

《计算机辅助几何设计》作业

ID号: 048 姓名: 郑涛

2024年10月26日

1 问题描述

给定 $n+1$ 个点 $p_i (i = 0, \dots, n)$, 实现四阶三次B样条插值曲线 $x(t)$ 以及交互功能。

2 程序思路说明

2.1 De Boor Algorithm

给定 $n+1$ 个De Boor Points: $d_i (i = 0, \dots, n)$, 以及结点向量

$$(t_0 = t_1 = \dots = t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{n+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+k})$$

伪代码:

1. Search index r with $t_r \leq t < t_{r+1}$

2. for $i = r - k + 1, \dots, r$

$$d_i^0 = d_i$$

• for $j = 1, \dots, k - 1$

for $i = r - k + 1 + j, \dots, r$

$$d_i^j = (1 - \alpha_i^j) \cdot d_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j \cdot d_i^{j-1}$$

$$\text{with } \alpha_i^j = \frac{t - t_i}{t_{i+k-j} - t_i}$$

Then: $d_r^{k-1} = x(t)$

2.2 如何实现四阶三次B样条曲线插值

B样条曲线有形式:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) \cdot d_i$$

其中 $N_{i,k}(t)$ 为B样条基函数, 满足如下关系:

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

for $k > 1, i = 0, \dots, n$

四阶B样条插值函数的De Boor Points $d_i (i = 0, 1, \dots, n + 2)$ 要满足:

1. 选定Knot Vector:

$$\begin{aligned} T &= (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n+2}, t_{n+3}, t_{n+4}, t_{n+5}, t_{n+6}) \\ &= (s_0, s_0, s_0, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, s_n, s_n, s_n) \end{aligned} \quad (1)$$

2. 满足插值条件:

$$\begin{aligned} x(s_0) &= p_0 = d_0 \\ x(s_i) &= p_i = N_{i,4}(s_i)d_i + N_{i+1,4}(s_i)d_{i+1} + N_{i+2,4}(s_i)d_{i+2} \\ x(s_n) &= p_n = d_{n+2} \end{aligned} \quad (2)$$

3. 上述有 $n+1$ 个条件, 要求 $n+3$ 个 De Boor Point, 需要加两个条件:

$$\begin{aligned} x''(s_0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d_2 - d_1}{s_2 - s_0} = \frac{d_1 - d_0}{s_1 - s_0} \\ x''(s_n) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d_{n+2} - d_{n+1}}{s_n - s_{n-1}} = \frac{d_{n+1} - d_n}{s_n - s_{n-2}} \end{aligned} \quad (3)$$

根据上述条件解线性方程组求出 De Boor Points $d_i (i = 0, 1, \dots, n+2)$, 再根据 De Boor Algorithm 求得 B 样条曲线即可。

3 编译环境

本代码用 matlab R2022b 编译

4 使用说明

本代码可直接运行, 移动其中一点之后可以看到控制点和控制点的折线。

5 结果展示

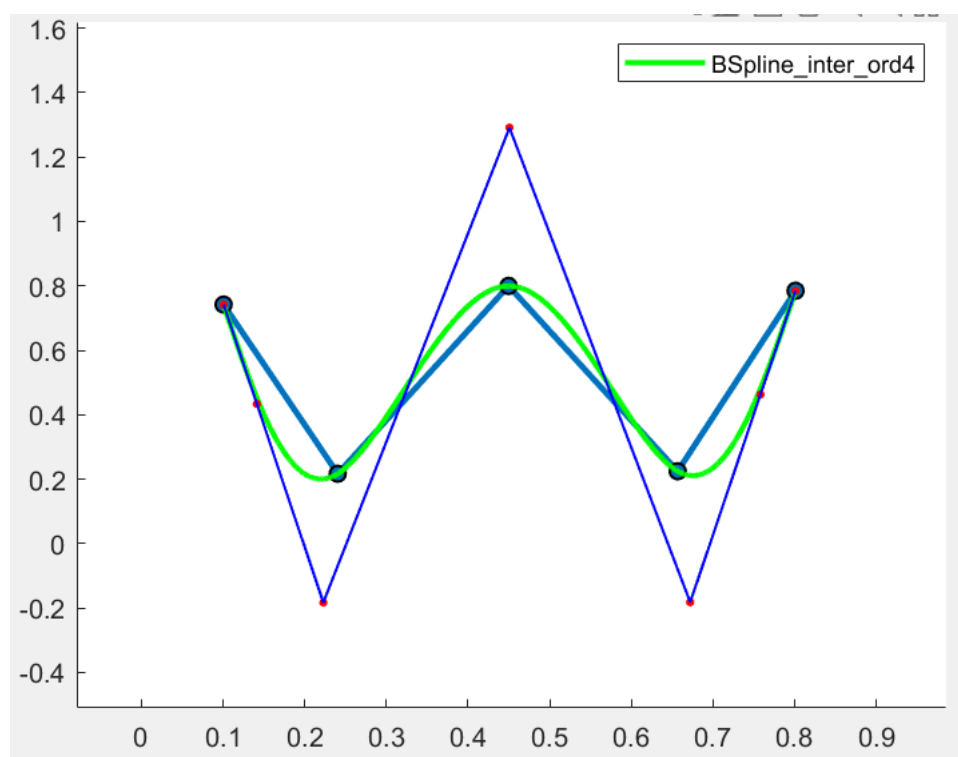


图 1:

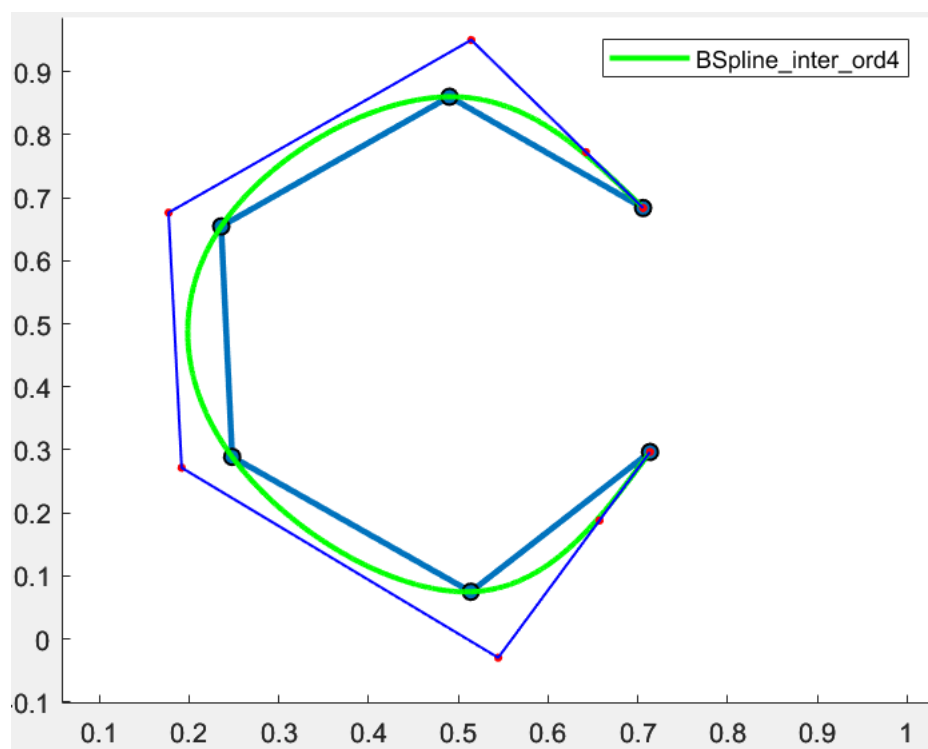


图 2:

6 实验结果分析

实现了四阶三次B样条曲线插值以及交互功能。