

# HW10

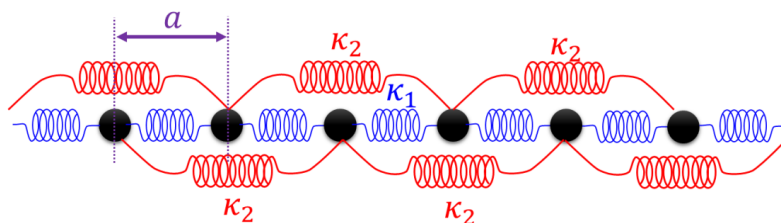
דורון שפיגל

15.04.24

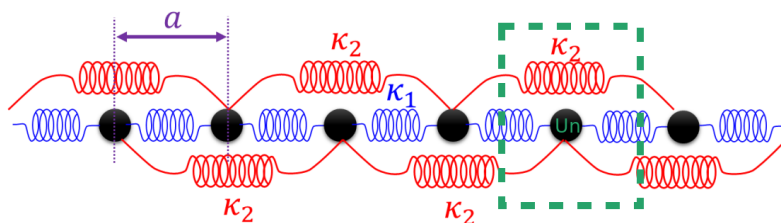
שאלה: 1

שאלה 1.

נתונה שרשרת אטומים המרוחקים זה מזה במרחק ממוצע  $a$ . התנועה של כל אטום מתוארת באמצעות מתנד הרמוני כך שאטום נתון מקושר לשני השכנים הקרובים הנמצאים במרחק  $a$  ממנו באמצעות קפיץ עם קבוע  $k_1$  ולשני שכנים הרחוקים יותר הנמצאים במרחק  $2a$  באמצעות קפיץ  $k_2$ .



כמה אופנים אקוסטיים וכמה אופנים אופטיים ישנם במודל? מהו יחס הנפיצה במודל? תחילה אגדיר תא יחידה, אני מחפש תא יחידה שיקיים מחזוריות בהווה, לכן:



יש לנו אטום יחיד בבעיה חד ממדית, לכן יש יחס נפיצה יחיד. אקבל ביטוי לפוטנציאל:

$$U_1 = 0.5 \cdot k_1 \cdot (u_n - u_{n-1})^2$$

$$U_2 = 0.5 \cdot k_1 \cdot (u_{n+1} - u_n)^2$$

$$U_3 = 0.5 \cdot k_2 \cdot (u_n - u_{n-2})^2$$

$$U_4 = 0.5 \cdot k_2 \cdot (u_{n+2} - u_n)^2$$

ולכן, הכוח:

$$F = -\frac{dU}{dx} = \begin{cases} -k_1(u_n - u_{n-1}) \\ k_1(u_{n+1} - u_n) \\ -k_2(u_n - u_{n-2}) \\ k_2(u_{n+2} - u_n) \end{cases}$$

$$\rightarrow F = k_1(-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1}) + k_2(-2u_n + u_{n+2} + u_{n-2})$$

נציב:  $u_n = Ae^{i(kna - \omega(k)t)}$ ,  $F = m \frac{d^2 u}{dt^2} = -m\ddot{u}$  ונקבל את יחס הנפיצה:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 Ae^{i(kna - \omega(k)t)} &= k_1 \cdot \left( -2Ae^{i(kna - \omega(k)t)} + Ae^{i(k(n+1)a - \omega(k)t)} + Ae^{i(k(n-1)a - \omega(k)t)} \right) \\ &\quad + k_2 \cdot \left( -2Ae^{i(kna - \omega(k)t)} + Ae^{i(k(n+2)a - \omega(k)t)} + Ae^{i(k(n-2)a - \omega(k)t)} \right) \\ \xrightarrow{\div Ae^{i(kna - \omega(k)t)}} -m\omega^2 &= k_1 \cdot \left( -2 + e^{ika} + e^{-ika} \right) + k_2 \cdot \left( -2 + e^{2ika} + e^{-2ika} \right) \\ \xrightarrow{\cos(A) = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}} -m\omega^2 &= k_1 \cdot (-2 + 2\cos(ka)) + k_2 \cdot (-2 + 2\cos(2ka)) \\ \xrightarrow{\times (-1)} m\omega^2 &= k_1 \cdot (2 - 2\cos(ka)) + k_2 \cdot (2 - 2\cos(2ka)) \\ &= 2k_1 \cdot (1 - \cos(ka)) + 2k_2 \cdot (1 - \cos(2ka)) \\ \xrightarrow{2\sin^2(A) = 1 - \cos(2A)} m\omega^2 &= 2k_1 \cdot \left( 2\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \right) + 2k_2 \cdot (2\sin^2(ka)) \\ &= 4k_1 \cdot \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) + 4k_2 \cdot \sin^2(ka) \\ \xrightarrow{\div m} \omega^2 &= \frac{4}{m}k_1 \cdot \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) + \frac{4}{m}k_2 \cdot \sin^2(ka) \\ \Rightarrow \omega(k) &= \sqrt{\frac{4}{m}k_1 \cdot \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) + \frac{4}{m}k_2 \cdot \sin^2(ka)} \end{aligned}$$

עבור  $k \rightarrow 0$ , נקבל  $\lim_{k \rightarrow 0} \omega(k) = \sqrt{\frac{4}{m}k_1 \cdot 0 + \frac{4}{m}k_2 \cdot 0} = 0$  ולכן יש ענף אקוסטי. עם 2

אופנים.

$$\begin{aligned}
\omega(k) &\approx \sqrt{\frac{a^2 k^2 k_1}{m} + \frac{4a^2 k^2 k_2}{m}} = \frac{a\sqrt{k_1 + 4k_2}}{\sqrt{m}} \times k \\
\rightarrow V_{sound} &= \frac{a\sqrt{k_1 + 4k_2}}{\sqrt{m}} \\
&= \frac{a(k_1 + 4k_2 \cos(ak)) \sin(ak)}{2m\sqrt{\frac{k_1 \sin^2(\frac{ak}{2}) + k_2 \sin^2(ak)}{m}}} = \frac{a(k_1 + 4k_2 \cos(ak)) \sin(ak)}{2m\sqrt{\frac{k_1 \sin^2(\frac{ak}{2}) + k_2 \sin^2(ak)}{m}}} \\
&= V_g = \frac{\frac{2ak_1 \sin(\frac{ak}{2}) \cos(\frac{ak}{2})}{m} + \frac{4ak_2 \sin(ak) \cos(ak)}{m}}{\sqrt{\frac{4k_1 \sin^2(\frac{ak}{2})}{m} + \frac{4k_2 \sin^2(ak)}{m}}} \\
a &= \frac{2ak_1 \sin(\frac{ak}{2}) \cos(\frac{ak}{2})}{m} \\
b &= \frac{4ak_2 \sin(ak) \cos(ak)}{m} \\
\text{latex}(\text{trigsimp}(\text{var}[a])) &= \frac{ak_1 \sin(ak)}{m} \\
\text{latex}(\text{trigsimp}(\text{var}[b])) &= \frac{2ak_2 \sin(2ak)}{m}
\end{aligned}$$