Fraktály

K počítačovej grafike existuje dvojaký prístup:

1. primárnou snahou je vytvoriť obraz na obrazovke z údajov, ktoré sú zadávané používateľom, napr. v CAD-systéme - používame čiary, kružnice, časti kriviek, texty a pod.
2. generatívny prístup

Jeho príkladom je výpočet funkcie tak, že používateľ zadá začiatočné podmienky a algoritmus sám generuje (podľa nejakého predpisu) krivku alebo plochu. Iným spôsobom je generovanie obrázkov pomocou princípov fraktálnej geometrie. Ak chceme nakresliť strom alebo povrch pomaranča, aby bola zachovaná maximálna vernosť reálnemu obrazu, zistíme, že je to skoro nemožné. Je tomu tak preto, lebo tieto objekty sa vyznačujú extrémnou tvarovou zložitosťou. Vytváraním takýchto objektov sa zaoberá fraktálna geometria a to tak, že sa hľadajú niektoré črty charakteristické pre tieto objekty a potom sa vytvoria algoritmy, ktoré by mali byť schopné tieto črty vystihnúť.

Fraktálna geometria

Fraktálna geometria je vedná disciplína rozvíjaná asi od 60. rokov 20. storočia. Niekoľko vedcov sa vtedy nezávisle od seba pokúšalo nájsť opis chaotickosti prírody. Napr. oblaky nie sú gule a elipsoidy, teda ich opis pomocou klasickej geometrie zlyháva. Väčšina objektov v prírode je z tohto hľadiska chápania úplne chaotická, ale táto chaotickosť nie je absolútna. Aj stromy v lese sú síce rozložené náhodne, ale táto náhodnosť nie je úplne bez poriadku (systému). A práve tam, kde je hranica medzi chaosom a poriadkom, sa začala snaha o opis prírody.

Nájsť v tomto chaose poriadok znamenalo vytvoriť aparát, ktorý by chaotickosť opisoval a dovoľoval tak človeku jej exaktné uchopenie. Najvýznamnejším priekopníkom v tejto disciplíne sa stal matematik Benoit B. Mandelbrot (1924, Varšava), ktorý fraktálnu geometriu v princípoch exaktne formuloval. Umožnil tak matematike opísať javy dovtedy neopísateľné. Nástrojom na skúmanie fraktálov sa stal počítač. Fraktálna geometria teda poskytuje ďalšie metódy na vytváranie realistických obrázkov.

Samopodobnosť

Pojem samopodobnosť je hlavným pojmom celej fraktálnej geometrie. Typickým samopodobným objektom je kameň - ak sa pozrieme na malý kamienok alebo obrovský balvan, jediné, čím sa odlišujú, je ich veľkosť.

Matematicky je samopodobná množina definovaná takto:

Definícia: Samopodobná množina A n-dimenzionálneho Euklidovského priestoru E_n je taká množina, pre ktorú existuje mnoho kontrahujúcich zobrazení $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ takých, že A vznikne ako

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i(A)$$

Samopodobná množina vzniká teda opakovaním seba samej pri určitom transformovaní (zmene mierky, otočení, posunutí). Samopodobné množiny sú invariantné voči zmenám mierky - pri ľubovolnom zväčšení alebo zmenšení vyzerajú rovnako.

Samopodobná množina vzniká sama zo seba, t. j. vzniká opakovaním toho istého motívu, napr. trávnik je opakovaním jediného stebla trávy, povrch Mesiaca je opakovaním niekoľkých motívov (kráterov, trhlín a pod.).

Ak chceme hovoriť o fraktálnej geometrii, musíme spomenúť dve dimenzie

- dimenziu topologickú, ktorú môžeme chápať tak, že spojitým zobrazením priradí každej krivke priamku, každej ploche rovinu atď.
- dimenziu Hausdorfovu, ktorá je mierou členitosti (je všeobecne neceločíselná, môžeme hovoriť o objektoch, ktoré majú Hausdorfovu dimenziu *1,513*)

Hausdorfova dimenzia rastie s členitosťou. Krivky, ktoré majú všade deriváciu, plochy, ktoré majú prvé parciálne derivácie vo všetkých bodoch, sú hladké a ich topologické dimenzie sú rovné Hausdorfovým. Čím je množina členitejšia, tým vyššia je jej Hausdorfova dimenzia

Existujú krivky, ktoré zapĺňajú celú plochu - ich topologická dimenzia je rovná *1* a Hausdorfova dimenzia je rovná *2*.

B. Mandelbrot definoval pojem fraktálu takto:

Fraktál je množina, ktorej Hausdorfova dimenzia je väčšia ako dimenzia topologická.

Typickou fraktálnou množinou je obvod nejakého reálneho objektu. V súvislosti s Hausdorfovou dimenziou je často uvádzaný príklad s meraním obvodu ostrova Korzika. Čím väčšia presnosť bola použitá, tým väčšia dĺžka bola nameraná, v limitnom prípade bude dĺžka nekonečná. Niekedy sa uvádzané dĺžky štátnych hraníc odlišovali až o násobky prirodzených čísel, preto sa v súčasnej dobe v moderných atlasoch dĺžka hraníc nespomína. Dĺžka nie je vhodnou informáciou o členitosti pobrežia, vhodným matematickým pojmom na jej vyjadrenie je Hausdorfova dimenzia.

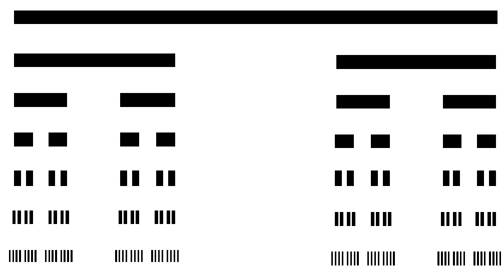
Pravidelné fraktály

Cantorovo diskontinuum

- po nekonečne mnohých iteráciách sa začiatočná úsečka rozpadne na samostatné body
- Hausdorfova dimenzia tejto množiny je $\frac{\log 2}{\log 3} \approx \mathbf{0{,}6309297}$
- je teda menšia ako Hausdorfova dimenzia priamky (*1*), ale väčšia ako Hausdorfova dimenzia bodu (*0*)

```
program Cantor;
procedure rekurzivne_rozdel ( X : úsečka );
        begin
                rozdel X na A , B , C - tri rovnako dlhé úsečky;
                rekurzivne_rozdel ( A );
                rekurzivne_rozdel ( C );
        end;

begin
        vezmi úsečku X;
        rekurzivne_rozdel ( X );
end.
```



Obr. 1 Cantorovo diskontinuum

Snehová vločka Kochovej

Hausdorfova dimenzia tejto množiny je $\frac{\log 4}{\log 3} \approx \mathbf{1{,}2618595}$

```
program Kochovej_vločka;
procedure rekurzivne_iteruj ( X : úsečka );
        begin
                rozdeľ X na tri tretiny A , B , C ;
                nad strednou tretinou vztýč rovnostranný trojuholník so stranami B1 , B2 ;
                rekurzivne_iteruj ( A );
                rekurzivne_iteruj ( B1 );
                rekurzivne_iteruj ( B2 );
                rekurzivne_iteruj ( C );
        end;

begin
        vezmi úsečku X;
        rekurzivne_iteruj ( X );
end.
```

Sierpinského koberček

Hausdorfova dimenzia tejto množiny je $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58496$

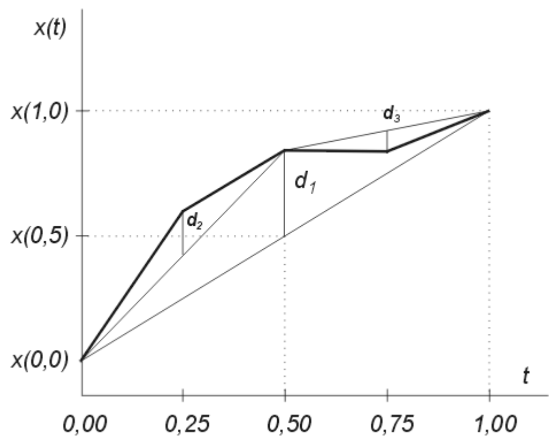
```
program Sierpinsky;
procedure rekurzivne_vyber ( A : trojuholník );
        begin
                vyber_stredný_trojuholník;
                rekurzivne_vyber ( horná_časť_z_A );
                rekurzivne_vyber ( ľavá_časť_z_A );
                rekurzivne_vyber ( pravá_časť_z_A );
        end;

begin
        vezmi trojuholník A;
        rekurzivne_vyber ( A );
end.
```

Generovanie náhodnou funkciou

Pre výstižnejšie modelovanie prírodných javov je treba do transformácie zaviesť prvok náhodnosti.

Metóda presúvania stredného bodu v 1D



Obr. 2 Metóda presúvania stredného bodu v 1D

Wiener (v 20. rokoch 20. storočia) uviedol veľmi jednoduchý príklad generovania Brownovho pohybu. Tento algoritmus je založený na metóde náhodnej zmeny stredného bodu úsečky.

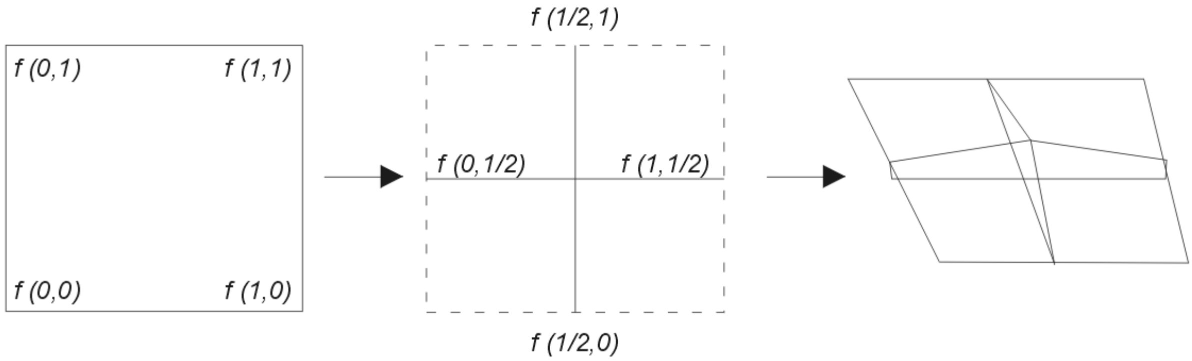
Označme $f(t)$ polohu bodu v závislosti od parametra t ($0 < t < 1$). Nech máme dané hodnoty $f(0)$ a $f(1)$. Potom nájdeme stred úsečky danej týmito bodmi a tento bod posunieme o náhodné číslo d. Aplikovaním tejto metódy na novovzniknuté úsečky získame spojitú funkciu, ktorá nemá nikde deriváciu. Ukončenie iteračného procesu nastane teoreticky v nekonečnom čase, pretože vstupná úsečka má nekonečne veľa bodov. V praxi sa tento proces ukončuje vtedy, keď je vzdialenosť susedných bodov rovná veľkosti rastra, teda jeden pixel.

Metóda presúvania stredného bodu v 2D

Majme štvorcovú sieť, zadáme hodnoty v rohoch. Potom sa sieť rozdelí na štvorce a vo vzniknutých bodoch sa vypočítajú nové funkčné hodnoty z príslušných hodnôt. Na ich výpočet sa dajú použiť tieto možnosti:

1. Priradiť náhodnú hodnotu iba strednému bodu

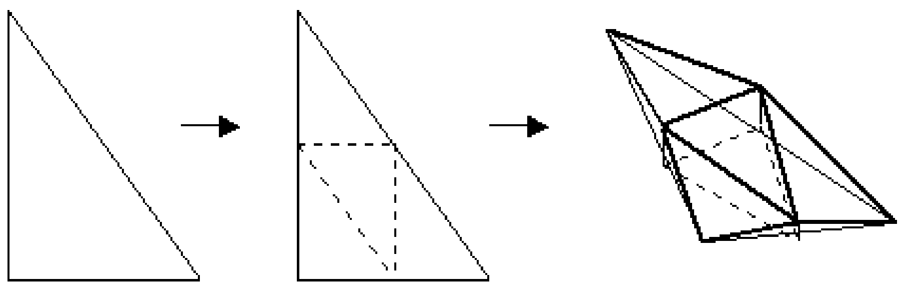
2. Priradiť náhodnú hodnotu niektorým bodom
3. Priradiť náhodnú hodnotu všetkým bodom



Obr. 3 Metóda presúvania stredného bodu v 2D aplikovaná na štvorec

Otázkou zostáva ako výsledok zobrazíme. Na výber sú tieto možnosti:

1. Priradiť každému bodu výšku (obr. 3)
2. Reprezentovať výšku bodu ako jeho farbu, resp. odtieň šede, a pozrieť sa na obrázok zhora



Obr. 4 Metóda presúvania stredného bodu v 2D aplikovaná na trojuholník

Takto sa dajú generovať obrázky, ktoré sa podobajú hmle a oblakom. Algoritmus presúvania stredného bodu nemusíme nutne aplikovať na štvorec, a dokonca ani v rovine, najjednoduchšie je použitie na guli. Jeho výsledkom je potom veľmi realistický model planéty, ktorá má na niektorých miestach pohoria a na iných more. Vhodným priradením farieb vznikne naozaj reálny obraz.