

אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר חורף 2022-2023

מועד א

הנחיות

- משך הבחינה – 3 שעות.
- במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 6 שאלות רב ברירה
חלק 2 : 2 שאלות פתוחות
- בדקו שברשותכם 11 עמודים .
- ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.

בהצלחה!

חלק 1 (48 נקודות – ניקוד זהה לכל שאלה)

שאלה 1

נתונה מערכת בעלת 4 רמות אנרגיה כאשר לרמה ה- n יש n אנרגיה עבור $n = 1, 2, 3, 4$. מבצעים מספר ניסויים כאשר בכל פעם משתמשים בחלקיקים שונים:

ניסוי 1: 4 חלקיקים עם ספין $\frac{1}{2}$

ניסוי 2: 4 חלקיקים עם ספין 1

ניסוי 3: 8 חלקיקים עם ספין $\frac{1}{2}$

ניסוי 4: 8 חלקיקים עם ספין 1

בכל ניסוי מדדו את האנרגיה של המערכת בטמפרטורה 0 ובטמפרטורה מאוד מאוד גבוה. סמנו את התוצאות שכנראה קבלו בניסוי:

א.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	4ε	4ε	8ε	8ε
$T \rightarrow \infty$	10ε	10ε	20ε	20ε

ב.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	6ε	4ε	20ε	8ε
$T \rightarrow \infty$	10ε	10ε	20ε	20ε

ג.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	6ε	4ε	20ε	8ε
$T \rightarrow \infty$	16ε	16ε	32ε	32ε

ד.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	4ε	4ε	8ε	8ε
$T \rightarrow \infty$	16ε	16ε	32ε	32ε

ה.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	10ε	4ε	20ε	8ε
$T \rightarrow \infty$	10ε	10ε	20ε	20

שאלה 2

נתון חלקיק בעל ספין $1/2$ עם אנרגיה ε . נתון בנוסף כי הניווך של רמת האנרגיה שבה יושב החלקיק הינו 3 (לא כולל ספין). מה מספר החלקיקים הממוצע באנרגיה ε ?

א. $2 \cdot \frac{1}{e^{\frac{3\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$

ב. $2 \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$

ג. $3 \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$

ד. $6 \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$

ה. $3 \cdot \frac{1}{e^{\frac{2\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$

שאלה 3

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה $m = 12 \text{ amu}$ כך שהמרחק בין האטומים הינו $a = 1.42 \text{ \AA}$. נתון שקבוע הקפיץ המחובר בין האטומים הינו $\kappa = 165 \text{ N/m}$, קבלו מהי מהירות הקול בחומר והאנרגיה הגבוה ביותר של פונונים.

א. $12922 \text{ m/sec}, 120 \text{ meV}$

ב. $22352 \text{ m/sec}, 1020 \text{ meV}$

ג. $2022 \text{ m/sec}, 100 \text{ meV}$

ד. $5345 \text{ m/sec}, 200 \text{ meV}$

ה. $422 \text{ m/sec}, 20 \text{ meV}$

שאלה 4

נתון גביש שהושתלו לתוכו N אטומים זרים – סיגים מאותו סוג. לסיגים יש 3 מצבים של תנע זוויתי $m = 1, m = 0, m = -1$. כשהסיגים מחוץ לגביש, שלושת המצבים מנוונים – בעלי אנרגיה זהה. בתוך הגביש, השדות הפנימיים מסירים את הניוון, כך שמצבים עם תנע זוויתי שלא מתאפס מקבלים תוספת אנרגיה של Δ .

חשבו את תרומת הסיגים לאנרגיה של הגביש.

א. $E_d = 2\Delta N \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right) + 2}$

ב. $E_d = 2\Delta N \frac{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right) + 2}$

ג. $E_d = 3\Delta N \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right) + 2}$

ד. $E_d = 2\Delta N k_B T$

ה. $E_d = 3\Delta N k_B T$

שאלה 5

חשבו את תרומת הסיגים (משאלה 4) לאנטרופיה של הגביש בגבול של טמפרטורה אפסית ובגבול של טמפרטורה אינסופית.

א. $S(T \rightarrow 0) = N k_B \ln(3), \quad S(T \rightarrow \infty) = 0$

ב. $S(T \rightarrow 0) = 0, \quad S(T \rightarrow \infty) = N k_B \ln(3)$

ג. $S(T \rightarrow 0) = 0, \quad S(T \rightarrow \infty) = N k_B \ln(2)$

ד. $S(T \rightarrow 0) = 0, \quad S(T \rightarrow \infty) = -N k \ln(3)$

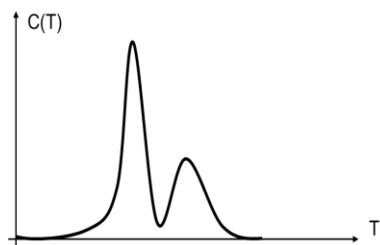
ה. $S(T \rightarrow 0) = N k_B \ln(2), \quad S(T \rightarrow \infty) = N k_B \ln(3)$

שאלה 6

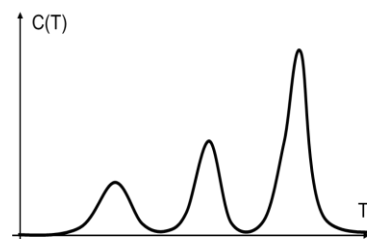
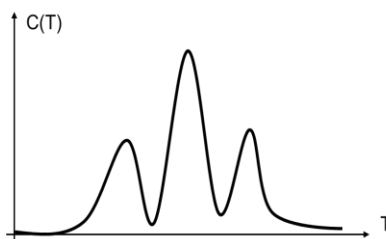
איזה גרף מתאר במטרה נכונה את התלות של הסיגים (משאלה 4) לקיבול החום של הגביש - בצורה איכותית?

א.

ב.

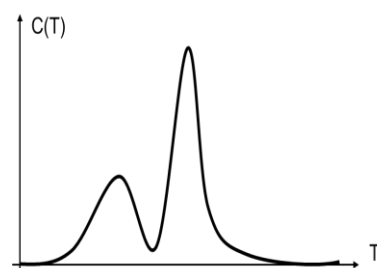
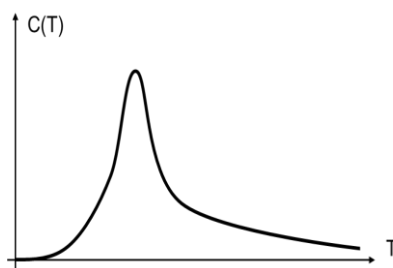


ג.



ד.

ה.



חלק 2 (52 נקודות)

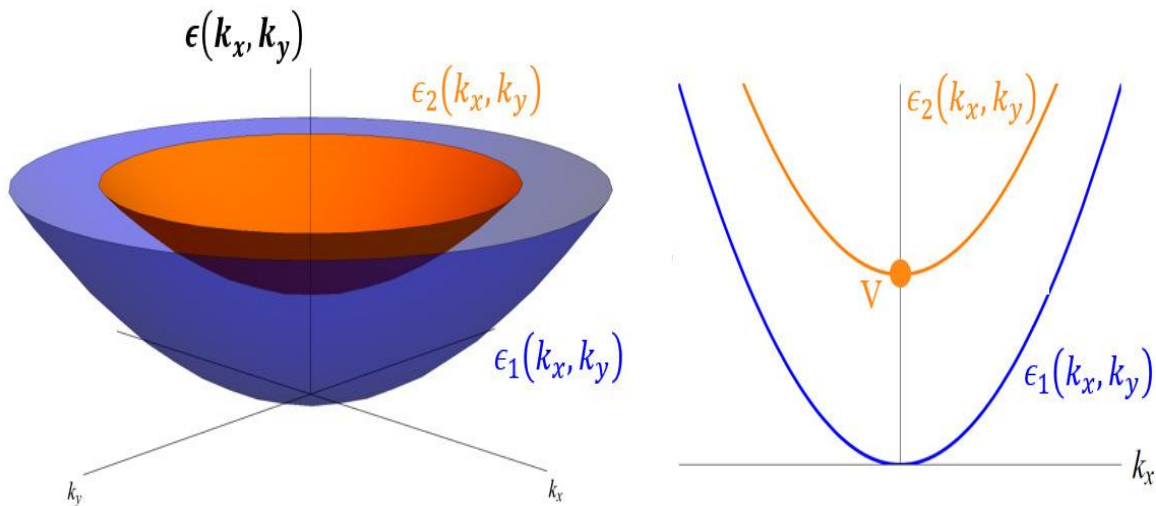
שאלה 7 (26 נקודות)

נתון חומר דו-ממדי עם שטח A . נתון 2 פסי אנרגיה אלקטרוניים :

$$\epsilon_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$$

$$\epsilon_2(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) + V$$

כאשר V הוא קבוע חיובי בעל יחידות של אנרגיה.



בתמונה משמאל, אפשר לראות את 2 פסי האנרגיה כפונקציה של התנעים (k_x, k_y) , כאשר הגרף הכחול הוא הפס הראשון והכתום הוא הפס השני מוזז ב V למעלה בציר האנרגיה. מצד ימין אפשר לראות את החתך של שני הפסים על ציר k_x . שימו לב שיש חפיפה בערכי האנרגיה בין 2 הפסים עבור $\epsilon > V$.

א. חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח לכל אחד מפסי האנרגיה : $g_1(\epsilon), g_2(\epsilon)$.
מה היא צפיפות המצבים הכוללת של המערכת ליחידת שטח $g_{tot}(\epsilon)$, שבעזרתה סופרים את מספר המצבים הכולל במערכת עבור כל ϵ ?
בטאו אותה בעזרת 2 צפיפויות המצבים שחישבתם, עבור 2 תחומי האנרגיה $\epsilon \leq V$ ו- $\epsilon > V$. (10 נקודות)

$$g_{tot}(\epsilon) = \begin{cases} ? & , \epsilon \leq V \\ ? & , \epsilon > V \end{cases}$$

(הדרכה- תחשבו איך מאכלסים את האלקטרונים ב 2 הפסים עבור 2 תחומי האנרגיה).

ב. נגדיר את n_0 כצפיפות האלקטרונים שבה האלקטרונים מאכלסים את כל מצבי האנרגיה המקיימים $0 \leq \varepsilon \leq V$. חשבו את n_0 .

עכשיו נתון שצפיפות האלקטרונים בחומר היא n . חשבו את אנרגיית פרמי ε_F עבור 2 מקרים: $n > n_0$ ו- $n \leq n_0$ (8 נקודות)

$$\varepsilon_F = \begin{cases} ? & , n \leq n_0 \\ ? & , n > n_0 \end{cases}$$

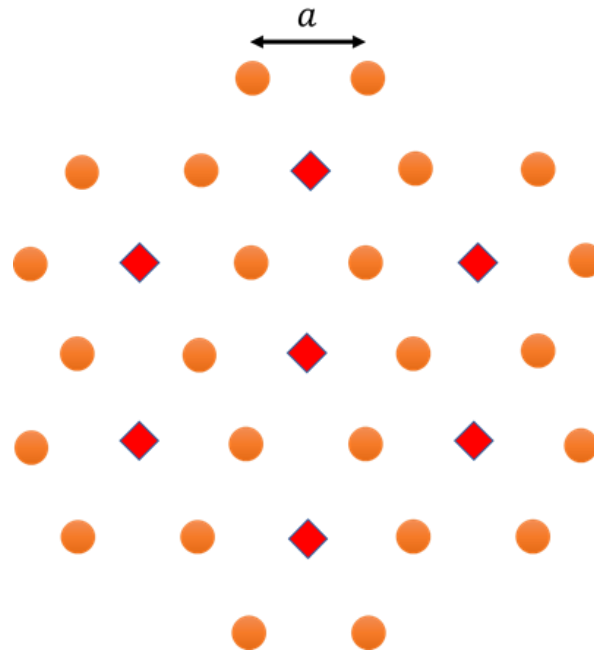
ג. (סעיף זה לא קשור לשני הסעיפים הקודמים)
נתון פס אנרגיה של אלקטרונים בחומר דו-ממדי:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y} k_y^2$$

מפעילים על המערכת שדה חשמלי סטטי בכיוון כללי במישור XY : $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$.
מה הוא היחס $\frac{m_x}{m_y}$ שהמסות האפקטיביות צריכות לקיים כדי שהזרם החשמלי יהיה באותו כיוון של השדה החשמלי? (8 נקודות)
תזכרו שלפי מודל דרודה, המוליכות החשמלית היא $\sigma = ne^2 \tau m^{-1}$, כאשר n היא צפיפות האלקטרונים, τ הוא הזמן האופייני לפיזור של האלקטרון ו- m^{-1} הוא טנזור המסה האפקטיבית ההופכי.

שאלה 8 (26 נקודות)

נתון הגביש הבא



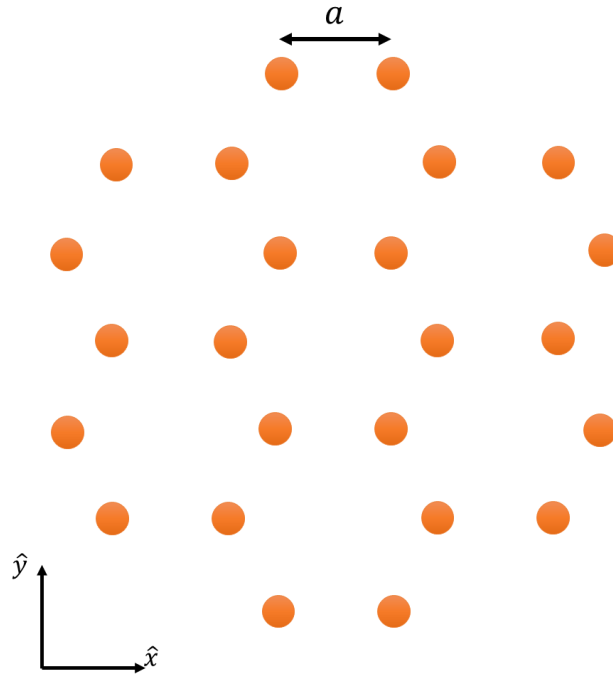
המורכב משני אטומים כאשר

● מסמן אטום מסוג A
◆ מסמן אטום מסוג B

זהו גביש משושה של אטומים מסוג A עם מרחק a בין שכנים קרובים, ובמרכז של כל משושה יש אטום מסוג B עם מרחק a מהשכנים הקרובים שלו מסוג A.

- א. רשמו וקטורים ראשוניים ווקטורי הבסיס. (4 נקודות)
- ב. ציירו על גבי השריג שבחרתם את תא Wigner-Seitz. (4 נקודות)
- ג. מצאו את הווקטורים של השריג ההופכי וציירו אותו. ציירו את איזור Brillouin הראשון. (4 נקודות)
- ד. מבלי לפתור את הבעיה הסבירו מהו מספר פסי אנרגיה הצפוי להתקבל בהנחה שכל אטום תורם אורביטל אחד בלבד. הצדיקו את תשובתכם. (4 נקודות)

כעת נניח שיש גביש הבא



נתונים פסי האנרגיה עבור המבנה שלעיל שהתקבל מפתרון משוואות הקשירה ההדוקה:

$$E_{\pm}(k_x, k_y) = E_0 \pm |\gamma| \sqrt{1 + 4 \cos^2(k_y a \sqrt{3}/2) + 4 \cos(k_x a 3/2) \cos(k_y a \sqrt{3}/2)}$$

- ה. ציירו איכותית את פסי האנרגיה לאורך הקו $k_x = 0$ ולאורך $k_y = 0$. ציינו מהו גודל פער האנרגיה עבור שני הכיוונים האלו. (4 נקודות)
- ו. הסבירו איך משתנה צפיפות המצבים כפונקציה של האנרגיה בקצה איזור Brillouin עבור שני הכיוונים מסעיף הקודם. אין צורך לחישוב מפורש של צפיפות המצבים. (6 נקודות)

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1 amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314 J K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^8 m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a) \cos(b) = 1/2(\cos(a + b) + \cos(a - b))$
$\sin(a) \sin(b) = 1/2(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
$\sin(a) \cos(b) = 1/2(\sin(a + b) + \sin(a - b))$
$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2(e^{ia} + e^{-ia})$
$\sin(a) = 1/(2i)(e^{ia} - e^{-ia})$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

תוחלת μ
סטטיית תקן σ

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

3	5/2	2	3/2	1	1/2	n
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\Gamma(n)$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in \text{Even} \\ 0 & n \in \text{Odd} \end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	n
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$I(n)$