

אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר חורף 2022-2023

מועד ב

הנחיות

- משך הבחינה – 3 שעות.
- במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 6 שאלות רב ברירה
חלק 2 : 2 שאלות פתוחות
- בדקו שברשותכם 12 עמודים .
- ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.

בהצלחה

חלק 1 (48 נקודות – ניקוד זהה לכל שאלה)

שאלה 1

נתון גז אלקטרוניים ב-2D. נתון גם ריכוז אלקטרוניים n

(1) חשבו את הביטוי לאנרגיית פרמי של המערכת

$$E_F = \sqrt{k_B T \ln \frac{\hbar^2 \pi n}{m}} \quad (\text{א})$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 \pi n}{m} \quad (\text{ב})$$

$$E_F = \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi n}{m}} \quad (\text{ג})$$

$$E_F = k_B T \ln \frac{\hbar^2 \pi n}{m} \quad (\text{ד})$$

$$E_F = k_B T \ln \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi n}{m}} \quad (\text{ה})$$

שאלה 2

בגבול של טמפרטורה נמוכה, כך שהפוטנציאל הכימי מקיים: $\mu \gg k_B T$ ולכן התלות של הפוטנציאל הכימי בטמפרטורה בגבול הזה היא :

$$\mu(T) \approx E_F \quad (\text{א}) \text{ קבועה}$$

$$\mu(T) \approx e^{-\frac{E_F}{k_B T}} \quad (\text{ב}) \text{ עולה כמו}$$

$$\mu(T) \approx \frac{E_F}{k_B T} \quad (\text{ג}) \text{ יורדת כמו}$$

$$\mu(T) \approx e^{\frac{E_F}{k_B T}} \quad (\text{ד}) \text{ יורדת כמו}$$

$$\mu(T) \approx -\frac{E_F}{k_B T} \quad (\text{ה}) \text{ עולה כמו}$$

שאלה 3

הסימן של הפוטנציאל הכימי כפונקציה של טמפרטורה

(א) תמיד שלילי

(ב) תמיד חיובי

(ג) שלילי ב $T \rightarrow 0$ וחיובי ב T גבוה

(ד) חיובי ב $T \rightarrow 0$ שלילי ב T גבוה

(ה) תמיד אפס

שאלה 4

נתון צבר מערכות המצומדות לאמבט חום בטמפרטורה T והנמצאות בפוטנציאל חד מממדי הבא

$$V(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4$$

חשבו ארגייה ממוצעת של המערכת (זכרו שקיימת גם אנרגיה קנטית)

א. $(\alpha_1/2 + \alpha_2 + 1/2)k_b T$

ב. $(\alpha_1 + \alpha_2 + 1/2)k_b T$

ג. $3/2 k_b T$

ד. $5/4 k_b T$

ה. $3 k_b T$

רמז:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \frac{1}{k} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

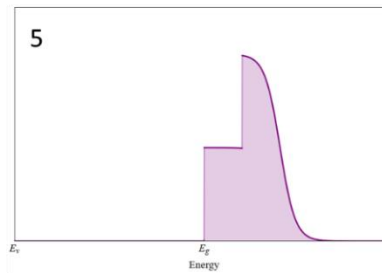
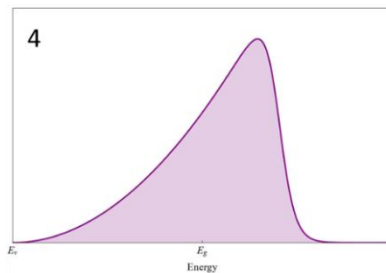
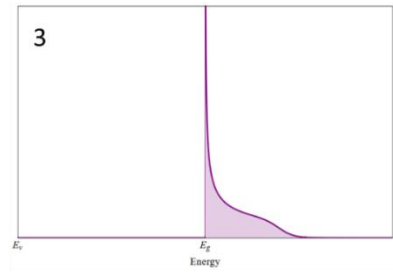
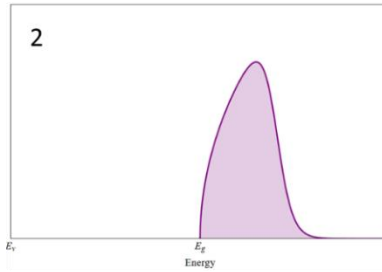
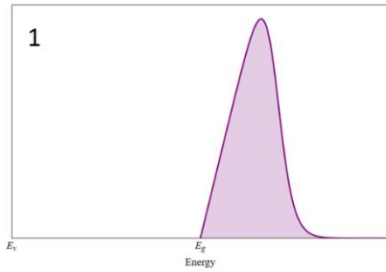
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

| | | | |
|----------------|---------------|---------------|---------------|
| $\Gamma(3/2)$ | $\Gamma(5/4)$ | $\Gamma(7/6)$ | $\Gamma(9/8)$ |
| $\sqrt{\pi}/2$ | 0.906 | 0.927 | 0.942 |

שאלה 5

נתון מוצק תלת ממדי בעל פער אנרגיה E_g המכיל אלקטרונים. לאורך ציר z קיים פוטנציאל של הבור הקוונטי האינסופי, ניתן להניח שלאורך שאר הממדים האלקטרונים מתנהגים כחופשיים. מתוך הסרטוטים שלמטה בחרו את האופציות האפשריות לאכלוס הממוצע של פס ההולכה במוצק.

תזכורת האכלוס מוגדר כמכפלה של צפיפות המצבים בפילוג התאים.



- א. 1
- ב. 2
- ג. 3
- ד. 4
- ה. 5

שאלה 6

נתון מוצק תלת ממדי בעל צפיפות האלקטרונים n ויחס הנפיצה מהצורה הבא

$$E(k_x, k_y, k_z) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_{xx}} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_{yy}} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_{zz}} + \frac{\hbar^2 k_x k_y}{m_{xy}} + \frac{\hbar^2 k_x k_z}{m_{xz}}$$

$$m_{xx}^{-1} = m_{yy}^{-1} = m_{zz}^{-1} = m_{xz}^{-1} = m_0^{-1}$$

$$m_{xy}^{-1} = 2m_0^{-1}$$

נתון שזמן הממוצע בין הפיזורים הינו τ . נתון שדה חשמלי מהצורה

$$\vec{E} = E_0(\hat{x} + 2\hat{y} - 3\hat{z})$$

קיבלו ביטוי עבור היחס הבא J_y/J_z

- א. -2
- ב. 4/3
- ג. 1
- ד. 2
- ה. -5/2

חלק 2 (52 נקודות)

שאלה 7 (22 נקודות)

נתון 2 חומרים תלת-ממדיים. נתון שבכל אחד מהחומרים יש פס אנרגיה בודד, 2 פסי האנרגיה הם :

$$\varepsilon_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

$$\varepsilon_2(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2\bar{m}}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

כאשר בחומר 1 יש אלקטרונים ובחומר 2 יש חלקיקים עם אותו ספין ומטען חשמלי של אלקטרונים, רק עם מסה שונה \bar{m} .

א. חשבו את צפיפות המצבים ליחידת נפח לכל אחד מהחומרים : $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon)$.
חשבו את אנרגית פרמי של כל אחד מהחומרים כאשר נתון שצפיפות החלקיקים בחומר 1 וחומר 2 היא n_1 ו- n_2 בהתאמה. (10 נקודות)

ב. בטאו את היחס $\frac{\bar{m}}{m_e}$ כתלות בצפיפויות החלקיקים כדי שמהירות פרמי תהיה שווה בכל אחד משני החומרים. (6 נקודות)

ג. (סעיף זה לא קשור לשני הסעיפים הקודמים)
נתון פס אנרגיה של אלקטרונים בחומר דו-ממדי :

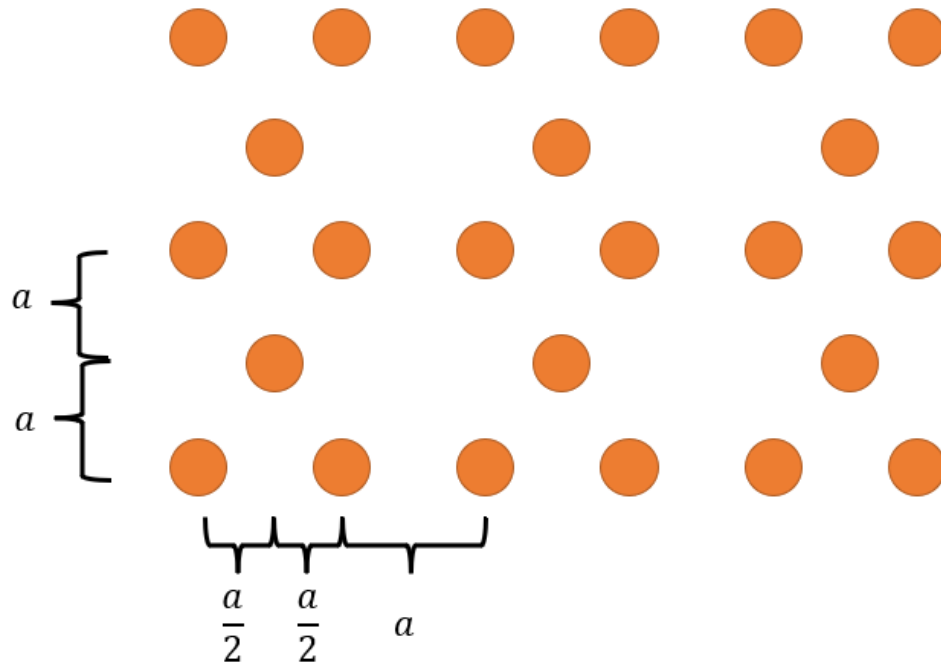
$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x}k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y}k_y^2$$

מפעילים על המערכת שדה חשמלי סטטי בכיוון כללי במישור XY : $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$.
מה הוא היחס $\frac{m_x}{m_y}$ שהמסות האפקטיביות צריכות לקיים כדי שהזרם החשמלי יהיה ניצב לשדה החשמלי ? (6 נקודות)

תזכרו שלפי מודל דרודה, המוליכות החשמלית היא $\sigma = ne^2\tau m^{-1}$, כאשר n היא צפיפות האלקטרונים, τ הוא הזמן האופייני לפיזור של האלקטרון ו- m^{-1} הוא טנזור המסה האפקטיבית ההופכי.

שאלה 8 (30 נקודות)

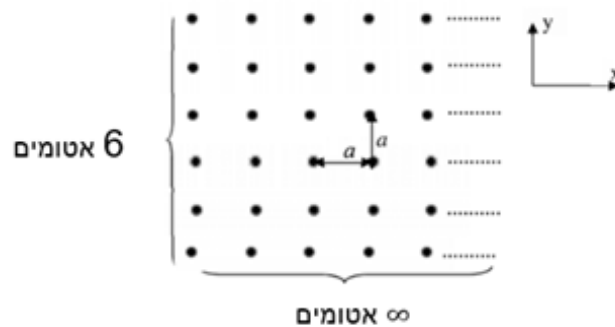
נתון הגביש הבא



- רשמו את הוקטורים הראשוניים ווקטורי הבסיס. (4 נקודות)
- ציירו את תא Wigner-Seitz. (4 נקודות)
- חשבו את וקטורי השריג ההופכי וציירו את איזור ברילואן הראשון. (5 נקודות)
- כעת נתון שריג ריבועי עם וקטורים ראשוניים $a_1 = a\hat{x}$, $a_2 = a\hat{y}$, עם הקשרים הבאים:

$$\langle \psi(r) | H | \psi(r - a\hat{x}) \rangle = -\gamma_x$$

$$\langle \psi(r) | H | \psi(r - a\hat{y}) \rangle = -\gamma_y$$
 לוקחים שריג עם 6 אטומים בציר y והרבה אטומים בציר x :



- מה הם ערכי k_y האפשריים? (5 נקודות)
- מהו יחס הדיספרסיה כפונקציה של k_x ? נא לרשום עבור כל ערך k_y בנפרד ולצייר אותם. (6 נקודות)
- אם כל אטום תורם אלקטרון אחד, ויש סה"כ N אטומים. כמו כן נתון כי $\gamma_x \gg \gamma_y$. כמה פסי אנרגיה ריקים מאלקטרונים יש לפי מודל הצימוד החזק בטמפרטורה $T \rightarrow 0$? (6 נקודות)

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

| | |
|--------------------------|---|
| Atomic Weight Conversion | $1 amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$ |
| Plank's Constant | $h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot sec$ |
| Reduced Plank's Constant | $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$ |
| Avogadro Constant | $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ |
| Gas Constant | $R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$ |
| Boltzmann's Constant | $k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$ |
| Electron Mass | $m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$ |
| Electron Charge | $q = 1.602 \times 10^{-19}$ |
| Bohr Radius | $a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$ |
| Speed of Light | $c = 2.997 \times 10^8 m/sec$ |

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

| Trigonometric Identities |
|--|
| $\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ |
| $\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ |
| $\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ |
| $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$ |
| $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$ |
| $\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$ |
| $\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$ |
| $\sin(\pi - a) = \sin(a)$ |
| $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ |
| $\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$ |
| $\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$ |
| $\sin(-a) = -\sin(a)$ |
| $\cos(-a) = \cos(a)$ |
| $\cos(a) = 1/2(e^{ia} + e^{-ia})$ |
| $\sin(a) = 1/(2i)(e^{ia} - e^{-ia})$ |
| $\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$ |
| $\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$ |

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ תוחלת
 σ סטיית תקן

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)\Gamma(n - 1)$$

| | | | | | | |
|---|-----------------|---|----------------|---|--------------|--------------------|
| 3 | 5/2 | 2 | 3/2 | 1 | 1/2 | <i>n</i> |
| 2 | $3\sqrt{\pi}/4$ | 1 | $\sqrt{\pi}/2$ | 1 | $\sqrt{\pi}$ | <i>Γ(n)</i> |

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

| | | | | | | |
|----------------------|---|-----------------------|---|---------------------|---|--------------------|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | <i>n</i> |
| $\frac{1}{\alpha^3}$ | $\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$ | $\frac{1}{2\alpha^2}$ | $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$ | $\frac{1}{2\alpha}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ | <i>I(n)</i> |