

אלקטרוניקה פיסיקאלית 044124

סמסטר אביב 2021

מועד ב

הנחיות

- **משך הבחינה – שלוש שעות**
- **במבחן ישנן 3 שאלות**
- **בדקו שברשותכם 6 עמודים**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 5 דפי נוסחאות דו-צדדיים**
- **הציון המקסימאלי במבחן הינו 100**
- **אם לא צוין אחרת סעיפים בשאלה הם בעלי משקל זה**

בהצלחה!

שאלה 1 (40 נקודות):

נתון סריג ריבועי פשוט המתאר חומר דו-ממדי בעל מרחק a בין אטומים.

א. מצאו עבורו וקטורים פרימיטיביים בסריג הישיר ובסריג ההופכי. ציירו את השריג ההופכי המתאים ומצאו וציירו על גביו את אזור ברילואן הראשון.

ב. השתמשו במודל הקשירה ההדוקה וקבלו ביטוי עבור יחס הנפיצה של אלקטרונים בשריג (עבור הפס הראשון בלבד).

נתון כי:

$$\langle \varphi(\vec{x}) | \hat{H} | \varphi(\vec{x}) \rangle \triangleq -\alpha$$
$$\langle \varphi(\vec{x}) | \hat{H} | \varphi(\vec{x} - \vec{a}_{1,2}) \rangle \triangleq -\gamma$$

מצאו את יחס הנפיצה $E(\vec{k})$:

לאורך וקטור \vec{k} המחבר בין מרכז אזור ברילואן לנק' $(k_x, k_y) = (\pi/a, 0)$
לאורך וקטור \vec{k} המחבר את מרכז אזור ברילואן לנק' $(k_x, k_y) = (\pi/a, \pi/a)$
לאורך וקטור \vec{k} המחבר בין הנק' $(k_x, k_y) = (\pi/a, 0)$ לנק' $(k_x, k_y) = (\pi/a, \pi/a)$

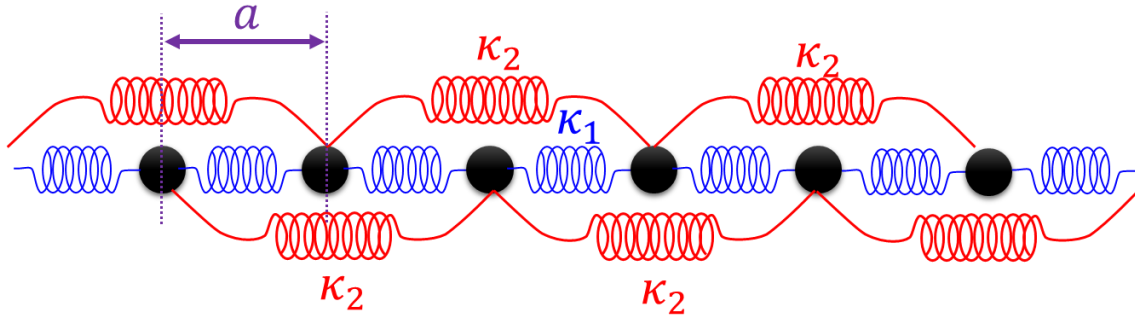
ג. מצאו כיצד נראים משטחים שווי אנרגיה של הפס שמצאתם סביב מרכז אזור ברילואן וסביב הנק' $(k_x, k_y) = (\pi/a, \pi/a)$. ציירו איכותית את העקומים המתקבלים בתוך אזור ברילואן יחד עם העקום שמקיים $E = -\alpha$.
רמז: פתחו לטור טיילור בסביבה הקרובה לנק' הללו.

ד. בהינתן אלקטרון ערכיות יחיד לכל אתר שריג בחומר קבעו באיזה סוג של חומר מדובר – מוליך או מבודד? נמקו.

ה. חשבו את טנזור המסה האפקטיבית (M_{ij}) בנק' $(k_x, k_y) = (0,0)$, $(k_x, k_y) = (\pi/a, 0)$, ו- $(k_x, k_y) = (\pi/a, \pi/a)$. לצורך כך השתמשו בתוצאה שקיבלתם ממודל הקשירה ההדוקה (גם כאן, הניחו שקיים רק הפס הראשון). פרטו לאיזה כיוון זו החלקיק כתוצאה מהפעלת כוח? מתי ניתן להצדיק את קירוב המסה האפקטיבית ולהשתמש בה לצורך חישוב גדלים פיזיקליים?

שאלה 2 (40 נקודות)

נתונה שרשרת חד-ממדית של אטומים המרוחקים זה מזה במרחק a . תנועת האטום בשרשרת מתוארת באמצעות מתנד הרמוני כך שאטום נתון מקושר לשני השכנים הקרובים הנמצאים במרחק a ממנו באמצעות קפיץ עם קבוע קפיץ κ_1 ולשני השכנים הרחוקים יותר הנמצאים במרחק $2a$ באמצעות קבוע קפיץ κ_2 .



- כמה אופנים אקוסטיים וכמה אופנים אופטיים ישנם במודל?
- כתבו ביטוי לאנרגיה פוטנציאלית האגורה במערכת כפונקציה של סטייה משיווי משקל.
- כתבו משוואת הכוחות הפועלים על כל אטום.
- הציבו פתרון מהצורה $Ae^{i\omega(k)t - ikna}$ למשוואה שקיבלתם בסעיף הקודם וקבלו ביטוי ליחס הנפיצה. ציירו אותו איכותית.
- חשבו את מהירות הקול והסבירו את התוצאה שהתקבלה.

קעת נתון ש- $\kappa_2 = 0$

- כתבו את הביטוי למהירות החבורה ומצאו את הערך המקסימאלי של תדירות התנודה ω_{max} .
- רשמו את הביטוי לצפיפות המצבים באמצעות מהירות החבורה.
- איזה ערך מקבל הביטוי כאשר $\omega \rightarrow \omega_{max}$? הסבירו.
- קרבו את צפיפות המצבים עבור $\omega \ll \omega_{max}$. איזו תלות פונקציונאלית קיבלתם? הסבירו!
- כתבו ביטוי עבור צפיפות האנרגיה הממוצעת. אין צורך בחישוב. למה שווה הביטוי בטמפרטורות גבוהות?

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה מערכת של שתי רמות אנרגיה ε_1 ו- ε_2 המוצמדת למאגר חום בטמפרטורה T.

- א. רשמו ביטוי לפונקציית החלוקה של המערכת.
- ב. רשמו ביטוי לאנרגיה ממוצעת של המערכת.
- ג. רשמו ביטוי לקיבול חום של המערכת.
- ד. בטמפרטורות נמוכות מאוד, הסבירו פיזיקאלית את הגבול של קיבול חום.
- ה. בטמפרטורות גבוהות מאוד, הסבירו פיזיקאלית את הגביל של קיבול חום.
- ו. ציירו סכמתית גרף של קיבול חום כפונ' של טמפרטורה. העריכו עבור איזה טמפרטורה קיבול החום מקבל את ערכו המקסימאלי. הסבירו פיזיקאלית את תשובתכם.

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1 amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^8 m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = (1 - \cos(2a))/2$
$\cos^2 a = (1 + \cos(2a))/2$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = (e^{ia} + e^{-ia})/2$
$\sin(a) = (e^{ia} - e^{-ia})/(2i)$
Hyperbolic Identities
$\cosh(a) = (e^a + e^{-a})/2$
$\sinh(a) = (e^a - e^{-a})/2$
$\operatorname{sech}(a) = \cosh^{-1}(a)$
$\operatorname{csch}(a) = \sinh^{-1}(a)$
$\tanh(a) = \sinh(a) / \cosh(a)$
$\coth(a) = \cosh(a) / \sinh(a)$
$\sinh'(a) = \cosh(a)$
$\tanh'(a) = \operatorname{sech}^2(a)$
$\coth'(a) = -\operatorname{csch}^2(a)$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ תוחלת
 σ סטיית תקן

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

n	1/2	1	3/2	2	5/2	3
$\Gamma(n)$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2

Polylogarithm

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^{ax}-1} dx \equiv \frac{1}{a^{n+1}} J(n), \quad n > 0$$

n	1	2	3	4	5
$J(n)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$2\zeta(3) \approx 2.404$	$\frac{\pi^4}{15}$	$24\zeta(5) \approx 24.886$	$\frac{8\pi^6}{63}$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5
$I(n)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$