

**אלקטרוניקה פיסיקאלית 044124**

**סמסטר אביב 2021**

**מועד א**

**הנחיות**

- **משך הבחינה – שלוש שעות**
- **במבחן ישנן 3 שאלות**
- **בדקו שברשותכם 6 עמודים**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 5 דפי נוסחאות דו-צדדיים**
- **הציון המקסימאלי במבחן הינו 105**

**בהצלחה!**

## שאלה מספר 1 (35 נקודות):

(בשאלה הבאה כל הסעיפים בעלי משקל זהה)

נתונה מערכת של שני מומנטים מגנטיים קלאסיים מצומדים המאופיינים ע"י שני וקטורי יחידה

בשלושה ממדים  $S_1$  ו-  $S_2$ . האנרגיה של המערכת המצומדת נתונה ע"י ההמילטוניאן

$$H = -J(S_1 \cdot S_2)$$

כאשר  $J$  הינו קבוע חיובי נתון בעל יחידות של אנרגיה.

א. רשמו ביטוי לאנרגיה של המערכת כפונקציה של הזווית  $\theta$  בין  $S_1$  ו-  $S_2$ . מהו הערך של  $\theta$

במצב היסוד של המערכת?

ב. רשמו ביטוי לפונקציית החלוקה של המערכת.

תזכורת: אינטגרל בקואורדינטות כדוריות של פונקציה  $f(\varphi, \theta)$  על כדור היחידה מקבל את

הצורה:

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi [f(\varphi, \theta) \sin \theta]$$

ג. רשמו ביטוי עבור האנרגיה הממוצעת של המערכת. למה היא שואפת בטמפרטורות מאוד

גבוהות?

ד. מבלי לפתור, תנו הסבר פיזיקלי לאנרגיה הממוצעת המתקבלת בטמפרטורות מאוד גבוהות.

ה. רשמו ביטוי לקיבול החום של המערכת.

נוסחת עוזר לסעיפים הבאים - עבור פונקציה פולינומית כלשהי  $f(\theta)$  מתקיים:

$$\int_0^\pi f(\theta) \exp(-a\theta^2) d\theta \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(\theta) \exp(-a\theta^2) d\theta$$

ו. בטמפרטורות נמוכות, חשבו את הזווית הממוצעת בין  $S_1$  ו-  $S_2$ .

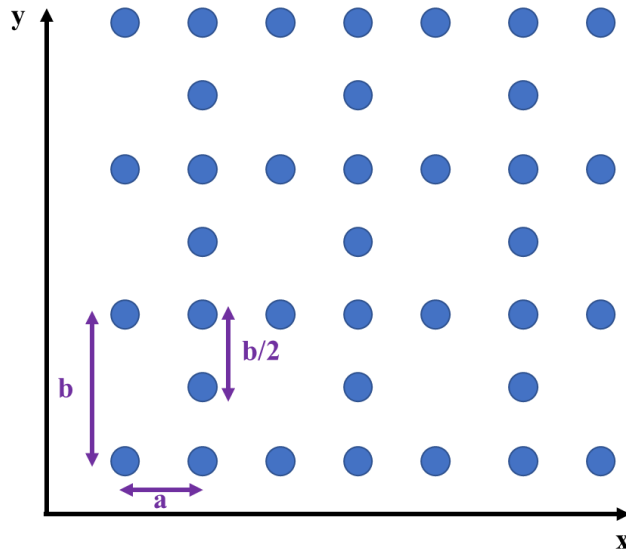
רמז: אילו קרובים אפשר לעשות עם הזווית  $\theta$ ?

ז. בטמפרטורות נמוכות, חשבו את השונות של הזווית בין  $S_1$  ו-  $S_2$ .

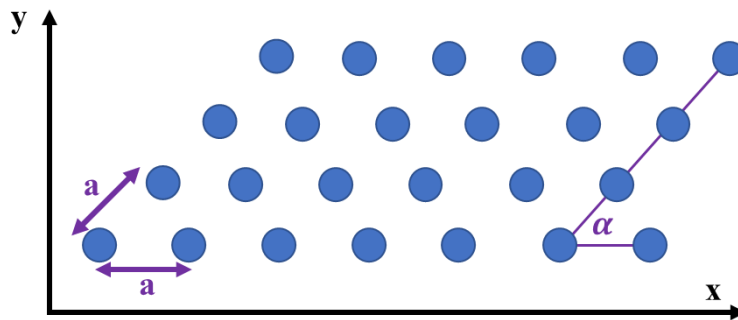
## שאלה מספר 2 (35 + 5 נקודות בונים)

(בשאלה הבאה כל הסעיפים בעלי משקל זהה)

נתון הגביש הדו-ממדי הבא :



- האם זהו סריג Bravais? כתבו מהם וקטורי השריג הראשוניים (primitive) ו-וקטורי הבסיס שלו (אם קיימים).
  - ציירו את תא היחידה. כמה נקודות שריג מוכלות בתוך התא שציירתם?
  - ציירו את תא Wigner-Seitz. כמה נקודות שריג מוכלות בתוך התא שציירתם?
  - על גבי הסריג הישיר, ציירו את משפחות קווי השריג הבאות  $(41)$ ,  $(12)$ ,  $(31)$ .
- כעת נתון שריג מהצורה הבאה :



כאשר  $\alpha = 45^\circ$ .

- הניחו שמקדם הצימוד בין השכנים הקרובים ביותר הינו  $\gamma$  – והאנרגיה של אטום בודד הינה  $\epsilon$ . קבלו את יחס הנפיצה של אלקטרון בגביש. תתחשבו רק שכנים הקרובים ביותר.
- חשבו את וקטור **מהירות החבורה**. חשבו את **טנזור המסה האפקטיבית** סביב תחתית הפס.
- כעת מפעילים שדה קבוע כלשהו  $E_0$  לאורך ציר  $\hat{y}$ . קבלו ביטוי עבור מהירות האלקטרון כפונקציה של הזמן. מהו הזרם הממוצע?
- סעיף בונים (5 נקודות):** כמה זמן לוקח לחלקיק לחצות את אזור Brillouin הראשון?

### שאלה מספר 3 (30 נקודות)

(בשאלה הבאה כל הסעיפים בעלי משקל זהה)

נתון גז פוטונים במהוד אלקטרומגנטי תלת ממדי בעל נפח  $V = L \times L \times L$ .

א. השתמשו ביחס הנפיצה של פוטונים וחשבו את צפיפות המצבים שלהם במהוד ליח' אנרגיה וליח' נפח.

ב. נתון שגז הפוטונים במהוד נמצא בשווי משקל תרמי עם אמבט חום המוחזק בטמפ'  $T$  כלשהי. העזרו בתוצאת הסעיף הקודם וקבלו ביטוי למספר הפוטונים הממוצע  $N$  במהוד בעל נפח  $V$ .

ג. קבלו ביטוי עבור קיבול החום (בנפח הקבוע  $V$ ) של גז הפוטונים במהוד. איזו תלות מתקבלת עבור קיבול החום בטמפ' באיזו מערכת אחרת בקורס ראיתם תלות דומה של קיבול חום בטמפ' מדוע?

ד. מהי האנרגיה הממוצעת פר פוטון במהוד? האם התוצאה מתיישבת עם זו שהייתם מקבלים לפי משפט החלוקה השווה? (בהנחת 2 דרגות חופש פר פוטון). במידה שלא, הסבירו מהיכן נובע ההבדל.

ה. אורך הגל התרמי של פוטונים במהוד נתון (ביח' של  $cm$ ) על ידי הקשר הבא :

$$\lambda_T^{photon} \cong \frac{0.51}{T [K]} [cm]$$

נגדיר את צפיפות הפוטונים במהוד בתור  $n = N/V$  כאשר  $N$  הינו הביטוי שמצאתם בסעיף ב'.

בהינתן שהמהוד מצומד לאמבט חום המוחזק בטמפ' החדר ( $T = 300[K]$ ), מצאו מהו היחס בין אורך הגל התרמי למרחק הממוצע בין פוטונים במהוד והסבירו את משמעות היחס.

**טבלת נוסחאות שימושיות:**

**גדלים פיזיקליים שימושיים:**

Atomic Weight Conversion	$1 amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^8 m/sec$

**זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:**

Trigonometric Identities
$\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = (1 - \cos(2a))/2$
$\cos^2 a = (1 + \cos(2a))/2$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = (e^{ia} + e^{-ia})/2$
$\sin(a) = (e^{ia} - e^{-ia})/(2i)$
Hyperbolic Identities
$\cosh(a) = (e^a + e^{-a})/2$
$\sinh(a) = (e^a - e^{-a})/2$
$\operatorname{sech}(a) = \cosh^{-1}(a)$
$\operatorname{csch}(a) = \sinh^{-1}(a)$
$\tanh(a) = \sinh(a) / \cosh(a)$
$\coth(a) = \cosh(a) / \sinh(a)$
$\sinh'(a) = \cosh(a)$
$\tanh'(a) = \operatorname{sech}^2(a)$
$\coth'(a) = -\operatorname{csch}^2(a)$

## אינטגרליים שימושיים:

### Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu$  תוחלת  
 $\sigma$  סטיית תקן

### Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

### Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$n$	1/2	1	3/2	2	5/2	3
$\Gamma(n)$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2

### Polylogarithm

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^{\alpha x} - 1} dx \equiv \frac{1}{\alpha^{n+1}} J(n), \quad n > 0$$

$n$	1	2	3	4	5
$J(n)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$2\zeta(3) \approx 2.404$	$\frac{\pi^4}{15}$	$24\zeta(5) \approx 24.886$	$\frac{8\pi^6}{63}$

### More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

$n$	0	1	2	3	4	5
$I(n)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$