

# 数值代数第五次实验报告

教师：邓建松

PB20061327 郑涛

## 5.1 问题描述

1. 考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, 0 < x, y < 1, \\ u|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

其中  $\Gamma$  为正方形区域的边界。类似于模型问题，我们得到差分方程

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) u_{ij} - \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = \frac{h^2}{4} f_{ij}, i, j = 1, \dots, n-1, \\ u_{i,0} = \varphi_{i,0}, u_{i,n} = \varphi_{i,n}, i = 0, 1, \dots, n, \\ u_{0,j} = \varphi_{0,j}, u_{n,j} = \varphi_{n,j}, j = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

按照自然顺序排列得到系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} S' & B & & & \\ B & S' & B & & \\ & B & S' & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B \\ & & & B & S' \end{pmatrix}$$

其中  $B = -I/4$ ,  $I$  为  $n-1$  阶单位矩阵,  $S'$  是对角元均为  $1 = h^2/4$ , 次对角元均为  $-1/4$  的  $n-1$  阶对称三对角阵。对  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $n = 20$ .

(1) 用共轭梯度法求解差分方程, 要求 4 位有效数字。观察迭代次数和求解所用时间, 迭代终止条件为  $\|x_{k+1} - x_k\|_{\infty} < 10^{-7}$ . 注意边界条件与线性方程组的关系!!

(2) 用 SOR 迭代法求解, 用二分法找出最佳松弛因子 (需要在报告中给出), 在相同条件下观察迭代次数和求解所用时间, 并比较 SOR 迭代法和共轭梯度法的优劣。

## 5.1 程序运行结果

共轭梯度法的解为：

0.0214	0.0404	0.0613	0.0852	0.1125	0.1436	0.1787	0.2178	0.2611	0.3085
0.3603	0.4163	0.4765	0.5409	0.6093	0.6817	0.7578	0.8372	0.9193	0.0404
0.0688	0.0973	0.1272	0.1591	0.1936	0.2311	0.2719	0.3160	0.3636	0.4147
0.4693	0.5274	0.5889	0.6536	0.7213	0.7916	0.8638	0.9371	0.0613	0.0973
0.1322	0.1673	0.2033	0.2411	0.2809	0.3232	0.3681	0.4158	0.4664	0.5199
0.5761	0.6350	0.6964	0.7599	0.8251	0.8912	0.9575	0.0852	0.1272	0.1673
0.2067	0.2464	0.2869	0.3288	0.3725	0.4182	0.4661	0.5163	0.5687	0.6233
0.6800	0.7385	0.7985	0.8594	0.9205	0.9811	0.1125	0.1591	0.2033	0.2464
0.2890	0.3319	0.3756	0.4205	0.4669	0.5150	0.5648	0.6165	0.6698	0.7246
0.7807	0.8377	0.8951	0.9522	1.0083	0.1436	0.1936	0.2411	0.2869	0.3319
0.3767	0.4219	0.4678	0.5148	0.5631	0.6127	0.6637	0.7159	0.7693	0.8235
0.8781	0.9327	0.9868	1.0394	0.1787	0.2311	0.2809	0.3288	0.3756	0.4219
0.4682	0.5150	0.5625	0.6109	0.6603	0.7108	0.7623	0.8145	0.8673	0.9202
0.9727	1.0244	1.0746	0.2178	0.2719	0.3232	0.3725	0.4205	0.4678	0.5150
0.5623	0.6102	0.6588	0.7081	0.7583	0.8092	0.8607	0.9124	0.9641	1.0153
1.0654	1.1139	0.2611	0.3160	0.3681	0.4182	0.4669	0.5148	0.5625	0.6102
0.6583	0.7070	0.7563	0.8063	0.8569	0.9080	0.9592	1.0102	1.0606	1.1099
1.1574	0.3085	0.3636	0.4158	0.4661	0.5150	0.5631	0.6109	0.6588	0.7070
0.7557	0.8051	0.8551	0.9057	0.9566	1.0077	1.0586	1.1088	1.1578	1.2051
0.3603	0.4147	0.4664	0.5163	0.5648	0.6127	0.6603	0.7081	0.7563	0.8051
0.8545	0.9047	0.9555	1.0067	1.0581	1.1093	1.1599	1.2094	1.2571	0.4163
0.4693	0.5199	0.5687	0.6165	0.6637	0.7108	0.7583	0.8063	0.8551	0.9047
0.9552	1.0064	1.0582	1.1103	1.1623	1.2139	1.2644	1.3134	0.4765	0.5274
0.5761	0.6233	0.6698	0.7159	0.7623	0.8092	0.8569	0.9057	0.9555	1.0064
1.0583	1.1109	1.1642	1.2176	1.2707	1.3230	1.3739	0.5409	0.5889	0.6350
0.6800	0.7246	0.7693	0.8145	0.8607	0.9080	0.9566	1.0067	1.0582	1.1109
1.1649	1.2196	1.2749	1.3302	1.3850	1.4385	0.6093	0.6536	0.6964	0.7385
0.7807	0.8235	0.8673	0.9124	0.9592	1.0077	1.0581	1.1103	1.1642	1.2196
1.2764	1.3341	1.3923	1.4502	1.5073	0.6817	0.7213	0.7599	0.7985	0.8377
0.8781	0.9202	0.9641	1.0102	1.0586	1.1093	1.1623	1.2176	1.2749	1.3341
1.3948	1.4564	1.5184	1.5800	0.7578	0.7916	0.8251	0.8594	0.8951	0.9327
0.9727	1.0153	1.0606	1.1088	1.1599	1.2139	1.2707	1.3302	1.3923	1.4564
1.5223	1.5893	1.6564	0.8372	0.8638	0.8912	0.9205	0.9522	0.9868	1.0244
1.0654	1.1099	1.1578	1.2094	1.2644	1.3230	1.3850	1.4502	1.5184	1.5893
1.6621	1.7362	0.9193	0.9371	0.9575	0.9811	1.0083	1.0394	1.0746	1.1139
1.1574	1.2051	1.2571	1.3134	1.3739	1.4385	1.5073	1.5800	1.6564	1.7362
1.8187									

迭代次数为：55  
运行时间为：1691ms

```

SOR迭代法结果：
解为：
0.0214 0.0404 0.0613 0.0852 0.1125 0.1436 0.1787 0.2178 0.2611 0.3085
0.3603 0.4163 0.4765 0.5409 0.6093 0.6817 0.7578 0.8372 0.9193 0.0404
0.0688 0.0973 0.1272 0.1591 0.1936 0.2311 0.2719 0.3160 0.3636 0.4147
0.4693 0.5274 0.5889 0.6536 0.7213 0.7916 0.8638 0.9371 0.0613 0.0973
0.1322 0.1673 0.2033 0.2411 0.2809 0.3232 0.3681 0.4158 0.4664 0.5199
0.5761 0.6350 0.6964 0.7599 0.8251 0.8912 0.9575 0.0852 0.1272 0.1673
0.2067 0.2464 0.2869 0.3288 0.3725 0.4182 0.4661 0.5163 0.5687 0.6233
0.6800 0.7385 0.7985 0.8594 0.9205 0.9811 0.1125 0.1591 0.2033 0.2464
0.2890 0.3319 0.3756 0.4205 0.4669 0.5150 0.5648 0.6165 0.6698 0.7246
0.7807 0.8377 0.8951 0.9522 1.0083 0.1436 0.1936 0.2411 0.2869 0.3319
0.3767 0.4219 0.4678 0.5148 0.5631 0.6127 0.6637 0.7159 0.7693 0.8235
0.8781 0.9327 0.9868 1.0394 0.1787 0.2311 0.2809 0.3288 0.3756 0.4219
0.4682 0.5150 0.5625 0.6109 0.6603 0.7108 0.7623 0.8145 0.8673 0.9201
0.9727 1.0244 1.0746 0.2178 0.2719 0.3232 0.3725 0.4205 0.4678 0.5150
0.5623 0.6102 0.6588 0.7081 0.7583 0.8092 0.8607 0.9124 0.9641 1.0153
1.0654 1.1139 0.2611 0.3160 0.3681 0.4182 0.4669 0.5148 0.5625 0.6102
0.6583 0.7070 0.7563 0.8063 0.8569 0.9080 0.9592 1.0102 1.0606 1.1099
1.1574 0.3085 0.3636 0.4158 0.4661 0.5150 0.5631 0.6109 0.6588 0.7070
0.7557 0.8051 0.8551 0.9057 0.9566 1.0077 1.0586 1.1088 1.1578 1.2051
0.3603 0.4147 0.4664 0.5163 0.5648 0.6127 0.6603 0.7081 0.7563 0.8051
0.8545 0.9047 0.9555 1.0067 1.0581 1.1093 1.1599 1.2094 1.2571 0.4163
0.4693 0.5199 0.5687 0.6165 0.6637 0.7108 0.7583 0.8063 0.8551 0.9047
0.9552 1.0064 1.0582 1.1103 1.1623 1.2139 1.2644 1.3134 0.4765 0.5274
0.5761 0.6233 0.6698 0.7159 0.7623 0.8092 0.8569 0.9057 0.9555 1.0064
1.0583 1.1109 1.1642 1.2176 1.2707 1.3230 1.3739 0.5409 0.5889 0.6350
0.6800 0.7246 0.7693 0.8145 0.8607 0.9080 0.9566 1.0067 1.0582 1.1109
1.1649 1.2196 1.2749 1.3302 1.3850 1.4385 0.6093 0.6536 0.6964 0.7385
0.7807 0.8235 0.8673 0.9124 0.9592 1.0077 1.0581 1.1103 1.1642 1.2196
1.2764 1.3341 1.3923 1.4502 1.5073 0.6817 0.7213 0.7599 0.7985 0.8377
0.8781 0.9201 0.9641 1.0102 1.0586 1.1093 1.1623 1.2176 1.2749 1.3341
1.3948 1.4564 1.5184 1.5800 0.7578 0.7916 0.8251 0.8594 0.8951 0.9327
0.9727 1.0153 1.0606 1.1088 1.1599 1.2139 1.2707 1.3302 1.3923 1.4564
1.5223 1.5893 1.6564 0.8372 0.8638 0.8912 0.9205 0.9522 0.9868 1.0244
1.0654 1.1099 1.1578 1.2094 1.2644 1.3230 1.3850 1.4502 1.5184 1.5893
1.6621 1.7362 0.9193 0.9371 0.9575 0.9811 1.0083 1.0394 1.0746 1.1139
1.1574 1.2051 1.2571 1.3134 1.3739 1.4385 1.5073 1.5800 1.6564 1.7362
1.8187
松弛因子为：1.645
迭代次数为：108
运行时间为：8056ms

```

## 5.1 结果分析

共轭梯度法迭代 55 次，用时约 1.7s；SOR 迭代法最佳松弛因子为 1.64-1.65，迭代次数 108 次，用时约 8s。共轭梯度法迭代次数少且用时更快，经计算共轭梯度法迭代一次的用时也更短，

## 5.2 问题描述

用 Hilbert 矩阵测试你所编写的共轭梯度法程序：

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}, \quad b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq n-1$$

对  $n = 20, 40, 60, 80$  分别求解，观察解是否准确，迭代停止条件自定，给出迭代次数和求解所用时间。

## 5.2 程序运行结果

```
阶为20的Hilbert矩阵的共轭梯度法的解为：
0.3333 0.3332 0.3339 0.3330 0.3329 0.3331 0.3335 0.3337 0.3337 0.3336
0.3335 0.3333 0.3331 0.3330 0.3329 0.3330 0.3331 0.3333 0.3336 0.3340
迭代次数为：7
运行时间为：3ms
与精确解的误差为：0.000665761

阶为40的Hilbert矩阵的共轭梯度法的解为：
0.3333 0.3335 0.3328 0.3336 0.3338 0.3336 0.3332 0.3330 0.3329 0.3330
0.3331 0.3332 0.3334 0.3335 0.3336 0.3336 0.3337 0.3337 0.3336 0.3336
0.3335 0.3334 0.3334 0.3333 0.3332 0.3331 0.3331 0.3330 0.3330 0.3330
0.3330 0.3330 0.3331 0.3331 0.3332 0.3333 0.3335 0.3336 0.3338 0.3340
迭代次数为：9
运行时间为：11ms
与精确解的误差为：0.00067994

阶为60的Hilbert矩阵的共轭梯度法的解为：
0.3333 0.3332 0.3337 0.3330 0.3330 0.3333 0.3335 0.3336 0.3336 0.3335
0.3334 0.3333 0.3332 0.3331 0.3331 0.3331 0.3331 0.3332 0.3332 0.3333
0.3333 0.3334 0.3334 0.3335 0.3335 0.3335 0.3335 0.3335 0.3335 0.3335
0.3335 0.3335 0.3335 0.3334 0.3334 0.3334 0.3333 0.3333 0.3333 0.3332
0.3332 0.3332 0.3331 0.3331 0.3331 0.3331 0.3331 0.3331 0.3331 0.3332
0.3332 0.3332 0.3333 0.3333 0.3334 0.3334 0.3335 0.3336 0.3337 0.3338
迭代次数为：11
运行时间为：30ms
与精确解的误差为：0.000442652

阶为80的Hilbert矩阵的共轭梯度法的解为：
0.3333 0.3332 0.3340 0.3330 0.3328 0.3331 0.3334 0.3336 0.3337 0.3337
0.3336 0.3335 0.3334 0.3332 0.3331 0.3331 0.3330 0.3330 0.3330 0.3330
0.3331 0.3331 0.3332 0.3332 0.3333 0.3334 0.3334 0.3335 0.3335 0.3336
0.3336 0.3336 0.3336 0.3336 0.3336 0.3336 0.3336 0.3336 0.3336 0.3336
0.3335 0.3335 0.3335 0.3334 0.3334 0.3334 0.3333 0.3333 0.3332 0.3332
0.3332 0.3331 0.3331 0.3331 0.3331 0.3330 0.3330 0.3330 0.3330 0.3330
0.3330 0.3330 0.3330 0.3330 0.3331 0.3331 0.3331 0.3332 0.3332 0.3332
0.3333 0.3334 0.3334 0.3335 0.3336 0.3336 0.3337 0.3338 0.3339 0.3340
迭代次数为：11
运行时间为：45ms
与精确解的误差为：0.000659781

C:\Users\郑涛\Desktop\数值代数\数值代数实验\实验五\Homework5\x64\Debug\Homework5
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自
按任意键关闭此窗口
```

## 5.2 结果分析

根据程序运行结果可得如下表格：



n	迭代次数	运行时间(ms)	误差( $10^{-4}$ )
20	7	3	6.657
40	9	11	6.799
60	11	30	4.427
80	11	45	6.598

解都较准确

## 5.3 问题描述

分别用 Jacobi 迭代法，G-S 迭代法和共轭梯度法求解下述方程，观察迭代次数和求解所用时间，并对结果给出解释。

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

## 5.3 程序运行结果

```

5.3的解为：
1.0000 -2.0000 3.0000 -2.0000 1.0000
迭代次数为：5
运行时间为：0ms

Jacobi法结果：
解为：
1.0000 -2.0000 3.0000 -2.0000 1.0000
迭代次数为：65
运行时间为：5ms

G-S迭代法结果：
解为：
1.0000 -2.0000 3.0000 -2.0000 1.0000
迭代次数为：37
运行时间为：3ms

C:\Users\郑涛\Desktop\数值代数\数值代数实验\实验五\Homework
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“
按任意键关闭此窗口. . .

```

### 5.3 结果分析

共轭梯度法程序运行所得结果为精确解，且迭代次数不超过矩阵的阶数，因为在精度允许下，得到精确解的迭代次数不超过方程的阶数。共轭梯度法的运行时间小于其他两个算法。