תרגיל בית מספר 3: קיבולי חום ומשוואת הגז האידיאלי

שאלה 1: קיבול חום ושיווי משקל תרמי

א) נתונים שני גופים בעלי קיבולי חום C_1, C_2 אשר נמצאים בטמפרטורות T_1, T_2 בהתאמה. הראו שכאשר מביאים את שני הגופים לשיווי משקל, הטמפרטורה המתקבלת היא:

$$T_f = \frac{C_1T_1+C_2T_2}{C_1+C_2}$$

ב) בהנחה שמערכת שני הגופים היא מערכת מבודדת, בכמה השתנתה אנטרופית המערכת?

בתרגול ראינו שמתקיים הקשר $C = \frac{\Delta E}{\Delta T}$ נניח ש-$T_1 > T_2$ כך שהגוף הראשון מעביר אנרגיה לגוף השני. הנחה זו כללית וניתן כמובן להניח גם את ההיפך ולהגיע לאותה תוצאה. שימו לב שאם מלכתחילה $T_1 = T_2$ אזי שנצפה ש-$T_f = T_1 = T_2$ שכן המערכת כבר בשיווי משקל תרמי. האנרגיה אשר הגוף הראשון מאבד צריכה לקיים את הקשר הבא:

$$\Delta E_1 = C_1\Delta T_1 = C_1(T_1 - T_f)$$

מנגד, הגוף השני חייב לקבל את אותה מנת אנרגיה (כלומר ש-$|\Delta E_1| = |\Delta E_2|$) ועבורו יתקיים:

$$\Delta E_2 = C_2\Delta T_2 = C_2(T_f - T_2)$$

שימו לב שבשני המקרים הגדרנו את הפרש הטמפרטורות בצורה שונה על מנת שהשינוי באנרגיה בכל אחד מהמקרים יהיה חיובי. היות והשינויים חייבים להיות שווים, ניתן להשוות בין המשוואות, כלומר:

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 \Rightarrow C_1(T_1 - T_f) = C_2(T_f - T_2) \Rightarrow C_1T_1 - C_1T_f = C_2T_f - C_2T_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1T_f + C_2T_f = C_1T_1 + C_2T_2 \Rightarrow T_f(C_1 + C_2) = C_1T_1 + C_2T_2 \Rightarrow T_f = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}$$

כנדרש.

א) השינוי באנטרופיה הוא סכום שינויי האנטרופיות של שני הגופים

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{C_1}{T} dT + \int_{T_2}^{T_f} \frac{C_2}{T} dT = C_1 \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$$

שימו לב שאנטרופיית הגוף שהתקרר ירדה ואנטרופיית הגוף שהתחמם עלתה, אבל אנטרופיית המערכת (סכום אנטרופיית שני הגופים) תמיד עולה.

שאלה 2: נפח ואנטרופיה של גז אידאלי

בהרצאות ובתרגולים ראיתם את הקשר הבא : $\frac{\partial S}{\partial U}=\frac{1}{T}$

א)השתמשו בביטוי לאנרגיה של גז אידאלי חד אטומי, ומצאו את השינוי באנטרופיית הגז כאשר מחממים אותו מטמפרטורה T_1 לטמפרטורה T_2. (הגז מוכל בנפח קבוע).

האנרגיה של גז אידאלי חד אטומי היא $U=\frac{3}{2}Nk_bT$ כאשר N הוא מספר חלקיקי הגז.

מכאן $dU=\frac{3}{2}Nk_bdT$ ולכן

$$\Delta S=S(T_1)-S(T_2)=\int_{T_1}^{T_2}\frac{dU}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{\frac{3}{2}Nk_bdT}{T}=\frac{3}{2}Nk_b\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

ב) כעת נניח כי נפח הגז יכול להשתנות, אבל הטמפרטורה שלו נשארת קבועה.
הסבירו במילים, על ידי שיקולים בסיסיים שלמדנו בקורס, מדוע אנטרופיית הגז תשתנה כתוצאה מהשינוי בנפחו?

האנטרופיה פרופורציונית ללוגריתם של מספר המצבים, לחלקיקי גז בנפח גדול יותר יש יותר מצבים אפשריים ולהפך, ולכן שינוי בנפח הגז משנה את האנטרופיה שלו.

ג) נתון הקשר הדיפרנציאלי הבא עבור הקשר בין שינוי נפח הגז לשינוי באנטרופיה שלו (כאשר הטמפרטורה נשארת קבועה)

$$\frac{\partial S}{\partial V}=\frac{Nk_b}{V}$$

נניח כי נפח הגז השתנה מנפח V_1 לנפח V_2. מה היה השינוי באנטרופיית הגז?

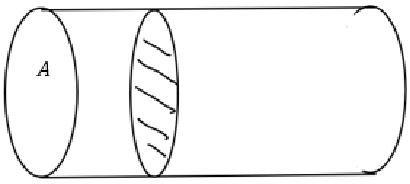
באופן דומה למה שנעשה בסעיף ב' נקבל

$$\Delta S=S(V_2)-S(V_1)=Nk_b\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=Nk_b\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

ד) נתונה קופסה גלילית בעלת שני חלקים. שני חלקי הקופסה מופרדים על ידי מחיצה שיכולה לזוז ללא חיכוך (התבוננו בציור). אורך הקופסא L ושטח הבסיסים שלה A. הטמפרטורות בשני החלקים של הקופסה זהות, ונשארות קבועות לכל אורך השאלה.

בחלק הימני יש גז עם N_1 חלקיקים ובחלק השמאלי גז עם N_2

חלקיקים.



נסמן את אורך החלק השמאלי ב x.

בהנחה שאורכו ההתחלתי של החלק השמאלי היה x_0, בכמה השתנתה האנטרופיה הכוללת של המערכת בין המצב ההתחלתי למצב בו אורך החלק השמאלי הוא x ?

האנטרופיה הכוללת של המערכת היא סכום האנטרופיות של שתי תתי המערכות שלה.

נפח החלק השמאלי הוא Ax ונפחו של הימני הוא $A(L-x)$.

על ידי שימוש בסעיף הקודם השינוי באנטרופיה הוא

$$\Delta S = S(x) - S(x_0) = k_b\left(N_1 \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + N_2 \ln\left(\frac{L-x}{x_0}\right)\right)$$

ה)השתמשו בשיקולים תרמודינמיים בסיסיים כדי למצוא מה יהיה האורך x של החלק השמאלי כאשר המערכת תגיע לשיווי משקל. בטאו זאת באמצעות N_2 , N_1 ו L. כעת התייחסו למצב בו מספר החלקיקים בשני החלקים זהה, האם התוצאה הגיונית לדעתכם?

האנטרופיה $S(x)$ צריכה להיות מקסימלית עבור האורך x במצב שיווי משקל.

לכן מתנאי זה נקבל

$$\frac{dS(x)}{dx} = k_b\left(\frac{N_1}{x} - \frac{N_2}{L-x}\right) = 0$$

כלומר

$$N_2 x = N_1 L - N_1 x$$

$$x = \frac{N_1 L}{N_2 + N_1}$$

בפרט כאשר $N_1 = N_2$ נקבל $x = \frac{L}{2}$ כצפוי.

ו) סעיף בונוס – כפי שאולי שמתם לב, לתנאי שאתם מכירים לשיווי משקל (שוויון טמפרטורות) מתווסף תנאי נוסף, מהו תנאי זה? (רמז – היזכרו בקורס פיזיקה 1. למה המחיצה נשארת במצב יציב כאשר אינה נעה?).

תנאי נוסף לשיווי משקל הוא שוויון לחצים בין התא השמאלי לימני.

כל עוד ישנו הפרש לחצים, המחיצה תנוע, עד שהמערכת תגיע למצב בו הלחץ בתא השמאלי משתווה לזה של הימני, במצב זה על המחיצה לא פועל כוח, והיא נשארת בשיווי משקל.

שאלה 3: קיבול חום

מול אחד של גז מסוים מוכל בכלי סגור כך שהנפח שלו נשאר קבוע. נתון כי קיבול החום בנפח קבוע למול של הגז נתון על ידי ע"י $c_v = a + bT$ וכי טמפרטורת הגז ההתחלתית הייתה T_0. חיממו את הגז לטמפרטורה T.

א) מצאו את האנרגיה של הגז כתלות בטמפרטורה.

ב) מצאו את השינוי באנטרופיית הגז בעקבות החימום.

לפי הקשר

$$c_v = dE/dT$$

נקבל

$$E(T) = \int (a + bT)dT = aT + \frac{b}{2}T^2 + constant$$

$$\Delta S = \int_{T_0}^{T_f} \frac{C}{T} dT = \int_{T_0}^{T} \frac{a + bT}{T} dT = a\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + b(T - T_0)$$

שאלה 4:

א) מים ממעיין חם עם טמפרטורה T_1 מתערבבים עם מים ממעיין קר עם טמפרטורה T_2. לאחר הערבוב המים זורמים בנהר במהירות v לא נתונה ועם טמפרטורה T. נניח שקיבול החום של המים ליחידת מסה הוא C קבוע. מצאו את מהירות הזרימה v בנהר במונחים של C, T, T_1, T_2. (רמז, הניחו כי המהירויות של המים במעיינות הן אפס. חשבו את השינוי באנרגיה של כמות מים כלשהי Δm ומכל אחד מהמעיינות והניחו כי כל האנרגיה התרמית הומרה לאנרגיה קינטית לאחר הערבוב).

ב) נתון כי האנטרופיה של מים נתונה על ידי $S(T) = Cln(\frac{T}{T_0})$ כאשר T_0 קבוע נתון כלשהו. השתמשו בחוק השני של התרמודינמיקה כדי למצוא חסם תחתון לטמפרטורת הנהר T.

א) נניח שמסה Δm מהמעיין החם ומסה זהה Δm מהמעיין הקר התערבבו והתחילו לזרום בנהר. משימור אנרגיה נקבל

$$CT_1\Delta m + CT_2\Delta m = \ 2CT\Delta m + \frac{1}{2}(2\Delta m)v^2$$

ומפה נקבל

$$v = \ \sqrt{C(T_1 + T_2 - 2T)}$$

ב) השינוי באנטרופיה של כל המערכת חייב להיות גדול מאפס, לכן

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \Delta mCln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \Delta mCln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + C\Delta mln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \Delta mCln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) \geq 0$$

מכאן מקבלים

$$T \geq \ \sqrt{T_1T_2}$$

שאלה 5: קיבול החום של מוצק איינשטיין

בתרגול השני הכרנו את מוצק איינשטיין. ראינו שעבור Nאוסילטורים ו-n_eיחידות אנרגיה נתונים, הריבוי עבור מוצק זה הוא:

$$\Omega(n_e) = \binom{n_e + N - 1}{n_e} = \frac{(n_e + N - 1)!}{n_e!\,(N-1)!}$$

ספקטרום האנרגיות האפשריות של כל אוסילטור הוא:

$$E_n = hf\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

כאשרhהוא קבוע פלאנק ו-fהוא תדר נתון וקבוע.

א. כתבו ביטוי לאנטרופיה של המערכת. השתמשו בקירוב סטרלינג.

כפי שראינו בהרצאה ובתרגול, ניתן להביע בקלות את האנטרופיה כתלות בריבוי:

$$S \triangleq k_B \ln \Omega\,(n_e) = k_B \ln\left[\frac{(n_e + N - 1)!}{n_e!\,(N-1)!}\right]$$

שימוש בקירוב סטירלינג יניב את הביטוי:

$$S = k_B \ln\left[\frac{(n_e + N - 1)!}{n_e!\,(N-1)!}\right] \approx k_B(n_e + N)\ln(n_e + N) - k_B N \ln N - k_B n_e \ln n_e$$

ב. מצאו ביטוי לאנרגיה הכוללת של המערכת.

נתון לנו מספר יחידות האנרגיה של המערכת ולכן נוכל לחשב את סך האנרגיה של המערכת. נשים לב שישנה תוספת אנרגיה קבועה הנובעת מכך שלכל אוסילטור יש אנרגיה בסיסית $\frac{hf}{2}$. מכאן שנקבל בסה"כ:

$$E_{total} = hf\left(\frac{N}{2} + n_e\right)$$

ג. בהנחה שהמערכת מצויה בשיווי משקל, קבלו ביטוי לטמפרטורה של המוצק.

ידוע לנו שבשיווי משקל, גזירת האנטרופיה ביחס לאנרגיה הכוללת תניב את אחד חלקי הטמפרטורה. ניתן להחליף את מספר יחידות האנרגיה באנרגיה הכוללת ולגזור. נביע את מספר יחידות האנרגיה דרך האנרגיה הכוללת:

$$E_{total} = hf\left(\frac{N}{2} + n_e\right) \Rightarrow n_e = \frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}$$

מכאן שהאנטרופיה היא:

$$\begin{aligned} S &= k_B(n_e + N)\ln(n_e + N) - k_B N \ln N - k_B n_e \ln n_e \\ &= k_B\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2} + N\right)\ln\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2} + N\right) - k_B N \ln N \\ &\quad - k_B\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right)\ln\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right) \\ &= k_B\left(\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}\right)\ln\left(\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}\right) - k_B N \ln N - k_B\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right)\ln\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right) \end{aligned}$$

גזירה של ביטוי זה לפי האנרגיה הכוללת תיתן:

$$\frac{\partial S}{\partial E_{total}} = \frac{k_B}{hf} ln\left(\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}\right) + \frac{1}{hf} \frac{k_B\left(\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}\right)}{\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}} - \frac{k_B}{hf} ln\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{hf} \frac{k_B\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right)}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}} =$$

$$= \frac{k_B}{hf} ln\left(\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}\right) + \frac{k_B}{hf} - \frac{k_B}{hf} ln\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right) - \frac{k_B}{hf}$$

$$= \frac{k_B}{hf}\left[ln\left(\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}\right) - ln\left(\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{k_B}{hf} ln\left(\frac{\frac{E_{total}}{hf} + \frac{N}{2}}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}}\right) = \frac{k_B}{hf} ln\left(\frac{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2} + N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}}\right) = \frac{k_B}{hf} ln\left(1 + \frac{N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}}\right) \triangleq \frac{1}{T} \Rightarrow T$$

$$= \frac{hf}{k_B} \frac{1}{ln\left(1 + \frac{N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}}\right)}$$

ד. מצאו את הביטוי לקיבול החום (זהו ביטוי הקרוב מאוד לביטוי אותו ראיתם בהרצאה).

בהרצאה ובתרגול ראיתם שניתן לגזור את האנרגיה הכוללת של המערכת לפי הטמפרטורה ולקבל את קיבול החום. ניקח את הביטוי שקיבלנו בסעיף הקודם ונהפוך אותו כך שהאנרגיה הכוללת תבוטא ע״י הטמפרטורה ומספר האוסילטורים:

$$T = \frac{hf}{k_B} \frac{1}{ln\left(1 + \frac{N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}}\right)} \Rightarrow ln\left(1 + \frac{N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}}\right) = \frac{hf}{k_B T} \Rightarrow 1 + \frac{N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}} = e^{\frac{hf}{k_B T}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N}{\frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2}} = e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \Rightarrow \frac{N}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} = \frac{E_{total}}{hf} - \frac{N}{2} \Rightarrow \frac{E_{total}}{hf} = \frac{N}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} + \frac{N}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{total} = hfN\left[\frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} + \frac{1}{2}\right]$$

כעת נבצע גזירה לפי הטמפרטורה:

$$C = \frac{dE_{total}}{dT} = hfN \frac{\frac{hf}{k_B T^2} e^{\frac{hf}{k_B T}}}{(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1)^2} = Nk_B\left(\frac{hf}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{k_B T}}}{(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1)^2}$$

ה. מה קורה לקיבול החום עבור $T \to 0, T \to \infty$? נמקו!

נבדוק מה קורה אסימפטוטית בכל גבול. עבור טמפרטורות נמוכות נקבל:

$$C = Nk_B \left(\frac{hf}{k_BT}\right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{k_BT}}}{(e^{\frac{hf}{k_BT}} - 1)^2} \approx 0$$

קיבול החום שואף לאפס בהתאם לחוק ה-3 של התרמודינמיקה! ניתן להבין זאת גם בכך שכל האוסילטורים נמצאים באנרגיה הנמוכה ביותר וזהו מאקרו-מצב עם מיקרו-מצב בודד. לכן גם האנטרופיה מתאפסת.

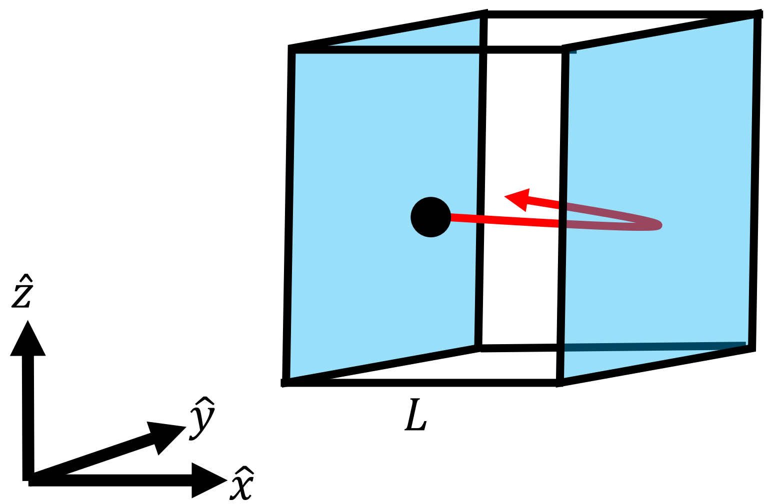
עבור טמפרטורות גבוהות נקבל:

$$C = Nk_B \left(\frac{hf}{k_BT}\right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{k_BT}}}{(e^{\frac{hf}{k_BT}} - 1)^2} \approx Nk_B \left(\frac{hf}{k_BT}\right)^2 \frac{1}{(\frac{hf}{k_BT})^2} = Nk_B$$

שימו לב שבמקרה זה קיבלנו קיבול חום קבוע! הדבר שקול לקיבול החום האוניברסלי אותו ראינו גם בתרגול עד כדי תיקון קל לקבוע.

שאלת רשות: משוואת הגז האידיאלי

בתרגיל זה נפתח את משוואת המצב של הגז האידיאלי. על מנת להקל על עצמנו, נניח שהגז מצוי בתוך תיבה שאורך צלע שלה הוא L כלשהוא. הגז מורכב מ-N חלקיקים בעלי מסה m אשר מבצעים התנגשויות אלסטיות לחלוטין עם דפנות הכלי (נניח שהם לא מתנגשים זה בזה).



כמו כן, לצורך פשטות נתמקד רק בתנועה לאורך ציר $\hat{x}$ (נניח שהתנועה בשאר הצירים זהה) עבור חלקיק בודד.

א. בהינתן שמהירות החלקיק בציר $\hat{x}$ היא v_x, מהו הזמן בין התנגשויות עבור אחת הפאות (שימו לב שמדובר בפאה אחת שבחרנו)?

נתונים לנו מימדי התיבה וכן מהירות החלקיק. הזמן בין התנגשויות עבור אחת הפאות הוא הזמן בו החלקיק ינוע הלוך ושוב, כלומר:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

ב. מהו הכוח הממוצע אותו מפעיל החלקיק על אחת הדפנות?

הכוח אותו החלקיק מפעיל נגזר מהשינוי בתנע. החלקיק מפעיל כוח על אחת הדפנות פעם בפרק הזמן אשר חושב בסעיף הקודם. נקבל:

$$F \triangleq \frac{dP}{dt} \approx \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{L}$$

ג. מהו הלחץ אותו החלקיק מפעיל על אחת הדפנות?

היות ולחץ מוגדר ככוח ליחידת שטח, ניקח את הכוח מהסעיף הקודם ונחלק בשטח הדפנה:

$$P \triangleq \frac{F}{A} = \frac{mv_x^2}{AL} = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V}$$

היות ובפועל ישנם Nחלקיקים שלהם התפלגות מהירויות כלשהיא, עלינו לקחת זאת בחשבון. נתון כי $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$ וכן ש-$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_BT}{m}$ (בהמשך הקורס נראה כיצד מקבלים את הקשרים הנ"ל).

ד. מהנתון קבלו את משוואת הגז האידיאלי עבור כלל החלקיקים בתיבה.

מהסעיף הקודם ניתן לראות שהתחשבות בכל Nהחלקיקים תיתן:

$$PV = Nm\langle v_x^2 \rangle$$

הצבת הקשר למהירות הכללית תיתן:

$$PV = Nm\langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm\langle v^2 \rangle}{3}$$

לבסוף הצבת הקשר לטמפרטורה ולקבוע בולצמן תיתן:

$$PV = \frac{Nm\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{Nm}{3}\frac{3k_BT}{m} = NK_BT$$

וזוהי משוואת הגז האידיאלי.