<u>2D transformácie</u>

Základné transformácie

Zobrazené objekty sú definované množinou bodov. Geometrické transformácie sú procesy, pri ktorých sa vypočítavajú nové súradnice týchto bodov podľa požadovanej zmeny veľkosti a orientácie objektov.

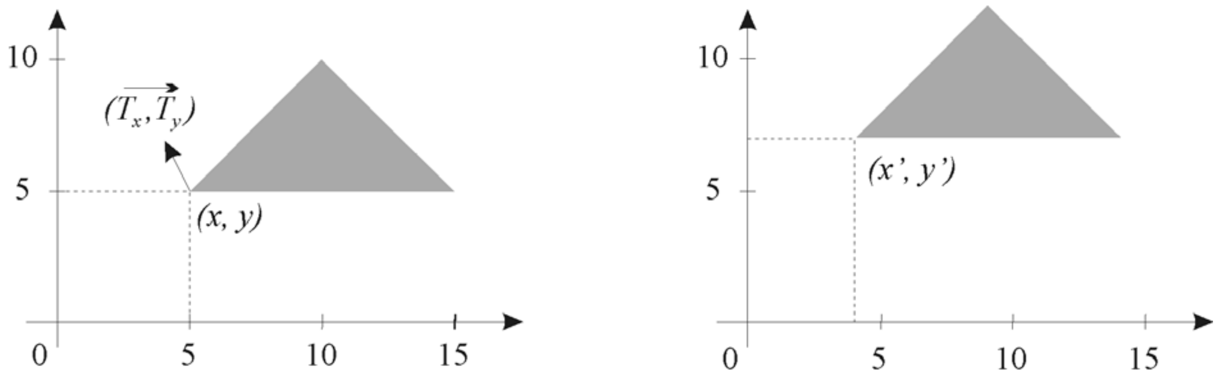
Posunutie = Translácia

Posunutie je premiestnenie objektu z jednej pozície do druhej. Bod so súradnicami (*x, y*) je posunutý do bodu *(x′, y′)* pripočítaním dĺžok posunutí T_x a T_y k pôvodným súradniciam.

$x' = T_x + x$ $\qquad$ (T_x, T_y) je vektor posunutia, $T_x, T_y \in R$

$y' = T_y + y$

Pri zmene polohy kružnice alebo elipsy posunieme súradnice stredu a prekreslíme objekt v novej polohe.



Obr. 1 Posunutie objektu o vektor $(\overrightarrow{T_x, T_y})$

Otočenie = Rotácia

Otočenie je transformácia objektu po kruhovej dráhe. Je určené uhlom otočenia a stredom otočenia. Rovnice pre otočenie okolo začiatku sústavy súradníc o uhol β vyjadríme takto:

$x = r \cos \alpha$ $\qquad$ $x' = r \cos(\alpha + \beta)$ $\qquad$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$y = r \sin \alpha$ $\qquad$ $y' = r \sin(\alpha + \beta)$ $\qquad$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Pomocou vzorcov pre cos a sin súčtu uhlov rovnice upravíme

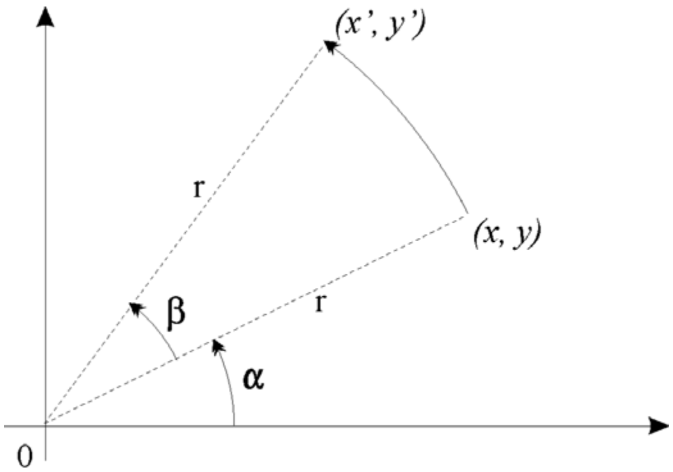
$$x' = r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta$$

$$y' = r \sin(\alpha + \beta) = r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta$$

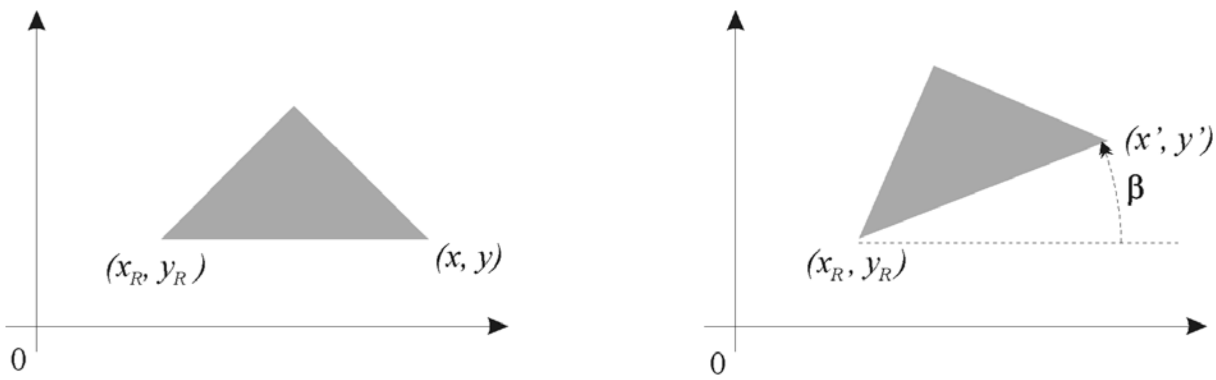
$$x' = x \cos \beta - y \sin \beta$$

$$y' = x \sin \beta + y \cos \beta$$

Kladné hodnoty β určujú otočenie proti smeru hodinových ručičiek, záporné hodnoty β určujú otočenie v smere hodinových ručičiek.



Obr. 2 Otočenie bodu so súradnicami (x, y) o uhol β okolo začiatku sústavy súradníc



Obr. 3 Otočenie objektu okolo bodu so súradnicami (x_R, y_R) o uhol β

Škálovanie = Zmena mierky

Škálovanie je transformácia, pomocou ktorej môžeme zmeniť veľkosť objektu.

$x' = S_x \, . \, x$ — S_x mení rozmery objektu v smere osi x

$y' = S_y \, . \, y$ — S_y mení rozmery objektu v smere osi y

S_x , S_y sú ľubovolné kladné čísla.

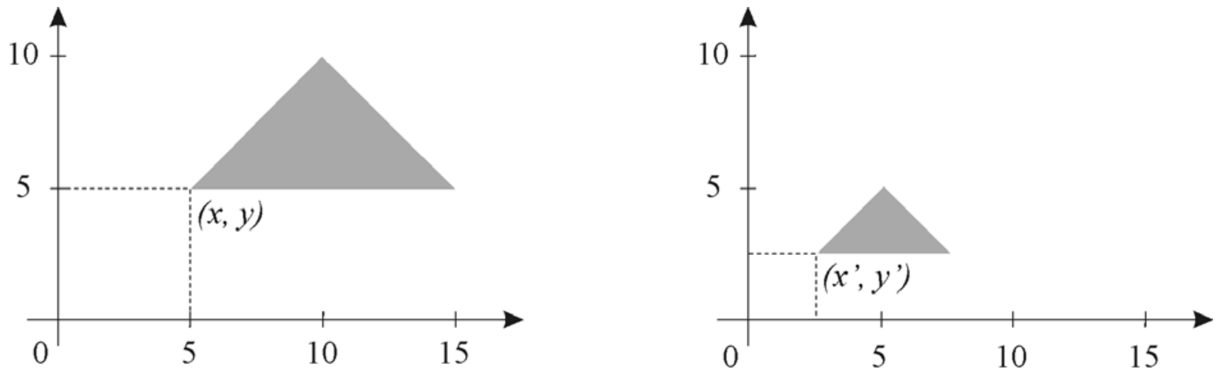
Hodnoty S_x , S_y menšie ako *1* zmenšujú veľkosť objektu, hodnoty väčšie ako *1* zväčšujú veľkosť objektu.

Ak $S_x = S_y = 1$, veľkosť objektu sa nezmení.

Ak $S_x = S_y$, hovoríme o *rovnomernom škálovaní*, ktoré zachováva relatívne proporcie transformovaného objektu.

Ak $S_x , S_y < 1$, zmenšuje sa aj vzdialenosť objektu od začiatku súradnicovej sústavy.

Ak $S_x , S_y > 1$, potom sa vzdialenosť objektu od začiatku súradnicovej sústavy zväčšuje.



Obr. 4 Škálovanie objektu pre $S_x = S_y = ½$ (rovnomerné škálovanie)

Maticové vyjadrenie a homogénne súradnice

Základné transformácie a ich kombinácie sa využívajú v mnohých oblastiach. Pri kresbe obrázkov zložených z množiny jednoduchších základných útvarov je potrebné každý útvar posunúť, otočiť, zmeniť jeho veľkosť a pod. Postupnosť transformácií by sa mohla vykonávať krok za krokom. Teda súradnice bodov určujúcich objekt by boli najskôr podrobené transformácii posunutia, potom otočenia, potom škálovania atď. Výhodnejšie je však priamo vypočítať koncové súradnice z pôvodných súradníc objektu pomocou násobenia matíc. Používame pritom *homogénne súradnice:*

(x , y) zapíšeme ako $[x , y , h]$, kde h je *homogenizačný faktor*, najčastejšie sa volí rovný *1*.

Potom môžeme transformačné rovnice napísať takto:

$P' = P \,.\, M_{33},$

kde $P' = [x', y', 1]$, $P = [x , y , 1]$ a M_{33} je matica transformácie.

Každú postupnosť transformácií môžeme vyjadriť pomocou *zloženej transformačnej matice*, ktorá vznikne vynásobením transformačných matíc.

- matica posunutia a k nej inverzná matica

$$T(T_x, T_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1}(T_x, T_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & 1 \end{pmatrix}$$

- matica otočenia okolo začiatku súradnicovej sústavy o uhol β a k nej inverzná matica

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R^{-1}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- matica škálovania a k nej inverzná matica

$$S(S_x, S_y) = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1}(S_x, S_y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dve postupné posunutia prevedieme tak, že najprv vynásobíme matice posunutí a potom výslednú zloženú maticu aplikujeme na súradnice bodov. Ak sú dané dve posunutia $T_1 = (T_{x1}, T_{y1})$ a $T_2 = (T_{x2}, T_{y2})$, potom transformačná matica pre transformáciu zloženú z týchto dvoch posunutí:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} + T_{x2} & T_{y1} + T_{y2} & 1 \end{pmatrix}$$

Z toho vyplýva, že transformácia posunutia je *aditívna.* Podobne to platí aj pre dve postupné otočenia.

Ak vynásobíme matice pre dve postupné škálovania $S_1 = (S_{x1}, S_{y1})$ a $S_2 = (S_{x2}, S_{y2})$

$$S = \begin{pmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{x1}.S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1}.S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zistíme, že transformácia škálovania je *multiplikatívna.*

Ak použijeme transformačné matice pre posunutie a otočenie, môžeme vytvoriť zloženú maticu na **otočenie okolo daného bodu** $(x_R\ ,\ y_R)$ zložením troch transformácií. Najprv posunieme sústavu súradníc tak, aby sa daný bod dostal do jej začiatku, potom sa objekt otočí okolo začiatku. Nakoniec sústavu súradníc posunieme tak, aby sa daný bod vrátil do svojej pôvodnej polohy:

$$M = T^{-1}(x_R , y_R) \,.\, R(\beta) \,.\, T(x_R , y_R)$$

Všeobecne násobenie matíc je *asociatívne*

$$A . B . C = A . (B . C) = (A . B) . C$$

a násobenie matíc *nie je komutatívne*

$$A . B \neq B . A$$

Ak chceme objekt posúvať a otáčať, musíme brať ohľad na poradie transformácií.

Násobenie transformačných matíc je komutatívne v prípade dvoch za sebou nasledujúcich transformácií toho istého druhu, napr.

- dve postupné otočenia
- dve postupné posunutia
- kombinácia rovnomerného škálovania a otočenia

Kombinácia otočenia a posunutia však komutatívna nie je.

Ďalšie transformácie

Zrkadlenie

Zrkadlenie je transformácia, ktorá vytvára zrkadlový obraz objektu vzhľadom k osi zrkadlenia. Pre **zrkadlenie** objektu **podľa osi x** sa použijú transformačné rovnice škálovania. Dostaneme maticu súmernosti podľa osi *x*:

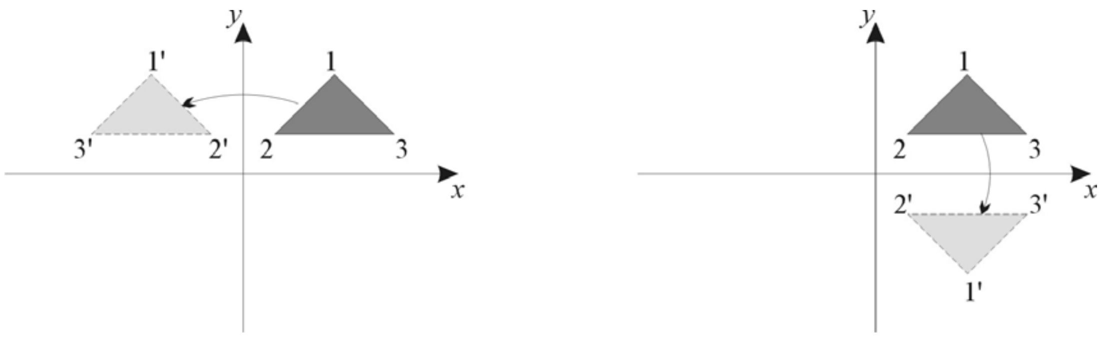
$$Z_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Táto transformácia mení orientáciu objektu, pretože $|Z_x| < 0$.

Pre **zrkadlenie** objektu **podľa osi y** sa použijú transformačné rovnice škálovania. Dostaneme maticu súmernosti podľa osi *y*:

$$Z_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Táto transformácia mení orientáciu objektu, pretože $|Z_y| < 0$.



a) *b)*

Obr. 5 Zrkadlenie objektu a) podľa osi y, b) podľa osi x

Skosenie = Krútenie

Skosenie spôsobuje deformácie tvarov. Výsledok transformácie vyvoláva dojem, že objekt je zložený z mnohých vrstiev, ktoré sú po sebe posúvané.

Skosenie v smere osi x

- transformačná matica

$$SH_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ SH_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $SH_x \in R$
- inverzná matica

$$SH_x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -SH_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- transformácia skosenia mení súradnice x
- súradnice y zostávajú nezmenené
- každý bod objektu je posunutý vo vodorovnom smere o vzdialenosť, ktorá je úmerná súradnici y
- $SH_x > 0$ spôsobí posun doprava
- $SH_y < 0$ spôsobí posun doľava

Skosenie v smere osi y

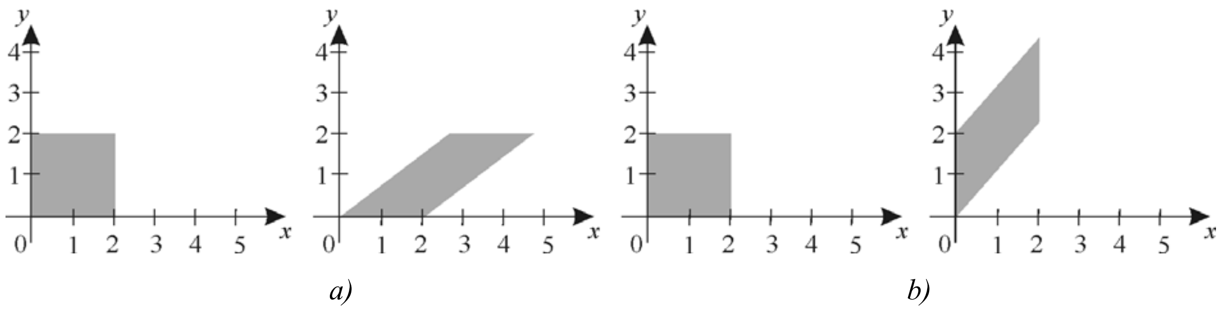
- mení súradnice y
- súradnice x zostávajú nezmenené

- každý bod objektu je posunutý v zvislom smere o vzdialenosť, ktorá je úmerná súradnici x
- $SH_y > 0$ spôsobí posun nahor
- $SH_y < 0$ spôsobí posun nadol
- transformačná matica

$$SH_y = \begin{pmatrix} 1 & SH_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- inverzná matica

$$SH_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -SH_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obr. 6 Skosenie objektu a) v smere osi x, b) v smere osi y