אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר חורף 2022-2023

מועד ב

פתרון

הנחיות

- **משך הבחינה – 3 שעות.**
- **במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 6 שאלות רב ברירה**
  חלק 2 : 2 שאלות פתוחות
- **בדקו שברשותכם 9 עמודים .**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.**

בהצלחה!

חלק 1 (48 נקודות – ניקוד זהה לכל שאלה)

שאלה 1

נתון גז אלקטרונים ב-2D. נתון גם ריכוז אלקטרונים n

(1) חשבו את הביטוי לאנרגית פרמי של המערכת

א) $E_F = \sqrt{k_B T \ln \frac{\hbar^2 \pi n}{m}}$

ב) $E_F = \frac{\hbar^2 \pi n}{m}$

ג) $E_F = \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi n}{m}}$

ד) $E_F = k_B T \ln \frac{\hbar^2 \pi n}{m}$

ה) $E_F = k_B T \ln \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi n}{m}}$

שאלה 2

בגבול של טמפרטורה נמוכה, כך שהפוטנציאל הכימי מקיים : $\mu \gg k_B T$ ולכן התלות של הפוטנציאל הכימי בטמפרטורה בגבול הזה היא :

א) קבועה $\mu(T) \approx E_F$

ב) עולה כמו $\mu(T) \approx e^{-\frac{E_F}{k_B T}}$

ג) יורדת כמו $\mu(T) \approx \frac{E_F}{k_B T}$

ד) יורדת כמו $\mu(T) \approx e^{\frac{E_F}{k_B T}}$

ה) עולה כמו $\mu(T) \approx -\frac{E_F}{k_B T}$

שאלה 3

הסימן של הפוטנציאל הכימי כפונקציה של טמפרטורה

א) תמיד שלילי

ב) תמיד חיובי

ג) שלילי ב $T \to 0$ וחיובי ב T גבוה

ד) חיובי ב $T \to 0$ שלילי ב T גבוה

ה) תמיד אפס

Solution for Q1&Q2&Q3

For a given electron density n we can find the relation between the chemical potential and temperature. Using the two-dimensional density of states $g_{2D}(E) = \frac{m}{\hbar^2 \pi}$, we obtain :

$$n = \int_0^\infty g(E) n_F(E) dE = \int_0^\infty g(E) n_F(E) dE = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} dE$$

Using the integral

$$\int \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} dE = \int \frac{e^{-\beta(E-\mu)}}{e^{-\beta(E-\mu)} + 1} dE = -\frac{1}{\beta} \ln\left(e^{-\beta(E-\mu)} + 1\right)$$

We obtain

$$n = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \frac{1}{\beta} \ln\left(e^{\beta\mu} + 1\right) = \frac{m}{\hbar^2 \pi} k_B T \ln\left(e^{\mu/k_B T} + 1\right)$$

$$\mu(T) = k_B T \ln\left(e^{\frac{\hbar^2 \pi n}{m k_B T}} - 1\right)$$

We can identify $E_F = \frac{\hbar^2 \pi n}{m}$ by a direct evaluation of the first integral on density of state from 0 to E_F at $T = 0$.

Therefore, we obtain

$$\mu(T) = k_B T \ln\left(e^{\frac{T_F}{T}} - 1\right), where\ T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

For metals $T_F \gg T$ therefore $\mu(T) \approx k_B T_F \approx E_F$, meaning that for temperatures much smaller than the Fermi temperature the chemical potential is constant! If, however, the temperature is above the Fermi temperature (the limit of high T) the chemical potential drops below zero!

שאלה 4

נתון צבר מערכות המצומדות לאמבט חום בטמפרטורה T והנמצאות בפוטנציאל חד ממדי הבא

$$V(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$$

חשבו ארגיה ממוצעת של המערכת (זכרו שקיימת גם אנרגיה קנטית)

א. $(\alpha_1/2 + \alpha_2 + 1/2)k_b T$
ב. $(\alpha_1 + \alpha_2 + 1/2)k_b T$
ג. $3/2 k_b T$
ד. $5/4 k_b T$
ה. $3k_b T$

רמז:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^{2k}} dx = \frac{1}{k}\Gamma\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{2k}} dx = 2\Gamma\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

$\Gamma(3/2)$	$\Gamma(5/4)$	$\Gamma(7/6)$	$\Gamma(9/8)$
$\sqrt{\pi}/2$	0.906	0.927	0.942

פתרון:

ראית נכתוב את הביטוי המלא לאנרגיה

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$$

מדובר בצבר קנוני לכן מוכל להיעזר במשפט החלוקה השווה עבור דרגות חופש הריבועיות

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} + \alpha_1 x^2 \right\rangle = k_b T$$

עבור דרגות חופש מהצורה x^4 נאלץ לחשב את האנרגיה הממוצעת באופן מלא

$$\langle \alpha_2 x^4 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2 x^4 e^{-\alpha_2 \beta x^4} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_2 \beta x^4} dx} = \frac{k_b T}{4}$$

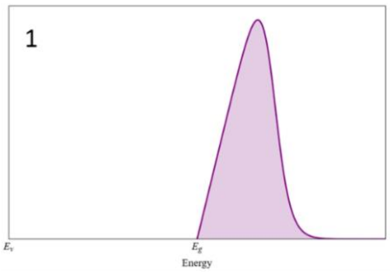
לבסוף נקבל

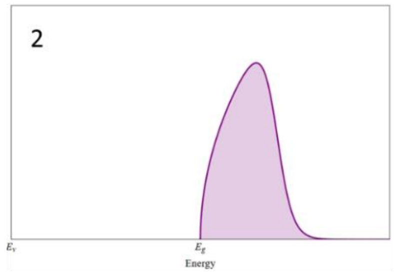
$$\langle E \rangle = k_b T + \frac{k_b T}{4} = \frac{5}{4} k_b T$$

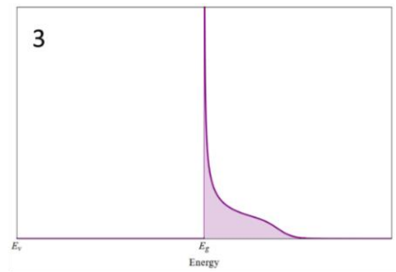
שאלה 5

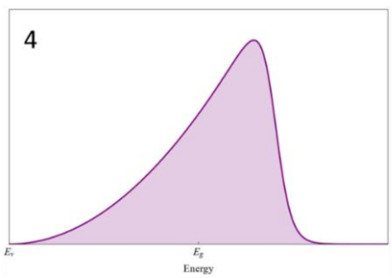
נתון מוצק תלת ממדי בעל פער אנרגיה E_g המכיל אלקטרונים. לארוך ציר z קיים פוטנציאל של הבור הקוונטי האינסופי, ניתן להניח שלאורך שאר הממדים האלקטרונים מתנהגים כחופשיים. מתוך הסרטוטים שלמטה בחרו את האופציות האפשריות לאכלוס הממוצע של פס ההולכה במוצק.

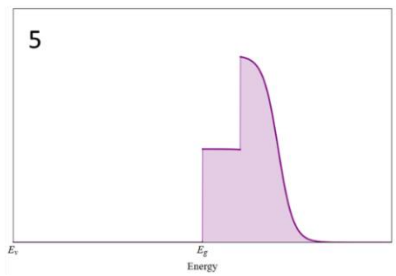
תזכורת האכלוס מוגדר כמכפלה של צפיפות המצבים בפילוג התאים.











א. 1
ב. 2
ג. 3
ד. 4
ה. 5

פתרון:

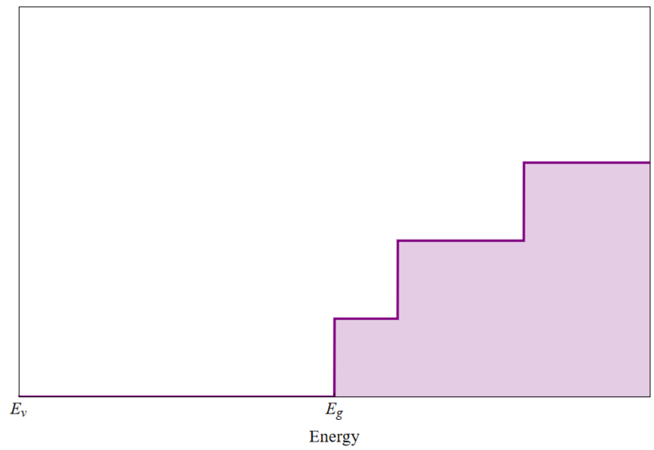
מתיאור השאלה יחס הנפיצה נתון על ידי

$$E\left(k_x,k_y,k_z\right)=\frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2\right)+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$$

עבור n נתון כלשהו יחס הנפיצה נראה **כאלקטרון חופשי בדו-ממד** לכן נצפה לצפיפות מצבים קבועה. לכן צפיפות המצבים הכוללת נתונה ע״י

$$g(E)=\sum_{i=1}^{\infty}g_0\Theta(E-E_n)$$

כאשר $E_n=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$ ו-Θ הינה פונקציית מדרגה. למטה מופיעה צפיפות המצבים כפונקציה של האנרגיה.



בכדי לקבל אכלוס הממוצע נכפיל את צפיפות המצבים בפילוג פרמי דירק. כתלות של מיקום רמת פרמי ייתכן ונקבל אכלוס לא זניח של הרמה הראשונה בלבד או של שתי הרמות הראשונות.

שאלה 6

נתון מוצק תלת ממדי בעל צפיפות האלקטרונים n ויחס הנפיצה מהצורה הבא

$$E(k_x,k_y,k_z)=\frac{\hbar^2k_x^2}{2m_{xx}}+\frac{\hbar^2k_y^2}{2m_{yy}}+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m_{zz}}+\frac{\hbar^2k_xk_y}{m_{xy}}+\frac{\hbar^2k_xk_z}{m_{xz}}$$

$$m_{xx}^{-1}=m_{yy}^{-1}=m_{zz}^{-1}=m_{xz}^{-1}=m_0^{-1}$$

$$m_{xy}^{-1}=2m_0^{-1}$$

נתון שזמן הממוצע בין הפיזורים הינו τ. נתון שדה חשמלי מהצורה

$$\vec{E}=E_0(\hat{x}+2\hat{y}-3\hat{z})$$

קיבלו ביטוי עבור היחס הבא J_y/J_z

א. -2
ב. $4/3$
ג. 1
ד. 2
ה. $-5/2$

פתרון:

ניזכר שמוליכות קשורה למסה אפקטיבית דרך ביטוי של מודל דרודה

$$\boldsymbol{\sigma=e^2n\tau M^{-1}}$$

טנזור המסה האפקטיבית נתון על ידי

$$M_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} = \begin{pmatrix} m_{xx}^{-1} & m_{xy}^{-1} & m_{xz}^{-1} \\ m_{xy}^{-1} & m_{yy}^{-1} & 0 \\ m_{xz}^{-1} & 0 & m_{zz}^{-1} \end{pmatrix}$$

הזרם נתון על ידי

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma E} = \boldsymbol{e^2 n\tau} E_0 \begin{pmatrix} m_{xx}^{-1} & m_{xy}^{-1} & m_{xz}^{-1} \\ m_{xy}^{-1} & m_{yy}^{-1} & 0 \\ m_{xz}^{-1} & 0 & m_{zz}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$J_y/J_z = \frac{m_{xy}^{-1} + 2m_{yy}^{-1}}{m_{xz}^{-1} - 3m_{zz}^{-1}} = \frac{2m_0^{-1} + 2m_0^{-1}}{m_0^{-1} - 3m_0^{-1}} = -2$$

<u>חלק 2</u> (52 נקודות)

שאלה 7 (22 נקודות)

נתון 2 חומרים תלת-ממדיים. נתון שבכל אחד מהחומרים יש פס אנרגיה בודד, 2 פסי האנרגיה הם :

$$\varepsilon_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$\varepsilon_2(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2\overline{m}}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

כאשר בחומר 1 יש אלקטרונים ובחומר 2 יש חלקיקים עם אותו ספין ומטען חשמלי של אלקטרונים, רק עם מסה שונה $\overline{m}$.

א. חשבו את צפיפות המצבים ליחידת נפח לכל אחד מהחומרים : $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon)$.
חשבו את אנרגית פרמי של כל אחד מהחומרים כאשר נתון שצפיפות החלקיקים בחומר 1 וחומר 2 היא n_1 ו- n_2 בהתאמה. (10 נקודות)

ב. בטאו את היחס $\frac{\overline{m}}{m_e}$ כתלות בצפיפויות החלקיקים כדי שמהירות פרמי תהיה שווה בכל אחד משני החומרים.
(6 נקודות)

ג. (סעיף זה לא קשור לשני הסעיפים הקודמים)
נתון פס אנרגיה של אלקטרונים בחומר דו-ממדי :

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x}k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y}k_y^2$$

מפעילים על המערכת שדה חשמלי סטטי בכיוון כללי במישור XY : $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$.
מה הוא היחס $\frac{m_x}{m_y}$ שהמסות האפקטיביות צריכות לקיים כדי שהזרם החשמלי יהיה ניצב לשדה החשמלי ?
(6 נקודות)
תזכרו שלפי מודל דרודה, המוליכות החשמלית היא $\sigma = ne^2\tau m^{-1}$, כאשר n היא צפיפות האלקטרונים, τ הוא הזמן האופייני לפיזור של האלקטרון ו- m^{-1} הוא טנזור המסה האפקטיבית ההופכי.

פתרון :

א. ראינו בכיתה שעבור אלקטרון בחומר תלת-ממדי עם יחס דיספרסיה פרבולי, צפיפות המצבים היא :

$$g_1(\varepsilon) = \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{1/2}$$

החישוב עבור החלקיקים בחומר השני שזהים לאלקטרונים הוא זהה, ההבדל היחיד הוא במסה :

$$g_2(\varepsilon) = \frac{(2\overline{m})^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{1/2}$$

אנרגית פרמי מחושבת ע״י האינטגרל :

$$n = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

מה שנותן את אנרגית פרמי בשני החומרים :

$$\varepsilon_F^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 n_1\right)^{2/3}$$

$$\varepsilon_F^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2\bar{m}}\left(3\pi^2 n_2\right)^{2/3}$$

ב. מהירות פרמי נתונה ע״י $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$. כאשר אפשר לחלץ את תנע פרמי ע״י הסתכלות על אנרגית פרמי $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2$. מכאן נסיק שתנע פרמי בשני החומרים הוא : $k_F^{(1)} = \left(3\pi^2 n_1\right)^{1/3}$, $k_F^{(2)} = \left(3\pi^2 n_2\right)^{1/3}$.
שוויון בין מהירויות פרמי :

$$v_F^{(1)} = v_F^{(2)}$$

$$\frac{\hbar k_F^{(1)}}{m_e} = \frac{\hbar k_F^{(2)}}{\bar{m}}$$

$$\frac{\hbar\left(3\pi^2 n_1\right)^{1/3}}{m_e} = \frac{\hbar\left(3\pi^2 n_2\right)^{1/3}}{\bar{m}}$$

$$\frac{\bar{m}}{m_e} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3}$$

ג. עבור יחס דיספרסיה פרבולי $\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y} k_y^2$, נחשב את טנזור המסה האפקטיבית ההופכי :
לפי הנוסחה $m_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 \varepsilon(\vec{k})}{\partial k_i \partial k_j}$ מתקבל : $m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} \end{pmatrix}$. עכשיו נחשב את רכיבי צפיפות הזרם לפי חוק אוהם המיקרוסקופי ונשתמש במוליכות לפי מודל דרודה :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = n e^2 \tau m^{-1} \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ne^2\tau}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{ne^2\tau}{m_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ne^2\tau}{m_x} E_x \\ \frac{ne^2\tau}{m_y} E_y \end{pmatrix}$$

כדי שהזרם והשדה יהיו ניצבים, נדרוש שהמכפלה הסקלרית בין צפיפות הזרם לשדה תתאפס :

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = J_x E_x + J_y E_y = 0$$

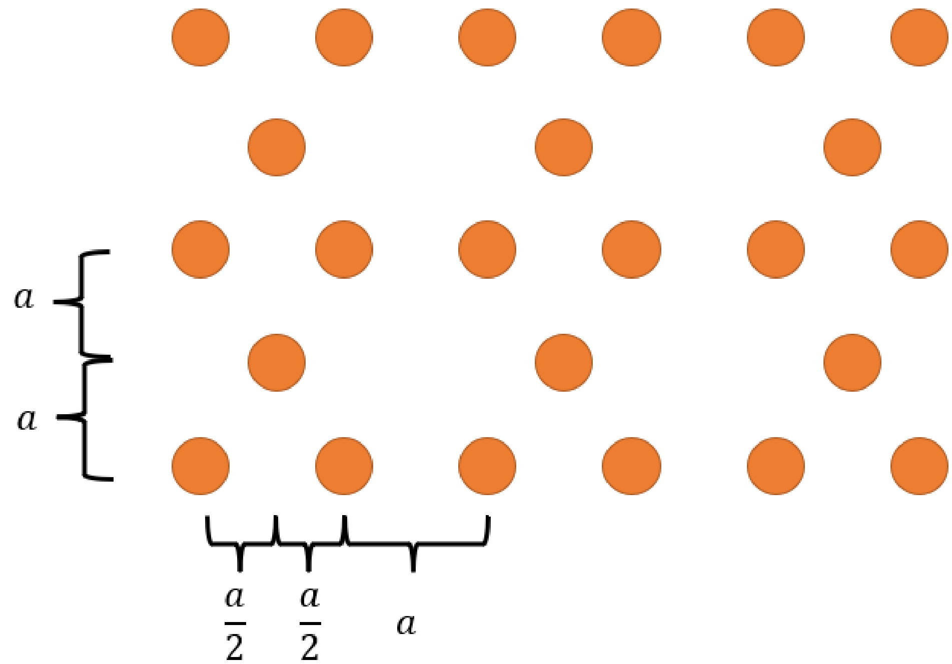
$$\frac{J_y}{J_x} = -\frac{E_x}{E_y}$$

$$\frac{\frac{ne^2\tau}{m_y}E_y}{\frac{ne^2\tau}{m_x}E_x} = -\frac{E_x}{E_y}$$

$$\frac{m_x}{m_y} = -(\frac{E_x}{E_y})^2$$

שאלה 8 (30 נקודות)

נתון הגביש הבא



א. רשמו את הוקטורים הראשוניים ווקטורי הבסיס. (4 נקודות)

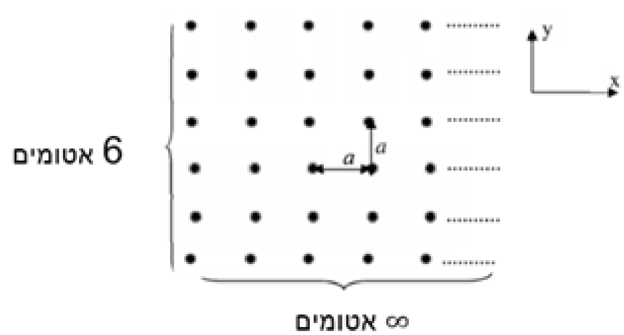
ב. ציירו את תא Wigner-Seitz. (4 נקודות)

ג. חשבו את וקטורי השריג ההופכי וציירו את איזור ברילואן הראשון. (5 נקודות)

ד. כעת נתון **שריג ריבועי** עם וקטורים ראשוניים $\overrightarrow{a_1} = a\hat{x}, \overrightarrow{a_2} = a\hat{y}$, עם הקשרים הבאים:

$$\langle\psi(r)|H|\psi(r-a\hat{x})\rangle = -\gamma_x$$
$$\langle\psi(r)|H|\psi(r-a\hat{y})\rangle = -\gamma_y$$

לוקחים שריג עם 6 אטומים בציר y והרבה אטומים בציר x :



מה הם ערכי k_y האפשריים? (5 נקודות)

ה. מהו יחס הדיספרסיה כפונקציה של k_x? נא לרשום עבור כל ערך k_y בנפרד ולצייר אותם. (6 נקודות)

ו. אם כל אטום תורם אלקטרון אחד, ויש סה"כ N אטומים. כמו כן נתון כי $\gamma_x \gg \gamma_y$. כמה פסי אנרגיה ריקים מאלקטרונים יש לפי מודל הצימוד החזק בטמפרטורה $T \to 0$? (6 נקודות)

פתרון:

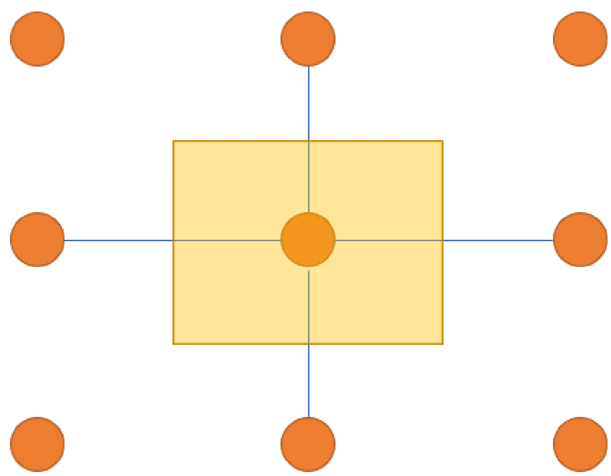
א. הוקטורים הראשוניים הם:

$$\overrightarrow{a_1} = 2a\hat{x}$$
$$\overrightarrow{a_2} = 2a\hat{y}$$

כאשר וקטורי הבסיס יהיו:

$$\overrightarrow{d_1} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{d_2} = a\hat{x}$$
$$\overrightarrow{d_3} = \frac{a}{2}\hat{x} + a\hat{y}$$

ב. השריג המתקבל הינו שריג קובי ולכן גם תא Wigner-Seitz יהיה מלבני:



ג. מכיוון שהשריג המוגדר ע"י הוקטורים הראשוניים שלנו הוא שריג קובי,

$$\vec{b}_1 = \frac{\pi}{a}\hat{x}$$
$$\hat{b}_2 = \frac{\pi}{a}\hat{y}$$

לכן איזור ברילואן יהיה ריבוע בדומה לציור מסעיף ב, כאשר אורך כל צלע זה $\frac{\pi}{a}$.

ד. ראינו שבתוך גביש יש תנאי שפה מחזוריים של פונקציית הגל בכל אחד מהצירים. מתנאי השפה המחזוריים בציר y מתקבל:

$$e^{-ik_y y} = e^{-ik_y(y+6a)} \qquad \Rightarrow \quad k_y \cdot 6a = 2\pi n$$
$$k_y = \frac{\pi n}{3a} \qquad \Rightarrow \quad n = (1,2,3,4,5,6)$$

צריך לשים לב לא לחרוג מאזור ברילוואן הראשון. אזור ברילוואן בציר y הוא באורך $\frac{2\pi}{a}$, לכן הוא מכיל 6 מצבי תנע עם מרחק $\frac{\pi}{3a}$ בין כל מצב.

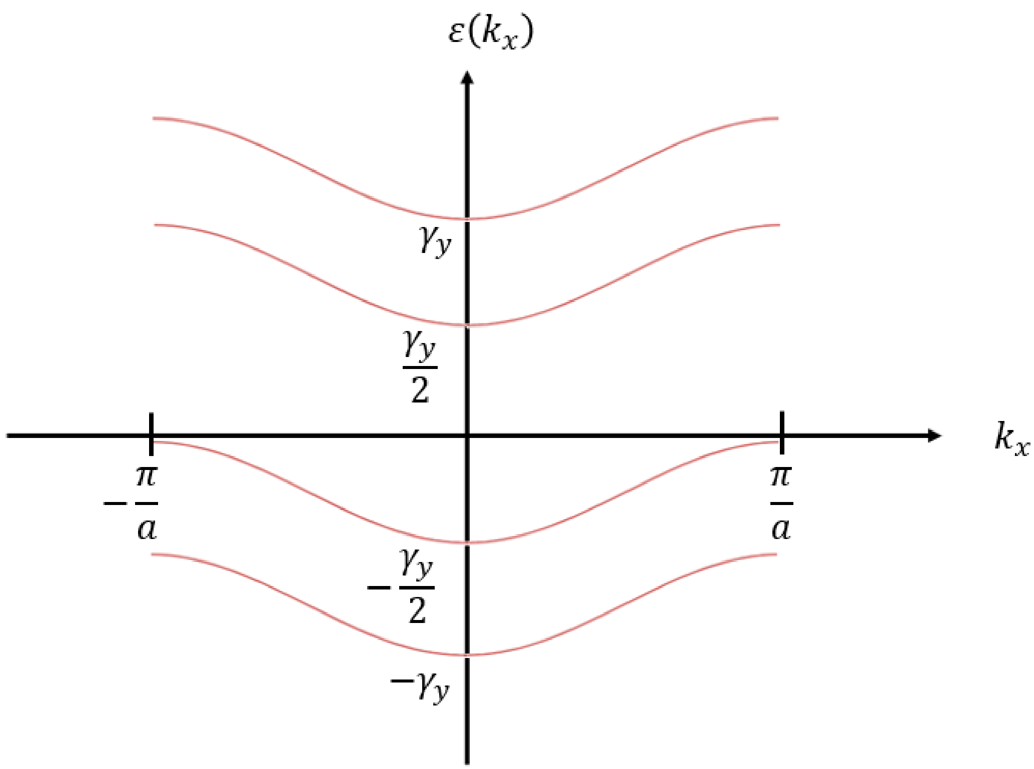
ה. כפי שראינו בתרגול, יחס הדיספרסיה של שריג ריבועי נתון ע"י:

$$E = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) - \gamma_y \cos(k_y a)$$

לכן אם נציב את k_y נקבל:

$$E_1 = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) - \frac{\gamma_y}{2}$$
$$E_2 = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) + \frac{\gamma_y}{2}$$
$$E_3 = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) + \gamma_y$$
$$E_4 = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) + \frac{\gamma_y}{2}$$
$$E_5 = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) - \frac{\gamma_y}{2}$$
$$E_6 = E_0 - \gamma_x \cos(k_x a) - \gamma_y$$

שימו לב שיש פסים שיש ביניהם חפיפה מלאה!



ו. מספר המצבים בכל פס מהפסים למעלה הוא $2\cdot\frac{N}{6}=\frac{N}{3}$, כאשר $\frac{N}{6}$ הוא מספר מצבי התנע על ציר k_x (שהוא שווה למספר האטומים על ציר x, זאת התוצאה שמקבלים כאשר מחלקים את אורך אזור ברילוואן בציר x במרחק בין 2 מצבי תנע $\frac{2\pi/a}{2\pi/L_x}=\frac{L_x}{a}=\frac{N}{6}$) ו-2 נובע מהספין.

אם יש N אלקטרונים בטמפרטורה אפס, זאת אומרת שבסה״כ מאכלסים את 3 פסי האנרגיה הנמוכים ביותר, זאת אומרת הפס שנתחך ב $-\gamma_y$ ושני הפסים החופפים שנחתכים ב $\frac{-\gamma_y}{2}$, ואז הפסים הריקים הם 2 הפסים החופפים שנחתכים ב $\frac{\gamma_y}{2}$ והפס העליון שנחתך ב γ_y.

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\ J\ K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^{8} m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$
$\sin(a) = 1/(2i)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ תוחלתμ סטיית תקןσ

Gaussian Integral $\alpha>0$
$\int_{a}^{b}e^{-\alpha(x+b)^2}dx=\sqrt{\pi/\alpha}$

Gamma Function
$\Gamma(n)\equiv\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx=n-1!$ $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$

3	$5/2$	2	$3/2$	1	$1/2$	$\boldsymbol{n}$
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\boldsymbol{\Gamma(n)}$

More Gaussian Integrals $\alpha>0, n\geq 0$
$I(n)\equiv\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$ $\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{-\alpha x^2}dx=\begin{cases}2I(n) & n\in Even\\ 0 & n\in Odd\end{cases}$

5	4	3	2	1	0	$\boldsymbol{n}$
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\boldsymbol{I(n)}$