数值代数第五次实验报告

教师: 邓建松

PB20061327 郑涛

5.1 问题描述

1. 考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, 0 < x, y < 1, \\ u|_{\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

其中 Γ 为正方形区域的边界。类似于模型问题, 我们得到差分方程

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) u_{ij} - \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = \frac{h^2}{4} f_{ij}, i, j = 1, \dots, n-1, \\ u_{i,0} = \varphi_{i,0}, u_{i,n} = \varphi_{i,n}, i = 0, 1, \dots, n, \\ u_{0,j} = \varphi_{0,j}, u_{n,j} = \varphi_{0,j}, j = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

按照自然顺序排列得到系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} S' & B & & & \\ B & S' & B & & & \\ & B & S' & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & B & \\ & & & B & S' \end{pmatrix}$$

其中 B = -I/4, I 为 n-1 阶单位矩阵,S' 是对角元均为 $1 = h^2/4$, 次对角元均为 -1/4 的 n-1 阶对称三对角阵。对 $f(x,y) = \sin(xy)$, $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$, n=20.

- (1) 用共轭梯度法求解差分方程,要求 4 位有效数字。观察迭代次数和求解所用时间,迭代终止条件为 $\|x_{k+1} x_k\|_{\infty} < 10^{-7}$. 注意边界条件与线性方程组的关系!!
- (2) 用 SOR 迭代法求解,用二分法找出最佳松弛因子 (需要在报告中给出),在相同条件下观察迭代次数和求解所用时间,并比较 SOR 迭代法和共轭梯度法的优劣。

5.1 程序运行结果

```
共轭梯度法的解为:
0.0214 0.0404
                                                       0.0852
0.5409
0.1591
                                                                          0.1125
0.6093
                                                                                                              0. 1787

0. 7578

0. 2719

0. 8638

0. 3681

0. 9575

0. 4661

0. 1125

0. 5648

0. 1936

0. 6637

0. 2809

0. 7623

0. 3725

0. 8607

0. 4669

0. 9592

0. 5631

1. 0586

0. 6603

1. 1599

0. 7583

1. 2644

0. 8569

1. 3739

0. 9566

0. 6093

1. 0581

0. 7213

1. 1623

0. 8251

1. 2707

0. 9205
                                                                                                                                0.2178
0.8372
                                     0.0613
                                                                                                                                                   0.2611
                                                                                            0.1436
                                                                                                                                                                     0.3085
 0.3603
                                     0.4765
                                                                                            0.6817
                                                                                                                                                   0.9193
                   0.4163
                                                                                                                                                                     0.0404
                   0. 0973
0. 5274
0. 1673
                                     0. 1272
0. 5889
0. 2033
                                                                                            0. 2311
0. 7916
0. 3232
                                                                                                                                                  0.3636
0.0613
                                                                          0.1936
                                                                                                                                0.3160
 0.0688
                                                                                                                                                                     0.4147
                                                                         0. 1936
0. 7213
0. 2809
0. 8251
0. 3725
0. 9205
                                                        0.6536
                                                                                                                                0. 9371
0. 4158
 0.4693
                                                                                                                                                                     0.0973
                                                       0. 2411
0. 7599
0. 3288
0. 8594
                                                                                                                                                                     0.5199
0.1673
0.6233
 0.1322
                                                                                                                                                   0.4664
                   0. 1673
0. 6350
0. 2464
0. 7385
0. 3319
0. 8377
0. 4219
0. 9327
0. 5150
1. 0244
0. 6102
                                     0. 6964
0. 2869
0. 7985
                                                                                                                                0. 0852
0. 5163
0. 1591
                                                                                                                                                  0. 1272
0. 5687
0. 2033
 0.5761
0.2067
                                                                                            0.8912
0.4182
 0.6800
                                                                                            0.9811
                                                                                                                                                                     0.2464
                                                       0. 4205
0. 9522
0. 5148
                                                                         0. 4669
1. 0083
0. 5631
                                                                                                                                                                    0. 7246
0. 3319
0. 8235
                                     0.3756
0.8951
                                                                                                                                                   0.6698
                                                                                            0.5150
                                                                                                                                0.6165
 0.2890
 0.7807
                                                                                            0.1436
                                                                                                                                0.2411
                                                                                                                                                   0.2869
                                     0. 4678
0. 9868
0. 5625
1. 0746
0. 6588
                                                                                           0. 1436
0. 6127
0. 2311
0. 7108
0. 3232
0. 8092
                                                                                                                                0. 7159
0. 3288
0. 8145
                                                                                                                                                   0.7693
 0.3767
                                                       1. 0394
0. 6109
0. 2178
0. 7081
                                                                         0. 1787
0. 6603
0. 2719
0. 7583
 0.8781
                                                                                                                                                   0.3756
                                                                                                                                                                     0.4219
 0. 4682
0. 9727
0. 5623
                                                                                                                                                                     0.9202
0.5150
                                                                                                                                                   0.8673
                                                                                                                                0. 4205
0. 9124
                                                                                                                                                  0. 4678
0. 9641
                                                                                                                                                                     1.0153
                                     0. 2611
0. 7563
                                                       0. 3160
0. 8063
0. 4158
0. 9057
0. 5163
1. 0067
0. 6165
1. 1103
0. 7159
1. 2176
0. 8145
1. 3302
0. 9124
1. 4502
                                                                                                                                0.5148
1.0102
  1.0654
                   1. 1139
0. 7070
0. 3085
0. 8051
0. 4147
0. 9047
0. 5199
1. 0064
0. 6233
1. 1109
0. 7246
1. 2196
0. 8235
                                                                          0.3681
                                                                                            0.4182
                                                                                                                                                   0.5625
                                                                                                                                                                     0.6102
 0.6583
                                                                          0.8569
                                                                                            0.9080
                                                                                                                                                   1.0606
                                                                                                                                                                     1.1099
                                      0.3636
                                                                          0.4661
                                                                                                                                                                     0.7070
  1.1574
                                                                                            0.5150
                                                                                                                                0.6109
                                                                                                                                                   0.6588
                                                                                           1. 0077
0. 6127
1. 1093
0. 7108
1. 2139
0. 8092
                                                                         0. 9566
0. 5648
1. 0581
0. 6637
                                                                                                                                1. 1088
0. 7081
1. 2094
0. 8063
                                                                                                                                                  1. 1578
0. 7563
                                                                                                                                                                     1.2051
0.8051
 0.7557
                                     0.8551
                                     0. 4664
0. 9555
0. 5687
 0.3603
 0.8545
                                                                                                                                                  1.2571
0.8551
                                                                                                                                                                     0.4163
 0.4693
                                                                                                                                                                     0.9047
                                     1.0582
0.6698
                                                                         1. 1623
0. 7623
                                                                                                                                1.3134
0.9057
                                                                                                                                                                     0.5274
1.0064
 0.9552
                                                                                                                                                   0.4765
 0.5761
                                                                                                                                                   0.9555
                                     1. 1642
0. 7693
1. 2749
0. 8673
1. 3923
                                                                         1. 2707
0. 8607
1. 3850
0. 9592
                                                                                             1.3230
  1.0583
                                                                                                                                0.5409
                                                                                                                                                   0.5889
                                                                                                                                                                     0.6350
                                                                                                                                1. 0067
0. 6536
1. 1103
0. 7599
1. 2176
0. 8594
                                                                                                                                                                    1. 1109
0. 7385
1. 2196
0. 8377
                                                                                                                                                  1.0582
0.6964
 0.6800
                                                                                            0.9080
                                                                                            1. 4385
1. 0077
0. 6817
  1.1649
 0.7807
                                                                                                                                                   1.1642
  1.2764
                    1.3341
                                                                          1.5073
                                                                                                                                                   0.7985
                                                        1. 0102
1. 5800
                                                                                                                                                   1. 2749
0. 8951
 0.8781
                   0. 9202
1. 4564
                                     0.9641
                                                                          1.0586
                                                                                             1.1093
                                                                                                                                                                     1.3341
                                                                          0. 7578
1. 1599
                                      1.5184
                                                                                            0.7916
  1.3948
                                                                                                                                                                     0.9327
                    1.0153
                                                                                             1.2139
                                                                                                                                 1.3302
 0.9727
                                      1.0606
                                                        1.1088
                                                                                                                                                   1.3923
                                                                                                                                                                     1.4564
                                                                                            0.8912
1.3230
0.9811
                    1. 5893
1. 1099
                                                                                                                                0. 9522
1. 4502
                                      1.6564
                                                        0.8372
                                                                          0.8638
                                                                                                                                                   0.9868
                                                                                                                                                                     1.0244
  1.5223
                                                       1. 2094
0. 9371
1. 3134
                                                                         1. 2644
0. 9575
                                                                                                              1.3850
1.0083
  1.0654
                                     1. 1578
0. 9193
                                                                                                                                                   1.5184
                                                                                                                                                                     1.5893
                    1. 7362
1. 2051
                                                                                                                                 1.0394
                                                                                                                                                   1.0746
  1.6621
                                                                                                                                                                     1. 1139
  1. 1574
                                                                                                              1.5073
                                      1.2571
                                                                         1.3739
                                                                                            1. 4385
                                                                                                                                 1.5800
                                                                                                                                                   1.6564
                                                                                                                                                                     1.7362
1.8187
迭代次数为:55
运行时间为:1691ms
```

```
SOR迭代法结果:
解为:
                                                                                    0. 1787
0. 7578
0. 2719
0. 8638
0. 3681
0. 9575
0. 4661
0. 1125
                                          0.0852
0.5409
0.1591
0.6536
0.2411
 0. 0214
0. 3603
                            0.0613
0.4765
                                                        0.1125
0.6093
                                                                      0. 1436
0. 6817
                                                                                                  0.2178
0.8372
0.3160
                                                                                                                 0.2611
0.9193
              0.0404
                                                                                                                               0.3085
              0.4163
                                                                                                                               0.0404
                            0. 1272
0. 5889
0. 2033
                                                        0. 1936
0. 7213
0. 2809
                                                                      0. 2311
0. 7916
0. 3232
              0.0973
0.5274
                                                                                                                 0.3636
                                                                                                                               0.4147
 0.0688
                                                                                                   0. 9371
0. 4158
                                                                                                                 0.0613
0.4664
 0.4693
                                                                                                                               0.0973
               0.1673
 0.1322
                                                                                                                               0.5199
              0. 1673
0. 6350
0. 2464
0. 7385
0. 3319
0. 8377
0. 4219
                            0. 6964
0. 2869
0. 7985
0. 3756
                                                                      0.8912
0.4182
0.9811
0.5150
 0.5761
0.2067
                                          0.7599
0.3288
                                                        0.8251
0.3725
                                                                                                   0.0852
0.5163
                                                                                                                 0.1272
                                                                                                                               0.1673
                                                                                                                 0.5687
0.2033
                                                                                                                               0.6233
                                                                                                                               0. 2464
0. 7246
                                                                                                   0.1591
0.6165
 0.6800
                                           0.8594
                                                         0.9205
                                                                                    0.1125
0.5648
0.1936
0.6637
0.2809
0.7623
0.3725
0.8607
 0.2890
                                           0.4205
                                                         0.4669
                                                                                                                 0.6698
 0. 7807
0. 3767
                                                         1.0083
0.5631
                            0.8951
                                           0.9522
                                                                       0.1436
                                                                                                   0.2411
                                                                                                                 0.2869
                                                                                                                               0.3319
                            0. 4678
0. 9868
                                           0.5148
                                                                       0.6127
                                                                                                   0.7159
                                                                                                                 0.7693
                                                                                                                               0.8235
                                                                      0. 2311
0. 7108
0. 3232
                                           1.0394
                                                                                                   0.3288
                                                                                                                 0.3756
 0.8781
               0.9327
                                                         0.1787
                                                                                                                               0.4219
 0. 4682
0. 9727
0. 5623
1. 0654
              0.5150
1.0244
0.6102
                                                        0.6603
                            0.5625
                                           0.6109
                                                                                                   0.8145
                                                                                                                 0.8673
                                                                                                                               0.9201
                                          0. 2178
0. 7081
0. 3160
                                                        0.2719
0.7583
                                                                                                   0.4205
0.9124
                                                                                                                               0.5150
                             1.0746
                                                                                                                 0.4678
                            0.6588
                                                                       0.8092
                                                                                                                 0.9641
                                                                                                                               1.0153
                                                                                    0. 4669
0. 9592
0. 5631
1. 0586
0. 6603
                            0. 2611
0. 7563
               1.1139
                                                        0.3681
                                                                       0.4182
                                                                                                   0.5148
                                                                                                                 0.5625
                                                                                                                               0.6102
              0.7070
                                           0.8063
0.4158
                                                        0.8569
0.4661
                                                                      0.9080
0.5150
 0.6583
                                                                                                   1.0102
                                                                                                                 1.0606
                                                                                                                               1.1099
 1.1574
              0.3085
                             0.3636
                                                                                                   0.6109
                                                                                                                 0.6588
                                                        0. 9566
0. 5648
1. 0581
0. 6637
                                                                                                   1. 1088
 0.7557
               0.8051
                             0.8551
                                           0.9057
                                                                       1.0077
                                                                                                                 1. 1578
                                                                                                                               1.2051
                            0. 4664
0. 9555
0. 5687
                                                                      0. 6127
1. 1093
0. 7108
1. 2139
                                                                                                  0. 7081
1. 2094
0. 8063
 0.3603
0.8545
              0. 4147
0. 9047
                                           0.5163
                                                                                                                 0.7563
                                                                                                                               0.8051
                                          1.0067
0.6165
                                                                                     1. 1599
0. 7583
                                                                                                                 1.2571
                                                                                                                               0.4163
 0.4693
               0.5199
                                                                                                                 0.8551
                                                                                                                               0.9047
 0. 9552
0. 5761
              1.0064
0.6233
                                                        1. 1623
0. 7623
                             1.0582
                                           1.1103
                                                                                     1.2644
                                                                                                   1.3134
                                                                                                                               0.5274
                                                                                                                 0.4765
                                           0.7159
                                                                                     0.8569
1.3739
                            0.6698
                                                                       0.8092
                                                                                                   0.9057
                                                                                                                 0.9555
                                                                                                                               1.0064
                                           1.2176
                                                                       1.3230
               1.1109
                                                         1.2707
                                                                                                   0.5409
 1.0583
                            1.1642
                                                                                                                 0.5889
                                                                                                                               0.6350
              0. 7246
1. 2196
0. 8235
1. 3341
                                                                                                                              1. 1109
0. 7385
1. 2196
0. 8377
                                           0.8145
                                                        0.8607
 0.6800
                            0.7693
                                                                       0.9080
                                                                                     0.9566
                                                                                                   1.0067
                                                                                                                 1.0582
                                                        1. 3850
0. 9592
1. 5073
1. 0586
0. 7578
                            1. 2749
0. 8673
1. 3923
                                          1. 3302
0. 9124
1. 4502
                                                                                    0.6093
1.0581
0.7213
 1.1649
                                                                       1.4385
                                                                                                   0.6536
                                                                                                                 0.6964
                                                                                                  1. 1103
0. 7599
1. 2176
0. 8594
                                                                       1.0077
0.6817
 0.7807
1.2764
                                                                                                                 1.1642
                                                                                                                 0.7985
 0.8781
1.3948
              0. 9201
1. 4564
                            0.9641
1.5184
                                                                                     1. 1623
0. 8251
                                                                                                                 1.2749
                                                                                                                               1.3341
                                           1.0102
                                                                       1.1093
                                                                       0. 7916
1. 2139
                                                                                                                 0.8951
                                           1.5800
                                                        1. 1599
                                                                                     1.2707
 0.9727
               1.0153
                                                                                                   1.3302
                                                                                                                 1.3923
                             1.0606
                                           1.1088
                                                                                                                               1.4564
                                                                      0. 8912
1. 3230
0. 9811
                                                                                                   0. 9522
1. 4502
 1.5223
               1.5893
                             1.6564
                                           0.8372
                                                        0.8638
                                                                                     0.9205
                                                                                                                 0.9868
                                                                                                                               1.0244
                            1. 1578
0. 9193
1. 2571
                                                                                     1. 3850
1. 0083
1. 5073
                                                        1.2644
                                           1.2094
 1.0654
               1.1099
                                                                                                                 1.5184
                                                                                                                               1.5893
                                                        0. 9575
1. 3739
               1. 7362
1. 2051
                                          0. 9371
1. 3134
 1.6621
1.1574
                                                                                                   1.0394
                                                                                                                 1.0746
                                                                                                                                1. 1139
                                                                       1.4385
                                                                                                   1.5800
                                                                                                                               1.7362
                                                                                                                 1.6564
 公弛因子为: 1.645
迭代次数为: 108
     市时间为: 8056ms
```

5.1 结果分析

共轭梯度法迭代 55 次,用时约 1.7s; SOR 迭代法最佳松弛因子为 1.64-1.65, 迭代次数 108 次,用时约 8s。共轭梯度法迭代次数少且用时更快,经计算共轭梯度法迭代一次的用时也更短,

5.2 问题描述

用 Hilbert 矩阵测试你所编写的共轭梯度法程序:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}, \ b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, 0 \le i, j \le n-1$$

对 n = 20, 40, 60, 80 分别求解,观察解是否准确,迭代停止条件自定,给出 迭代次数和求解所用时间。

5.2 程序运行结果

```
价为20的Hilibert矩阵的共轭梯度法的解为:
0.3333 0.3332 0.3339 0.3330 0.3329
                                                                                    0.3336
                                               0.3331 0.3335 0.3337 0.3337
0.3335 0.3333 0.3331 0.333
5代次数为: 7
五行时间为: 3ms
与精确解的误差为: 0.000665761
                  0.3331 0.3330 0.3329 0.3330 0.3331 0.3333 0.3336 0.3340
阶为40的Hilibert矩阵的共轭梯度法的解为:
 0.3330
                                                                 0.3337 0.3336 0.3336
   3335
        0.3334
                  0.3334 0.3333 0.3332
                                               0.3331 0.3331 0.3330 0.3330 0.3330
0.3330 0.3330 0.3331 0.33
迭代次数为: 9
运行时间为: 11ms
与精确解的误差为: 0.00067994
                  0.3331 0.3331 0.3332
                                               0.3333 0.3335
                                                                 0.3336 0.3338
                                                                                    0.3340
阶为60的Hilibert矩阵的共轭梯度法的解为:
0.3333 0.3332 0.3337 0.3330 0.3330
                                               0.3333 0.3335 0.3336 0.3336
                                                                                    0.3335
                                     0.3331
 0.3334
         0.3333
                   0.3332 0.3331
                                               0.3331
                                                        0.3331
                                                                 0.3332
                                                                          0.3332
                                                                                    0.3333
                   0.3334 0.3335
0.3335 0.3334
 0.3333
0.3335
                                     0.3335
0.3334
                                               0.3335
0.3334
                                                        0.3335
0.3333
         0.3334
                                                                 0.3335
                                                                           0.3335
                                                                                    0.3335
                                                                          0.3333
                                                                                    0.3332
         0.3335
                                                                 0.3333
0.3332 0.3332 0.3331 0.33
0.3332 0.3332 0.3333 0.33
迭代次数为: 11
运行时间为: 30ms
与精确解的误差为: 0.000442652
                  0.3331 0.3331 0.3331
0.3333 0.3333 0.3334
                                               0.3331
                                                        0.3331
                                                                 0.3331
                                                                          0.3331
                                                                                    0.3332
                                                                          0.3337
                                               0.3334
                                                        0.3335
                                                                 0.3336
                                                                                    0.3338
阶为80的Hilibert矩阵的共轭梯度法的解为:
 0.3333 0.3332 0.3340 0.3330 0.3328
                                               0.3331 0.3334 0.3336 0.3337 0.3337
                   0.3334 0.3332
         0.3335
                                     0.3331
 0.3336
                                                       0.3330 0.3330 0.3330 0.3330
                                               0.3331
                  0. 3332 0. 3332
0. 3336 0. 3336
0. 3335 0. 3334
                                               0.3334
         0.3331
                                     0.3333
                                                        0.3334 0.3335 0.3335
                                                                                    0.3336
 0.3331
                                     0.3336
                                                                 0.3336
                                                                          0.3336
 0.3336
         0.3336
                                                        0.3336
                                                                                    0.3336
                                     0.3334
                                                                 0.3333
 0.3335
         0.3335
                                               0.3334
                                                        0.3333
                                                                           0.3332
                                                                                    0.3332
         0.3331
                   0.3331 0.3331 0.3331
                                               0.3330
                                                                 0.3330
 0.3332
                                                        0.3330
                                                                          0.3330
                                                                                    0.3330
0.3330 0.3330 0.3330 0.333
0.3333 0.3334 0.3334 0.333
迭代次数为: 11
运行时间为: 45ms
与精确解的误差为: 0.000659781
                  0.3330 0.3330 0.3331
                                               0.3331
                                                        0.3331
                                                                 0.3332
                                                                          0.3332
                                                                                    0.3332
                   0.3334 0.3335
                                    0.3336
                                               0.3336
                                                        0.3337
                                                                 0.3338
                                                                           0.3339
                                                                                    0.3340
C:\Users\郑涛\Desktop\数值代数\数值代数实验\实验五\Homework5\x64\Debug\Homework5
要在调试停止时自动关闭控制台,请启用"工具"->"选项"->"调试"->"调试停止时自:
按任章键关闭此窗口
```

5.2 结果分析

根据程序运行结果可得如下表格:

n	迭代次数	运行时间(ms)	误差(10 [^] -4)
20	7	3	6. 657
40	9	11	6. 799
60	11	30	4. 427
80	11	45	6. 598

解都较准确

5.3 问题描述

分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和共轭梯度法求解下述方程,观察迭代次数和求解所用时间,并对结果给出解释。

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

5.3 程序运行结果

```
5.3的解为:

1.0000 -2.0000 3.0000 -2.0000 1.0000
迭代次数为: 5
运行时间为: 0ms

Jacobi法结果:
解为:
 1.0000 -2.0000 3.0000 -2.0000 1.0000
迭代次数为: 65
运行时间为: 5ms

G-S迭代法结果:
解为:
 1.0000 -2.0000 3.0000 -2.0000 1.0000
迭代行的间为: 3ms

C:\Users\郑涛\Desktop\数值代数\数值代数实验\实验五\Homework 要在调试停止时自动关闭控制台,请启用"工具"->"选项"->"说按任意键关闭此窗口..."
```

5.3 结果分析

共轭梯度法程序运行所得结果为精确解,且迭代次数不超过矩阵的阶数,因为在精度允许下,得到精确解的迭代次数不超过方程的阶数。共轭梯度法的运行时间小于其他两个算法。