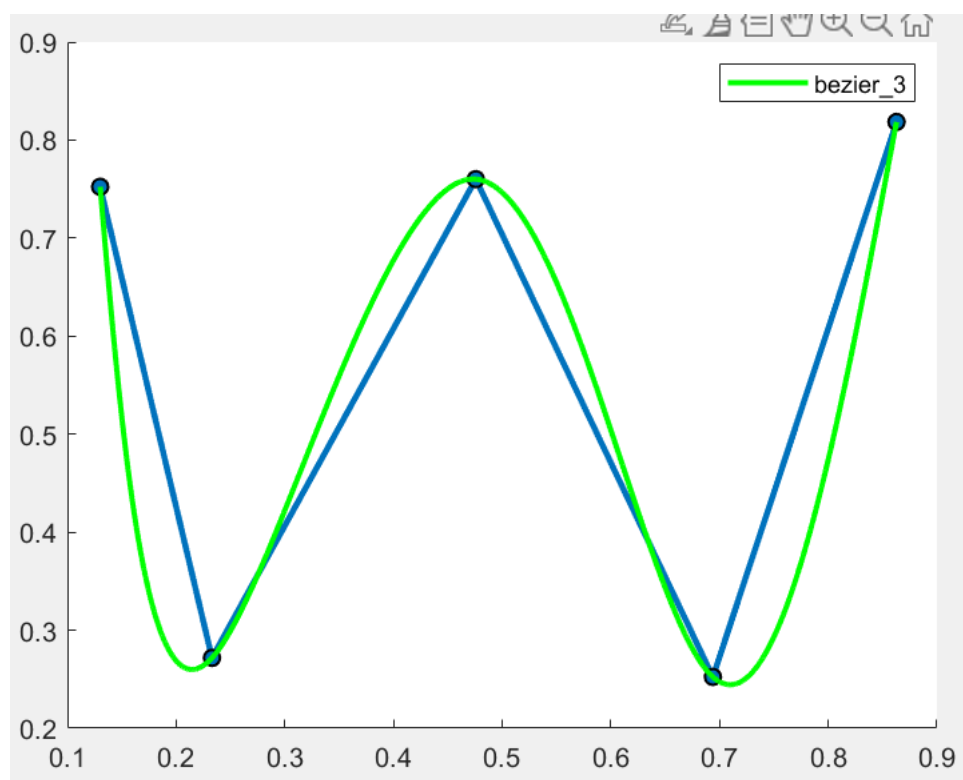


图 1:

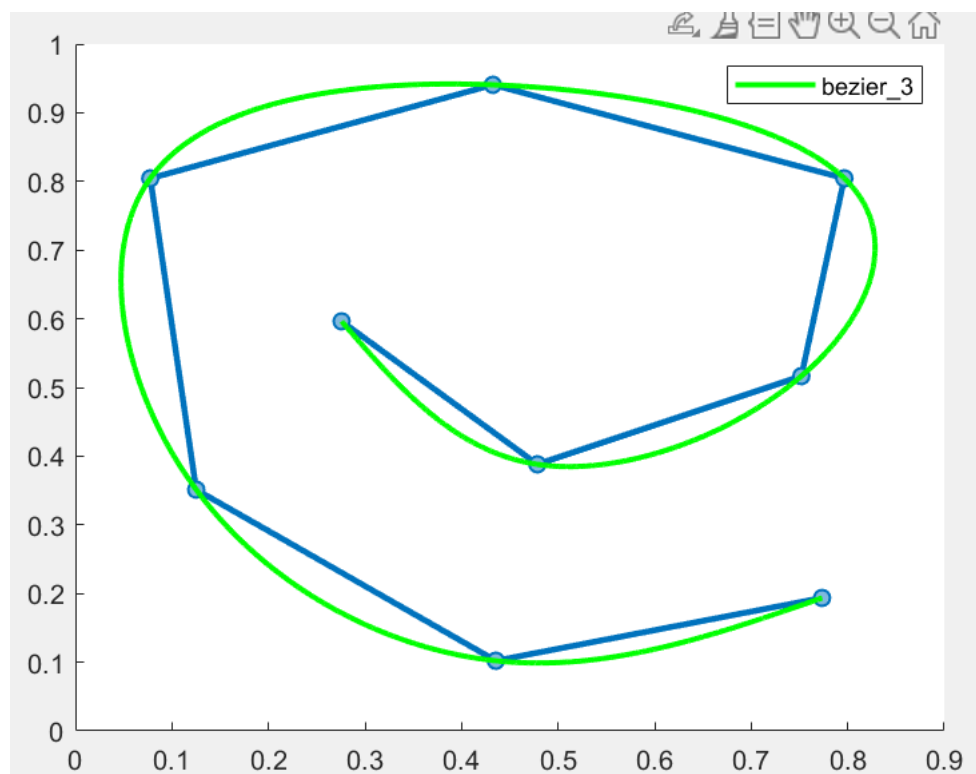


图 2:

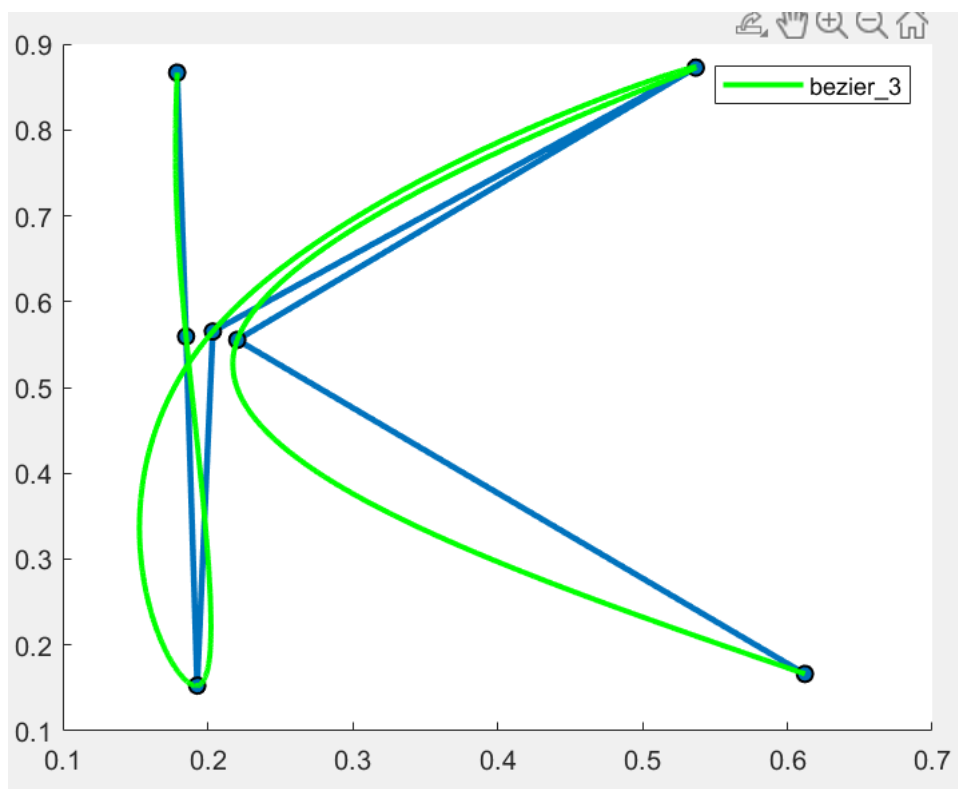


图 3:

6 实验结果分析

实现了3阶Bézier样条曲线插值。