HW08

דורון שפיגל - 313545600

דן חוזה - 209517697

1. משפט בלוך ומבנה פסים

נתון גביש חד מימדי המתואר על ידי פוטנציאל מחזורי מהצורה

$$V(x) = V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

1.1. סעיף א:

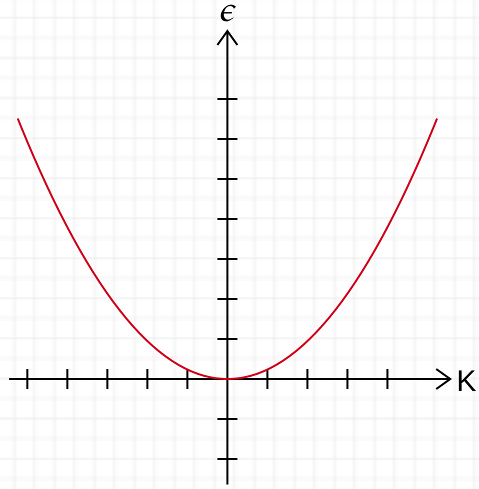
בהתחשב בפיזור בראג מסדר ראשון ($n = 1$) בחד מימד נקבל

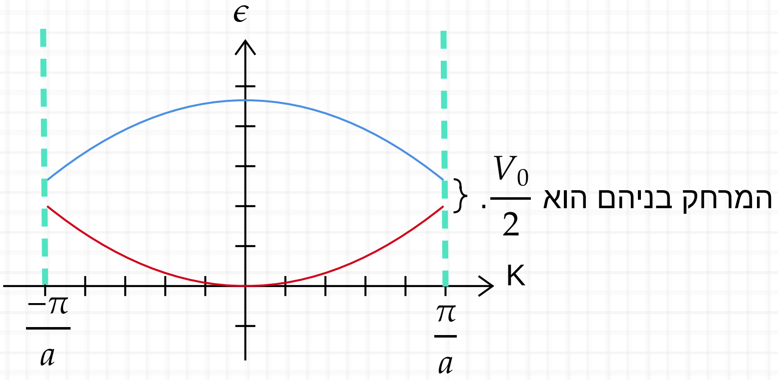
$$k = \frac{\pi}{a} \sin 90° = \frac{\pi}{a}$$

1.2. סעיף ב:

$$\begin{aligned}
V(x) &= V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \\
\Psi_\pm(x) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \left(e^{jkx} \pm e^{-jkx}\right) \\
\Psi_+(x) &= A\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\
\Psi_-(x) &= jA\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\
1 &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\Psi_+(x)|^2 dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\Psi_-(x)|^2 dx \\
&= 2A^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2} dx = A^2 a \\
\rightarrow & \; A = \sqrt{\frac{1}{a}} \\
\rightarrow & \; \Psi_+(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\
\rightarrow & \; \Psi_-(x) = j\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)
\end{aligned}$$

1.3. סעיף ג:





2. מסות אפקטיביות

נתון סריג חד מימדי באורך L /יחס הדיספרסיה של האלקטרונים הוא:

$$\epsilon(k) = \epsilon_0 - \gamma\cos(ka)$$

2.1 סעיף א:

קבוע הסריג הוא a ולכן מספר המצבים בפס הוא $\frac{L}{a}$.

2.2 סעיף ב:

נקרב לפי טור טיילור סביב $k = 0$ (כי זה המצב האנרגטי הנמוך).

$$\gamma\cos(ka) \approx \gamma - \gamma a^2 \cdot \frac{k^2}{2}$$

נציב:

$$\epsilon(k) \approx \epsilon_0 - \gamma + \gamma a^2 \cdot \frac{k^2}{2}$$

$$\epsilon''(k) = \frac{d^2E}{dk^2} \approx \gamma a^2$$

$$\boxed{m^* = \left(\frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{d^2E}{dk^2}\right)^{-1} = \frac{\hbar^2}{\gamma a^2}}$$

2.3 סעיף ג:

נקרב טור טיילור סביב $k = \frac{\pi}{a}$, המצב בו הפס כמעט מלא.

$$\gamma\cos(ka) \approx -\gamma + \gamma a^2 \cdot \frac{\left(k - \frac{\pi}{a}\right)^2}{2}$$

$$\epsilon''(k) = \frac{d^2E}{dk^2} \approx -\gamma a^2$$

$$\boxed{m^* = \left(\frac{1}{\hbar^2} \cdot \frac{d^2E}{dk^2}\right)^{-1} = -\frac{\hbar^2}{\gamma a^2}}$$

2.4. סעיף ד:

בהינתן שצפיפות נושאי המטען n טמפרטורה $T = 0[k]$, נסתכל על המצבים המאכולסים באנרגיה הגבוהה ביותר, כלומר $k = \frac{\pi}{a}$. בגלל שהטמפרטורה אפס, כל האלקטרונים מאכלסים את המצבים לכן $n = N = \frac{2L}{a}$, כלומר $a = \frac{2L}{n}$. התנע

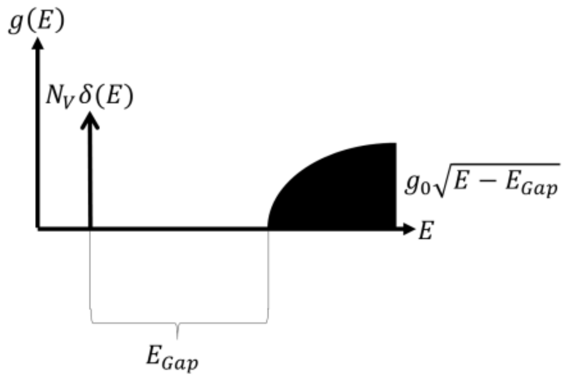
$$P = \hbar k = \hbar\frac{\pi}{a} = \frac{\hbar}{2}\frac{\pi n}{L}$$

2.5. סעיף ה:

סקלת הזמן הנוספת נובעת מזמן מחזור של אוסילציות של זרם ה AC, שנובע מהתנועה המחזורית של האלקטורנים. כדי שיתקיים זרם DC, צריך ש $T_{scatter}$ יהיה הרבה יותר קטן מסקלת הזמן הזאת.

3. מוליכים למחצה ורמת פרמי

נתונה צפיפות המצבים (בתלת מימד) של מל"מ בעל פער אנרגיה $E_{gap} \gg k_bT$ כלשהוא (הנתון מתייחס לכל טווח הטמפרטורות המעניין אותנו בשאלה זו):



לצורך פשטות, פס הערכיות נתון בתור צפיפות מצבים מהצורה $g(E) = N_V\delta(E)$. פס ההולכה נתון על ידי הביטוי $g(E) = g_0\sqrt{E - E_{gap}}, \quad g_0 = \frac{m\sqrt{2m}}{\pi^2\hbar^3}$ עוד נתון כי מיקומה של רמת פרמי הוא בקרת מרכז הפס האסור.

3.1. סעיף א:

צפיפות האלקטרונים:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} g(E)f(E)dE \overbrace{=}^{T=0[K]} \int_{-\infty}^{E_f} g(E)dE = \int_{-\infty}^{E_f} N_V\delta(E)dE = N_V$$

3.2. סעיף ב:

נתון $T > 0$.
צריך לחשב:

$$n_C = \int_{E_{gap}}^{\infty} g(E)f(E)dE = \int_{E_{gap}}^{\infty} \frac{m\sqrt{2m}}{\pi^2\hbar^3} \cdot \sqrt{E - E_{gap}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(E-E_f)}{K_B T}} + 1} dE$$

כיוון שנתון $E_{gap} \gg k_b T$ נשתמש בקירוב מקסוול בולצמן:

$$\begin{aligned} n_c &= \int_{E_{gap}}^{\infty} g(E)f(E)dE = \int_{E_{gap}}^{\infty} \frac{m\sqrt{2m}}{\pi^2\hbar^3} \cdot \sqrt{E - E_{gap}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(E-E_f)}{K_B T}}} dE \\ &= g_0 \int_{E_{gap}}^{\infty} \sqrt{E - E_{gap}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{(E-E_f)}{K_B T}}} dE \\ &= N_C \cdot e^{\frac{(E_f - E_{gap})}{K_B T}} \end{aligned}$$

3.3. סעיף ג:

רכיב האקספוננט דועך יותר מהר מרכיב השורש ולכן רוב האלקטרונים ימצאו ברמת אנרגיה נמוכה.