

אלקטרוניקה פיסיקאלית 044124

סמסטר אביב 2022

מועד ב

הנחיות

- **משך הבחינה – שלוש וחצי שעות**
- **במבחן ישנן 2 שאלות פתוחות ו-5 שאלות רב-ברירה**
- **בדקו שברשותכם 11 עמודים**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו-6 דפי נוסחאות דו-צדדיים**

בהצלחה!

שאלה 1 (X נקודות):

נתונה שרשרת חד מימדית של N אטומים. כל אטום נמצא בפוטנציאל של מתנד הרמוני והביטוי לאנרגיה הכוללת של כל אטום נתון על ידי: $H_i = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})$ כאשר ω_0 מייצג את תדר התהודה של המתנד ו- n את מספר הפונונים המעוררים בתדר התהודה. השרשרת מצומדת לאמבט חום בטמפרטורה T . האנרגיה הממוצעת של השרשרת נתונה ע"י הביטוי הבא:

א. $\langle E \rangle = Nk_B T$

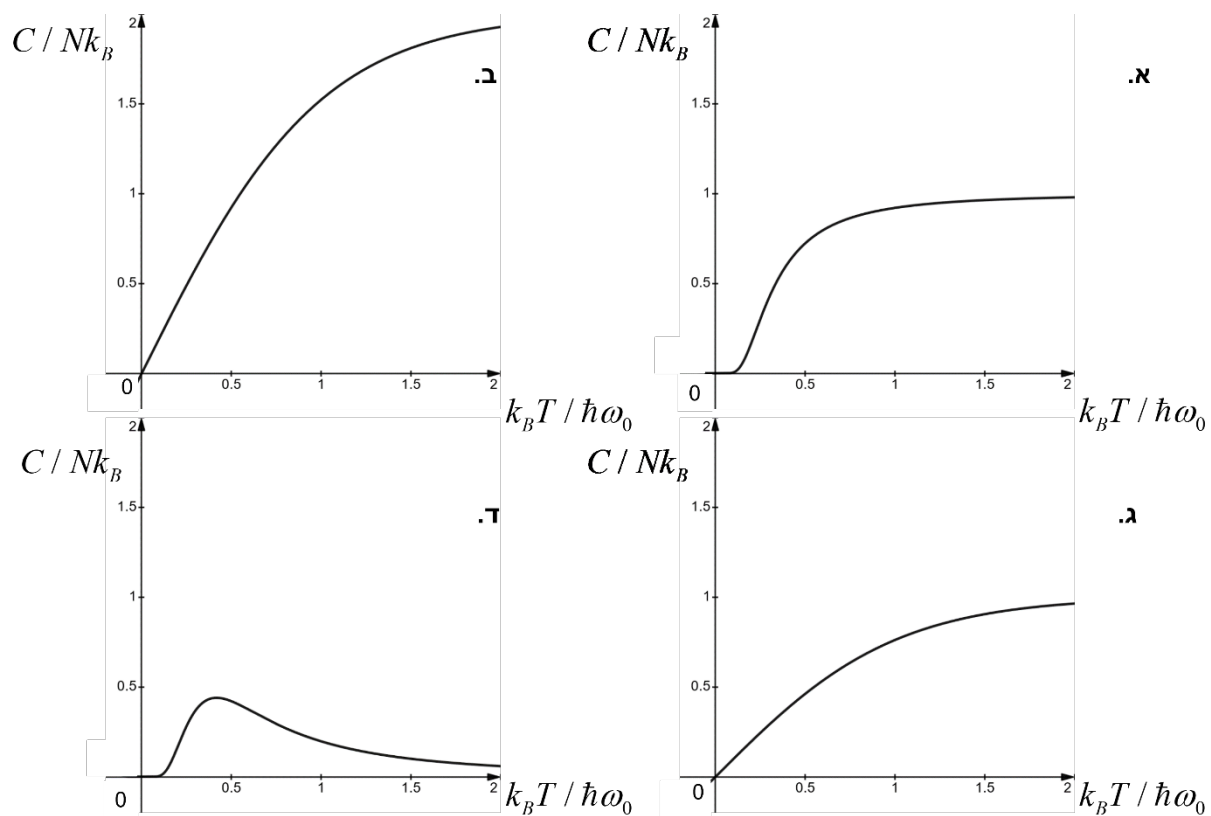
ב. $\langle E \rangle = 2Nk_B T$

ג. $\langle E \rangle = N\hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1} \right)$

ד. $\langle E \rangle = N\hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} + 1} \right)$

שאלה 2 (X נקודות): (תשובה נכונה – א)

התלות בטמפרטורה של קיבול החום של שרשרת האטומים מהבעיה הקודמת נתונה ע"י הגרף הבא:



שאלה 3 (X נקודות):

נתונה פיסת גרפיט תלת מימדית עם פער אנרגיה של E_g בין פס ההולכה לפס הערכיות. אורך הפיסה הוא L , רוחבה W והעובי שלה הוא T . יחס הדיספרסיה של החורים ושל האלקטרונים נתון על ידי הביטוי הבא: $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar v_F |\vec{k}|$ כאשר V_F הוא מהירות פרמי של נושאי המטען ו- $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. הניוון של פס ההולכה ושל פס הערכיות זהה והוא 4 עבור כל פס. הביטוי עבור צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה מתחתית הפס (לא ליחידת נפח) של כל פס (DOS) נתון על ידי הביטוי הבא:

א.
$$DOS = L \cdot W \cdot T \frac{2\varepsilon}{\pi(\hbar v_F)^2}$$

ב.
$$DOS = L^3 \frac{\varepsilon^2}{(\hbar v_F)^3}$$

ג.
$$DOS = L \cdot W \cdot T \frac{2\varepsilon^2}{\pi^2(\hbar v_F)^3}$$

ד.
$$DOS = \frac{\varepsilon^2}{\pi^2(\hbar v_F)^3}$$

שאלה 4 (X נקודות):

מצמידים את פיסת הגרפיט מהשאלה הקודמת לאמבט חום בטמפרטורה T ולאמבט חלקיקים עם פוטנציאל כימי μ . כמות המטען החשמלי בשיווי משקל יהיה נתון על ידי הביטוי הבא כאשר $f_{FD}(\varepsilon - \mu)$ מייצג את התפלגות פרמי דיראק ו $e = |e|$ מייצג את מטען האלקטרון בערך מוחלט.

א.

$$Q = e \cdot \int_{-\infty}^0 DOS \cdot f_{FD}(\varepsilon - \mu) d\varepsilon - e \cdot \int_{\infty}^{\infty} DOS \cdot f_{FD}(\varepsilon - \mu) d\varepsilon$$

ב.

$$Q = e \cdot \int_{-\infty}^0 DOS \cdot (1 - f_{FD}(\varepsilon - \mu)) d\varepsilon - e \cdot \int_{\infty}^{\infty} DOS \cdot f_{FD}(\varepsilon - \mu) d\varepsilon$$

ג.

$$Q = e \cdot \int_{-\infty}^0 DOS \cdot f_{FD}(\varepsilon - \mu) d\varepsilon + e \cdot \int_{\infty}^{\infty} DOS \cdot f_{FD}(\varepsilon - \mu) d\varepsilon$$

ד.

$$Q = e \cdot \int_{-\infty}^{\infty} DOS \cdot (1 - f_{FD}(\varepsilon - \mu)) d\varepsilon - e \cdot \int_{\infty}^{\infty} DOS \cdot f_{FD}(\varepsilon - \mu) d\varepsilon$$

שאלה 5 (X נקודות):

יעל עובדת בחברת שבבים המייצרת טרנזיסטורים עם ניידות גבוהה במיוחד עבור האלקטרונים. נתנו ליעל שני מוליכים למחצה (A ו B) תלת מימדיים עם יחס דיספרסיה של פס ההולכה הנתון ע"י הקשרים

$$\begin{aligned} E_A(\vec{k}) &= E_0 - 6t_A (\cos(k_x x) + \cos(k_y x) + \cos(k_z x)) \\ E_B(\vec{k}) &= E_0 - 6t_B (\cos(k_x x) + \cos(k_y x) + \cos(k_z x)) \end{aligned}$$

הבאים:

נתון כי t_A ו- t_B הם אינטגרלי חפיפה בין שכנים קרובים המקיימים $t_A > t_B > 0$ וכי הזמן הממוצע בין הפיזורים של נושאי המטען מתכונתי לאחד חלקי צפיפות המצבים. היזכרו בנוסחה לניידות של נושאי המטען והיזכרו בקרוב המסה האפקטיבית על מנת למצוא באיזה מוליך למחצה יעל בחרה אם מטרתה הייתה למקסם את ניידות האלקטרונים בטרנזיסטור:

א. מוליך למחצה A

ב. מוליך למחצה B

ג. שני המוליכים למחצה יתנו תוצאה זהה עבור הניידות של האלקטרונים

ד. לא ניתן לקבוע מכיוון שחסרים נתונים

חלק ו': שאלות פתוחות

שאלה 6: צבר מיקרו-קנוני ופילוג פרמי-דיראק

(1) הסבירו אילו חלקיקים מציינים לסטטיסטיקת פרמי-דיראק, בוז-איינשטיין ומתי ניתן להתייחס אליהם כחלקיקים קלאסיים. תנו שתי דוגמאות פיזיקאליות לחלקיקים המציינים לכל אחת מהסטטיסטיקות לעיל.

החלקיקים בעלי ספין חצי-שלם מציינים לסטטיסטיקת פרמי (אלקטרון, חור), החלקיקים בעלי ספין שלם מציינים לסטטיסטיקת בוז (פוטון, פונון). ניתן להתייחס לחלקיקים כאל חלקיקים קלאסיים כאשר אורך הגל התרמי הרבה יותר קטן מהמרחק הממוצע בין החלקיקים (או בשלושה ממדים $(\lambda_{th}^3 n \ll 1)$) במילים אחרות כאשר גז החלקיקים מספיק דליל כך שהאופי של החלקיק אינו משחק תפקיד.

(2) נניח שבידינו גז פרמיונים חופשיים. קבלו ביטוי למספר אפשרויות Ω_j לסדר n_j פרמיונים בין g_j מצבים בעלי אותה אנרגיה. בסעיף זה התעלמו מהאינדקס j ומשמעותו (זיכרו שפרמיון אחד בלבד יכול להיות במצב קוונטי יחיד).

$$\Omega_j = \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}$$

(3) כעת נרצה לקבל ביטוי לריבוי הכולל במערכת. תפקידו של האינדקס j הוא לסמן קבוצות המצבים השונות במערכת, לדוגמא, בפתרון של אטום מימן האינדקס מסמן מצבים שונים של תנע זוויתי השייכים לאותה אנרגיה. בסעיף הזה התעלמו ממקורו הפיסיקאלי של האינדקס j ומהערכים שהוא יכול לקבל אך הניחו שיש הרבה קבוצות שונות של המצבים וכתבו ביטוי לריבוי הכולל של מספר המצבים והאנטרופיה הכוללת של המערכת בהתבסס על התוצאה של הסעיף הקודם עבור המצב המסוים j .

$$\Omega = \prod_j \Omega_j = \prod_j \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}$$

$$S_j = k_b \ln \Omega_j$$

$$S = k_b \log \Omega = k_b \ln \prod_j \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}$$

(4) השתמשו בקירוב Stirling והראו שמתקבל הביטוי הבא

$$S = -k_b \sum_j g_j [\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + (1 - \bar{n}_j) \ln(1 - \bar{n}_j)]$$

כאשר $\bar{n}_j = n_j / g_j$ מסמן אכלוס ממוצע של המצב j

$$\begin{aligned} S = k_b \log \Omega &= k_b \ln \prod_j \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!} = k_b \sum_j \ln \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!} \\ &= k_b \sum_j \ln g_j! - \ln n_j! - \ln(g_j - n_j)! \\ &\approx k_b \sum_j (g_j \ln g_j - g_j) - (n_j \ln n_j - n_j) - ((g_j - n_j) \ln(g_j - n_j) - (g_j - n_j)) \\ &= k_b \sum_j g_j \ln g_j - n_j \ln n_j - ((g_j - n_j) \ln(g_j - n_j)) \end{aligned}$$

כעת נגדיר אכלוס הממוצע למצב $\bar{n}_j = n_j/g_j$ ובבטא עזרתו את האנטרופיה הכוללת

$$\begin{aligned} S &= k_b \sum_j g_j \ln g_j - n_j \ln n_j - (g_j(1 - \bar{n}_j) \ln g_j(1 - \bar{n}_j)) \\ &= k_b \sum_j g_j \ln g_j - n_j \ln n_j \\ &\quad - (-g_j \bar{n}_j (\ln g_j + \ln(1 - \bar{n}_j)) + g_j \ln g_j + g_j \ln(1 - \bar{n}_j)) \\ &= -k_b \sum_j g_j (\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + (1 - \bar{n}_j) \ln(1 - \bar{n}_j)) \end{aligned}$$

כעת נרצה לקבל ביטוי עבור \bar{n}_j כתלות באנרגיה E_j של המצב הנתון j . לא לדאוג! נעשה הכל בשלבים.

(5) מכיוון שהטיפול שלנו מניח מערכת סגורה להחלפת חלקיקים ואנרגיה, נצטרך לדרוש את שימורם. כתבו ביטוי למספר הכולל N של החלקיקים של המערכת והאנרגיה הכוללת E כתלות ב- \bar{n}_j, g_j ו- E_j .

$$\begin{aligned} N &= \sum_j \bar{n}_j g_j \\ E &= \sum_j \bar{n}_j g_j E_j \end{aligned}$$

(6) כעת ניגש לחישוב של \bar{n}_j . כזכור בשיווי משקל בצבר המיקרו-קנוני האנטרופיה תקבל את ערכה המקסימאלי לפי המשתנה הקיים במערכת (במקרה שלנו לפי \bar{n}_j). אך חשוב לזכור שמספר החלקיקים והאנרגיה הכוללת חייבים להישמר. אז איך ממקסמים את הפונקציה בנוכחות האילוצים? נכון מאוד - כופלי לגראנז (סוף סוף שימוש אמיתי!). לא לדאוג אנו נרכיב את הביטוי שנרצה למקסם ביחד

$S/k_b + \alpha$ (אילוץ ראשון) $+ \beta$ (אילוץ שני)
כאשר α, β הינם קבועים (כופלי לגראנז) שלא נגלה אותם בתרגיל זה. האילוצים הם הביטויים שקיבלתם בסעיף הקודם שנכתבו בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} E - (\text{ביטוי לשימור אנרגיה}) \\ N - (\text{ביטוי לשימור חלקיקים}) \end{aligned}$$

כתבו את הביטוי וגזרו אותו לפי \bar{n}_j וקבלו מהו \bar{n}_j כתלות ב- α, β, E_j . השוו את הביטוי שקיבלתם להתפלגות פרמי דיראק הידועה לכם וחלצו את הביטויים ל α and β .

הביטוי שעלינו למקסם הוא כדלקמן

$$\underbrace{- \sum_j g_j (\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + (1 - \bar{n}_j) \ln(1 - \bar{n}_j))}_{S/k_b} + \alpha \left(E - \sum_j \bar{n}_j g_j E_j \right) + \beta \left(N - \sum_j \bar{n}_j g_j \right)$$

כעת נגזור את הביטוי לפי $\frac{\partial}{\partial n_j}$ ונשווה לאפס

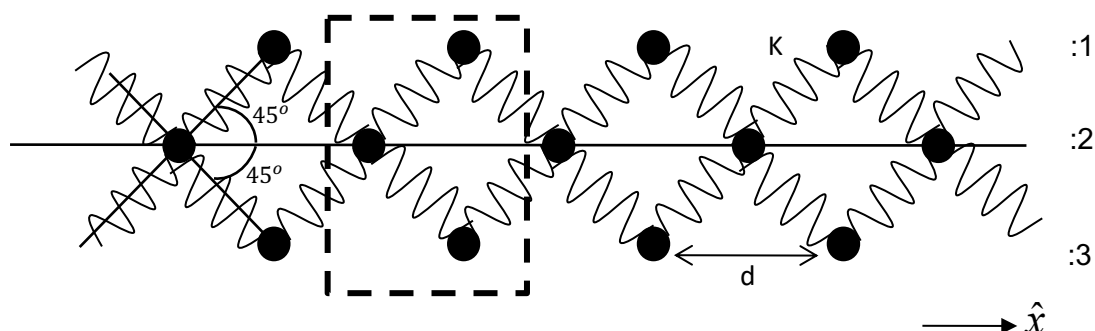
$$\begin{aligned} - \sum_j g_j \left(\ln \bar{n}_j + 1 + \frac{1}{1 - \bar{n}_j} - \ln(1 - \bar{n}_j) + \frac{n_j}{1 - n_j} \right) - \alpha \sum_j g_j E_j - \beta \sum_j g_j &= 0 \\ - \ln \frac{\bar{n}_j}{1 - \bar{n}_j} - \alpha E_j - \beta &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{n}_j = \frac{1}{1 + e^{(\beta + \alpha E_j)}}$$

קיבלנו ביטוי המתאר את האכלוס הממוצע של רמת האנרגיה E_j שמזכיר מאוד את פילוג פרמי-דיראק.

שאלה 7 (35 נק'):

נתון גביש חד מימדי עם סוג אחד של אטומים, המחוברים ביניהם בקפיצים כמתואר בציור. המרחק בין כל שני אטומים שכנים מאותה שורה הוא d . כל הזוויות ישירות. **קחו בחשבון רק תנודות δx שבהן האטומים מתנדנדים לאורך ציר \hat{x} . קבוע הכוח המחזיר לאורך כל הקפיצים הוא K .** קחו בחשבון רק את השכנים הכי קרובים לכל אטום, והניחו תנודות קטנות. לכל האטומים אותה מסה m .
 תזכורת: הנחת תנודות קטנות מאפשרת לנו להתייחס לתנודות כאילו הם רק לאורך ציר \hat{x} עם אותו קבוע קפיץ.
 כמו כן נתון שתא היחידה מכיל 3 אטומים ונמצא בתוך הריבוע המקווקו הנמצא בציור



(1) (7 נק) כתבו את משוואות התנועה עבור התנודות $\delta x_{j,n}$ של המסות $j = 1, 2, 3$ הנמצאות בתא היחידה ה- n .

(2) (5 נק) עבור גל מהצורה $\delta x_{j,n} = A_j e^{i(k \cdot n \cdot d - \omega \cdot t)}$ ($j=1, 2, 3$) כתבו את מערכת המשוואות המתקבלת כבעיית ערכים עצמיים. רשמו את המטריצה אותה צריך ללכסן אבל אין צורך לפתור את הבעיה ולקבל את הערכים העצמיים.

לאחר לכסון המטריצה מגיעים למשוואה הבאה:

$$\left(\frac{K}{m} - \omega^2 \right) \left[\frac{K^2}{m^2} (1 - \cos kd) - \frac{3K}{m} \omega^2 + \omega^4 \right] = 0. \quad (1)$$

(3) (3 נק) לפי המשוואה המוצגת לעיל (1) חשבו את תדירות התנודה של כל אחד מאופני התנודה.

(4) (6 נק) לפי שיקולים של אינטואיציה פיזיקלית או שיקולים מתמטיים (או שניהם) הסבירו כמה אופני תנודה יש, את הסוג של כל אופן (אקוסטי או אופטי) ועבור כל אופן תארו בעזרת תרשים איכותי איך המסות בתוך תא היחידה זזות תוך כדי תנודה ביחס למסות האחרות.

(5) (7 נק) עבור ווקטורי הגל הבאים: $k = 0$ ו $k = \frac{\pi}{d}$ חשבו את כל תדרי התנודה האפשריים וציירו באופן איכותי את יחסי הנפיצה השונים בכל התחום (ציינו את סוג האופן המתקבל ליד כל עקום).

(6) (7 נק) חשבו את מהירות הקול בגביש

פתרון :

(1)

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n^1 &= -K(2u_n^1 - u_n^2 - u_{n+1}^2) \\ m\ddot{u}_n^2 &= -K(4u_n^2 - u_{n-1}^1 - u_n^1 - u_n^3 - u_{n-1}^3) \\ m\ddot{u}_n^3 &= -K(2u_n^3 - u_n^2 - u_{n+1}^2) \end{aligned}$$

(2)

$$\left[\frac{K}{m} \begin{pmatrix} 2 & -(1+e^{ikd}) & 0 \\ -(1+e^{-ikd}) & 4 & -(1+e^{ikd}) \\ 0 & -(1+e^{-ikd}) & 2 \end{pmatrix} - \omega^2 I \right] \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = 0$$

(3)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{K}{m}} \\ \frac{2K^2}{m^2} - \frac{3K}{m} \omega^2 + \omega^4 - \frac{K^2}{m^2} (1 + \cos kd) &= 0 \\ \frac{K^2}{m^2} (1 - \cos kd) - \frac{3K}{m} \omega^2 + \omega^4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{3K}{2m} \pm \sqrt{\frac{9K^2}{4m^2} - \frac{K^2}{m^2} (1 - \cos kd)}}$$

ניתן לפתור גם ע"י הצבת $k=0$ במטריצה לפני הליכסון.

נציב את הע"ע במשוואה, עם $k=0$, ונקבל את הו"ע:

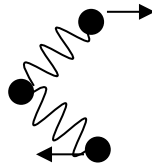
$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{ל}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}} \quad \text{ל}$$

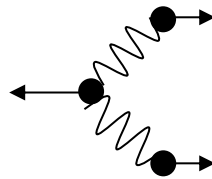
$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \omega_3 = 0 \quad \text{ל}$$

(4) ציורים של אופני התנודה ב $k=0$:

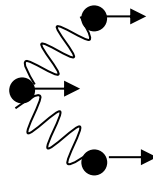
תנודה מס' 1 : המרכז קבוע, ושני האטומים הצדדיים זזים באמפליטודות שוות ובפאות הפוכות. מרכז המסה נשאר נייח. תנודה אופטית אנטי-סימטרית.



תנודה מס' 2 : שני האטומים הצדדיים נעים ביחד, והאטום שבמרכז נע הפוך להם. יחס האמפליטודות מבטיח שמירה על מרכז מסה נייח. תנודה אופטית סימטרית.



תנודה מס' 3 : כל שלושת האטומים נעים כמקשה אחת. תנודה אקוסטית.



(5) עבור $k=0$ נקבל :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{3K}{2m} \pm \sqrt{\frac{9K^2}{4m^2}}} = \sqrt{\frac{3K}{m}}, 0$$

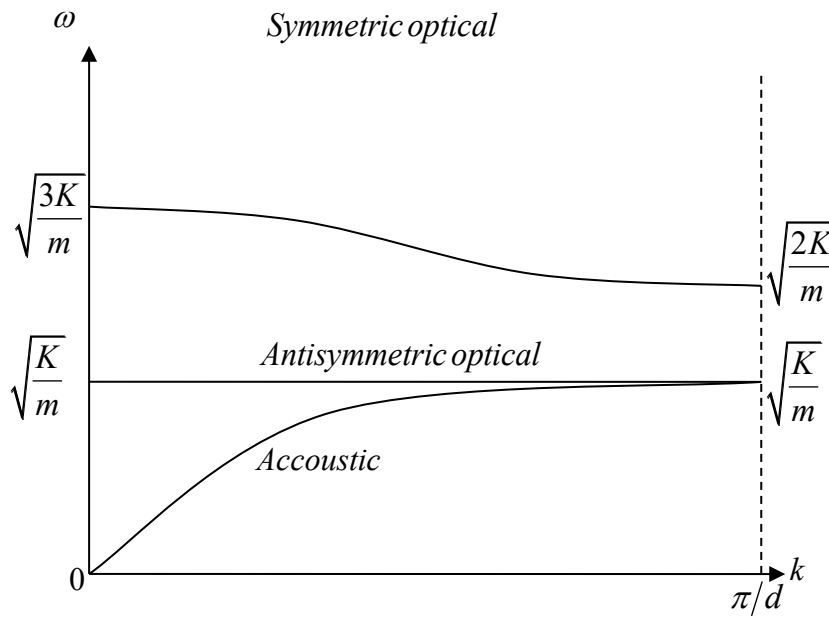
עבור $k=\pi/d$ נקבל :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{3K}{2m} \pm \sqrt{\frac{1K^2}{4m^2}}} = \sqrt{\frac{2K}{m}}, \sqrt{\frac{K}{m}}$$

גם כאן אפשר לפתור ע"י הצבה של $k=\pi/d$ במטריצה, ואפילו יוצאת מטריצה אלכסונית.

ציור איכותי של שלושת ענפי יחס הדיספרסיה:



6) מהירות הקול: מפתחים את הביטוי לתדירות המוד האקוסטי (זו שמתאפסת ב $k=0$) לטור טיילור סביב $k=0$, ושומרים רק עד הסדר השני ב k (זה הסדר הראשון שלא מתאפס):

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \sqrt{\frac{3K}{2m} - \sqrt{\frac{9K^2}{4m^2} - \frac{K^2}{m^2}(1 - \cos kd)}} \cong \sqrt{\frac{3K}{2m} - \sqrt{\frac{9K^2}{4m^2} - \frac{K^2}{2m^2}k^2d^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3K}{2m} - \frac{3K}{2m} \sqrt{1 - \frac{2}{9}k^2d^2}} \cong \sqrt{\frac{3K}{2m} - \frac{3K}{2m} \left(1 - \frac{1}{9}k^2d^2\right)} = \sqrt{\frac{K}{6m}} d|k| \\ &\rightarrow v_s = \sqrt{\frac{K}{6m}} d \end{aligned}$$

ניתן גם לפתח במטריצה ואז ללכסן (אבל אז צריך לפתח עד סדר שני ב kd . אם מפתחים רק עד סדר ראשון מקבלים תוצאה שגויה).

טבלת נוסחאות שימושיות:
גדלים פיזיקליים שימושיים:

| | |
|--------------------------|--|
| Atomic Weight Conversion | $1\text{amu} = 1.661 \times 10^{-27}\text{kg}$ |
| Plank's Constant | $h = 6.626 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{sec}$ |
| Reduced Plank's Constant | $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{sec}$ |
| Avogadro Constant | $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ |
| Gas Constant | $R = 8.314\text{J K}^{-1}\text{mol}^{-1}$ |
| Boltzmann's Constant | $k_b = 1.381 \times 10^{-23}\text{J/K}$ |
| Electron Mass | $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\text{kg}$ |
| Electron Charge | $q = 1.602 \times 10^{-19}$ |
| Bohr Radius | $a_0 = 5.292 \times 10^{-11}\text{m}$ |
| Speed of Light | $c = 2.997 \times 10^8\text{m/sec}$ |

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

| Trigonometric Identities |
|--|
| $\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a + b) + \cos(a - b))$ |
| $\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a - b) - \cos(a + b))$ |
| $\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a + b) + \sin(a - b))$ |
| $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$ |
| $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$ |
| $\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$ |
| $\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$ |
| $\sin(\pi - a) = \sin(a)$ |
| $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ |
| $\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$ |
| $\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$ |
| $\sin(-a) = -\sin(a)$ |
| $\cos(-a) = \cos(a)$ |
| $\cos(a) = 1/2(e^{ia} + e^{-ia})$ |
| $\sin(a) = 1/(2i)(e^{ia} - e^{-ia})$ |
| $\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ |
| $\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$ |

אינטגרלים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ תוחלת
 σ סטיית תקן

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

| | | | | | | |
|---|-----------------|---|----------------|---|--------------|-------------------------------|
| 3 | 5/2 | 2 | 3/2 | 1 | 1/2 | n |
| 2 | $3\sqrt{\pi}/4$ | 1 | $\sqrt{\pi}/2$ | 1 | $\sqrt{\pi}$ | $\Gamma(n)$ |

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

| | | | | | | |
|----------------------|---|-----------------------|---|---------------------|---|--------------------------|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | n |
| $\frac{1}{\alpha^3}$ | $\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$ | $\frac{1}{2\alpha^2}$ | $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ | $\frac{1}{2\alpha}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ | $I(n)$ |