

אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר אביב 2023

מועד א

הנחיות

- **משך הבחינה – 3 שעות.**
- **במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 5 שאלות רב ברירה
חלק 2 : 2 שאלות פתוחות**
- **בדקו שברשותכם 9 עמודים .**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.**

בהצלחה !

חלק 1 (30 נקודות)

שאלה 1 (6 נקודות):

נתון חומר תלת-ממדי עם יחס דיספרסיה הדומה לגרפן: $E = \hbar V_F \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

הספין של האלקטרון בערך מוחלט הוא $3/2$.

מספר המצבים ליחידת אנרגיה וליחידת נפח נתון ע"י הביטוי הבא:

א. $\frac{3}{\pi^2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{(\hbar V_F)^{3/2}}$

ב. $\frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon}{(\hbar V_F)^2}$

ג. $\frac{2}{\pi^2} \frac{\varepsilon^2}{(\hbar V_F)^3}$

ד. $\frac{3}{\pi^2} \frac{\varepsilon^{3/2}}{(\hbar V_F)^3}$

שאלה 2 (6 נקודות):

נתון גז של N אטומים חופשיים קלסיים בשלושה ממדים בטמפרטורה T ונפח V . לכל אטום יש מסה m ויחס נפיצה פרבולי. האנטרופיה של הגז נתונה ע"י הביטוי הבא:

א. $\frac{3}{2} N k_B$

ב. $N k_B \left(\frac{3}{2} + \ln(N) \right)$

ג. $N k_B \ln \left(V \left(\frac{2\pi m k_B T}{\hbar^2} \right)^3 \right)$

ד. $k_B N \left(\frac{3}{2} + \ln \left(V \left(\frac{2\pi m k_B T}{\hbar^2} \right)^3 \right) - \ln N + 1 \right)$

שאלה 3 (6 נקודות):

מקרים את הגז שבשאלה הקודמת ומצמידים אותו בנוסף לאמבט חלקיקים עם פוטנציאל כימי μ . ידוע כי הספין בערכו המוחלט של כל אטום הוא $5/2$. האנרגיה של הגז פרופורציונלית לביטוי הבא:

$$\text{א. } V \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$\text{ב. } V \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1}$$

$$\text{ג. } V \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \frac{d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$\text{ד. } \frac{3}{2} N k_B T$$

שאלה 4 (6 נקודות):

נתונה שרשרת של N קפיצים הרמוניים קוונטיים חד מימדיים הרוטטים בכיוון ציר X ללא אינטראקציה ביניהם. השרשרת מצומדת לאמבט חום בטמפרטורה T . לכל קפיץ יש מסה M וקבוע קפיץ K ($\omega = \sqrt{K/M}$). רשמו ביטוי לאנרגיה של שרשרת הקפיצים (אפשר להתייחס לכל קפיץ בודד כמו לפוטון):

$$\text{א. } N \int_0^\infty \frac{\hbar d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

$$\text{ב. } N \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

$$\text{ג. } N \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} + 1}$$

$$\text{ד. } N k_B T$$

שאלה 5 (6 נקודות):

כעת מחממים את השרשרת שבבעיה הקודמת כך שהאנרגיה התרמית יותר גדולה מכל אנרגיה אחרת בבעיה. רשמו ביטוי לממוצע המיקום בריבוע של כל קפיץ $\langle X^2 \rangle$:

א. $\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \frac{\hbar\omega}{2K}$

ב. $\frac{k_B T}{K}$

ג. $\frac{\int_0^\infty \hbar\omega e^{-\hbar\omega/k_B T} d\omega}{\int_0^\infty e^{-\hbar\omega/k_B T} d\omega} \frac{1}{2K}$

ד. $\frac{2k_B T}{K}$

חלק 2 (70 נקודות + 10 נקודות בונוס)

שאלה 6 (35 נקודות + 5 נקודות בונוס)

נתונות 2 מערכות מוליכות, אחת תלת-ממדית והשנייה דו-ממדית המכילות אלקטרונים עם ספין $1/2$. יחסי הדיספרסיה של האלקטרונים במערכת התלת-ממדית והדו-ממדית בהתאמה הם:

$$\varepsilon_{3D}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y} k_y^2 + \frac{\hbar^2}{2m_z} k_z^2$$

$$\varepsilon_{2D}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0} k_y^2$$

כאשר נתון שהמסות האפקטיביות מקיימות $m_x, m_y, m_z > 0$ ו- $m_0 > 0$.

(א) חשבו את צפיפות המצבים ליחידת נפח $g_{3D}(\varepsilon_{3D})$ של המערכת הראשונה ואת צפיפות המצבים ליחידת שטח $g_{2D}(\varepsilon_{2D})$ של המערכת השנייה. (8 נקודות)

כלי עזר – נפח אליפסואיד תלת ממדי שמתואר ע"י המשוואה $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ הוא $\frac{4}{3}\pi abc$.

(ב) נתון שצפיפות האלקטרונים במערכת הראשונה היא n_{3D} ובמערכת השנייה n_{2D} . חשבו את אנרגיית פרמי של כל אחת מהמערכות. (7 נקודות)

(ג) כעת מחברים את שתי המערכות בעזרת תיל מוליך המאפשר החלפת אלקטרונים. שומרים על $T = 0$ בשתי המערכות. מצאו את הקשר בין הצפיפויות n_{3D} ו- n_{2D} החדשות המתקבלות לאחר חיבור שתי המערכות (אין צורך למצוא את n_{3D} ו- n_{2D} בנפרד). (10 נקודות)

(ד) אחרי הגעה לשיווי משקל, מסירים את החיבור בין שתי המערכות. עכשיו נתמקד במערכת הראשונה (התלת-ממדית). נתון שצפיפות האלקטרונים היא n_{3D} והזמן האופייני לפיזור של האלקטרון בתוך החומר הוא τ . חשבו את מטריצת המוליכות החשמלית הנתונה לפי מודל דרודה $\sigma = n_{3D} e^2 \tau m^{-1}$. (5 נקודות)

(ה) מפעילים שדה חשמלי $\vec{E} = E\hat{x}$ על המערכת מהסעיף הקודם וכתוצאה מכך מקבלים צפיפות זרם \vec{J} בתוך החומר. מהי הזווית בין הזרם לשדה? (5 נקודות)

(ו) **בונוס** – מפעילים שדה מגנטי \vec{B} בכיוון \hat{z} על המערכת הדו-ממדית. יחס הדיספרסיה נתון ע"י הביטוי הבא (ללא אינטראקציית זימן):

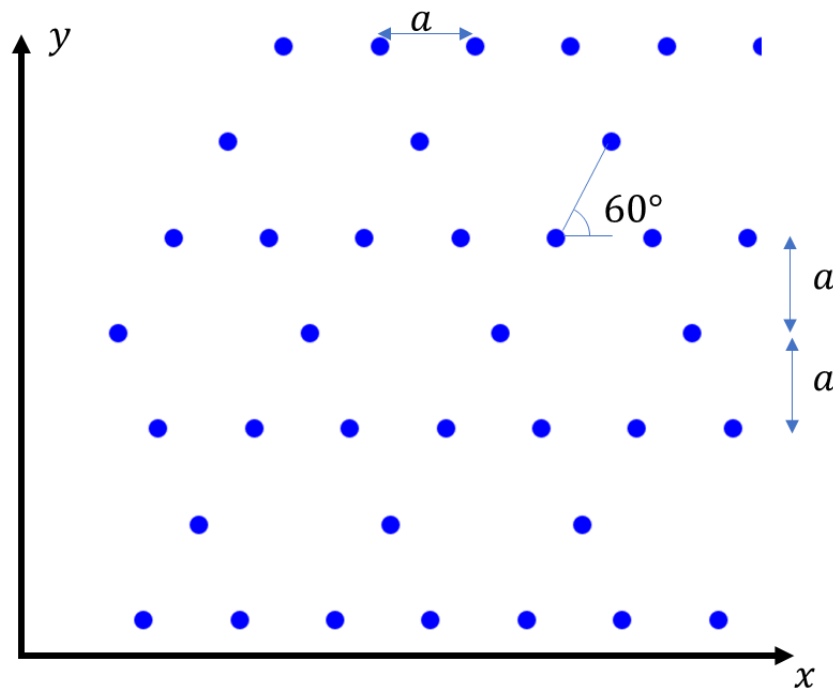
$$\varepsilon_{2D}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_0} (k_x + \frac{e}{\hbar} A_x)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0} (k_y + \frac{e}{\hbar} A_y)^2$$

כאשר $\vec{A} = (A_x, A_y)$ הוא הפוטנציאל הוקטורי והשדה המגנטי הוא $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

מהו הקשר בין צפיפות המצבים כאשר $\vec{B} = 0$ שחישבתם בסעיף א' לבין צפיפות המצבים כאשר $\vec{B} \neq 0$. תנו הסבר איכותי מבלי לעשות חישוב. (5 נקודות)

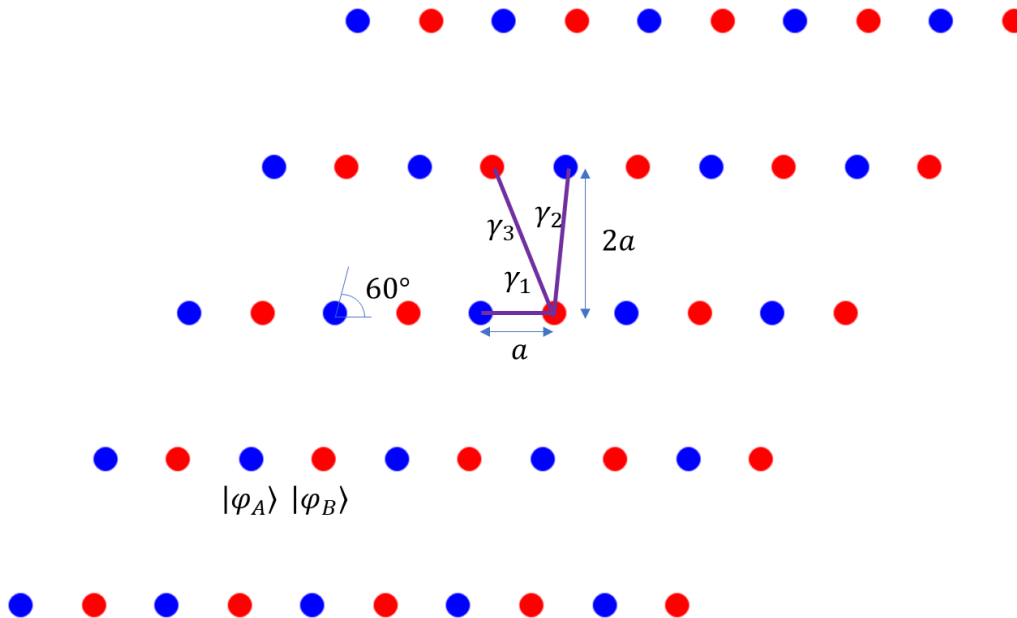
שאלה 7 (35 נקודות + 5 נקודות בונוס)

נתון גביש הבא



- א. (5 נק') רשמו וקטורים ראשוניים ווקטורי הבסיס.
- ב. (5 נק') ציירו (מדויק) על גבי השריג שבחרתם את תא Wigner-Seitz.
- ג. (5 נק') מצאו את הווקטורים של שריג ההופכי וציירו אותו. ציירו את איזור Brillouin הראשון.
- ד. (5 נק') מבלי לפתור את הבעיה הסבירו מהו מספר פסי אנרגיה הצפוי להתקבל בהנחה שכל אטום תורם אורביטל אחד בלבד. הצדיקו את תשובתכם.

כעת נניח שיש גביש הבא :



- ה. (5 נק') מצאו את מבנה הפסים בעזרת שיטת קשירה הדוקה בהנחה שהצימוד בין השכנים הוא γ_1 ואנרגיה של האורביטלים הינה $E_A = E_0$ ו- $E_B = E_A$ בהתאמה.
- התייחסו רק לשכנים עם הצימוד γ_1 ו- γ_2 .
- ו. (5 נק') קבלו ביטוי M^{-1} (טנזור ההופכי של המסה האפקטיבית) במינימום המוחלט של האנרגיה.
- ז. (5 נק') לו היינו לוקחים בחשבון גם צימוד לשכנים עם קבוע צימוד γ_3 מהו מספר פסי אנרגיה שהיינו מקבלים?
- ח. (בנוסף 5 נק') כעת מפעילים שדה חשמלי מהצורה $E = E_0 \hat{x}$ כתבו ביטוי לווקטור גל $\mathbf{k}(t)$ והמהירות $\mathbf{v}(t)$ של האלקטרונים הנמצאים במינימום המוחלט של האנרגיה. הניחו שזמן קצר בהרבה מזמן בין הפיזורים $t \ll \tau$. בנוסף הניחו שהאלקטרונים לא סוטים מהותית המנוקדות מינימום של אנרגיה. כמו כן נתון ש- $\mathbf{v}(0) = 0, \mathbf{k}(0) = 0$

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1 amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^8 m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a + b) + \cos(a - b))$
$\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
$\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a + b) + \sin(a - b))$
$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2(e^{ia} + e^{-ia})$
$\sin(a) = 1/(2i)(e^{ia} - e^{-ia})$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

תוחלת μ
סטטיית תקן σ

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

3	5/2	2	3/2	1	1/2	n
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\Gamma(n)$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	n
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$I(n)$