אלקטרוניקה פיסיקלית – 044124

חורף תשפ״ג

תרגיל בית מס. 1

שם: אור ניצן **ת״ז:** 207687823

שם: תומר אשכנזי **ת״ז:** 314645029

שאלה 1:

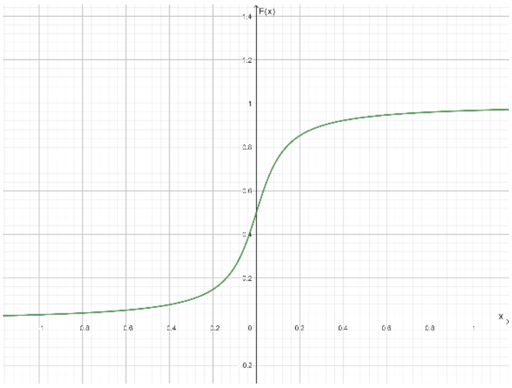
א.

מנרמול פונקציית צפיפות ההסתברות $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+b^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{a}{b^2}}{\left(\frac{x}{b}\right)^2+1}\,dx = \frac{a}{b}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b}\frac{1}{\left(\frac{x}{b}\right)^2+1}\,dx \underbrace{=}_{u=\frac{x}{b}} \frac{a}{b}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{a}{b}\arctan u|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{a}{b}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{a}{b}\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = a\pi}$$

ב.



נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת לפי ההגדרה
(משמאל גרף הפונקציה $F(x)$ עבור $b = 0.1$):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{a}{t^2+b^2}dt$$

$$= \frac{a}{b}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{b}\frac{1}{\left(\frac{t}{b}\right)^2+1}dt \underbrace{=}_{v=\frac{t}{b}} \frac{a}{a\pi}\int_{-\infty}^{\frac{x}{b}}\frac{1}{v^2+1}dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan v|_{-\infty}^{\frac{x}{b}} = \boxed{\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{\pi}{2}\right]}$$

ג.

המקסימום של $f(x)$ עבור $x = 0$. נמצא את ערכי x עבורם $f(x) = \frac{f(0)}{2}$:

$$\frac{a}{x^2+b^2} = \frac{1}{2}\frac{a}{0+b^2} \quad \Rightarrow \quad x^2+b^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = -b \end{cases}$$

רוחב חצי המקסימום של הפונקציה הוא $FWHM = x_1 - x_2 = 2b$.

ד.

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{a}{x^2+b^2}\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{b}\frac{1}{\left(\frac{x}{b}\right)^2+1}\frac{dx}{b} \underbrace{=}_{u=\frac{x}{b}} \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2u}{u^2+1}du$$

$$= \frac{a}{2}\underbrace{\ln(u^2+1)|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{לא מוגדר}} \quad \Rightarrow \quad \text{התוחלת אינה קיימת}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{a}{x^2+b^2}\,dx = ab\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^2\frac{1}{\left(\frac{x}{b}\right)^2+1}\frac{dx}{b} \underbrace{=}_{u=\frac{x}{b}} a^2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{u^2+1}du$$

$$= a^2\pi\left[\overbrace{u^2\arctan u|_{-\infty}^{\infty}}^{\text{לא מוגדר}} - \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}2u\arctan u\,du}^{\text{לא מוגדר}}\right] \quad \Rightarrow \quad \text{סטיית התקן אינה קיימת}$$

שאלה 2:

א.

$$\sum_k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_k \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

ב.

נגדיר $m = k + 1$, ולכן התוחלת היא:

$$\sum_k k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_m \frac{\lambda^{m+1}}{m!} = \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_m \frac{\lambda^m}{m!}}_{=e^{\lambda}} = \lambda$$

ג.

$$\langle death\ per\ corp\ per\ year\rangle = \frac{0\cdot 109 + 1\cdot 65 + 2\cdot 22 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0}{109 + 65 + 22 + 3 + 1 + 0} = \frac{122}{200} = 0.61$$

ד.

הממוצע שחושב בסעיף קודם הוא למעשה הפרמטר הפואסוני $\lambda = 0.61$. את מס' האירועים המנורמל שתועדו נקבל ע"י חלוקת מס' האירועים שתועדו של מס' מקרי מוות פר חייל פר שנה בסך כל האירועים. את מס' האירועים המנורמל התיאורטי נקבל ע"י הצבה בהתפלגות פואסון $\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$, כאשר $k = 1,2,3,4,5$:

מס' מקרי מוות פר חיל פר שנה	מס' האירועים המנורמל התיאורטי	מס' האירועים המנורמל שתועדו
0	0.543	0.545
1	0.331	0.325
2	0.101	0.11
3	0.02	0.015
4	0.0031	0.005
≥ 5	0.00038	0

שאלה 3:

א.

$$E[Y]=E\left[\frac{1}{n}\sum X_n\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum X_n\right]=\frac{1}{n}\sum E[X_n]=\frac{1}{n}\cdot nE[X]=\boxed{E[X]}$$

התוחלת של ממוצע המשתנים שווה לתוחלת של המשתנה המקורי.

$$var[Y]=var\left[\frac{1}{n}\sum X_n\right]=\frac{1}{n^2}var\left[\sum X_n\right]=\frac{1}{n^2}\sum var[X_n]=\frac{1}{n^2}\cdot n\ var[X]=\boxed{\frac{1}{n}var[X]}$$

השונות של ממוצע המשתנים קטנה פי מס' המדידות מהשונות של המשתנה המקורי.

ב. ההסתברות לזכות k פעמים מתוך N ניסויי ברנולי עם הסתברות להצלחה p שווה לסכום ההסתברויות של כל הסדרות שיש בהן k הצלחות ו-n-k כישלונות. הניסויים בלתי תלויים, ולכן ההסתברות של סדרה מסוימת הוא $p^k q^{n-k}$ $(q=1-p)$. מס' הדרכים לבחור את k הניסויים המוצלחים מתוך כלל N הניסויים שווה ל-$\binom{N}{k}$.

סך הכול, ההסתברות של כלל הסדרות בהן ישנן k זכיות $\binom{N}{k}p^k q^{n-k}$, וזוהי התפלגות בינומית.

ג. נגדיר X בתור אינדיקטור של המאורע "זכייה בתיק". האינדיקטור מקיים:

$$X=\begin{cases}1 & ;\text{זכייה בתיק}\\ 0 & ;\text{אחרת}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad E[X]=1\cdot P(\text{זכייה בתיק})+0\cdot P(\text{אחרת})=\boxed{p}$$

$$var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)=\boxed{pq}$$

לכן ממוצע התיקים שניתן לזכות בהם בהגרלה בודדת הוא p, והשונות היא pq.

ד. מקומבינטוריקה מתקיים:

$$k\binom{N}{k}=k\frac{N!}{k!\,(N-k)!}=N\frac{(N-1)!}{(k-1)!\big((N-1)-(k-1)\big)!}=N\binom{N-1}{k-1}$$

$$k(k-1)\binom{N}{k}=k(k-1)\frac{N!}{k!\,(N-k)!}=\frac{N(N-1)\cdot(N-2)!}{(k-2)!\big((N-2)-(k-2)\big)!}=N(N-1)\binom{N-2}{k-1}$$

סכום ההסתברויות של התפלגות בינומית הוא 1, לכן:

$$E[X]=\sum_k k\binom{N}{k}p^kq^{N-k}\overset{*}{=}\sum_k N\binom{N-1}{k-1}p^kq^{N-k}=Np\sum_k\binom{N-1}{k-1}p^{k-1}q^{N-k}=\boxed{Np}$$

$$\begin{aligned}E[X(X-1)]&=\sum_k k(k-1)\binom{N}{k}p^kq^{N-k}=\sum_k N(N-1)\binom{N-2}{k-2}p^kq^{N-k}\\&=N(N-1)p^2\sum_k\binom{N-2}{k-2}p^{k-2}q^{N-k}=N(N-1)p^2\end{aligned}$$

$$E[X^2]=E[X(X-1)]+E[X]=N(N-1)p^2+Np$$

$$var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=N(N-1)p^2+Np-N^2p^2=Np-Np^2=Np(1-p)=\boxed{Npq}$$

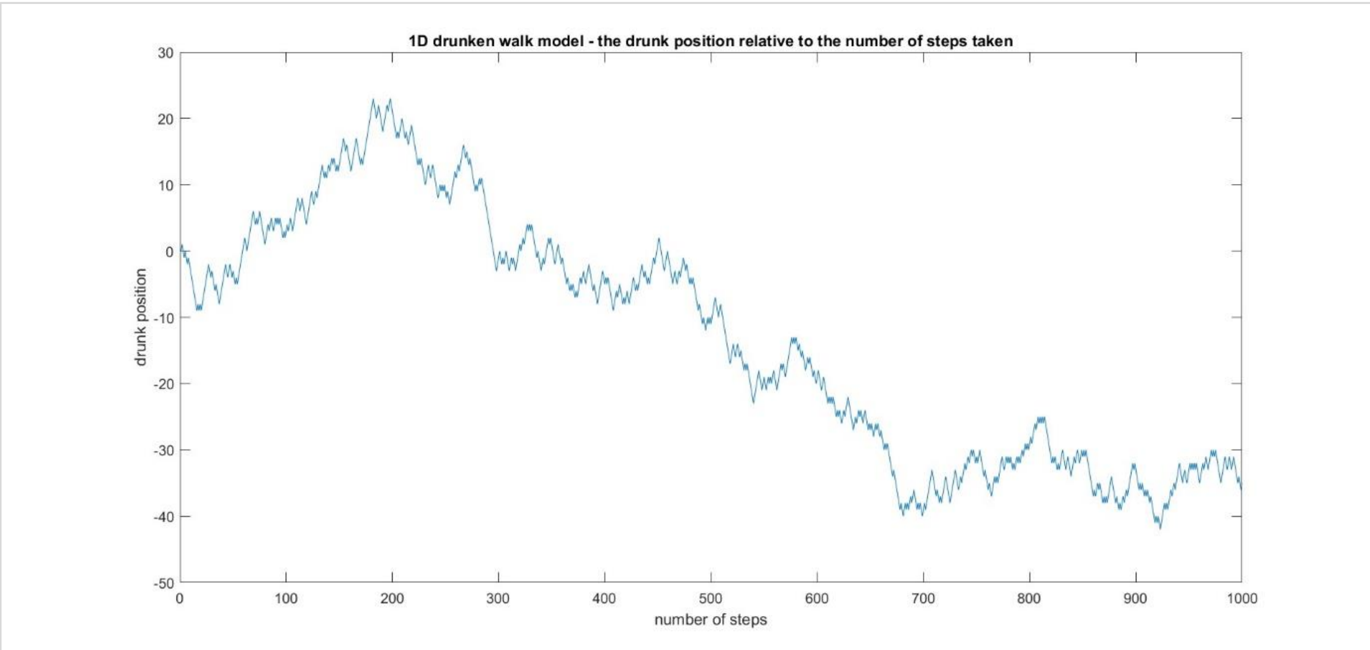
שאלה 4:

(*נציין כי כלל הפונקציות נכתבו כגלובליות לכן ההרצה תהא מה *command window* ולא יהיה ניתן לראות את שורה זו בקוד)

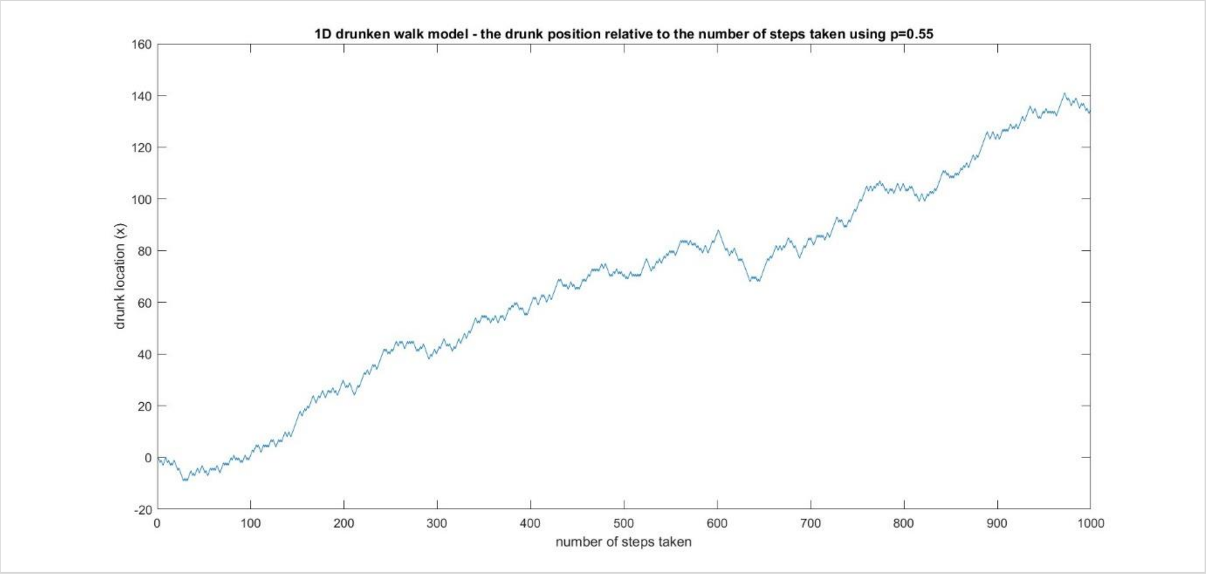
א. הפונקציה עבור המקרה החד ממדי:

```
% N stands for the total number of steps
% p is the probability to move right
% a is the size of each step
% The function plots the drunk location at a given step n<N
% Assuming he starts at x=0

function x = D1drunken_model_hw1(N, a, p)

    x=zeros(1,N);

    for  i= 2:1:N
        R=rand; %R~U(0,1)

        if (R < p)
            x(1,i)=x(1,i-1)+a;

        else
            x(1,i)=x(1,i-1)-a;
        end
    end

    plot(x)
end
```

ב.



ג.



כעת לשיכור ישנה העדפה לכיוון *+x* לכן הוא נוטה לשם, הערך הכי סביר שיגיע אליו הינו 100+ . (1000 פעמים תוחלת המרחק של צעד יחיד שהיא *+0.1*). ניתן לראות כי השיכור המדובר לא מגיע בדיוק לערך הכי סביר, עלמ להראות שזהו באמת הערך הכי סביר נרצה למצע עבור שיכורים רבים.

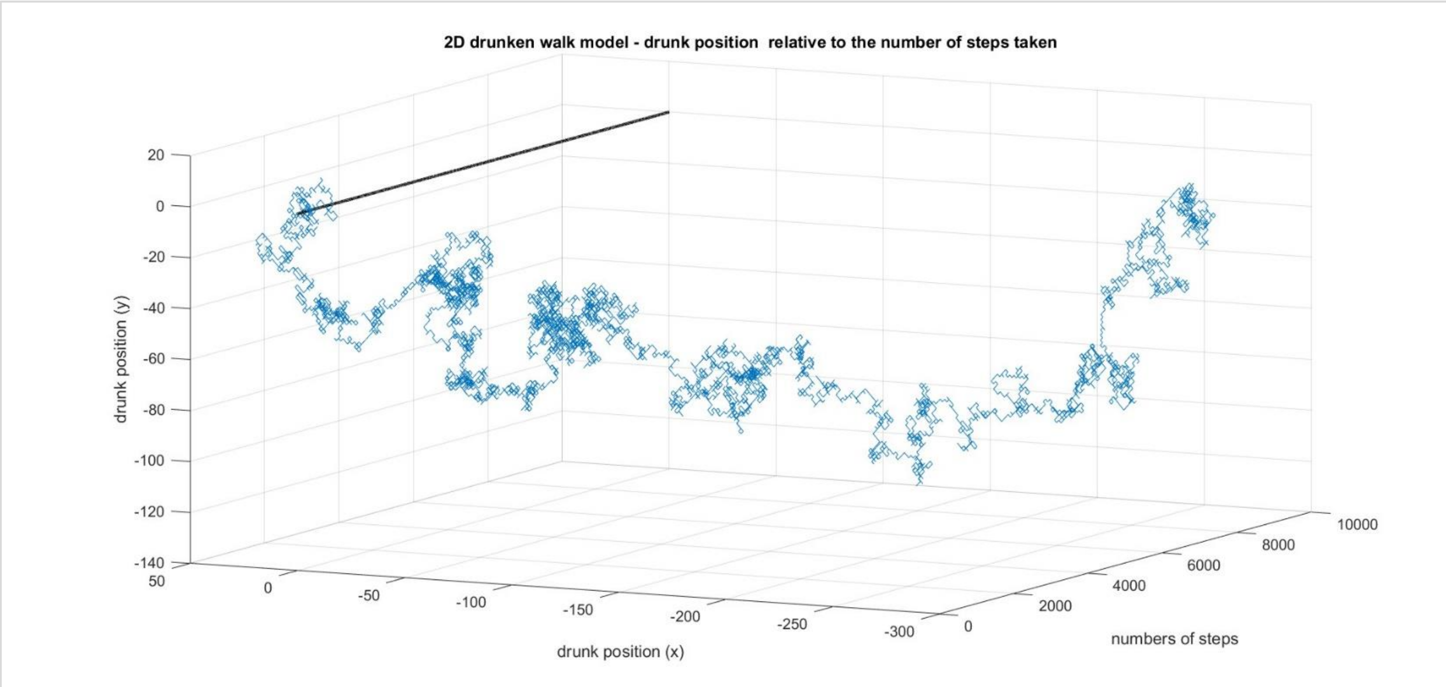
ד. *הפונקציה עבור המקרה הדו מימדי:*

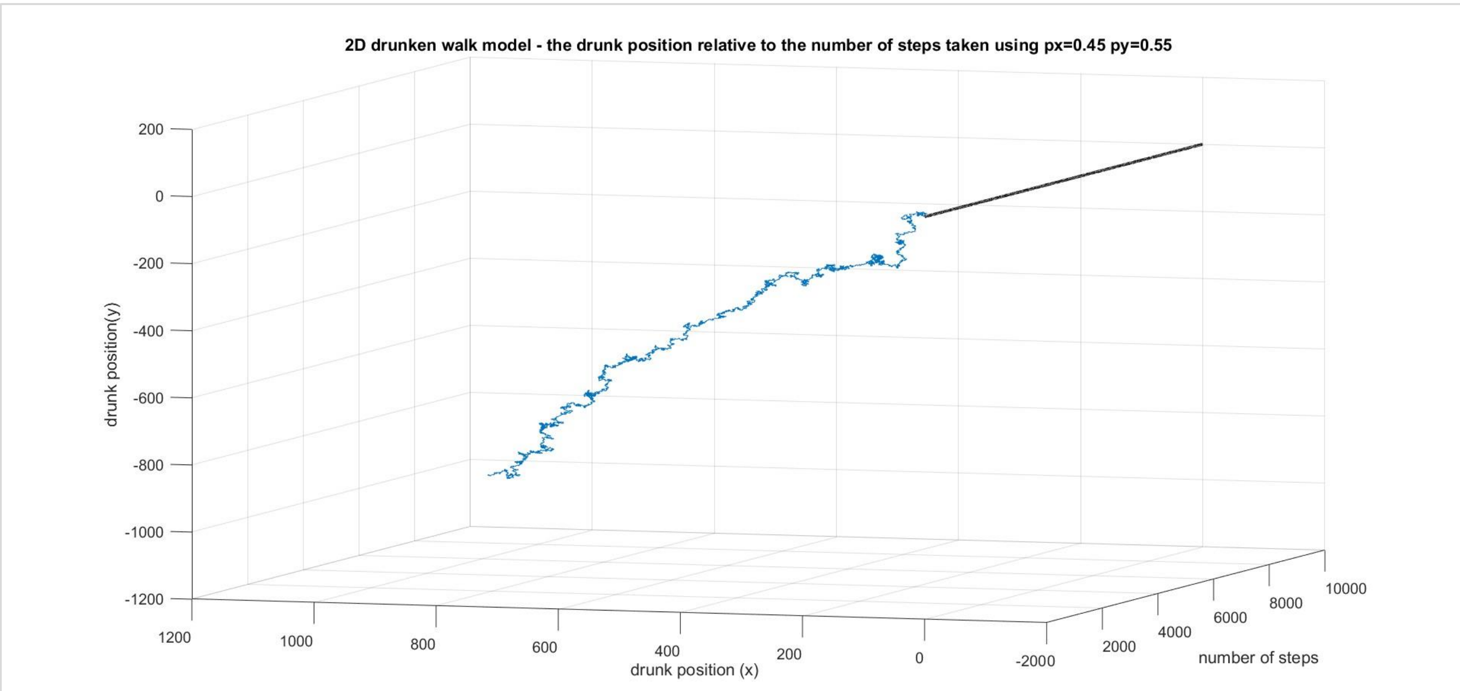
```
% N stands for the total number of steps
% px is the probability to move right
%py is the probability to move up
% a is the size of each step
% The function plots the drunk location at a given step n<N
% Assuming he starts at (x,y)=(0,0)

function x2 = b2Ddrunken_model(N, a, px,py)

    x2=zeros(1,N);
    y2 =zeros(1,N);

    for  i= 2:1:N
        Rx=rand;  %Rx/y~U(0,1)
        Ry=rand;

        if (Rx < px)
            x2(1,i)=x2(1,i-1)+a;

        else
            x2(1,i)=x2(1,i-1)-a;
        end

        if (Ry < py)
            y2(1,i)=y2(1,i-1)+a;

        else
            y2(1,i)=y2(1,i-1)-a;
        end
    end
```

```
step = linspace (0,N,N);

%added (0,0,N) plot for reference
zerox=zeros(1,N);
zeroy=zeros(1,N);

  p=plot3(step,x2,y2,step,zeroy,zerox,'black');
  p(2).LineWidth=2;

  grid on

end
```

*(*בגרפים התלת מימדיים הוסף העקום (0,0,number of steps) למטרת ייחוס)*

ה+ו.





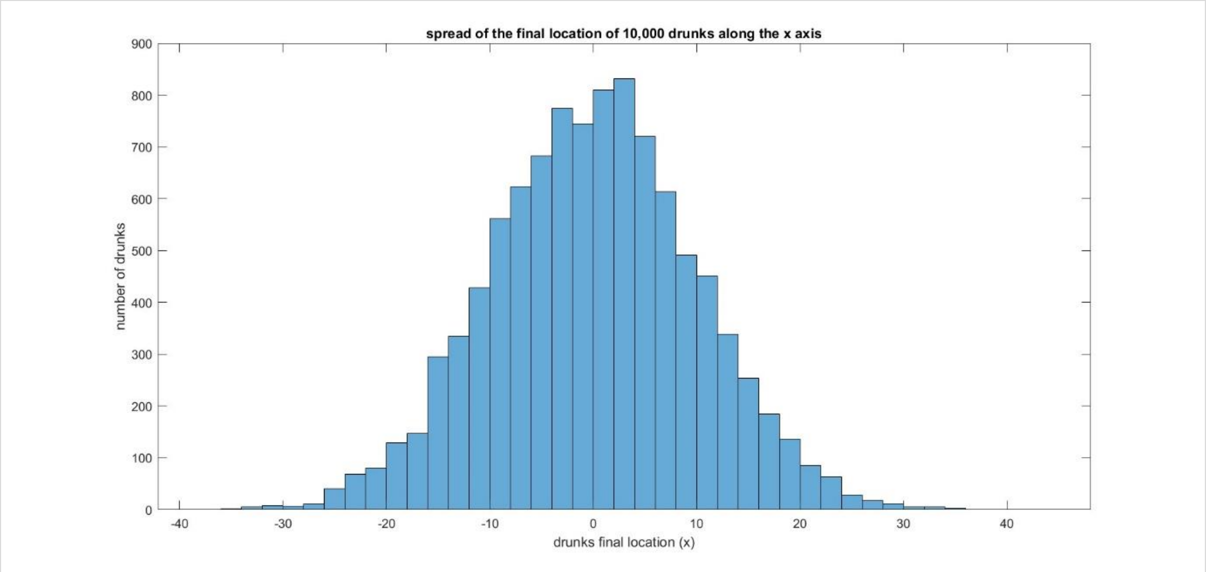
באופן זהה למקרה החד ממדי לשיכור יש העדפה לכיוון *(+x,-y)* הערך הכי סביר יתקבל מחישוב זהה ובמקרה הנ"ל יהא *(1000,-1000)* . שוב ניתן לראות את נטיית השיכור אבל הוא לא "נחת" על הנקודה הסבירה ביותר.

2. *הפונקציה עבור ההיסטוגרמה של מיקום השיכורים :*

```
% N stands for the total number of steps
% M stands for the number of drunks
% px is the probability to move right
%py is the probability to move up
% a is the size of each step
% The function plots a histogram of the drunk's final location
% assuming they starts at (x,y)=(0,0)


function x3 = histo_drunk(M ,N, a, px,py)

lasx = zeros(1,M);
las_odd = zeros(1,M); %added to try odd number of steps

for j= 1:1:M

    x3=zeros(1,N);
    y2 =zeros(1,N);

    for  i= 2:1:N
        Rx=rand; %Rx/y~U(0,1)
        Ry=rand;

        if (Rx < px)
            x3(1,i)=x3(1,i-1)+a;

        else
            x3(1,i)=x3(1,i-1)-a;
        end

       if (Ry < py)
           y2(1,i)=y2(1,i-1)+a;

        else
            y2(1,i)=y2(1,i-1)-a;
       end
    end

lasx(1,j) = x3(1,N);
las_odd(1,j) = x3(1,N-1); %takes the 99's step (odd)

end

x_g = linspace (-50,50,102);

%normal distribution times M drunks
y=  (M *(1/sqrt(2*pi*N))) * (exp(-1.* (  (x_g.^2)/(2*N) )) )  ;

close all

hold on
plot( x_g,y,LineWidth=1.5)
%histogram (lasx) the first histogram
```

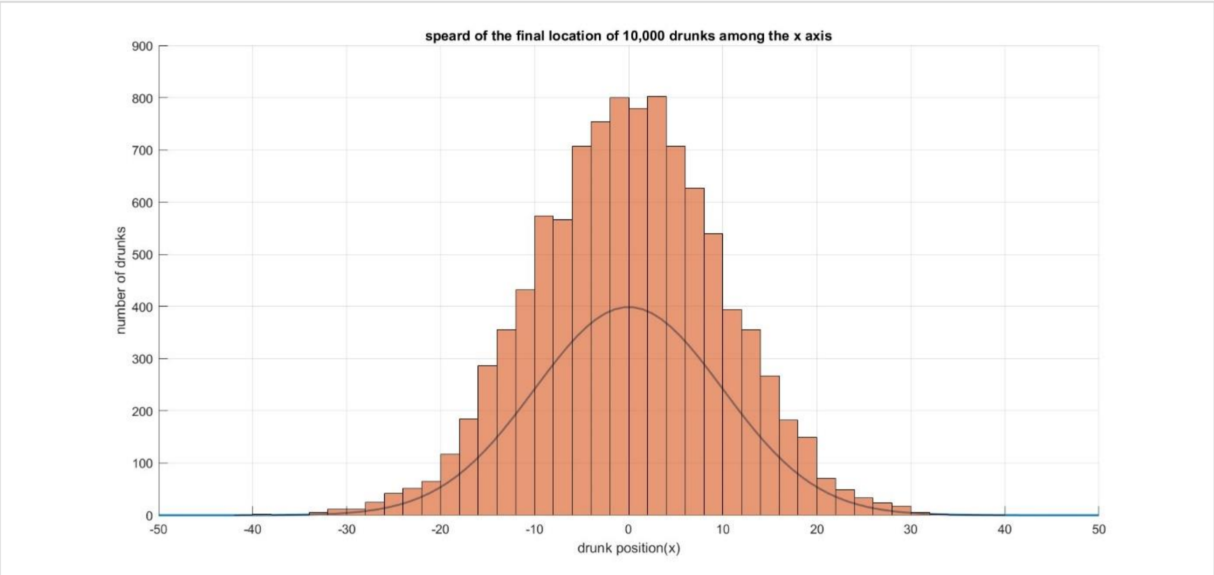
```
histogram (lasx+las_odd/2 )
grid on

end
```

ח.

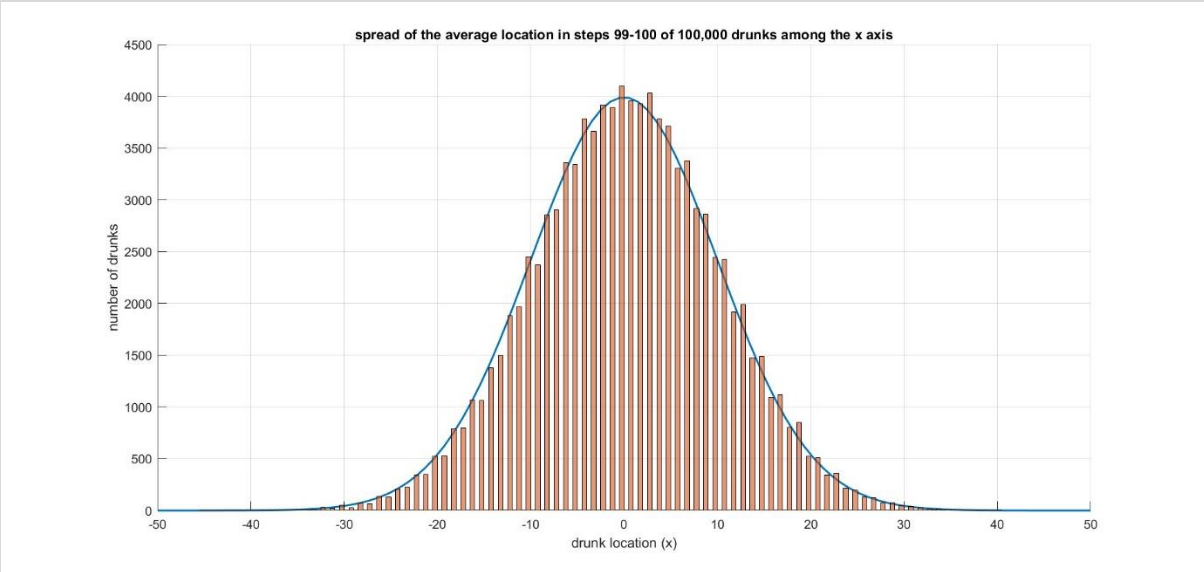


כעת ניתן לראות באופן יותר משכנע כי הערך הסביר ביותר אכן מתקיים (יש ריכוז שיכורים גבוה סביב ה0) ומתפלג באופן נורמלי.

ט.



ניתן לראות שהצפיפות אינה תואמת את ההיסטוגרמה, בגלל שבדקנו את הפיזור עבור מס צעדים זוגי יש העדפה לנק' סיום מסוימות. על מנת לבדוק את התאוריה ננסה למצע את מיקום השיכור בצעד ה99 (אי זוגי) ומיקומו בצעד ה100 ולחשב את ההיסטוגרמה מחדש.



כעת ניכרת ההתאמה לצפיפות כפי שהוצגה בתרגול.