

由第一题的运行结果可以看出不选主元的精确度明显没有另两种方法好,在课堂上对全主元和列主元的讨论,两者复杂度一样,但是列主元计算次数较少,实际运用列主元法是更

优的选择。

## 2. (1) .1 问题描述

用所学的五种方法求解 2. (1) 的方程组，比较所有方法的计算结果。

## 2. (1) .2 程序运行结果

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台
习题1. 2. (1)+习题1. 3:
初始的b:
11622.00 109121.00 333274.00 283627.00 169360.00 287295.00 145289.00 46295.00 112608.00 255762.00
341181.00 77101.00 345548.00 230270.00 101360.00 140667.00 252530.00 288760.00 75341.00 127422.00
182919.00 173057.00 207977.00 103446.00 269442.00 261622.00 81291.00 317038.00 162663.00 88764.00
64030.00 92961.00 70825.00 320369.00 86327.00 50402.00 184649.00 269076.00 65771.00 218391.00
88479.00 70216.00 178649.00 57808.00 316486.00 191190.00 349539.00 172623.00 282687.00 252347.00
135038.00 348869.00 379293.00 284753.00 373441.00 388881.00 342441.00 210057.00 305155.00 115786.00
172466.00 143406.00 284901.00 231836.00 295194.00 351967.00 251124.00 307152.00 239148.00 95113.00
338536.00 137240.00 281105.00 44112.00 90489.00 254399.00 321498.00 101881.00 232106.00 229043.00
343616.00 171498.00 184437.00 114544.00 60602.00 314232.00 195482.00 165234.00 301938.00 243744.00
154243.00 183588.00 105989.00 265862.00 326628.00 147030.00 98734.00 301279.00 207846.00 90304.00

全主元消去法的解:
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
4839.00 8501.00 3112.00 31204.00 5217.00 2953.00 15655.00 25146.00 1961.00 21015.00
6280.00 4664.00 17296.00 1025.00 30262.00 12841.00 32518.00 11518.00 24925.00 21919.00
8232.00 30799.00 32647.00 22024.00 31866.00 32757.00 29445.00 15234.00 28272.00 7201.00
15504.00 10225.00 25652.00 18156.00 24624.00 30798.00 19363.00 26696.00 20829.00 4162.00
32664.00 7734.00 27236.00 1011.00 6766.00 21818.00 29453.00 5150.00 20928.00 17676.00
31355.00 12390.00 16243.00 9617.00 2131.00 29675.00 15351.00 12297.00 26913.00 20511.00
11721.00 16522.00 6647.00 22997.00 29245.00 11181.00 5975.00 27803.00 17274.00 7303.00
误差: 1.98178e-11

列主元消去法的解
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
已退出。返回值为 0.0000。
```

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台
列主元消去法的解
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
4839.00 8501.00 3112.00 31204.00 5217.00 2953.00 15655.00 25146.00 1961.00 21015.00
6280.00 4664.00 17296.00 1025.00 30262.00 12841.00 32518.00 11518.00 24925.00 21919.00
8232.00 30799.00 32647.00 22024.00 31866.00 32757.00 29445.00 15234.00 28272.00 7201.00
15504.00 10225.00 25652.00 18156.00 24624.00 30798.00 19363.00 26696.00 20829.00 4162.00
32664.00 7734.00 27236.00 1011.00 6766.00 21818.00 29453.00 5150.00 20928.00 17676.00
31355.00 12390.00 16243.00 9617.00 2131.00 29675.00 15351.00 12297.00 26913.00 20511.00
11721.00 16522.00 6647.00 22997.00 29245.00 11181.00 5975.00 27803.00 17274.00 7303.00
误差: 1.72838e-11

不选主元消去法的解
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
4839.00 8501.00 3112.00 31204.00 5217.00 2953.00 15655.00 25146.00 1961.00 21015.00
6280.00 4664.00 17296.00 1025.00 30262.00 12841.00 32518.00 11518.00 24925.00 21919.00
8232.00 30799.00 32647.00 22024.00 31866.00 32757.00 29445.00 15234.00 28272.00 7201.00
15504.00 10225.00 25652.00 18156.00 24624.00 30798.00 19363.00 26696.00 20829.00 4162.00
32664.00 7734.00 27236.00 1011.00 6766.00 21818.00 29453.00 5150.00 20928.00 17676.00
31355.00 12390.00 16243.00 9617.00 2131.00 29675.00 15351.00 12297.00 26913.00 20511.00
11721.00 16522.00 6647.00 22997.00 29245.00 11181.00 5975.00 27803.00 17274.00 7303.00
误差: 1.72838e-11

平方根法的解
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
4839.00 8501.00 3112.00 31204.00 5217.00 2953.00 15655.00 25146.00 1961.00 21015.00
6280.00 4664.00 17296.00 1025.00 30262.00 12841.00 32518.00 11518.00 24925.00 21919.00
8232.00 30799.00 32647.00 22024.00 31866.00 32757.00 29445.00 15234.00 28272.00 7201.00
15504.00 10225.00 25652.00 18156.00 24624.00 30798.00 19363.00 26696.00 20829.00 4162.00
```

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台
11721.00 16522.00 6647.00 22997.00 29245.00 11181.00 5975.00 27803.00 17274.00 7303.00
误差: 1.72838e-11

平方根法的解
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
4839.00 8501.00 3112.00 31204.00 5217.00 2953.00 15655.00 25146.00 1961.00 21015.00
6280.00 4664.00 17296.00 1025.00 30262.00 12841.00 32518.00 11518.00 24925.00 21919.00
8232.00 30799.00 32647.00 22024.00 31866.00 32757.00 29445.00 15234.00 28272.00 7201.00
15504.00 10225.00 25652.00 18156.00 24624.00 30798.00 19363.00 26696.00 20829.00 4162.00
32664.00 7734.00 27236.00 1011.00 6766.00 21818.00 29453.00 5150.00 20928.00 17676.00
31355.00 12390.00 16243.00 9617.00 2131.00 29675.00 15351.00 12297.00 26913.00 20511.00
11721.00 16522.00 6647.00 22997.00 29245.00 11181.00 5975.00 27803.00 17274.00 7303.00
误差: 3.28272e-11

改进的平方根法的解
376.00 7862.00 30125.00 24162.00 11882.00 26378.00 11633.00 2581.00 8852.00 21507.00
31840.00 1274.00 32521.00 19064.00 7109.00 11206.00 21498.00 26344.00 3822.00 10777.00
15830.00 13842.00 18807.00 6065.00 23989.00 23487.00 2763.00 30174.00 12535.00 7139.00
4839.00 8501.00 3112.00 31204.00 5217.00 2953.00 15655.00 25146.00 1961.00 21015.00
6280.00 4664.00 17296.00 1025.00 30262.00 12841.00 32518.00 11518.00 24925.00 21919.00
8232.00 30799.00 32647.00 22024.00 31866.00 32757.00 29445.00 15234.00 28272.00 7201.00
15504.00 10225.00 25652.00 18156.00 24624.00 30798.00 19363.00 26696.00 20829.00 4162.00
32664.00 7734.00 27236.00 1011.00 6766.00 21818.00 29453.00 5150.00 20928.00 17676.00
31355.00 12390.00 16243.00 9617.00 2131.00 29675.00 15351.00 12297.00 26913.00 20511.00
11721.00 16522.00 6647.00 22997.00 29245.00 11181.00 5975.00 27803.00 17274.00 7303.00
误差: 1.72838e-11

C:\Visual C++\数值代数\x64\Debug\数值代数.exe (进程 7808)已退出, 代码为 0。
要在调试停止时自动关闭控制台, 请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
按任意键关闭此窗口。...
```

## 2. (1) .3 结果分析

从运行结果中可以看出, 误差大小排序为: 平方根法>全主元法>列主元法=不选主元法=改进的平方根法。

## 2. (2) .1 问题描述

用所学的五种方法求解 2. (2) 的方程组, 比较所有方法的计算结果。

## 2. (2) .2 程序运行结果

下面是 13 阶的运行结果

```
Microsoft Visual Studio 调试控制台
习题1.2.(2)+习题1.3:
全主元消去法的解:
1.00 1.00 1.00 0.99 1.11 0.41 3.06 -3.75 8.37 -6.59
5.98 -0.88 1.31
误差: 12.9422
列主元消去法的解
1.00 1.00 -1.65 1.00 1.17 1.06 0.99 3.78 0.67 -3.24
2.15 -0.05 5.12
误差: 7.23366
不选主元消去法的解
1.00 1.00 1.00 0.99 1.09 0.50 2.74 -3.04 7.28 -5.49
5.27 -0.62 1.27
误差: 11.0527
平方根法的解
1.00 1.00 1.00 0.99 1.10 0.46 2.89 -3.39 7.87 -6.12
5.70 -0.78 1.30
误差: 12.0962
改进的平方根法的解
1.00 1.00 0.89 2.79 -15.10 88.56 -305.17 712.51 -1109.36 1151.01
-757.03 288.81 -46.91
误差: 1955.27
C:\Visual C++\数值代数\x64\Debug\n数值代数.exe (进程 15928)已退出, 代码为 0。
要在调试停止时自动关闭控制台, 请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
按任意键关闭此窗口。
```

下面是 40 阶的运行结果

```
选择 Microsoft Visual Studio 调试控制台
习题1.2.(2)+习题1.3:
全主元消去法的解:
1.00 1.00 1.00 0.98 1.07 1.12 -1.38 10.35 -14.06 4.40
15.83 -2.77 3.04 -58.88 63.84 23.17 -8.45 -52.06 8.79 18.86
45.63 -94.68 59.68 -16.44 114.03 -120.98 17.55 -83.59 140.61 -22.26
-74.17 8.93 136.01 -81.53 -22.98 -25.00 61.36 -46.43 43.00 -15.60
误差: 349.04
列主元消去法的解
1.00 0.99 39.54 1.00 185.00 -0.51 -82.58 32.34 1.17 -41.59
-115.65 8.61 11.53 -21.54 -36.23 125.46 377.11 65.54 -9.97 31.75
-26.86 -15.46 -7.34 -13.68 87.17 -54.07 13.75 -38.97 -228.97 -83.75
200.06 -164.97 -83.00 -106.40 -112.56 -57.84 123.57 175.28 -116.50 -22.40
误差: 677.095
不选主元消去法的解
1.00 1.00 1.01 0.82 2.72 -8.60 32.63 -56.88 40.70 48.60
-118.23 106.70 -74.52 42.11 15.48 15.68 -28.45 -78.64 99.04 -61.05
93.38 -61.95 -9.04 91.16 -65.00 43.83 -175.18 38.71 153.48 -0.69
-65.66 51.38 33.10 -194.96 75.15 100.40 -73.56 60.17 -52.62 16.79
误差: 467.733
平方根法的解
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
-nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind) -nan(ind)
误差: -nan(ind)
改进的平方根法的解
1.00 1.00 1.00 0.95 1.50 -1.73 9.55 -12.84 6.81 13.45
-9.63 -0.24 -23.55 39.18 15.43 -33.54 4.00 -7.55 25.19 -29.76
8.04 61.49 -58.14 18.62 -11.44 6.39 -22.75 37.58 15.67 -41.95
6.25 -21.33 44.75 45.97 -45.07 -17.97 -27.25 32.64 26.02 -17.75
误差: 164.424
C:\Visual C++\数值代数\x64\Debug\n数值代数.exe (进程 26384)已退出, 代码为 0。
要在调试停止时自动关闭控制台, 请启用“工具”->“选项”->“调试”->“调试停止时自动关闭控制台”。
```

## 2. (2) .3 结果分析

从运行结果中可以看出，40 阶时误差大小排序为：列选主元法>不选主元法>全主元法>改进的平方根法>平方根法（大于 13 阶无解）。而 13 阶时误差大小排序为：改进的平方根法>全主元法>平方根法>不选主元法>列主元法。出现这种现象的主要原因是 Hilbert 矩阵太病态，各种方法误差都很大且不稳定。

### 3.1 问题描述

用第一题的算法求解第二题的两个方程组并比较所有计算结果，然后评论各个方法的优劣。

### 3.2 程序运行结果（见第二题的程序运行结果）

### 3.3 结果分析

各个方法的优劣：

对于一般的非奇异矩阵，不选主元 gauss 消去法精度较低，但是运行较快，全主元和列主元 gauss 消去法精度要更高，误差更小，但运行时间略长，其中列主元和全主元精度差别不大，但是列主元运行时间更短，三个方法中列主元法更优。

对于正定对称矩阵，选主元不是必要的，因此用平方根法和改进的平方根法解方程运行会更快但是精度不一定有 gauss 消去法高。特别的，对于 2. (1) 问题中比较良态的对称正定矩阵，平方根法精度就劣于 gauss 消去法，但是改进的平方根法明显优于其他方法：运行速度快，精度高；但是对于 2. (2) 这种非常病态的 Hilbert 矩阵，阶数低的时候改进的平方根法精度很低，阶数高一点，精度就变高了，可以推断对于比较病态的矩阵（对称正定矩阵）而言并没有统一的优的算法。