数值代数第四次实验报告

教师：邓建松

PB20061327 郑涛

4.1 问题描述

1. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a, 0<a<1, \\ y(0)=0, y(1)=1. \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y=\frac{1-a}{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})+ax$$

为了把微分方程离散化，把 $[0,1]$ 区间 n 等分，令 $h=1/n, x_i=ih, i=1,\cdots,n-1$, 得到差分方程

$$\varepsilon\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=a,$$

简化为

$$(\varepsilon+h)y_{i+1}-(2\varepsilon+h)y_i+\varepsilon y_{i-1}=ah^2$$

离散化后得到线性方程组 $Ay=b$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} -(2\varepsilon+h) & \varepsilon+h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon+h) & \varepsilon+h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon+h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon+h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon+h) \end{pmatrix}$$

注意将线性方程组与上述差分方程进行对比得出正确的 b 向量（尤其注意第一行和最后一行）。

对 $\varepsilon=1, a=1/2, n=100$, 分别用 Jacobi 迭代法，G-S 迭代法和 SOR 迭代法求线性方程组的解，要求 4 位有效数字，然后比较迭代次数，运行时间与精确解的误差。迭代法终止条件为 $\|x_{k+1}-x_k\|<10^{-6}$.

对 $\varepsilon=0.1, 0.01, 0.0001$, 考虑同样的问题。

4.2 程序运行结果

```
e = 1 a = 0.5 n = 100时三种方法的结果如下：

Jacobi法结果：
解为：
 0.0128  0.0256  0.0382  0.0508  0.0633  0.0758  0.0881  0.1004  0.1126  0.1248
 0.1369  0.1489  0.1608  0.1727  0.1845  0.1962  0.2079  0.2195  0.2310  0.2425
 0.2539  0.2653  0.2766  0.2878  0.2990  0.3101  0.3211  0.3321  0.3430  0.3539
 0.3647  0.3755  0.3862  0.3968  0.4074  0.4179  0.4284  0.4388  0.4492  0.4595
 0.4698  0.4800  0.4902  0.5003  0.5104  0.5204  0.5304  0.5403  0.5502  0.5600
 0.5698  0.5795  0.5892  0.5988  0.6084  0.6180  0.6275  0.6370  0.6464  0.6558
 0.6651  0.6744  0.6837  0.6929  0.7020  0.7112  0.7203  0.7293  0.7383  0.7473
 0.7562  0.7651  0.7740  0.7828  0.7916  0.8003  0.8090  0.8177  0.8263  0.8349
 0.8435  0.8520  0.8605  0.8690  0.8774  0.8858  0.8942  0.9025  0.9108  0.9191
 0.9273  0.9355  0.9437  0.9518  0.9599  0.9680  0.9760  0.9841  0.9920
迭代次数为：13172
运行时间为：46350ms
与精确解的误差为：0.00124715

G-S迭代法结果：
解为：
 0.0128  0.0256  0.0382  0.0508  0.0633  0.0757  0.0881  0.1004  0.1126  0.1248
 0.1368  0.1488  0.1608  0.1727  0.1845  0.1962  0.2079  0.2195  0.2310  0.2425
 0.2539  0.2652  0.2765  0.2878  0.2989  0.3100  0.3211  0.3321  0.3430  0.3539
 0.3647  0.3754  0.3861  0.3968  0.4074  0.4179  0.4284  0.4388  0.4492  0.4595
 0.4698  0.4800  0.4902  0.5003  0.5103  0.5204  0.5303  0.5403  0.5501  0.5600
 0.5697  0.5795  0.5892  0.5988  0.6084  0.6180  0.6275  0.6369  0.6464  0.6557
 0.6651  0.6744  0.6836  0.6928  0.7020  0.7111  0.7202  0.7293  0.7383  0.7473
 0.7562  0.7651  0.7740  0.7828  0.7916  0.8003  0.8090  0.8177  0.8263  0.8349
 0.8435  0.8520  0.8605  0.8690  0.8774  0.8858  0.8942  0.9025  0.9108  0.9191
 0.9273  0.9355  0.9437  0.9518  0.9599  0.9680  0.9760  0.9841  0.9920
迭代次数为：6574
运行时间为：33245ms
与精确解的误差为：0.00128824
```

```
SOR迭代法结果：
解为：
 0.0129  0.0256  0.0383  0.0510  0.0635  0.0760  0.0884  0.1007  0.1130  0.1251
 0.1372  0.1493  0.1613  0.1732  0.1850  0.1968  0.2085  0.2201  0.2317  0.2432
 0.2546  0.2660  0.2773  0.2885  0.2997  0.3108  0.3219  0.3329  0.3438  0.3547
 0.3656  0.3763  0.3870  0.3977  0.4083  0.4188  0.4293  0.4398  0.4501  0.4605
 0.4708  0.4810  0.4911  0.5013  0.5113  0.5214  0.5313  0.5412  0.5511  0.5609
 0.5707  0.5804  0.5901  0.5998  0.6093  0.6189  0.6284  0.6378  0.6473  0.6566
 0.6659  0.6752  0.6845  0.6937  0.7028  0.7119  0.7210  0.7300  0.7390  0.7480
 0.7569  0.7658  0.7746  0.7834  0.7922  0.8009  0.8096  0.8182  0.8268  0.8354
 0.8440  0.8525  0.8609  0.8694  0.8778  0.8862  0.8945  0.9028  0.9111  0.9193
 0.9275  0.9357  0.9438  0.9520  0.9600  0.9681  0.9761  0.9841  0.9921
松弛因子为：1.94
迭代次数为：246
运行时间为：1473ms
与精确解的误差为：0.000298292
```

```
e = 0.1 a = 0.5 n = 100时三种方法的结果如下：

Jacobi法结果：
解为：
 0.0504  0.0967  0.1393  0.1784  0.2144  0.2476  0.2782  0.3066  0.3327  0.3570
 0.3795  0.4005  0.4199  0.4381  0.4551  0.4709  0.4858  0.4998  0.5130  0.5254
 0.5372  0.5483  0.5589  0.5690  0.5786  0.5878  0.5966  0.6051  0.6133  0.6211
 0.6288  0.6361  0.6433  0.6502  0.6570  0.6637  0.6701  0.6765  0.6827  0.6888
 0.6948  0.7007  0.7066  0.7123  0.7180  0.7237  0.7292  0.7348  0.7402  0.7457
 0.7511  0.7564  0.7617  0.7670  0.7723  0.7775  0.7828  0.7880  0.7932  0.7983
 0.8035  0.8086  0.8137  0.8189  0.8240  0.8291  0.8341  0.8392  0.8443  0.8494
 0.8544  0.8595  0.8645  0.8696  0.8746  0.8797  0.8847  0.8897  0.8948  0.8998
 0.9048  0.9098  0.9148  0.9199  0.9249  0.9299  0.9349  0.9399  0.9449  0.9499
 0.9549  0.9600  0.9650  0.9700  0.9750  0.9800  0.9850  0.9900  0.9950
迭代次数为：5926
运行时间为：29379ms
与精确解的误差为：0.00906271

G-S迭代法结果：
解为：
 0.0504  0.0967  0.1392  0.1784  0.2144  0.2476  0.2782  0.3065  0.3327  0.3570
 0.3795  0.4004  0.4199  0.4381  0.4550  0.4709  0.4858  0.4998  0.5130  0.5254
 0.5372  0.5483  0.5589  0.5690  0.5786  0.5878  0.5966  0.6051  0.6133  0.6211
 0.6287  0.6361  0.6433  0.6502  0.6570  0.6636  0.6701  0.6765  0.6827  0.6888
 0.6948  0.7007  0.7066  0.7123  0.7180  0.7237  0.7292  0.7348  0.7402  0.7457
 0.7511  0.7564  0.7617  0.7670  0.7723  0.7775  0.7828  0.7880  0.7932  0.7983
 0.8035  0.8086  0.8137  0.8189  0.8240  0.8291  0.8341  0.8392  0.8443  0.8494
 0.8544  0.8595  0.8645  0.8696  0.8746  0.8797  0.8847  0.8897  0.8948  0.8998
 0.9048  0.9098  0.9148  0.9199  0.9249  0.9299  0.9349  0.9399  0.9449  0.9499
 0.9549  0.9600  0.9650  0.9700  0.9750  0.9800  0.9850  0.9900  0.9950
迭代次数为：2981
运行时间为：12774ms
与精确解的误差为：0.00908668
```

```
SOR迭代法结果：
解为：
 0.0505  0.0968  0.1394  0.1785  0.2146  0.2478  0.2784  0.3068  0.3330  0.3573
 0.3798  0.4007  0.4202  0.4384  0.4553  0.4712  0.4861  0.5001  0.5133  0.5257
 0.5375  0.5486  0.5592  0.5693  0.5789  0.5881  0.5969  0.6054  0.6135  0.6214
 0.6290  0.6364  0.6435  0.6505  0.6572  0.6639  0.6703  0.6767  0.6829  0.6890
 0.6950  0.7009  0.7067  0.7125  0.7182  0.7238  0.7294  0.7349  0.7404  0.7458
 0.7512  0.7565  0.7618  0.7671  0.7724  0.7776  0.7829  0.7880  0.7932  0.7984
 0.8035  0.8087  0.8138  0.8189  0.8240  0.8291  0.8342  0.8393  0.8443  0.8494
 0.8545  0.8595  0.8646  0.8696  0.8746  0.8797  0.8847  0.8897  0.8948  0.8998
 0.9048  0.9098  0.9149  0.9199  0.9249  0.9299  0.9349  0.9399  0.9449  0.9499
 0.9550  0.9600  0.9650  0.9700  0.9750  0.9800  0.9850  0.9900  0.9950
松弛因子为：1.895
迭代次数为：201
运行时间为：2542ms
与精确解的误差为：0.00882342
```

e = 0.01 a = 0.5 n = 100时三种方法的结果如下：

Jacobi法结果：
解为：
0.2550 0.3850 0.4525 0.4887 0.5094 0.5222 0.5311 0.5380 0.5440 0.5495
0.5548 0.5599 0.5649 0.5700 0.5750 0.5800 0.5850 0.5900 0.5950 0.6000
0.6050 0.6100 0.6150 0.6200 0.6250 0.6300 0.6350 0.6400 0.6450 0.6500
0.6550 0.6600 0.6650 0.6700 0.6750 0.6800 0.6850 0.6900 0.6950 0.7000
0.7050 0.7100 0.7150 0.7200 0.7250 0.7300 0.7350 0.7400 0.7450 0.7500
0.7550 0.7600 0.7650 0.7700 0.7750 0.7800 0.7850 0.7900 0.7950 0.8000
0.8050 0.8100 0.8150 0.8200 0.8250 0.8300 0.8350 0.8400 0.8450 0.8500
0.8550 0.8600 0.8650 0.8700 0.8750 0.8800 0.8850 0.8900 0.8950 0.9000
0.9050 0.9100 0.9150 0.9200 0.9250 0.9300 0.9350 0.9400 0.9450 0.9500
0.9550 0.9600 0.9650 0.9700 0.9750 0.9800 0.9850 0.9900 0.9950
迭代次数为：569
运行时间为：3473ms
与精确解的误差为：0.0660671

G-S迭代法结果：
解为：
0.2550 0.3850 0.4525 0.4887 0.5094 0.5222 0.5311 0.5380 0.5440 0.5495
0.5548 0.5599 0.5649 0.5700 0.5750 0.5800 0.5850 0.5900 0.5950 0.6000
0.6050 0.6100 0.6150 0.6200 0.6250 0.6300 0.6350 0.6400 0.6450 0.6500
0.6550 0.6600 0.6650 0.6700 0.6750 0.6800 0.6850 0.6900 0.6950 0.7000
0.7050 0.7100 0.7150 0.7200 0.7250 0.7300 0.7350 0.7400 0.7450 0.7500
0.7550 0.7600 0.7650 0.7700 0.7750 0.7800 0.7850 0.7900 0.7950 0.8000
0.8050 0.8100 0.8150 0.8200 0.8250 0.8300 0.8350 0.8400 0.8450 0.8500
0.8550 0.8600 0.8650 0.8700 0.8750 0.8800 0.8850 0.8900 0.8950 0.9000
0.9050 0.9100 0.9150 0.9200 0.9250 0.9300 0.9350 0.9400 0.9450 0.9500
0.9550 0.9600 0.9650 0.9700 0.9750 0.9800 0.9850 0.9900 0.9950
迭代次数为：333
运行时间为：2298ms
与精确解的误差为：0.0660678

SOR迭代法结果：
解为：
0.2550 0.3850 0.4525 0.4887 0.5094 0.5222 0.5311 0.5380 0.5440 0.5495
0.5548 0.5599 0.5649 0.5700 0.5750 0.5800 0.5850 0.5900 0.5950 0.6000
0.6050 0.6100 0.6150 0.6200 0.6250 0.6300 0.6350 0.6400 0.6450 0.6500
0.6550 0.6600 0.6650 0.6700 0.6750 0.6800 0.6850 0.6900 0.6950 0.7000
0.7050 0.7100 0.7150 0.7200 0.7250 0.7300 0.7350 0.7400 0.7450 0.7500
0.7550 0.7600 0.7650 0.7700 0.7750 0.7800 0.7850 0.7900 0.7950 0.8000
0.8050 0.8100 0.8150 0.8200 0.8250 0.8300 0.8350 0.8400 0.8450 0.8500
0.8550 0.8600 0.8650 0.8700 0.8750 0.8800 0.8850 0.8900 0.8950 0.9000
0.9050 0.9100 0.9150 0.9200 0.9250 0.9300 0.9350 0.9400 0.9450 0.9500
0.9550 0.9600 0.9650 0.9700 0.9750 0.9800 0.9850 0.9900 0.9950
松弛因子为：1.5
迭代次数为：101
运行时间为：977ms
与精确解的误差为：0.0660603

```
e = 0.0001 a = 0.5 n = 100时三种方法的结果如下：

Jacobi法结果：
解为：
 0.5000   0.5100   0.5150   0.5200   0.5250   0.5300   0.5350   0.5400   0.5450   0.5500
 0.5550   0.5600   0.5650   0.5700   0.5750   0.5800   0.5850   0.5900   0.5950   0.6000
 0.6050   0.6100   0.6150   0.6200   0.6250   0.6300   0.6350   0.6400   0.6450   0.6500
 0.6550   0.6600   0.6650   0.6700   0.6750   0.6800   0.6850   0.6900   0.6950   0.7000
 0.7050   0.7100   0.7150   0.7200   0.7250   0.7300   0.7350   0.7400   0.7450   0.7500
 0.7550   0.7600   0.7650   0.7700   0.7750   0.7800   0.7850   0.7900   0.7950   0.8000
 0.8050   0.8100   0.8150   0.8200   0.8250   0.8300   0.8350   0.8400   0.8450   0.8500
 0.8550   0.8600   0.8650   0.8700   0.8750   0.8800   0.8850   0.8900   0.8950   0.9000
 0.9050   0.9100   0.9150   0.9200   0.9250   0.9300   0.9350   0.9400   0.9450   0.9500
 0.9550   0.9600   0.9650   0.9700   0.9750   0.9800   0.9850   0.9900   0.9950
迭代次数为：118
运行时间为：656ms
与精确解的误差为：0.00495075

G-S迭代法结果：
解为：
 0.5000   0.5100   0.5150   0.5200   0.5250   0.5300   0.5350   0.5400   0.5450   0.5500
 0.5550   0.5600   0.5650   0.5700   0.5750   0.5800   0.5850   0.5900   0.5950   0.6000
 0.6050   0.6100   0.6150   0.6200   0.6250   0.6300   0.6350   0.6400   0.6450   0.6500
 0.6550   0.6600   0.6650   0.6700   0.6750   0.6800   0.6850   0.6900   0.6950   0.7000
 0.7050   0.7100   0.7150   0.7200   0.7250   0.7300   0.7350   0.7400   0.7450   0.7500
 0.7550   0.7600   0.7650   0.7700   0.7750   0.7800   0.7850   0.7900   0.7950   0.8000
 0.8050   0.8100   0.8150   0.8200   0.8250   0.8300   0.8350   0.8400   0.8450   0.8500
 0.8550   0.8600   0.8650   0.8700   0.8750   0.8800   0.8850   0.8900   0.8950   0.9000
 0.9050   0.9100   0.9150   0.9200   0.9250   0.9300   0.9350   0.9400   0.9450   0.9500
 0.9550   0.9600   0.9650   0.9700   0.9750   0.9800   0.9850   0.9900   0.9950
迭代次数为：109
运行时间为：401ms
与精确解的误差为：0.00495075
```

```
SOR迭代法结果：
解为：
 0.5000   0.5100   0.5150   0.5200   0.5250   0.5300   0.5350   0.5400   0.5450   0.5500
 0.5550   0.5600   0.5650   0.5700   0.5750   0.5800   0.5850   0.5900   0.5950   0.6000
 0.6050   0.6100   0.6150   0.6200   0.6250   0.6300   0.6350   0.6400   0.6450   0.6500
 0.6550   0.6600   0.6650   0.6700   0.6750   0.6800   0.6850   0.6900   0.6950   0.7000
 0.7050   0.7100   0.7150   0.7200   0.7250   0.7300   0.7350   0.7400   0.7450   0.7500
 0.7550   0.7600   0.7650   0.7700   0.7750   0.7800   0.7850   0.7900   0.7950   0.8000
 0.8050   0.8100   0.8150   0.8200   0.8250   0.8300   0.8350   0.8400   0.8450   0.8500
 0.8550   0.8600   0.8650   0.8700   0.8750   0.8800   0.8850   0.8900   0.8950   0.9000
 0.9050   0.9100   0.9150   0.9200   0.9250   0.9300   0.9350   0.9400   0.9450   0.9500
 0.9550   0.9600   0.9650   0.9700   0.9750   0.9800   0.9850   0.9900   0.9950
松弛因子为：1.01
迭代次数为：102
运行时间为：669ms
与精确解的误差为：0.00495082

C:\Users\郑涛\Desktop\数值代数\数值代数实验\实验四\Homework4\x64\Debug\Homework4.e
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动
按任意键关闭此窗口. . .
```

4.1 结果分析

根据运行结果得到如下表格（SOR 方法给出了最佳ω值）：

ε	迭代法	迭代次数	运行时间（ms）	误差
1	Jacobi	13172	46350	0.001247
	G-S	6574	33245	0.001288
	SOR(1.94)	246	1473	0.000298
0.1	Jacobi	5926	29379	0.009063
	G-S	2981	12774	0.009087
	SOR(1.895)	201	2542	0.008823
0.01	Jacobi	569	3473	0.066067
	G-S	333	2298	0.066068
	SOR(1.5)	101	977	0.066060
0.0001	Jacobi	118	656	0.004951
	G-S	109	401	0.004951
	SOR(1.01)	102	669	0.004951

根据表格可以看出，ε 越小，三个方法的迭代次数越少；对于给定的 ε 值，迭代次数和运行时间排序为：Jacobi > G-S > SOR；表中也可以看出一般来说 SOR 的误差也比其他两个方法小。

4.2 问题描述

2. 考虑偏微分方程

$$-\Delta u + g(x,y)u = f(x,y), (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

边界条件为 $u = 1$. 沿 x 方向和 y 方向均匀剖分 N 等份，令 $h = 1/N$, 并设应用中心差分离散化后得到差分方程的代数方程组为

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + \big(4 + h^2 g(ih, jh)\big)u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh) \qquad (1)$$

取 $g(x,y) = e^{xy}, f(x,y) = x + y$, 分别用Jacobi 迭代法，G-S 迭代法和 SOR 迭代法求解上述代数方程组，并列表比较 $N = 20, 40, 60$ 时收敛所需要的迭代次数和所用的 CPU 时间，迭代终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-7}$. 要求仿照下面写的 Jacobi 迭代格式的推导过程推导处 G-S 迭代和 SOR 迭代的格式（在报告中写出推导过程），在用 SOR 迭代法求解的过程中，请对不同的 N 使用合适的松弛因子 ω, 并在程序输出中**打印松弛因子的值**。可以采用二分法 观察运行结果后选取合适的（代码中不需要体现选取过程，只需给出即可）。

注意本题中的三个迭代法的算法需要重新写，不能用之前的通用算法!!!

4.3G-S 和 SOR 推导过程

G-S：

考虑 G-S 迭代格式（$D-L$）$x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$，考虑第 i 行的元素用 A 中的元素表示,得到 G-S 迭代格式：

$$A_{i1}x_1^{(k+1)}+A_{i2}x_2^{(k+1)}+\ldots+A_{ii}x_i^{(k+1)}+A_{i(i+1)}x_{(i+1)}^{(k)}+\ldots+A_{in}x_n^{(k)}=b_i$$

推广至矩阵可知代数方程（1）的 G-S 迭代格式为：

$$-u_{i-1,j}^{(k+1)}-u_{i,j-1}^{(k+1)}+(4+h^2g(ih,jh))u_{i,j}^{(k+1)}-u_{i+1,j}^{(k)}-u_{i,j+1}^{(k)}=h^2f(ih,jh)$$

SOR：

考虑 SOR 迭代格式（$D-\omega L$）$x^{(k+1)}=$（（$1-\omega$）$D+\omega U$）$x^{(k)}+\omega b$，考虑第 i 行的元素用 A 中的元素表示，得到 SOR 迭代格式：

$$\omega A_{i1}x_1^{(k+1)}+\ldots+\omega A_{i(i-1)}x_i^{(k+1)}+A_{ii}x_i^{(k+1)}+(\omega-1)A_{ii}x_i^{(k)}+\omega A_{i(i+1)}x_{i+1}^{(k)}+\ldots$$

$$+\omega A_{in}x_n^{(k)}=\omega b_i$$

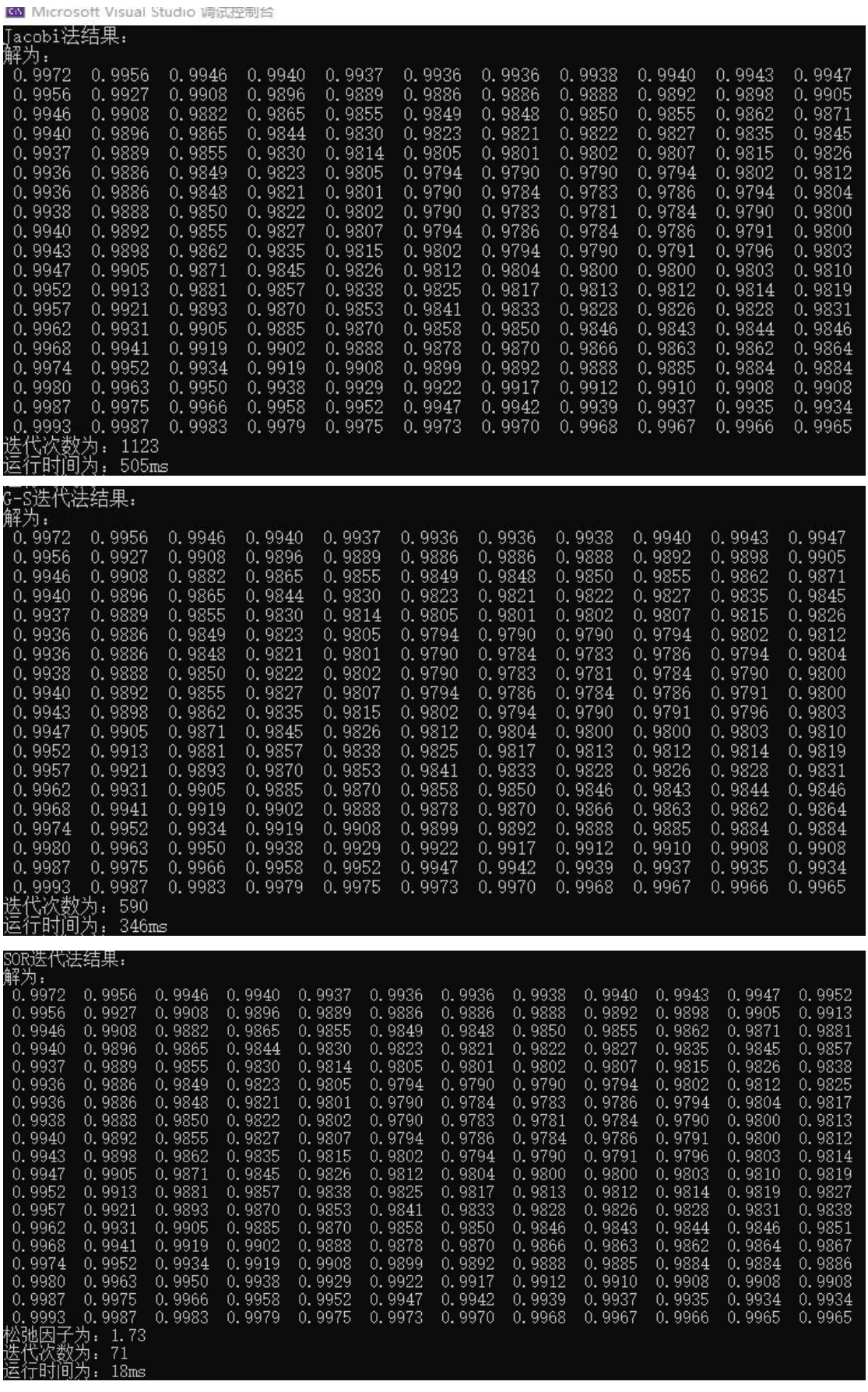
推广至矩阵可知代数方程（1）的 SOR 迭代格式为：

$$-\omega u_{i-1,j}^{(k+1)}-\omega u_{i,j-1}^{(k+1)}+(4+h^2g(ih,jh))u_{i,j}^{(k+1)}+(\omega-1)(4+h^2g(ih,jh))u_{i,j}^{(k)}$$

$$-\omega u_{i+1,j}^{(k)}-\omega u_{i,j+1}^{(k)}=\omega h^2f(ih,jh)$$

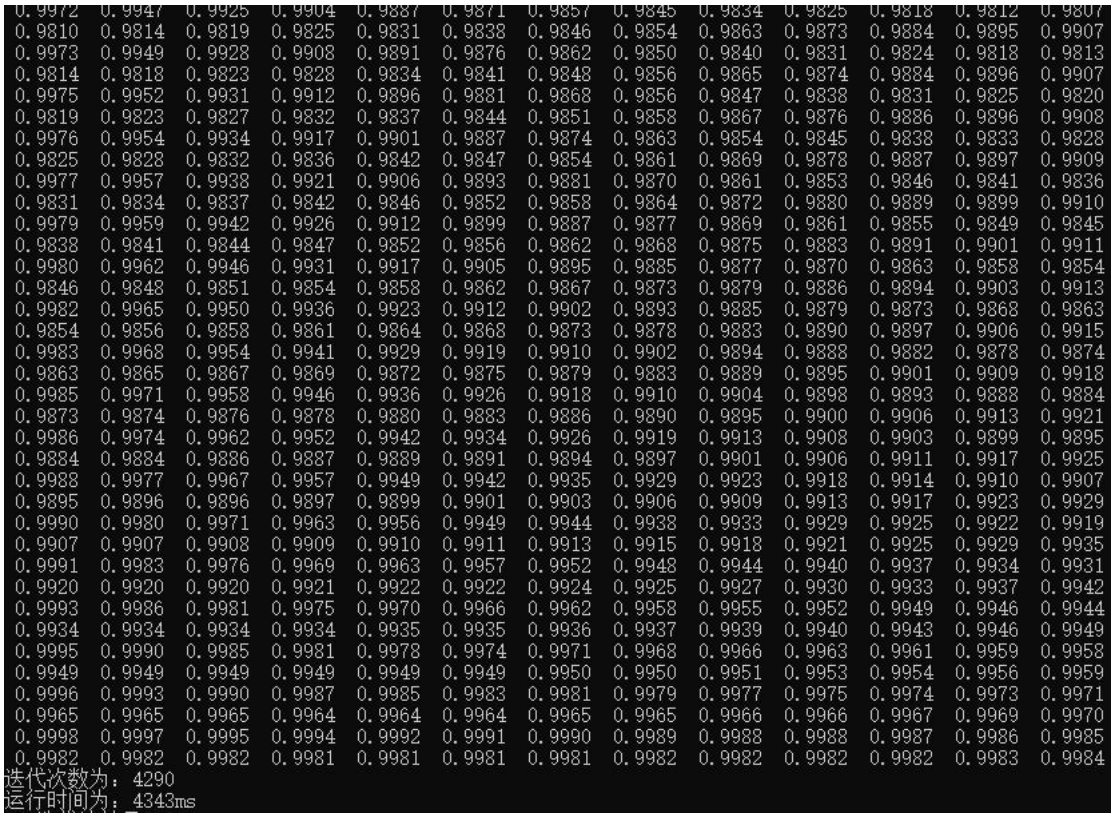
4.3 程序运行结果

N = 20


Microsoft Visual Studio 调试控制台
Jacobi法结果：
解为：
0.9972 0.9956 0.9946 0.9940 0.9937 0.9936 0.9936 0.9938 0.9940 0.9943 0.9947
0.9956 0.9927 0.9908 0.9896 0.9889 0.9886 0.9886 0.9888 0.9892 0.9898 0.9905
0.9946 0.9908 0.9882 0.9865 0.9855 0.9849 0.9848 0.9850 0.9855 0.9862 0.9871
0.9940 0.9896 0.9865 0.9844 0.9830 0.9823 0.9821 0.9822 0.9827 0.9835 0.9845
0.9937 0.9889 0.9855 0.9830 0.9814 0.9805 0.9801 0.9802 0.9807 0.9815 0.9826
0.9936 0.9886 0.9849 0.9823 0.9805 0.9794 0.9790 0.9790 0.9794 0.9802 0.9812
0.9936 0.9886 0.9848 0.9821 0.9801 0.9790 0.9784 0.9783 0.9786 0.9794 0.9804
0.9938 0.9888 0.9850 0.9822 0.9802 0.9790 0.9783 0.9781 0.9784 0.9790 0.9800
0.9940 0.9892 0.9855 0.9827 0.9807 0.9794 0.9786 0.9784 0.9786 0.9791 0.9800
0.9943 0.9898 0.9862 0.9835 0.9815 0.9802 0.9794 0.9790 0.9791 0.9796 0.9803
0.9947 0.9905 0.9871 0.9845 0.9826 0.9812 0.9804 0.9800 0.9800 0.9803 0.9810
0.9952 0.9913 0.9881 0.9857 0.9838 0.9825 0.9817 0.9813 0.9812 0.9814 0.9819
0.9957 0.9921 0.9893 0.9870 0.9853 0.9841 0.9833 0.9828 0.9826 0.9828 0.9831
0.9962 0.9931 0.9905 0.9885 0.9870 0.9858 0.9850 0.9846 0.9843 0.9844 0.9846
0.9968 0.9941 0.9919 0.9902 0.9888 0.9878 0.9870 0.9866 0.9863 0.9862 0.9864
0.9974 0.9952 0.9934 0.9919 0.9908 0.9899 0.9892 0.9888 0.9885 0.9884 0.9884
0.9980 0.9963 0.9950 0.9938 0.9929 0.9922 0.9917 0.9912 0.9910 0.9908 0.9908
0.9987 0.9975 0.9966 0.9958 0.9952 0.9947 0.9942 0.9939 0.9937 0.9935 0.9934
0.9993 0.9987 0.9983 0.9979 0.9975 0.9973 0.9970 0.9968 0.9967 0.9966 0.9965
迭代次数为：1123
运行时间为：505ms
G-S迭代法结果：
解为：
0.9972 0.9956 0.9946 0.9940 0.9937 0.9936 0.9936 0.9938 0.9940 0.9943 0.9947
0.9956 0.9927 0.9908 0.9896 0.9889 0.9886 0.9886 0.9888 0.9892 0.9898 0.9905
0.9946 0.9908 0.9882 0.9865 0.9855 0.9849 0.9848 0.9850 0.9855 0.9862 0.9871
0.9940 0.9896 0.9865 0.9844 0.9830 0.9823 0.9821 0.9822 0.9827 0.9835 0.9845
0.9937 0.9889 0.9855 0.9830 0.9814 0.9805 0.9801 0.9802 0.9807 0.9815 0.9826
0.9936 0.9886 0.9849 0.9823 0.9805 0.9794 0.9790 0.9790 0.9794 0.9802 0.9812
0.9936 0.9886 0.9848 0.9821 0.9801 0.9790 0.9784 0.9783 0.9786 0.9794 0.9804
0.9938 0.9888 0.9850 0.9822 0.9802 0.9790 0.9783 0.9781 0.9784 0.9790 0.9800
0.9940 0.9892 0.9855 0.9827 0.9807 0.9794 0.9786 0.9784 0.9786 0.9791 0.9800
0.9943 0.9898 0.9862 0.9835 0.9815 0.9802 0.9794 0.9790 0.9791 0.9796 0.9803
0.9947 0.9905 0.9871 0.9845 0.9826 0.9812 0.9804 0.9800 0.9800 0.9803 0.9810
0.9952 0.9913 0.9881 0.9857 0.9838 0.9825 0.9817 0.9813 0.9812 0.9814 0.9819
0.9957 0.9921 0.9893 0.9870 0.9853 0.9841 0.9833 0.9828 0.9826 0.9828 0.9831
0.9962 0.9931 0.9905 0.9885 0.9870 0.9858 0.9850 0.9846 0.9843 0.9844 0.9846
0.9968 0.9941 0.9919 0.9902 0.9888 0.9878 0.9870 0.9866 0.9863 0.9862 0.9864
0.9974 0.9952 0.9934 0.9919 0.9908 0.9899 0.9892 0.9888 0.9885 0.9884 0.9884
0.9980 0.9963 0.9950 0.9938 0.9929 0.9922 0.9917 0.9912 0.9910 0.9908 0.9908
0.9987 0.9975 0.9966 0.9958 0.9952 0.9947 0.9942 0.9939 0.9937 0.9935 0.9934
0.9993 0.9987 0.9983 0.9979 0.9975 0.9973 0.9970 0.9968 0.9967 0.9966 0.9965
迭代次数为：590
运行时间为：346ms
SOR迭代法结果：
解为：
0.9972 0.9956 0.9946 0.9940 0.9937 0.9936 0.9936 0.9938 0.9940 0.9943 0.9947 0.9952
0.9956 0.9927 0.9908 0.9896 0.9889 0.9886 0.9886 0.9888 0.9892 0.9898 0.9905 0.9913
0.9946 0.9908 0.9882 0.9865 0.9855 0.9849 0.9848 0.9850 0.9855 0.9862 0.9871 0.9881
0.9940 0.9896 0.9865 0.9844 0.9830 0.9823 0.9821 0.9822 0.9827 0.9835 0.9845 0.9857
0.9937 0.9889 0.9855 0.9830 0.9814 0.9805 0.9801 0.9802 0.9807 0.9815 0.9826 0.9838
0.9936 0.9886 0.9849 0.9823 0.9805 0.9794 0.9790 0.9790 0.9794 0.9802 0.9812 0.9825
0.9936 0.9886 0.9848 0.9821 0.9801 0.9790 0.9784 0.9783 0.9786 0.9794 0.9804 0.9817
0.9938 0.9888 0.9850 0.9822 0.9802 0.9790 0.9783 0.9781 0.9784 0.9790 0.9800 0.9813
0.9940 0.9892 0.9855 0.9827 0.9807 0.9794 0.9786 0.9784 0.9786 0.9791 0.9800 0.9812
0.9943 0.9898 0.9862 0.9835 0.9815 0.9802 0.9794 0.9790 0.9791 0.9796 0.9803 0.9814
0.9947 0.9905 0.9871 0.9845 0.9826 0.9812 0.9804 0.9800 0.9800 0.9803 0.9810 0.9819
0.9952 0.9913 0.9881 0.9857 0.9838 0.9825 0.9817 0.9813 0.9812 0.9814 0.9819 0.9827
0.9957 0.9921 0.9893 0.9870 0.9853 0.9841 0.9833 0.9828 0.9826 0.9828 0.9831 0.9838
0.9962 0.9931 0.9905 0.9885 0.9870 0.9858 0.9850 0.9846 0.9843 0.9844 0.9846 0.9851
0.9968 0.9941 0.9919 0.9902 0.9888 0.9878 0.9870 0.9866 0.9863 0.9862 0.9864 0.9867
0.9974 0.9952 0.9934 0.9919 0.9908 0.9899 0.9892 0.9888 0.9885 0.9884 0.9884 0.9886
0.9980 0.9963 0.9950 0.9938 0.9929 0.9922 0.9917 0.9912 0.9910 0.9908 0.9908 0.9908
0.9987 0.9975 0.9966 0.9958 0.9952 0.9947 0.9942 0.9939 0.9937 0.9935 0.9934 0.9934
0.9993 0.9987 0.9983 0.9979 0.9975 0.9973 0.9970 0.9968 0.9967 0.9966 0.9965 0.9965
松弛因子为：1.73
迭代次数为：71
运行时间为：18ms

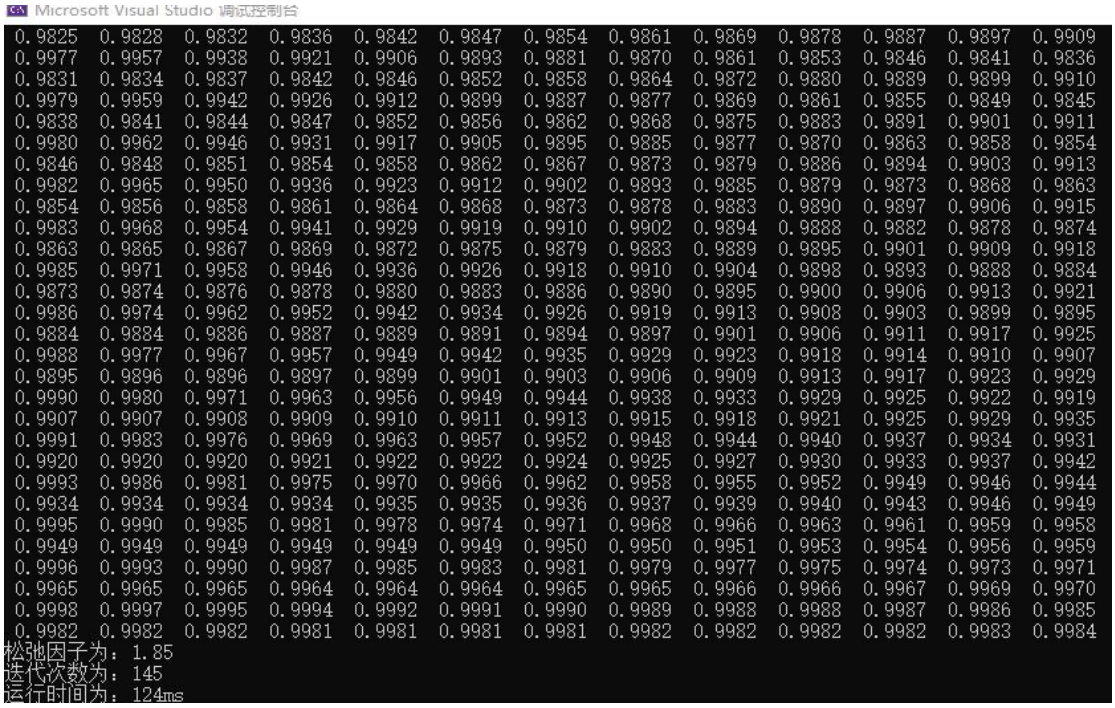
N=40

Jacobi



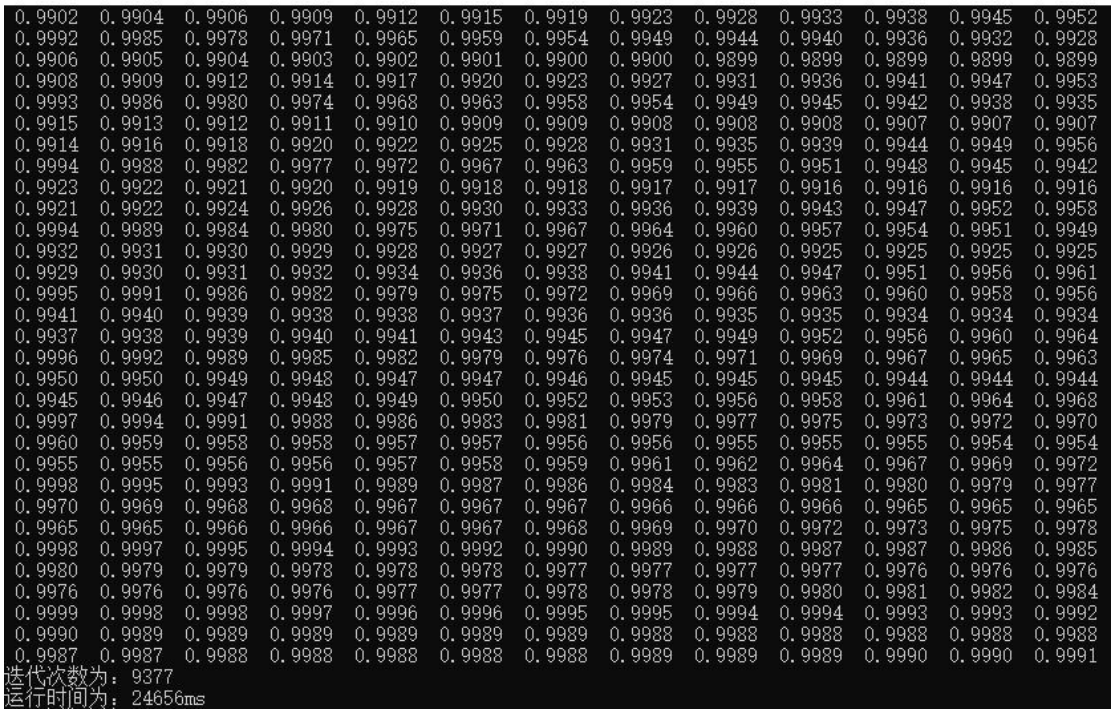
G-S

SOR



N=60

Jacobi



G-S

```
0.9906  0.9905  0.9904  0.9903  0.9902  0.9901  0.9900  0.9900  0.9899  0.9899  0.9899  0.9899  0.9899
0.9908  0.9909  0.9912  0.9914  0.9917  0.9920  0.9923  0.9927  0.9931  0.9936  0.9941  0.9947  0.9953
0.9993  0.9986  0.9980  0.9974  0.9968  0.9963  0.9958  0.9954  0.9949  0.9945  0.9942  0.9938  0.9935
0.9915  0.9913  0.9912  0.9911  0.9910  0.9909  0.9909  0.9908  0.9908  0.9908  0.9907  0.9907  0.9907
0.9914  0.9916  0.9918  0.9920  0.9922  0.9925  0.9928  0.9931  0.9935  0.9939  0.9944  0.9949  0.9956
0.9994  0.9988  0.9982  0.9977  0.9972  0.9967  0.9963  0.9959  0.9955  0.9951  0.9948  0.9945  0.9942
0.9923  0.9922  0.9921  0.9920  0.9919  0.9918  0.9918  0.9917  0.9917  0.9916  0.9916  0.9916  0.9916
0.9921  0.9922  0.9924  0.9926  0.9928  0.9930  0.9933  0.9936  0.9939  0.9943  0.9947  0.9952  0.9958
0.9994  0.9989  0.9984  0.9980  0.9975  0.9971  0.9967  0.9964  0.9960  0.9957  0.9954  0.9951  0.9949
0.9932  0.9931  0.9930  0.9929  0.9928  0.9927  0.9927  0.9926  0.9926  0.9925  0.9925  0.9925  0.9925
0.9929  0.9930  0.9931  0.9932  0.9934  0.9936  0.9938  0.9941  0.9944  0.9947  0.9951  0.9956  0.9961
0.9995  0.9991  0.9986  0.9982  0.9979  0.9975  0.9972  0.9969  0.9966  0.9963  0.9960  0.9958  0.9956
0.9941  0.9940  0.9939  0.9938  0.9938  0.9937  0.9936  0.9936  0.9935  0.9935  0.9934  0.9934  0.9934
0.9937  0.9938  0.9939  0.9940  0.9941  0.9943  0.9945  0.9947  0.9949  0.9952  0.9956  0.9960  0.9964
0.9996  0.9992  0.9989  0.9985  0.9982  0.9979  0.9976  0.9974  0.9971  0.9969  0.9967  0.9965  0.9963
0.9950  0.9950  0.9949  0.9948  0.9947  0.9947  0.9946  0.9945  0.9945  0.9945  0.9944  0.9944  0.9944
0.9945  0.9946  0.9947  0.9948  0.9949  0.9950  0.9952  0.9953  0.9956  0.9958  0.9961  0.9964  0.9968
0.9997  0.9994  0.9991  0.9988  0.9986  0.9983  0.9981  0.9979  0.9977  0.9975  0.9973  0.9972  0.9970
0.9960  0.9959  0.9958  0.9958  0.9957  0.9957  0.9956  0.9956  0.9955  0.9955  0.9955  0.9954  0.9954
0.9955  0.9955  0.9956  0.9956  0.9957  0.9958  0.9959  0.9961  0.9962  0.9964  0.9967  0.9969  0.9972
0.9998  0.9995  0.9993  0.9991  0.9989  0.9987  0.9986  0.9984  0.9983  0.9981  0.9980  0.9979  0.9977
0.9970  0.9969  0.9968  0.9968  0.9967  0.9967  0.9967  0.9966  0.9966  0.9966  0.9965  0.9965  0.9965
0.9965  0.9965  0.9966  0.9966  0.9967  0.9967  0.9968  0.9969  0.9970  0.9972  0.9973  0.9975  0.9978
0.9998  0.9997  0.9995  0.9994  0.9993  0.9992  0.9990  0.9989  0.9988  0.9987  0.9987  0.9986  0.9985
0.9980  0.9979  0.9979  0.9978  0.9978  0.9978  0.9977  0.9977  0.9977  0.9977  0.9976  0.9976  0.9976
0.9976  0.9976  0.9976  0.9976  0.9977  0.9977  0.9978  0.9978  0.9979  0.9980  0.9981  0.9982  0.9984
0.9999  0.9998  0.9998  0.9997  0.9996  0.9996  0.9995  0.9995  0.9994  0.9994  0.9993  0.9993  0.9992
0.9990  0.9989  0.9989  0.9989  0.9989  0.9989  0.9989  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988
0.9987  0.9987  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9989  0.9989  0.9989  0.9990  0.9990  0.9991
迭代次数为：4928
运行时间为：8468ms
```

SOR

```
0.9906  0.9905  0.9904  0.9903  0.9902  0.9901  0.9900  0.9900  0.9899  0.9899  0.9899  0.9899  0.9899
0.9908  0.9909  0.9912  0.9914  0.9917  0.9920  0.9923  0.9927  0.9931  0.9936  0.9941  0.9947  0.9953
0.9993  0.9986  0.9980  0.9974  0.9968  0.9963  0.9958  0.9954  0.9949  0.9945  0.9942  0.9938  0.9935
0.9915  0.9913  0.9912  0.9911  0.9910  0.9909  0.9909  0.9908  0.9908  0.9908  0.9907  0.9907  0.9907
0.9914  0.9916  0.9918  0.9920  0.9922  0.9925  0.9928  0.9931  0.9935  0.9939  0.9944  0.9949  0.9956
0.9994  0.9988  0.9982  0.9977  0.9972  0.9967  0.9963  0.9959  0.9955  0.9951  0.9948  0.9945  0.9942
0.9923  0.9922  0.9921  0.9920  0.9919  0.9918  0.9918  0.9917  0.9917  0.9916  0.9916  0.9916  0.9916
0.9921  0.9922  0.9924  0.9926  0.9928  0.9930  0.9933  0.9936  0.9939  0.9943  0.9947  0.9952  0.9958
0.9994  0.9989  0.9984  0.9980  0.9975  0.9971  0.9967  0.9964  0.9960  0.9957  0.9954  0.9951  0.9949
0.9932  0.9931  0.9930  0.9929  0.9928  0.9927  0.9927  0.9926  0.9926  0.9925  0.9925  0.9925  0.9925
0.9929  0.9930  0.9931  0.9932  0.9934  0.9936  0.9938  0.9941  0.9944  0.9947  0.9951  0.9956  0.9961
0.9995  0.9991  0.9986  0.9982  0.9979  0.9975  0.9972  0.9969  0.9966  0.9963  0.9960  0.9958  0.9956
0.9941  0.9940  0.9939  0.9938  0.9938  0.9937  0.9936  0.9936  0.9935  0.9935  0.9934  0.9934  0.9934
0.9937  0.9938  0.9939  0.9940  0.9941  0.9943  0.9945  0.9947  0.9949  0.9952  0.9956  0.9960  0.9964
0.9996  0.9992  0.9989  0.9985  0.9982  0.9979  0.9976  0.9974  0.9971  0.9969  0.9967  0.9965  0.9963
0.9950  0.9950  0.9949  0.9948  0.9947  0.9947  0.9946  0.9945  0.9945  0.9945  0.9944  0.9944  0.9944
0.9945  0.9946  0.9947  0.9948  0.9949  0.9950  0.9952  0.9953  0.9956  0.9958  0.9961  0.9964  0.9968
0.9997  0.9994  0.9991  0.9988  0.9986  0.9983  0.9981  0.9979  0.9977  0.9975  0.9973  0.9972  0.9970
0.9960  0.9959  0.9958  0.9958  0.9957  0.9957  0.9956  0.9956  0.9955  0.9955  0.9955  0.9954  0.9954
0.9955  0.9955  0.9956  0.9956  0.9957  0.9958  0.9959  0.9961  0.9962  0.9964  0.9967  0.9969  0.9972
0.9998  0.9995  0.9993  0.9991  0.9989  0.9987  0.9986  0.9984  0.9983  0.9981  0.9980  0.9979  0.9977
0.9970  0.9969  0.9968  0.9968  0.9967  0.9967  0.9967  0.9966  0.9966  0.9966  0.9965  0.9965  0.9965
0.9965  0.9965  0.9966  0.9966  0.9967  0.9967  0.9968  0.9969  0.9970  0.9972  0.9973  0.9975  0.9978
0.9998  0.9997  0.9995  0.9994  0.9993  0.9992  0.9990  0.9989  0.9988  0.9987  0.9987  0.9986  0.9985
0.9980  0.9979  0.9979  0.9978  0.9978  0.9978  0.9977  0.9977  0.9977  0.9977  0.9976  0.9976  0.9976
0.9976  0.9976  0.9976  0.9976  0.9977  0.9977  0.9978  0.9978  0.9979  0.9980  0.9981  0.9982  0.9984
0.9999  0.9998  0.9998  0.9997  0.9996  0.9996  0.9995  0.9995  0.9994  0.9994  0.9993  0.9993  0.9992
0.9990  0.9989  0.9989  0.9989  0.9989  0.9989  0.9989  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988
0.9987  0.9987  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9988  0.9989  0.9989  0.9989  0.9990  0.9990  0.9991
松弛因子为：1.9
迭代次数为：212
运行时间为：532ms

C:\Users\郑涛\Desktop\数值代数\数值代数实验\实验四\Homework4\x64\Debug\Homework4.exe (进程 42716)已退出，
要在调试停止时自动关闭控制台，请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
按任意键关闭此窗口. . .
```

4.2 结果分析

根据程序运行结果可以得到如下表格：

N	迭代法	迭代次数	运行时间（ms）
20	Jacobi	1123	505
	G-S	590	346
	SOR(1.73)	71	18
40	Jacobi	4290	4343
	G-S	2252	2479
	SOR(1.85)	145	124
60	Jacobi	9377	24656
	G-S	4928	8468
	SOR(1.9)	212	532

从表格中可以看出，不管是迭代次数还是运行时间，最佳的 SOR 迭代法都优于 G-S 迭代法优于 Jacobi 迭代法