

אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר אביב 2023

מועד ב

הנחיות

- **משך הבחינה – 3 שעות.**
- **במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 5 שאלות רב ברירה
חלק 2 : 2 שאלות פתוחות**
- **בדקו שברשותכם 10 עמודים .**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.**

בהצלחה!

חלק 1 (30 נקודות)

שאלה 1 (6 נקודות):

נתון גביש דו-מימדי מלבני עם וקטורי תא יחידה $\vec{a} = a\hat{x}$, $\vec{b} = b\hat{y}$ ($b > a$).

הפוטנציאל הגבישי נתון ע"י הביטוי הבא:

$$U(x, y) = C_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) + 2C_0 \cos\left(\frac{4\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{b}y\right)$$

פער האנרגיה בנקודות הבאות מסומן באופן הבא:

$$\Delta E_1(k_x = \pi/a, k_y = 0), \quad \Delta E_2(k_x = 0, k_y = 2\pi/b), \quad \Delta E_3(k_x = 0, k_y = \pi/2b)$$

איזו טענה נכונה:

א. $\Delta E_1 \neq 0, \quad \Delta E_2 \neq 0, \quad \Delta E_3 = 0$

ב. $\Delta E_1 = 0, \quad \Delta E_2 = 0, \quad \Delta E_3 \neq 0$

ג. $\Delta E_1 \neq C_0, \quad \Delta E_2 = 0, \quad \Delta E_3 = 0$

ד. $\Delta E_1 \neq 0, \quad \Delta E_2 \neq 0, \quad \Delta E_3 \neq 0$

שאלה 2 (6 נקודות):

מודל פשוט למעבר פאזה ממוצק לגז מבוסס על ההנחות הבאות: נתון שריג ריבועי דו-מימדי עם N אתרים המצומד לאמבט חום בטמפרטורה T . בכל אתר נמצא אטום יחיד. כאשר האטום נמצא בפאזה המוצקה, האנרגיה של האתר היא שלילית: $\epsilon = -\epsilon_0$ כאשר $\epsilon_0 > 0$. כאשר האטום נמצא בפאזה הגזית, האנרגיה של האתר היא $\epsilon = 0$. בנוסף, בפאזה הגזית הניוון של רמת האנרגיה היא $\Omega \gg 1$.

הביטוי למספר האטומים הנמצאים בפאזה המוצקה נתון ע"י הביטוי הבא:

א. $N \frac{1}{e^{\epsilon_0/k_B T} + 1}$

ב. $N \frac{e^{\epsilon_0/k_B T}}{\Omega e^{-\epsilon_0/k_B T} + 1}$

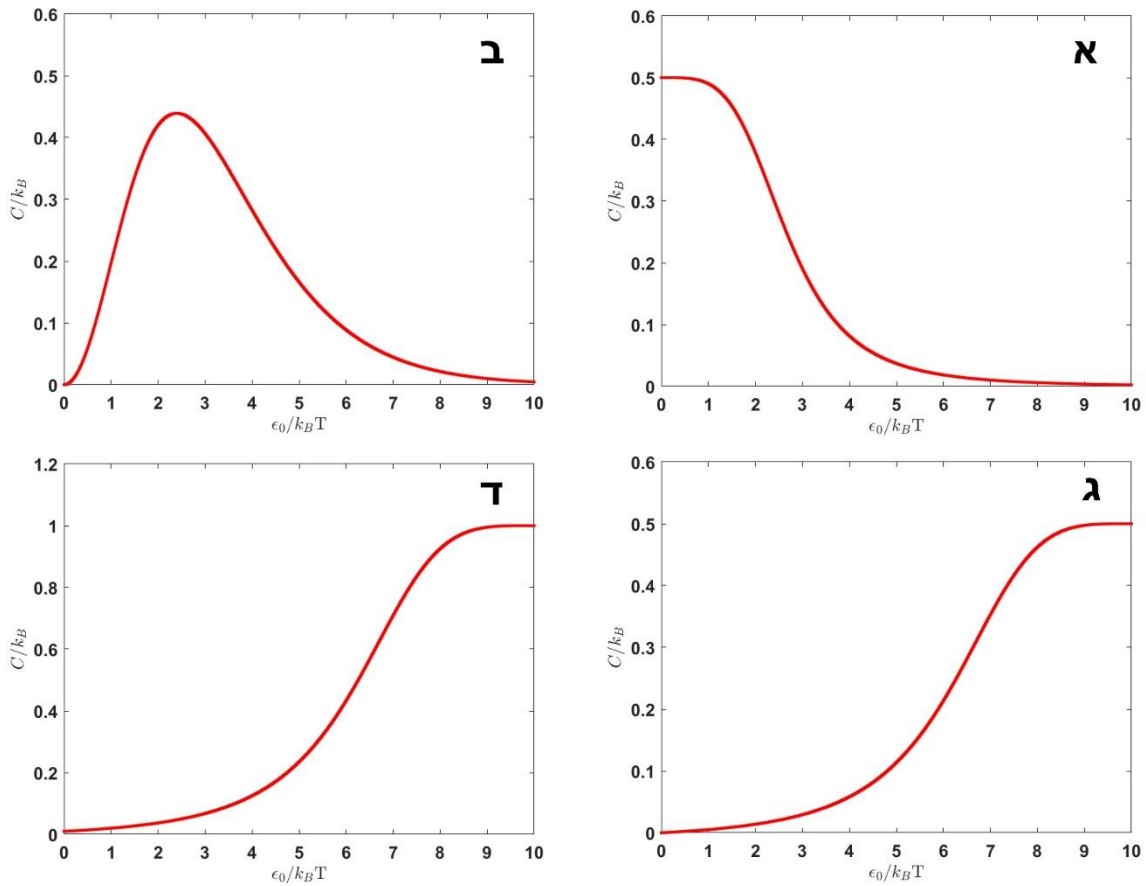
ג. $N \frac{e^{\epsilon_0/k_B T}}{e^{\epsilon_0/k_B T} + \Omega}$

ד. $N \frac{e^{-\epsilon_0/k_B T}}{e^{-\epsilon_0/k_B T} + \Omega}$

שאלה 3 (6 נקודות):

נתון מוצק תלת מימדי עם N אתרים המצומד לאמבט עם טמפרטורה T . בכל אתר נמצא אטום עם שתי רמות אנרגיה אפשריות. רמת יסוד עם $\epsilon_g = 0$ ורמה מעוררת עם $\epsilon_{ex} = \epsilon_0$.

קיבול החום לאטום נתון ע"י הגרף הבא:

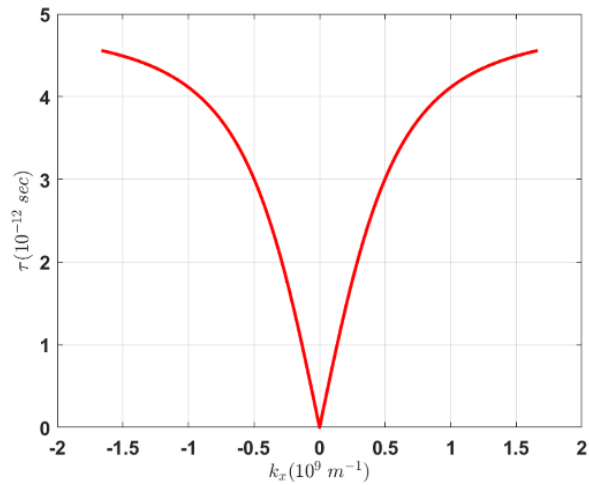
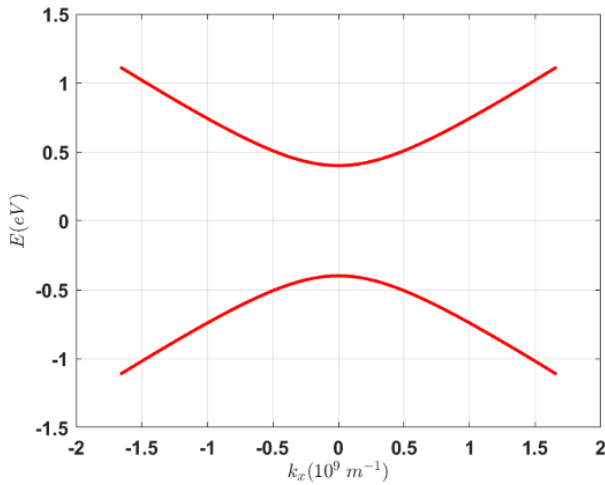


שאלה 4 (6 נקודות):

נתונה צינורית פחמן חד מימדית מסוג מוליך למחצה עם יחס דיספרסיה מהצורה הבאה:

$$E(k_x) = \pm \sqrt{\Delta^2 + (\hbar v_0 k_x)^2} \quad \text{כאשר } v_0 = 10^6 \text{ m/sec}, \Delta = 0.4 \text{ eV} \text{ (איור שמאלי).}$$

כתוצאה מאי-סדר לאורך הצינורית זמן הפיזור הממוצע (τ) בטמפרטורות נמוכות מרמת פרמי מוצג באיור הימני.



בנוסף נתון כי צפיפות נושאי המטען של האלקטרונים היא $n = 6.35 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$ ושהניווך של כל רמת אנרגיה הוא 4 (שני ספינים ושני תתי שריגים). בהנחה שהטמפרטורה נמוכה מאד יחסית לרמת פרמי, מהי רמת פרמי של צינורית הפחמן:

א. $E_F = 2\Delta$

ב. $E_F = 1 \text{ eV}$

ג. $E_F = 0.5 \text{ eV}$

ד. $E_F = \Delta$

שאלה 5 (6 נקודות):

מרחק הפיזור הממוצע (l_{mfp}) בטמפרטורות נמוכות יחסית לרמת פרמי של צינורית הפחמן המתוארת בשאלה הקודמת, נתון ע"י הערך הבא:

א. $l_{mfp} = 230 \text{ nm}$

ב. $l_{mfp} = 1.2 \text{ } \mu\text{m}$

ג. $l_{mfp} = 1.95 \text{ } \mu\text{m}$

ד. $l_{mfp} = 512 \text{ nm}$

חלק 2 (70 נקודות + 10 נקודות בונוס)

שאלה 6 (35 נקודות + 5 נקודות בונוס)

נתונות 2 מערכות מוליכות דו-ממדיות עם שטח זהה A . יחסי הדיספרסיה של האלקטרונים במערכת הראשונה והשנייה נתונים ע"י הביטויים הבאים, בהתאמה:

$$\varepsilon_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} k_y^2$$

$$\varepsilon_2(\vec{k}) = \hbar c |\vec{k}|^{1/\alpha}$$

כאשר c ו- α הם מספרים ממשיים וחיוניים.

(א) חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח עבור כל אחת מהמערכות. (10 נקודות)

בסעיפים הבאים שומרים על טמפרטורה השואפת לאפס בשתי המערכות.

(ב) נתון שמספר האלקטרונים הכולל של שתי המערכות הוא N . מחברים את שתי המערכות בעזרת תייל מוליך. אחרי זמן ארוך מאוד, מודדים את צפיפות האלקטרונים בשתי המערכות ומוצאים שהצפיפויות שוות. מה צריך להיות הערך של c במקרה הזה? בטאו את תשובתכם בעזרת A, N, m, α, \hbar וקבועים מספריים. (12 נקודות)

(ג) מהו גודל התנע הגדול ביותר של האלקטרונים בכל אחת מהמערכות? (7 נקודות)

(ד) כעת מסירים את התייל שמחבר את שתי המערכות ולאחר מכן מוסיפים אלקטרונים למערכת 2, כך שנוצר מתח חשמלי בין המערכות. כיצד אנרגיית פרמי משתנה במערכת 2 (גדלה/קטנה) והאם היא משתנה במערכת 1? הסבירו בלי לעשות חישובים. (6 נקודות)

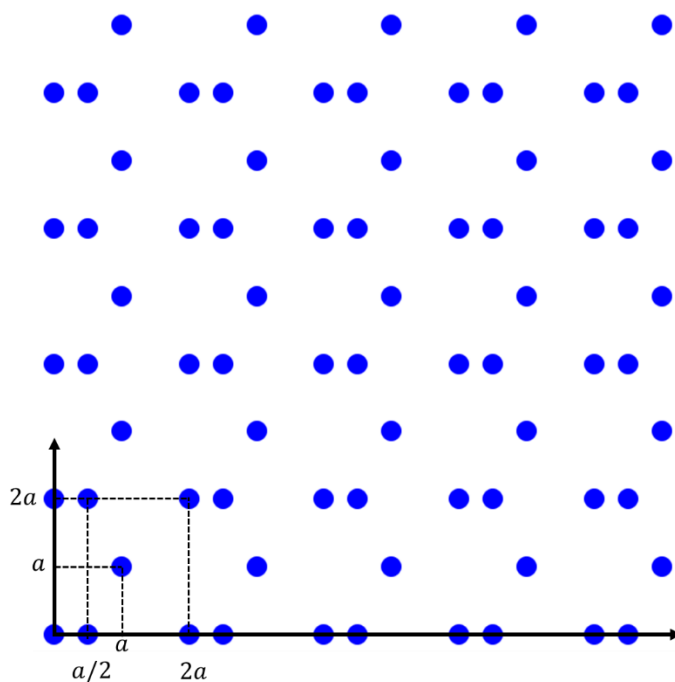
(ה) **בונוס** - לאחר מכן, מחברים את שתי המערכות באמצעות תייל מוליך. נתייחס לתייל כאל מערכת תלת ממדית של גליל שהציר הראשי שלו (ציר x) ארוך מאוד, והוא מחבר את שתי המערכות. הדיספרסיה של האלקטרונים בתייל נתונה ע"י הביטוי הבא:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y} k_y^2 + \frac{\hbar^2}{2m_z} k_z^2$$

צפיפות האלקטרונים בתייל היא n_0 וזמן הפיזור הממוצע הוא τ_0 . רשמו ביטוי למוליכות החשמלית שנמדדה בתייל. (5 נקודות)

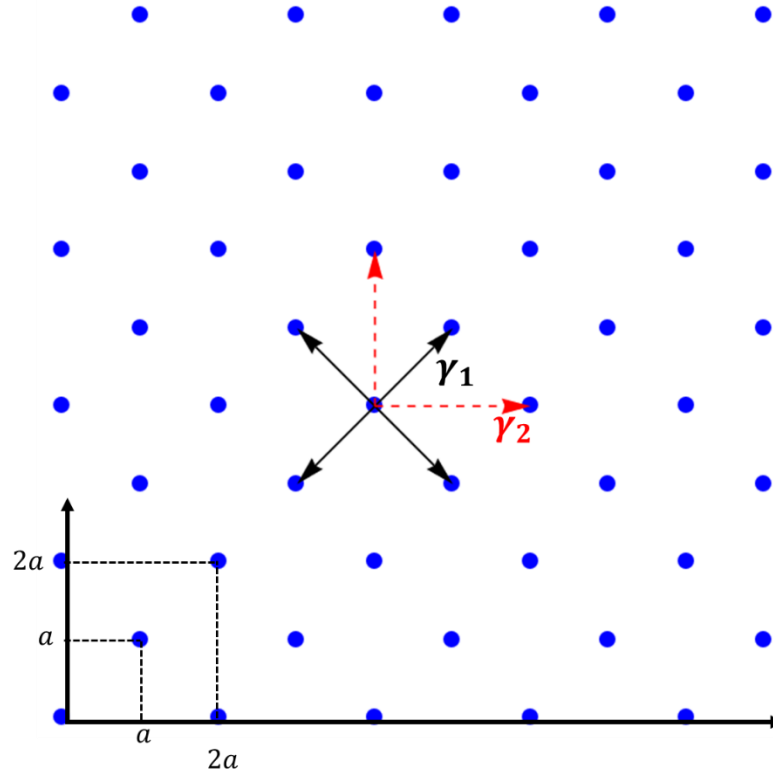
שאלה 7 (35 נקודות + 5 נקודות בonus)

נתון הגביש הבא :



- א. רשמו וקטורים ראשוניים ווקטורי הבסיס. (5 נקודות)
- ב. ציירו (באופן מדויק) על גבי השריג שבחרתם את תא Wigner-Seitz. (5 נקודות)
- ג. מצאו את הווקטורים של השריג ההופכי וציירו אותו. ציירו את איזור Brillouin הראשון. (5 נקודות)
- ד. מבלי לפתור את הבעיה הסבירו מהו מספר פסי אנרגיה הצפוי להתקבל בהנחה שכל אטום תורם אורביטל אחד בלבד. הצדיקו את תשובתכם. (5 נקודות)

כעת נניח שנתון הגביש הבא :



- ה. מצאו את מבנה הפסים בעזרת שיטת הקשירה ההדוקה בהנחה שהצימוד בין השכנים הוא: $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = 0$ והאנרגיה של האורביטלים הינה E_0 . **בסעיף זה התייחסו רק לשכנים עם הצימוד γ_1** (8 נקודות)
- ו. קבלו ביטוי M^{-1} (הטנזור ההופכי של המסה האפקטיבית) במינימום המוחלט של האנרגיה. (7 נקודות)
- ז. **בנוס -** לו היינו לוקחים בחשבון גם צימוד לשכנים עם קבוע צימוד γ_2 מהו מספר פסי אנרגיה שהיינו מקבלים? (5 נקודות)

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1 amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^8 m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a + b) + \cos(a - b))$
$\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
$\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a + b) + \sin(a - b))$
$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2(e^{ia} + e^{-ia})$
$\sin(a) = 1/(2i)(e^{ia} - e^{-ia})$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ תוחלת
 σ סטיית תקן

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

3	5/2	2	3/2	1	1/2	n
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\Gamma(n)$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	n
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$I(n)$