Бакалавры ФИИТ — 4 семестр
Вычислительная математика

Тема 3. Решение нелинейных алгебраических уравнений

Реализуйте решение методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона скалярного нелинейного алгебраического уравнения и системы нелинейных алгебраических уравнений.

1. Выполните задание из методического пособия [1].

2. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x_1x_2) - \mathrm{e}^{-3x_3} + x_4{x_5}^2 - x_6 - \sinh(2x_8)\,x_9 + 2x_{10} = -2.0004339741653854440, \\ \sin(x_1x_2) + x_3x_9x_7 - \mathrm{e}^{-x_{10}+x_6} + 3{x_5}^2 - x_6\,(x_8+1) = -10.886272036407019994, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} = 3.1361904761904761904, \\ 2\cos(-x_9 + x_4) + \dfrac{x_5}{x_3 + x_1} - \sin\left({x_2}^2\right) + \cos^2(x_7x_{10}) - x_8 = 0.1707472705022304757, \\ \sin(x_5) + 2x_8\,(x_3 + x_1) - \mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)} + 2\cos(x_2) - \dfrac{1}{x_4 - x_9} = 0.3685896273101277862, \\ \mathrm{e}^{x_1 - x_4 - x_9} + \dfrac{x_5^2}{x_8} + \dfrac{1}{2}\cos(3x_{10}x_2) - x_6x_3 = -2.0491086016771875115, \\ {x_2}^3x_7 - \sin\left(\dfrac{x_{10}}{x_5} + x_8\right) + (x_1 - x_6)\cos(x_4) + x_3 = 0.7380430076202798014, \\ x_5\,(x_1 - 2x_6)^2 - 2\sin(-x_9 + x_3) + 1.5x_4 - \mathrm{e}^{x_2x_7+x_{10}} = -3.5668321989693809040, \\ \dfrac{7}{x_6} + \mathrm{e}^{x_5+x_4} - 2x_2x_8x_{10}x_7 + 3x_9 - 3x_1 = 8.4394734508383257499, \\ x_{10}x_1 + x_9x_2 - x_8x_3 + \sin(x_4 + x_5 + x_6)\,x_7 = 0.7823809523809523809 6. \end{cases}$$

Начальное приближение: $x^{(0)} = (0.5, 0.5, 1.5, -1.0, -0.5, 1.5, 0.5, -0.5, 1.5, -1.5)^{\mathrm{T}}$.

a) Решите методом Ньютона; посчитайте количество итераций и арифметических операций, затрачиваемых на решение линейных систем; засеките время расчёта.

b) Решите модифицированным методом Ньютона с матрицей Якоби, посчитанной в начальной точке (используйте LU-разложение для решения СЛАУ!); посчитайте количество итераций и арифметических операций, затрачиваемых на решение линейных систем (просто поставьте счётчики внутри LU-разложения, считать затраты на матрицу Якоби не надо); засеките время расчёта.

c) Реализуйте возможность перехода к модифицированному методу Ньютона после k итераций полным методом; поэксперементируйте, найдите оптимальное с точки зрения времени счёта количество итераций полным методом; подумайте, можно ли как-то автоматизировать переход на модифицированный метод Ньютона.

d) Реализуйте «гибридный» вариант, при котором матрица Якоби пересчитывается не каждый раз, а каждые k итераций; посмотрите, как меняется общее число итераций и затраты.

e) Возьмите $x_5^{(0)} = -0.2$. Посмотрите на результаты работы методов (обратите дополнительное внимание на случай из пункта c) при $k < 7$, $k = 7$ и $k > 7$).

Литература:

1. Иванов А. П. Практикум по численным методам. Метод Ньютона. Методические указания — СПб: СПбГУ, 2016.

2. Калиткин Н. Н. Численные методы. 1978 г. 512 с.

3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: Учебник для вузов — М.: Высш. шк., 2002.

Приложение. Матрица Якоби системы

$J_{11} = -\sin(x_1x_2)x_2,\ J_{12} = -\sin(x_1x_2)\,x_1,\ J_{13} = 3\mathrm{e}^{-3x_3},\ J_{14} = {x_5}^2,\ J_{15} = 2x_4x_5,\ J_{16} = -1,\ J_{17} = 0,\ J_{18} = -2\cosh(2x_8)\,x_9,\ J_{19} = -\sinh(2x_8),\ J_{1,10} = 2,$

$J_{21} = \cos(x_1x_2)\,x_2,\ J_{22} = \cos(x_1x_2)\,x_1,\ J_{23} = x_9x_7,\ J_{24} = 0,\ J_{25} = 6x_5,\ J_{26} = -\mathrm{e}^{-x_{10}+x_6} - x_8 - 1,\ J_{27} = x_3x_9,\ J_{28} = -x_6,\ J_{29} = x_3x_7,\ J_{2,10} = \mathrm{e}^{-x_{10}+x_6},$

$J_{31} = 1,\ J_{32} = -1,\ J_{33} = 1,\ J_{34} = -1,\ J_{35} = 1,\ J_{36} = -1,\ J_{37} = 1,\ J_{38} = -1,\ J_{39} = 1,\ J_{3,10} = -1,$

$J_{41} = -\frac{x_5}{(x_3+x_1)^2},\ J_{42} = -2\cos({x_2}^2)\,x_2,\ J_{43} = -\frac{x_5}{(x_3+x_1)^2},\ J_{44} = -2\sin(-x_9+x_4),\ J_{45} = (x_3+x_1)^{-1},\ J_{46} = 0,\ J_{47} = -2\cos(x_7x_{10})\sin(x_7x_{10})\,x_{10},\ J_{48} = -1,\ J_{49} = 2\sin(-x_9+x_4),\ J_{4,10} = -2\cos(x_7x_{10})\sin(x_7x_{10})\,x_7,$

$J_{51} = 2x_8,\ J_{52} = -2\sin(x_2),\ J_{53} = 2x_8,\ J_{54} = (-x_9+x_4)^{-2},\ J_{55} = \cos(x_5),\ J_{56} = x_7\mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)},\ J_{57} = -(x_{10}-x_6)\,\mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)},\ J_{58} = 2x_3+2x_1,\ J_{59} = -(-x_9+x_4)^{-2},\ J_{5,10} = -x_7\mathrm{e}^{-x_7(-x_{10}+x_6)},$

$J_{61} = \mathrm{e}^{x_1-x_4-x_9},\ J_{62} = -3/2\sin(3x_{10}x_2)\,x_{10},\ J_{63} = -x_6,\ J_{64} = -\mathrm{e}^{x_1-x_4-x_9},\ J_{65} = 2\frac{x_5}{x_8},\ J_{66} = -x_3,\ J_{67} = 0,\ J_{68} = -\frac{{x_5}^2}{{x_8}^2},\ J_{69} = -\mathrm{e}^{x_1-x_4-x_9},\ J_{6,10} = -3/2\sin(3x_{10}x_2)\,x_2,$

$J_{71} = \cos(x_4),\ J_{72} = 3{x_2}^2x_7,\ J_{73} = 1,\ J_{74} = -(x_1-x_6)\sin(x_4),\ J_{75} = \cos\left(\frac{x_{10}}{x_5}+x_8\right)x_{10}{x_5}^{-2},\ J_{76} = -\cos(x_4),\ J_{77} = {x_2}^3,\ J_{78} = -\cos\left(\frac{x_{10}}{x_5}+x_8\right),\ J_{79} = 0,\ J_{7,10} = -\cos\left(\frac{x_{10}}{x_5}+x_8\right){x_5}^{-1},$

$J_{81} = 2x_5(x_1-2x_6),\ J_{82} = -x_7\mathrm{e}^{x_2x_7+x_{10}},\ J_{83} = -2\cos(-x_9+x_3),\ J_{84} = 1.5,\ J_{85} = (x_1-2x_6)^2,\ J_{86} = -4x_5(x_1-2x_6),\ J_{87} = -x_2\mathrm{e}^{x_2x_7+x_{10}},\ J_{88} = 0,\ J_{89} = 2\cos(-x_9+x_3),\ J_{8,10} = -\mathrm{e}^{x_2x_7+x_{10}},$

$J_{91} = -3,\ J_{92} = -2x_8x_{10}x_7,\ J_{93} = 0,\ J_{94} = \mathrm{e}^{x_5+x_4},\ J_{95} = \mathrm{e}^{x_5+x_4},\ J_{96} = -7{x_6}^{-2},\ J_{97} = -2x_2x_8x_{10},\ J_{98} = -2x_2x_{10}x_7,\ J_{99} = 3,\ J_{9,10} = -2x_2x_8x_7,$

$J_{10,1} = x_{10}$, $J_{10,2} = x_9$, $J_{10,3} = -x_8$, $J_{10,4} = \cos(x_4 + x_5 + x_6)\, x_7$, $J_{10,5} = \cos(x_4 + x_5 + x_6)\, x_7$, $J_{10,6} = \cos(x_4 + x_5 + x_6)\, x_7,\ J_{10,7} = \sin(x_4 + x_5 + x_6),\ J_{10,8} = -x_3,\ J_{10,9} = x_2,\ J_{10,10} = x_1.$