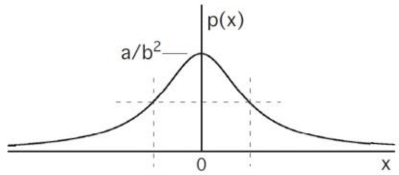
תרגיל בית מספר 1: הסתברות ומבוא לפיזיקה סטטיסטית

שאלה 1: הסתברות

התייחסו לפונקציית צפיפות ההסתברות (PDF) הבאה:

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + b^2}$$



פונקציה זו נקראת לורנציאן (או צפיפות ההסתברות של קושי) וניתן להשתמש בה כדי לתאר הרחבה ספקטרלית של פליטת קרינה מאטום.

א. השתמשו בנרמול וקבלו את הקשר בין הפרמטרים a ו-b.
ב. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת (CDF) $F(x)$ ושרטטו את צורת העקום שהתקבל.

תזכורת: פונקציית ההתפלגות המצטברת (CDF) מקיימת:

$$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'$$

ג. מצאו את ערכי x היכן שה-PDF נופל לחצי מערכו המקסימלי
וחשבו את ה-FWHM -Full width at half maximum של הלורנציאן.
ד. מה קורה ל-$\langle x \rangle$ ול-$\langle x^2 \rangle$ המתקבלים מהתפלגות זו?

תזכורת – הנוסחה לממוצע של פונקציה של משתנה מקרי רציף x היא

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

כאשר $p(x)$ פונקציית צפיפות ההסתברות.

שאלה 2: הסתברות במקומות לא צפויים

בתרגול ראיתם את ההתפלגות הפואסונית. עבור פרמטר קצב λ, ההסתברות לספור k אירועים היא:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

א. הראו שפונקציית הסתברות זו מנורמלת כנדרש.
ב. חשבו את התוחלת של ההתפלגות הפואסונית.

ההתפלגות הפואסונית טובה לתיאור מצבים פיזיקליים רבים בהם ישנו רצף אירועים "נדירים" אשר אינם תלויים זה בזה. הדוגמה המתועדת הראשונה של מצב כזה (ששימשה מוטיבציה לסימון דניס פואסון לגלות

את התפלגות זו) היא דוגמה לא שגרתית: מספר האירועים בהם אדם נבעט למוות על ידי סוס בצבא הפרוסי אשר תועדו בין השנים 1875 ל-1894 בכל חיל של הצבא. להלן טבלה המתארת את האירועים השונים:

מספר האירועים שתועדו	מספר מקרי מוות פר חיל פר שנה
109	0
65	1
22	2
3	3
1	4
0	≥5

ג. חשבו את מספר מקרי המוות פר חיל פר שנה הממוצע.
ד. נרמלו את מספר האירועים שתועדו ביחס לסך האירועים. הציגו בטבלה את המספר המנורמל כפי שהתקבל מהנתונים לצד המספר המנורמל כפי שהתקבל מהתפלגות פואסונית עם הפרמטר שחישבתם בסעיף הקודם.

שאלה 3: החשיבות של מספר המדידות

בתרגול ראיתם את הגדרות התוחלת והשונות של משתנים אקראיים. עבור אוסף של משתנים אקראיים X_n אשר אינם תלויים זה בזה, אם נגדיר משתנה חדש $Y=\sum X_n$, השונות של משתנה זה תקיים:

$$Var[Y]=\sum Var[X_n]$$

עוד נתון ש- $Var[aX]=a^2Var[X]$.

בניסויים פיזיקליים רבים (כמו למשל במעבדות השונות אותן תיקחו במהלך התואר) נהוג לקחת מספר רב של מדידות ולבצע מיצוע. נתון שמבצעים n מדידות בלתי תלויות של גודל פיזיקלי מסויים X_n. נגדיר את הממוצע של גודל זה כ- $Y=\frac{1}{n}\sum X_n$.

א. חשבו את התוחלת והשונות של Y. מה ניתן להסיק מהתוצאות שקיבלתם?
ב. אתם משתתפים בהגרלה. בכל השתתפות בודדת בהגרלה יש שתי תוצאות אפשריות, זכייה או הפסד כאשר ההסתברות לזכייה היא p. נניח שהשתתפתם בהגרלה N פעמים, כאשר כל הגרלה בודדת לא תלויה באחרות. הראו כי ההסתברות שלכם לזכות k פעמים מתוך N מתפלג בינומית (רמז - השתמשו בקומבינטוריקה).
ג. בכל זכייה בהגרלה בודדת אתם זוכים בתיק של אס״ט. מה ממוצע התיקים שתזכו בהם בהגרלה בודדת? מה השונות?
ד. חשבו באופן מפורש את התוחלת והשונות של מספר התיקים שתזכו בהם בN הגרלות על ידי שימוש בהתפלגות הבינומית. הראו כי התוצאות שקיבלתם מקיימות את הנוסחאות מסעיף א׳ עבור סכום משתנים אקראיים בלתי תלויים.

בעצם מה שאתם מראים בשלוש הסעיפים האחרונים הוא את הדבר הבא: נגדיר משתנה מקרי X המתאר השתתפות בהגרלה בודדת ומקבל את הערך 1 במקרה של זכיה ואת הערך 0 במקרה של הפסד. כעת נגדיר משתנה מקרי חדש המתאר את מספר ההצלחות ב N הגרלות כלומר $Y = X_1 + X_2 + \ ... + X_N$

עליכם להראות כי Y מתפלג בינומית, וכי השונות והתוחלת של Y אכן מקיימות את הנוסחאות מסעיף א'.

שאלה 4: סימולצית מטלב של הילוך שיכור דו-מימדי

בתרגיל הכיתה ראיתם את מודל ההילוך שיכור במימד אחד. כעת נראה כיצד נראה מודל ההילוך השיכור בדו-מימד. בשלב הראשון נכתוב פונקציה עבור הילוך שיכור חד-מימדי.

הבעיה מוגדרת באופן הבא:

פרמטר	**סימון**
מספר הצעדים הכולל	N
גודל כל צעד	a
הסתברות לנוע ימינה	p
הסתברות לנוע שמאלה	$q = 1 - p$

א. כתבו פונקציה אשר מקבלת כקלט את כל הפרמטרים הנ"ל ושהפלט שלה הינו מיקום השיכור כתלות במספר הצעדים. ניתן להניח שהשיכור התחיל ב-0.

הדרכה/המלצה: ניתן להשתמש בפונקציה rand אשר מגרילה באופן אחיד ערך בין 0 ל-1 ולאחר מכן לברור בין ערכים הגדולים מ- p או קטנים ממנו על מנת לדמות את אופי הבחירה.

ב. ציירו גרף של מיקום השיכור כתלות במספר הצעדים עבור $N = 1000, a = 1, p = 1/2$. הקפידו על כותרת, שמות צירים ונראות (ניתן לישם את כל הנ"ל ישירות במטלב).

ג. ציירו גרף של מיקום השיכור כתלות במספר הצעדים עבור $N = 1000, a = 1, p = 0.55$. הקפידו על כותרת, שמות צירים ונראות (ניתן לישם את כל הנ"ל ישירות במטלב). הסבירו את התוצאה שהתקבלה.

כעת נכתוב פונקציה עבור הילוך שיכור דו-מימדי. הבעיה מוגדרת באופן הבא:

פרמטר	**סימון**
מספר הצעדים הכולל	N
גודל כל צעד בכל ציר	a
הסתברות לנוע ימינה	p_x
הסתברות לנוע שמאלה	$q_x = 1 - p_x$

הסתברות לנוע מעלה	p_y
הסתברות לנוע מטה	$q_y = 1 - p_y$

ד. כתבו פונקציה אשר מקבלת כקלט את כל הפרמטרים הנ״ל ושהפלט שלה הינו מיקום השיכור כתלות במספר הצעדים. ניתן להניח שהשיכור התחיל ב-0 וכן ניתן להניח שבכל צעד השיכור יכול לנוע ב-2 הצירים בו-זמנית.

ה. ציירו גרף של מיקום השיכור כתלות במספר הצעדים עבור $N = 10000, a = 1, p_x = 1/2, p_y = 1/2$.
הקפידו על כותרת, שמות צירים ונראות (ניתן לישם את כל הנ״ל ישירות במטלב).

ו. ציירו גרף של מיקום השיכור כתלות במספר הצעדים עבור $N = 10000, a = 1, p_x = 0.55, p_y = 0.45$
הקפידו על כותרת, שמות צירים ונראות (ניתן לישם את כל הנ״ל ישירות במטלב). הסבירו את התוצאה שהתקבלה.

על מנת לבדוק האם חוק המספרים הגדולים מתקיים, עלינו לבדוק את הסטטיסטיקה עבור מספר רב של שיכורים בלתי תלויים זה בזה.

ז. בהסתמך על הפונקציה בסעיף ד׳ (ניתן לשנותה אם צריך), כתבו פונקציה המבצעת חישוב דומה עבור M שיכורים שונים ושהפלט שלה הינו היסטוגרמה של מיקום השיכורים בציר x (ימינה/שמאלה) בצעד ה- N.

הערה: על מנת לחסוך בחישובים, שימרו רק את הערך ה- N.

ח. ציירו היסטוגרמה של מיקום השיכורים בציר x בצעד ה- N עבור
$M = 10000, N = 100, a = 1, p_x = 1/2, p_y = 1/2$ (אם מטלב לא סוחב, תקטינו את הוקטור).
הקפידו על כותרת, שמות צירים ונראות (ניתן לישם את כל הנ״ל ישירות במטלב). הסבירו את התוצאה שהתקבלה.

ט. ראינו בתרגול שחוק המספרים הגדולים אמור לתת את ההתפלגות הבאה:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2N}}$$

היות וסכום הערכים בהיסטוגרמה שווה למספר השיכורים, ניקח את $f(x)$ ונכפיל ב- M ונצפה לקבל התאמה להיסטוגרמה.
ציירו שוב את ההיסטוגרמה מהסעיף הקודם והוסיפו את ההתפלגות הנ״ל. האם השתיים תואמות? מדוע?