אלקטרוניקה פיזיקלית 044124

סמסטר אביב 2019

מועד א'

הנחיות

1. משך הבחינה – שלוש שעות.

2. בבחינה 4 שאלות. בידקו כי ברשותכם 5 עמודים כולל עמוד זה.

3. ניתן להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא כולל מחשבונים פרט לציוד תקשורת אלקטרוני (מחשב, טאבלט, טלפון וכו').

5. יש להגיש את מחברת הבחינה בלבד.

6. כיתבו בכתב יד ברור.

7. תשובות לא מנומקות לא תתקבלנה.

8. אנא ודאו שרשמתם את מספר תעודת הזהות על מחברת הבחינה.

שאלה מספר 1 (20 נקודות):

בשאלה זו נפתח שוב את מודל הפסים ע"י שימוש בקירוב האלקטרונים הכמעט-חופשיים.

1. (5 נק') – נתון הפוטנציאל $V(x)=0$. הראו שהפתרונות למשוואת שרדינגר שאינה תלויה בזמן הם גלים מישוריים.

בתרגול בנושא מכניקת הקוונטים ראינו שהפתרונות המתקבלים עבור היעדר פוטנציאל הם גלים מישוריים (כלומר פונקציות הגל של חלקיקים חופשיים):

$$\psi_1 = A_1 e^{ikx}, \psi_2 = A_2 e^{-ikx}, k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

לכן הפתרון הכללי הוא סופרפוזיציה של שני הפתרונות הנ"ל.

2. (10 נק') - כעת נתון הפוטנציאל $V(x)=V_0\cos(\frac{2\pi}{a}x)$ כאשר נרצה לראות כיצד הפוטנציאל הנ"ל מצמד בין 2 הגלים המישוריים מהסעיף הקודם. נגדיר את הצימוד בין שתי פונקציות גל באופן הבא: $C=\langle\psi_k(x)|V(x)|\psi_{-k}(x)\rangle$ כאשר $\psi_{\pm k}(x)$ הם הפתרונות מהסעיף הקודם. ניתן להניח שפונקציות הגל מנורמלות. מצאו את התנאי עבור a ו- k שעבורו C לא יתאפס. הסבירו מדוע ציפינו לקבל את התנאי הנ"ל?

הערה: במידת הצורך היעזרו בזהויות הטריגונומטריות שבסוף המבחן.

הפעולה אותה עלינו לבצע הינה הכפלה של 2 פונקציות הגל בפוטנציאל המחזורי וביצוע אינטגרל על כל המרחב. יתקיים:

$$C(k,q)=\langle\psi_1(x)|V(x)|\psi_2(x)\rangle=V_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\cos(\frac{2\pi}{a}x)e^{ikx}dx=$$

$$=\frac{V_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2ikx}[e^{\frac{2\pi}{a}x}+e^{-\frac{2\pi}{a}x}]dx=\frac{V_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{i(2k+\frac{2\pi}{a})x}+e^{i(2k-\frac{2\pi}{a})x}]dx$$

על מנת שהאינטגרל לא יתאפס, עלינו לדרוש שסך וקטורי הגל בהכרח יתאפס, כלומר שאחד משני התנאים חייב להתרחש:

$$\left\{\begin{array}{l}2k+\frac{2\pi}{a}=0\\ 2k-\frac{2\pi}{a}=0\end{array}\right.\Rightarrow k=\pm\frac{\pi}{a}$$

וזהו התנאי לכך ש-C לא יתאפס. למעשה מדובר בקצוות אזור ברילואין הראשון ושם מתקבל הצימוד המקסימלי בין הגל המגיע לגל החוזר.

3. (5 נק') - כעת נתון שקבוע השריג $a=1[\mu m]$. עבור אלקטרונים בטמפרטורת החדר, האם נצפה לראות תופעות גליות הקשורות לשריג? אם לא, באיזו טמפרטורה האלקטרונים צריכים להיות על מנת לראות את התופעות הנ"ל? נמקו!

רמז: היזכרו בהגדרת אורך הגל התרמי.

כפי שראינו בתרגול, ניתן להגדיר את אורך הגל התרמי ולקשר בין הטמפרטורה לאורך הגל הטיפוסי. על מנת לראות תופעות גליות, נדרוש שיתקיים:

$$\lambda_{th} = \frac{2\pi}{k} \approx 2a$$

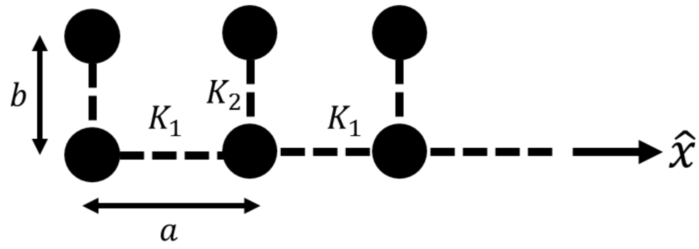
אורך הגל התרמי מקיים :

$$\lambda_{th} = 2a = \frac{h}{\sqrt{3m_e k_B T}} \Rightarrow \sqrt{T} = \frac{h}{2a\sqrt{3m_e k_B}} \Rightarrow T = \frac{h^2}{12a^2 m_e k_B} = 2.91[mK]$$

מדובר בטמפרטורה קטנה מאוד, במיוחד לעומת טמפרטורת החדר. לכן במבנה המחזורי הנ״ל לא נצפה לראות תופעות גליות ע״י אלקטרונים.

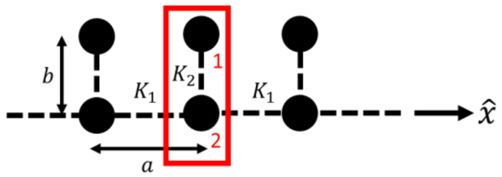
<u>שאלה מספר 2 (35 נקודות):</u>

נתונה שרשרת של אטומים אשר כולם בעלי מסה m (ראו איור מצורף). עוד נתון שמותרת תנועה רק בכיוון ציר x.



1. (15 נק') – מצאו את המטריצה האופיינית של הבעיה (אין צורך לחשב את יחס הנפיצה מתוך מטריצה זו).

נתחיל ממציאת תא היחידה:



כלומר שישנם 2 אטומים פר תא יחידה. האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת תהיה:

$$U=\frac{K_1}{2}(u_{n,2}-u_{n-1.2})^2+\frac{K_1}{2}(u_{n+1,2}-u_{n.2})^2+\frac{K_2}{2}(u_{n,1}-u_{n.2})^2$$

נצפה ל-2 משוואות תנועה ונגזור את הביטוי עבור כל אטום:

$$\begin{cases} m\ddot{u}_{n,1}=-\dfrac{dU}{du_{n,1}}=-K_2(u_{n,1}-u_{n.2}) \\ m\ddot{u}_{n,2}=-\dfrac{dU}{du_{n,2}}=-K_1(u_{n,2}-u_{n-1.2})+K_1(u_{n+1,2}-u_{n.2})+K_2(u_{n,1}-u_{n.2}) \end{cases}$$

נגדיר 2 גלים מישוריים עבור כל אחד מהאטומים:

$$\begin{cases} u_{n,1}=A_1e^{ikna-i\omega t} \\ u_{n,2}=A_2e^{ikna-i\omega t} \end{cases}$$

נציב את הביטויים הנ"ל אל תוך סט המשוואות שקיבלנו מקודם:

$$\begin{cases} -m\omega^2A_1e^{ikna-i\omega t}=-K_2(A_1e^{ikna-i\omega t}-A_2e^{ikna-i\omega t}) \\ -m\omega^2A_2e^{ikna-i\omega t}=-K_1(A_2e^{ikna-i\omega t}-A_2e^{ik(n-1)a-i\omega t})+K_1(A_2e^{ik(n+1)a-i\omega t}-A_2e^{ikna-i\omega t})+K_2(A_1e^{ikna-i\omega t}-A_2e^{ikna-i\omega t}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -m\omega^2A_1=-K_2(A_1-A_2) \\ -m\omega^2A_2=-K_1(A_2-A_2e^{-ika})+K_1(A_2e^{ika}-A_2)+K_2(A_1-A_2) \end{cases}$$

נסדר את האיברים השונים ונעבור להצגה מטריציונית:

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = -K_2(A_1 - A_2) \\ -m\omega^2 A_2 = -K_1(A_2 - A_2 e^{-ika}) + K_1(A_2 e^{ika} - A_2) + K_2(A_1 - A_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A_1(-m\omega^2 + K_2) + A_2(-K_2) = 0 \\ A_1(-K_2) + A_2(2K_1 + K_2 - K_1 e^{-ika} - K_1 e^{ika} - m\omega^2) = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_2 - m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & 2K_1 + K_2 - K_1 e^{-ika} - K_1 e^{ika} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_2 - m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & 2K_1 + K_2 - 2K_1\cos(ka) - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הפעלת דטרמיננטה על המטריצה הנ"ל תניב את יחסי הנפיצה.

2. (10 נקי) - עבור $k = 0$, מצאו את תדרי התנודות של האטומים בתא היחידה. כמה סוגי תנודות כאלה קיימים בבעיה? הסבירו איזה אופן (אקוסטי/אופטי) שייך לכל תנודה.

נציב k=0 אל תוך הדטרמיננטה ונחפש ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים:

$$\begin{vmatrix} K_2 - m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & 2K_1 + K_2 - 2K_1 - m\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_2 - m\omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (K_2 - m\omega^2)^2 - K_2^2 = 0 \Rightarrow K_2^2 - 2K_2 m\omega^2 + m^2\omega^4 - K_2^2 = 0 \Rightarrow m^2\omega^4 - 2K_2 m\omega^2 = 0$$

ניתן לראות שמצאנו את הפתרון $\omega^2 = 0$ שהוא הפתרון האקוסטי. נמשיך לחפש את שאר הפתרונות:

$$m^2\omega^2 - 2K_2 m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2K_2}{m}$$

פתרון זה שייך לענף האופטי שכן הוא אינו מתאפס עבור k=0.

3. (10 נקי) – מצאו את הווקטורים העצמיים עבור התדרים מהסעיף הקודם וציירו (בצורה איכותית) את תנועת האטומים בתא היחידה עבור כל תדר.

נציב את התדר העצמי $\omega = 0$ במטריצה ונחלץ את הוקטור העצמי:

$$\begin{pmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_2 A_1 - K_2 A_2 = 0 \\ -K_2 A_1 + K_2 A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_2 \\ A_1 = A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר שהאטומים נעים באותו הכיוון בהתאם למצופה ממוד אקוסטי.

נציב את התדר העצמי $\omega = \sqrt{\frac{2K_2}{m}}$:

$$\begin{pmatrix} -K_2 & -K_2 \\ -K_2 & -K_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

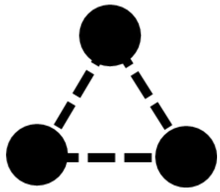
$$\Rightarrow \begin{cases} -K_2 A_1 - K_2 A_2 = 0 \\ -K_2 A_1 - K_2 A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -A_2 \\ A_1 = -A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ -A_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

במקרה זה, האטומים ינועו בכיוונים מנוגדים כפי שמצופה ממוד אופטי.

<u>שאלה מספר 3 (25 נקודות):</u>

נתונה מערכת של מולקולות (ללא אינטראקציה ביניהן) כאשר כל מולקולה מורכבת משלושה אטומים זהים (ראו איור) אשר לכל אחד מהם רמת אנרגיה ε .



עוד נתון כי בין כל זוג אטומים ישנו צימוד זהה בעל אנרגיה אופיינית λ .

1. (5 נקי) - בהינתן שפונקציית הגל של כל אטום היא מצב עצמי, כיצד תיראה מטריצת האנרגיה של המולקולה (לפני לכסון)?

היות וכל מצב מצומד לכל מצב אחר והיות וישנם 3 מצבים עצמיים טיפוסיים בגלל האטומים, נקבל מטריצה של 3 על 3 :

$$H=\begin{pmatrix}\varepsilon & \lambda & \lambda\\ \lambda & \varepsilon & \lambda\\ \lambda & \lambda & \varepsilon\end{pmatrix}$$

לחילופין, גם התשובה שבה הופיעו הצימודים $-\lambda$ נכונה. התשובות לשאלה זו משתמשות בנוטציה שמופיעה במטריצה הנ״ל.

2. (6 נקי) – מהן האנרגיות העצמיות החדשות?

נמצא את האנרגיות העצמיות החדשות של המולקולה :

$$|H-IE|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\varepsilon-E & \lambda & \lambda\\ \lambda & \varepsilon-E & \lambda\\ \lambda & \lambda & \varepsilon-E\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varepsilon-E)\cdot[(\varepsilon-E)^2-\lambda^2]-\lambda\cdot[\lambda\cdot(\varepsilon-E)-\lambda^2]+\lambda\cdot[\lambda^2-\lambda\cdot(\varepsilon-E)]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varepsilon-E)\cdot(\varepsilon-E+\lambda)\cdot(\varepsilon-E-\lambda)-\lambda^2\cdot(\varepsilon-E-\lambda)-\lambda^2(\varepsilon-E-\lambda)=0$$

כבר מצאנו פתרון ראשון: $E_1=\varepsilon-\lambda$. נמשיך למצוא את שני הפתרונות האחרים :

$$(\varepsilon-E)\cdot(\varepsilon-E+\lambda)-2\lambda^2=0\Rightarrow\varepsilon^2-\varepsilon E+\varepsilon\lambda-E\varepsilon+E^2-E\lambda-2\lambda^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E^2-E(2\varepsilon+\lambda)+\varepsilon^2+\varepsilon\lambda-2\lambda^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{2,3}=\frac{2\varepsilon+\lambda\pm\sqrt{(2\varepsilon+\lambda)^2-4(\varepsilon^2+\varepsilon\lambda-2\lambda^2)}}{2}=$$

$$=\frac{2\varepsilon+\lambda\pm\sqrt{4\varepsilon^2+4\varepsilon\lambda+\lambda^2-4\varepsilon^2-4\varepsilon\lambda+8\lambda^2}}{2}=$$

$$=\frac{2\varepsilon+\lambda\pm\sqrt{9\lambda^2}}{2}=\frac{2\varepsilon+\lambda\pm3\lambda}{2}=\varepsilon+2\lambda,\varepsilon-\lambda$$

ובסה״כ:

$$E_1=\varepsilon-\lambda$$

$$E_2=\varepsilon-\lambda$$

$$E_3=\varepsilon+2\lambda$$

3. (6 נק') - מהי פונקציית החלוקה של המערכת? מהי האנרגיה הממוצעת עבור כל מולקולה במערכת? הניחו שרמת האנרגיה הנמוכה ביותר מוגדרת כ- 0, כלומר $\varepsilon = 0$.

נעיר שהניסוח של השאלה אינו ברור. ההגדרה $\varepsilon = 0$ אינה שקולה לכך שרמת האנרגיה הנמוכה ביותר 0. אי לכך התקבלו גם תשובות שהניחו שהרמה הראשונה היא 0. למעשה אין שום בעיה עם הגדרה של כל אחת מהאנרגיות כ-0 ואין שום בעיה עם היות חלק מהאנרגיות (או כולן) שליליות. בכ"ז עם ההגדרה הנ"ל. נחשב את פונקציית החלוקה Z לפי הגדרה:

$$Z = \sum e^{-\frac{E}{k_B T}} = 2e^{\frac{\lambda}{k_B T}} + e^{-\frac{2\lambda}{k_B T}}$$

ניתן לחשב את האנרגיה הממוצעת מחישוב התוחלת על ההסתברויות השונות או לחילופין, להשתמש ישירות בפונקציית החלוקה (ראיתם זאת בהרצאה/תרגול). נשתמש בחישוב הישיר:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum E_i P_i}{Z} = \frac{-2\lambda e^{\frac{\lambda}{k_B T}} + 2\lambda e^{-\frac{2\lambda}{k_B T}}}{2e^{\frac{\lambda}{k_B T}} + e^{-\frac{2\lambda}{k_B T}}} = \frac{-2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 2\lambda}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1}$$

ניתן לבצע בדיקת שפיות ולראות שכאשר הטמפרטורה שואפת ל-0, הערך הממוצע של האנרגיה הוא $-\lambda$ – כצפוי. מנגד, כאשר הטמפרטורה שואפת לערך גבוה, הממוצע הופך ל-0, שוב כצפוי (שתי הרמות המנוונות מבטלות את הרמה הגבוהה).

4. (8 נק') – מהו קיבול החום של המערכת? שרטטו איכותית את קיבול החום של המערכת כתלות בטמפרטורה, ציינו אזורים שונים על פני הגרף והסבירו את תשובתכם.

ניתן לקבל את קיבול החום של המערכת ע"י גזירת האנרגיה הממוצעת בטמפרטורה:

$$C = \frac{d\langle E \rangle}{dT} = \frac{d}{dT}[[-2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 2\lambda]\cdot[2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1]^{-1}] = [\frac{6\lambda^2}{k_B T^2} e^{\frac{3\lambda}{k_B T}}]\cdot[2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1]^{-1} + [-2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 2\lambda]\cdot[2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1]^{-2}\cdot\frac{6\lambda}{k_B T^2} e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} =$$

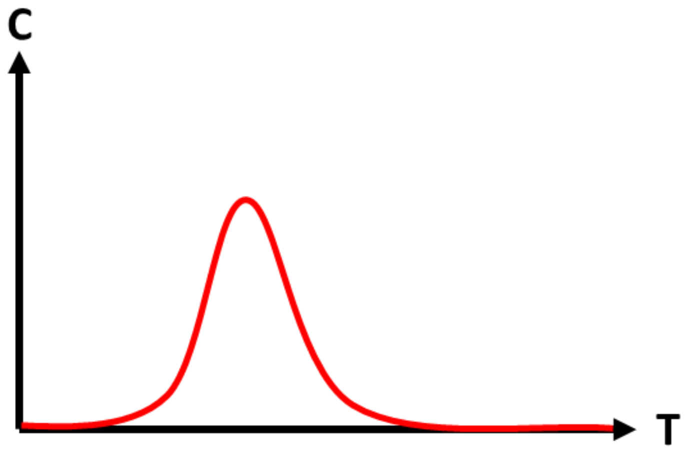
$$= \frac{1}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1}\cdot[\frac{6\lambda^2}{k_B T^2} e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + \frac{6\lambda}{k_B T^2} e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} \cdot \frac{-2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 2\lambda}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1}] = \frac{\frac{6\lambda}{k_B T^2} e^{\frac{3\lambda}{k_B T}}}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1}\cdot[\lambda + \frac{-2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 2\lambda}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1}] =$$

$$= \frac{6\lambda}{k_B T^2}\cdot\frac{1}{2 + e^{-\frac{3\lambda}{k_B T}}}\cdot[\frac{2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + \lambda}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1} + \frac{-2\lambda e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 2\lambda}{2e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + 1}] = \frac{18\lambda^2}{k_B T^2}\cdot\frac{1}{4e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + e^{-\frac{3\lambda}{k_B T}} + 4}$$

נתבונן בתוצאה שקיבלנו. עבור טמפרטורות גבוהות מאוד, כל אחד מהאקספוננטים שואף ל-1. עקב התלות בטמפרטורה בריבוע במכנה, קיבול החום ישאף ל-0 עבור טמפרטורות גבוהות. עבור טמפרטורות נמוכות, האקספוננטים הופכים לדומיננטים, כלומר שנקבל:

$$C = \frac{18\lambda^2}{k_B T^2}\cdot\frac{1}{4e^{\frac{3\lambda}{k_B T}} + e^{-\frac{3\lambda}{k_B T}} + 4} \approx \frac{18\lambda^2}{k_B T^2\cdot 4e^{\frac{3\lambda}{k_B T}}} = \frac{18\lambda^2}{4k_B T^2}\cdot e^{-\frac{3\lambda}{k_B T}}$$

במקרה זה האקספוננט מנצח ונצפה שקיבול החום ישאף ל-0 גם בטמפרטורות נמוכות. שימו לב שהדבר נדרש עקב החוק ה-3 של התרמודינמיקה! היות וקיבול החום שואף ל-0 בטמפרטורות גבוהות ונמוכות, נצפה למקסימום כלשהוא. המקסימום יתאים להפרש בין האנרגיות של המצבים ונקבל בסה"כ:



נצדיק את הגרף הנ"ל מנקודת מבט פיזיקלית: על מנת שמערכת כלשהיא תדע לאגור חום, היא צריכה לעבור ממצבים בעלי אנרגיה נמוכה למצבים בעלי אנרגיה גבוהה (למשל ע"י חלקיקים המצויים במצבים הנ"ל). בטמפרטורות נמוכות, האנרגיה התרמית של המולקולות קטנה מכדי להעבירן מהמצב הנמוך למצב הגבוה. כאשר האנרגיה התרמית גדלה (עקב עליה בטמפרטורה) ומגיעה בערכה להפרש בין אנרגיות המצבים (3λ), קיבול החום קופץ למקסימום שכן ניתן לעבור בקלות בין 2 המצבים. בטמפרטורות גבוהות קיבול החום שוב שואף ל-0 וזאת מכיוון שכל המצבים בעלי האנרגיות הגבוהות מאוכלסים ולמעשה המערכת לא מסוגלת לאגור על עצמה אנרגיה נוספת.

שאלה מספר 4 (20 נקודות):

ענו על הסעיפים הבאים בקצרה – עד 4-5 משפטים לכל סעיף **(הסעיפים אינם קשורים זה לזה)**. נמקו את תשובותיכם היטב. באם יש צורך, השתמשו בנוסחאות אותן ראינו בקורס :

1. (2 נקי) – לאטום בודד ישנו מספר רב של רמות אנרגיה מותרות. עבור מספר אטומים זהים היוצרים שריג, רמות האנרגיה הגבוהות יותר נוטות ליצור פסי אנרגיה בעוד שהרמות התחתונות נוטות להישאר מבודדות. הסבירו מדוע (רמז : כיצד נראה הפוטנציאל האטומי הטיפוסי?)

   הפוטנציאל האטומי הוא מהצורה של $1/r$, כלומר שמצבים נמוכים יותר כלואים יותר. כאשר אנו מחברים מספר אטומים, מצבים נמוכים יטו שלא ליצור פסי אנרגיה מהסיבה הזו.

2. (2 נקי) – שריג העשוי מסיליקון אינו מסוגל לפלוט פוטונים בשל היותו בעל פער אנרגיה עקיף. אטום הסיליקון הבודד כן מסוגל לפלוט פוטונים. מדוע?

   עבור האטום הבודד כל מצבי האנרגיה ממוקמים במרחב ולא מרוחים על כולו. היות ומצבי האנרגיה ממוקמים במרחב, כל מצב מכיל מספר רב של תנעים (עקרון אי הודאות) כאשר תנעים אלה חופפים בין כל המצבים, ולכן בליעה ופליטה של פוטונים מותרת.

3. (2 נקי) - בליעה/פליטה של פוטון מצויינת כקו אנכי במבנה הפסים של השריג. מדוע?

   התנע הטיפוסי עבור פוטונים הרבה יותר קטן מאשר התנע האלקטרוני בשריג ולכן יחס הנפיצה הפוטוני יראה בקירוב טוב מאוד כקו אנכי על דיאגרמת הפסים האלקטרונית.

4. (2 נקי) – בהרצאה/תרגול ראיתם שעבור בור-פוטנציאל כלשהו, רמת האנרגיה הראשונה תמיד ממוקמת באנרגיה מסויימת שהיא מעל לתחתית הבור. מדוע?

   היות ועל החלקיק הכלוא בבור לקיים את עקרון אי-הודאות, בהכרח שרמות האנרגיה ימצאו מעל לתחתית הבור (ובפרט רמת האנרגיה הראשונה). אם הרמה הראשונה הייתה ממוקמת בתחתית הבור, התנע של החלקיק היה זהותית אפס ועל כן מיקומו אמור היה להיות אינסופי, אך הדבר אינו אפשרי.

5. (2 נקי) – עיבוי בוזה-איינשטיין אינו אפשרי בשריג דו-מימדי. מדוע?

   עבור שריג תלת-מימדי, ראיתם שישנו מצב אנרגטי אחד שהוא הכי נמוך ולכן כל הבוזונים מתרכזים בו. עבור שריג דו-מימדי, ישנו מספר רב של מצבים אנרגטים נמוכים ולכן הבוזונים יתפזרו בין כולם ולא יתעבו על מצב אחד.

6. (2 נקי) – כיצד תיאוריית הגוף השחור של פלנק פתרה את קטסטרופת האולטרא-סגול?

   קטסטרופת האולטרה-סגול הראתה שבאורכי גל קטנים אנו מצפים לצפיפות אנרגיה אינסופית שכן עבור אורכי גל קטנים מצופה שיהיו מצבי אנרגיה רבים מאוד. העובדה שפוטונים הם בוזונים פתרה את הבעיה הנ"ל שכן לא כל המצבים הנ"ל מאוכלסים (התפלגות בוזה-אינשטיין).

7. (2 נקי) – פוננים הם בוזונים. הצדיקו את המשפט הנ"ל.

   אם פוננים היו פרמיונים, תופעות גליות מאקרוסקופיות כמו גלי קול לא היו יכולות להתקיים. לעומת זאת, עקב הטבע הבוזוני של הפוננים, רבים מהם יכולים להימצא במצב אחד – גלי קול למשל.

8. (2 נקי) – מהי ההצדקה הפיזיקלית לשימוש בהתפלגות מקסוול-בולצמן במוליכים למחצה?

היות וצפיפויות נושאי המטען נמוכות, הטבע הפרמיוני שלהם לא בא לידי ביטוי שכן ההסתברות ששני נושאי מטען ינסו לאכלס את אותו המצב קטנה. לכן ניתן להניח שמדובר בחלקיקים קלאסים המקיימים את התפלגות מקסוול-בולצמן.

9. (2 נק') - "פסי אנרגיה מלאים אינם תורמים להולכה החשמלית" – הצדיקו משפט זה.

משיקולי סימטרית השריג, עבור כל פס לכל מצב בעל תנע נתון יש מצב עם התנע ההופכי. מכאן שאם כל הפס מאוכלס, סך התנע הכולל שלו הוא אפס. הדבר נכון כמובן עבור פס שאינו מאוכלס כלל.

10. (2 נק') - נתונים שני פתרונות (בלבד) לבור פוטנציאל ריבועי סופי – סימטרי ואנטי-סימטרי. מי מהם בעל האנרגיה הגדולה יותר?

בהרצאה/תרגול ראינו שפתרון אנטי-סימטרי מכיל יותר חציות של האפס, כלומר ששיפוע פונקציית הגל תלול יותר ולכן גם התנע שלה. מכיוון שהתנע שלה גדול יותר, כך גם האנרגיה.

גדלים פיזיקליים שימושיים:

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} [kg]$$
$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} [J/K]$$
$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} [J \cdot s]$$

זהויות טריגונומטריות שימושיות:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\cos(a) = \frac{1}{2}[e^{ia} + e^{-ia}]$$
$$\sin(a) = \frac{1}{2i}[e^{ia} - e^{-ia}]$$