אלקטרוניקה פיזיקלית 044124

סמסטר אביב 2019

מועד ב׳

<u>הנחיות</u>

<u>1. משך הבחינה - שלוש שעות.</u>

<u>2. בבחינה 4 שאלות. בידקו כי ברשותכם 5 עמודים כולל עמוד זה.</u>

<u>3. ניתן להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא פרט לציוד תקשורת אלקטרוני (מחשב, טאבלט, טלפון וכו׳).</u>

<u>5. יש להגיש את מחברת הבחינה בלבד.</u>

<u>6. כיתבו בכתב יד ברור.</u>

<u>7. תשובות לא מנומקות לא תתקבלנה.</u>

<u>8. אנא ודאו שרשמתם את מספר תעודת הזהות על מחברת הבחינה.</u>

שאלה מספר 1 (20 נקודות):

בהרצאות ובתרגולים למדתם על מודל דרודה אשר מתייחס אל האלקטרונים במתכת כאל גז של חלקיקים חופשיים.

1. (5 נק') - נתון שצפיפות האלקטרונים ליחידת נפח היא n ושהם יכולים לנוע ב-3 מימדים. מהו קיבול החום של האלקטרונים ליחידת נפח?

למעשה האלקטרונים מתנהגים כמו גז אידיאלי וראינו שקיבול החום של גז אידיאלי ב-3 מימדים הוא $C_V = \frac{3}{2} n k_B$ כאשר השינוי היחיד הוא שכעת מדובר בקיבול חום ליחידת נפח (שכן נתונה צפיפות החלקיקים ולא מספרם).

2. (5 נק') - הביטוי שקיבלתם אינו נכון עבור טמפרטורות נמוכות מאוד, הסבירו מדוע?

ביטוי זה אינו נכון לטמפרטורות נמוכות שכן על פי החוק ה-3 של התרמודינמיקה, קיבול החום צריך לשאוף ל-0 והדבר בודאי שאינו נכון עבור קיבול חום קבוע!

3. (5 נק') - ההנחה של מודל דרודה לפיה כל האלקטרונים משתתפים בהולכה הינה שגויה (בין היתר גם בטמפרטורות גבוהות). נמקו מדוע!

בקורס ראינו שהאלקטרונים אשר מסוגלים לנוע מצויים סביב רמת פרמי. כלומר שמבין כל האלקטרונים במתכת, רק אלקטרונים אלו תורמים לתכונות חשמליות או תרמיות. זוהי הסיבה מדוע מודל דרודה מניב ערכי קיבול חום גדולים מדי גם בטמפרטורת החדר!

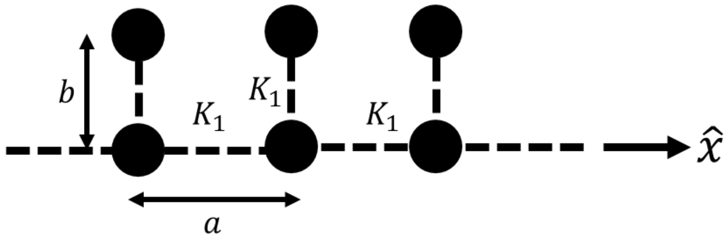
4. (5 נק') - נתון שצפיפות המצבים ליחידת אנרגיה סביב רמת פרמי הינה G וכן שרוחב השינוי בהתפלגות פרמי-דיראק הינו $\sim k_B T$. השתמשו במשפט החלוקה השווה וקבלו את קיבול החום האלקטרוני של המתכת עבור טמפרטורות נמוכות (עבור אילו טמפרטורות הקירוב תקף?).

מספר החלקיקים הכולל חייב להיות $\sim G k_B T$ שכן רק חלקיקים אלו משתתפים בהולכה. משפט החלוקה השווה נותן אנרגיה ממוצעת של $\frac{3}{2} k_B T$ לחלקיק ומכאן שהאנרגיה הממוצעת הכוללת היא $\sim G k_B^2 T^2$. גזירה של אנרגיה זו לפי הטמפרטורה תניב את קיבול החום האלקטרוני $C_v \sim 2 G k_B^2 T \propto T$, כלומר שכעת קיבול החום אינו קבוע אלא תלוי בטמפרטורה והדבר מסתדר עם החוק ה-3 של התרמודינמיקה, אך גם נותן את סדר הגודל הנכון עבור קיבול החום במתכות.

הקרוב תקף כל עוד $k_B T \ll E_F$

שאלה מספר 2 (35 נקודות):

נתונה שרשרת של אטומים בעלי מסות m (ראו איור מצורף).



מצאו את:

1. (17 נק') – מצאו את יחס הנפיצה $\omega(k)$ הכולל (אשר מכיל בתוכו את כל יחסי הנפיצה לכל האופנים).

תא היחידה הוא תא אנכי המכיל 2 אטומים עם מסות m, M. האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת היא:

$$U = \frac{K_1}{2}(u_{n,2} - u_{n-1.2})^2 + \frac{K_1}{2}(u_{n+1,2} - u_{n.2})^2 + \frac{K_1}{2}(u_{n,1} - u_{n.2})^2$$

נצפה ל-2 משוואות תנועה ונגזור את הביטוי עבור כל אטום:

$$\begin{cases} m\ddot{u}_{n,1} = -\frac{dU}{du_{n,1}} = -K_1(u_{n,1} - u_{n.2}) \\ m\ddot{u}_{n,2} = -\frac{dU}{du_{n,2}} = -K_1(u_{n,2} - u_{n-1.2}) + K_1(u_{n+1,2} - u_{n.2}) + K_1(u_{n,1} - u_{n.2}) \end{cases}$$

נגדיר 2 גלים מישוריים עבור כל אחד מהאטומים:

$$\begin{cases} u_{n,1} = A_1 e^{ikna - i\omega t} \\ u_{n,2} = A_2 e^{ikna - i\omega t} \end{cases}$$

נציב את הביטויים הנ"ל אל תוך סט המשוואות שקיבלנו מקודם:

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 e^{ikna - i\omega t} = -K_1(A_1 e^{ikna - i\omega t} - A_2 e^{ikna - i\omega t}) \\ -m\omega^2 A_2 e^{ikna - i\omega t} = -K_1(A_2 e^{ikna - i\omega t} - A_2 e^{ik(n-1)a - i\omega t}) + K_1(A_2 e^{ik(n+1)a - i\omega t} - A_2 e^{ikna - i\omega t}) + K_1(A_1 e^{ikna - i\omega t} - A_2 e^{ikna - i\omega t}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m\omega^2 A_1 = -K_1(A_1 - A_2) \\ -m\omega^2 A_2 = -K_1(A_2 - A_2 e^{-ika}) + K_1(A_2 e^{ika} - A_2) + K_1(A_1 - A_2) \end{cases}$$

נסדר את האיברים השונים ונעבור להצגה מטריציונית:

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = -K_1(A_1 - A_2) \\ -m\omega^2 A_2 = -K_1(A_2 - A_2 e^{-ika}) + K_1(A_2 e^{ika} - A_2) + K_2(A_1 - A_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A_1(-m\omega^2 + K_1) + A_2(-K_1) = 0 \\ A_1(-K_1) + A_2(2K_1 + K_1 - K_1 e^{-ika} - K_1 e^{ika} - m\omega^2) = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_1 - m\omega^2 & -K_1 \\ -K_1 & 2K_1 + K_1 - K_1 e^{-ika} - K_1 e^{ika} - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_1 - m\omega^2 & -K_1 \\ -K_1 & 3K_1 - 2K_1\cos(ka) - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הפעלת דטרמיננטה על המטריצה הנ"ל תניב את יחסי הנפיצה :

$$\begin{vmatrix} K_1 - m\omega^2 & -K_1 \\ -K_1 & 3K_1 - 2K_1\cos(ka) - m\omega^2 \end{vmatrix} = (K_1 - m\omega^2)(3K_1 - 2K_1\cos(ka) - m\omega^2) - K_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3K_1^2 - 2K_1^2\cos(ka) - mK_1\omega^2 - 3K_1 m\omega^2 + 2K_1\cos(ka)m\omega^2 + m^2\omega^4 - K_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2)\omega^4 + (2K_1\cos(ka)m - mK_1 - 3K_1 m)\omega^2 + 2K_1^2 - 2K_1^2\cos(ka) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4 + (\frac{2K_1\cos(ka) - 4K_1}{m})\omega^2 + \frac{2K_1^2 - 2K_1^2\cos(ka)}{m^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}[-(\frac{2K_1\cos(ka) - 4K_1}{m}) \pm \frac{2K_1}{m}\sqrt{(\cos(ka) - 2)^2 - (2 - 2\cos(ka))}] =$$

$$= \frac{1}{2}[-(\frac{2K_1\cos(ka)}{m} - \frac{4K_1}{m}) \pm \frac{2K_1}{m}\sqrt{\cos^2(ka) - 4\cos(ka) + 4 - 2 + 2\cos(ka)}] =$$

$$= \frac{1}{2}[-(\frac{2K_1\cos(ka)}{m} - \frac{4K_1}{m}) \pm \frac{2K_1}{m}\sqrt{\cos^2(ka) - 2\cos(ka) + 2}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}[-(\frac{2K_1\cos(ka) - 4K_1}{m}) \pm \frac{2K_1}{m}\sqrt{(\cos(ka) - 2)^2 - (2 - 2\cos(ka))}]}$$

.2 (8 נק') - עבור $k=0$, מצאו את תדרי התנודות של האטומים בתא היחידה. כמה סוגי תנודות כאלה קיימים בבעיה? הסבירו איזה אופן (אקוסטי/אופטי) שייך לכל תנודה.

נציב $k=0$ ביחס הנפיצה מהסעיף הקודם ונקבל :

$$\omega_{1,2}(k=0) = \sqrt{\frac{1}{2}[-(\frac{2K_1 - 4K_1}{m}) \pm \frac{2K_1}{m}\sqrt{(1-2)^2 - (2-2)}]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[\frac{2K_1}{m} \pm \frac{2K_1}{m}]} = 0, \sqrt{\frac{2K_1}{m}}$$

את האפס ניתן ליחס לאופן האקוסטי כפי שראינו בתרגול בעוד שאת הפתרון שאינו אפס ניתן ליחס לאופן האופטי.

.3 (10 נק') – עבור הסעיף הקודם, חשבו מפורשות את הוקטורים העצמיים של כל אחת מהתנודות עבור $k=0$.

נציב את הערכים שקיבלנו במטריצה ונמצא את הוקטורים העצמיים.
עבור $\omega=0$ נקבל :

$$\begin{pmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כמצופה מאופן אקוסטי.

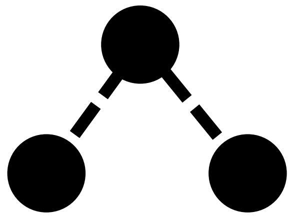
עבור $\omega = \sqrt{\frac{2K_1}{m}}$ נקבל :

$$\begin{pmatrix}-K_1 & -K_1\\ -K_1 & -K_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow A_1=-A_2\Rightarrow\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}=A_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

כמצופה מאופן אופטי.

<u>שאלה מספר 3 (25 נקודות):</u>

נתונה מערכת של מולקולות (ללא אינטרקציה בינהן) כאשר כל מולקולה מורכבת משלושה אטומים אשר לכל אחד מהם רמת אנרגיה ε כלשהי המסוגלת לאכלס 2 אלקטרונים (ראו איור מצורף).



עוד נתון כי בין כל זוג אטומים ישנו צימוד בעל אנרגיה אופיינית λ. הניחו שכל מולקולה מכילה **אלקטרון אחד בלבד** אשר יכול לאכלס את המצבים של המולקולה.

1. (5 נקי) - בהינתן שפונקציית הגל של כל אטום היא מצב עצמי, כיצד תיראה מטריצת האנרגיה של המולקולה (לפני לכסון)?

נקבל פשוט:

$$H=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

2. (6 נקי) – הוסיפו את אנרגית הצימוד למטריצה מהסעיף הראשון ולכסנו את את המטריצה, מהן האנרגיות העצמיות החדשות?

נוסיף את הצימוד:

$$H=\begin{pmatrix}\varepsilon & \lambda & 0\\ \lambda & \varepsilon & \lambda\\ 0 & \lambda & \varepsilon\end{pmatrix}$$

ניתן לכתוב את הצימוד בתוספת סימן מינוס. כמו כן שימו לב ששני המצבים הקיצוניים ביותר אינם מצומדים!

לכסון המטריצה שקול למציאת האנרגיות העצמיות של המערכת. נגדיר את E כסט האנרגיות העצמיות החדשות. יתקיים:

$$\begin{vmatrix}\varepsilon-E & \lambda & 0\\ \lambda & \varepsilon-E & \lambda\\ 0 & \lambda & \varepsilon-E\end{vmatrix}=(\varepsilon-E)((\varepsilon-E)^2-\lambda^2)-\lambda(\lambda(\varepsilon-E))=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varepsilon-E)((\varepsilon-E)^2-\lambda^2)-\lambda^2(\varepsilon-E)=0$$

נשים לב שערך עצמי אחד הינו $E_1=\varepsilon$. נמשיך במציאת 2 הע"ע הנותרים:

$$(\varepsilon - E)^2 - \lambda^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow (\varepsilon - E)^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow \varepsilon - E = \pm\sqrt{2}\lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_{2,3} = \varepsilon \pm \sqrt{2}\lambda$$

3. (6 נקי) – נתון ש- $\varepsilon = 0$ (שימו לב, אין בעיה עם אנרגיות שליליות והנתון הנ"ל נועד להקל על החישובים). מצאו את פונקציית החלוקה של המערכת וכן את האנרגיה הממוצעת שלה בהינתן ולכל מולקולה יש חלקיק יחיד המאכלס את הרמות.

פונקציית החלוקה של המערכת תהיה:
$$Z = \sum_i e^{-E_i/k_BT} = e^{\sqrt{2}\lambda/k_BT} + 1 + e^{-\sqrt{2}\lambda/k_BT} = 1 + 2\cosh(\sqrt{2}\lambda / k_BT)$$
ניתן למצוא את האנרגיה הממוצעת ע"י ממוצע על ההסתברויות:
$$\langle E \rangle = \frac{-\sqrt{2}\lambda e^{\sqrt{2}\lambda/k_BT} + \sqrt{2}\lambda e^{-\sqrt{2}\lambda/k_BT}}{1 + 2\cosh(\sqrt{2}\lambda / k_BT)} = \frac{\sqrt{2}\lambda[e^{-\sqrt{2}\lambda/k_BT} - e^{\sqrt{2}\lambda/k_BT}]}{1 + 2\cosh(\sqrt{2}\lambda / k_BT)}$$

4. (8 נקי) - שרטטו איכותית את קיבול החום של המערכת כתלות בטמפרטורה, ציינו אזורים שונים על פני הגרף והסבירו את תשובתם?

ישנן 3 רמות אנרגיה שונות ולכן נצפה ל-2 שיאים בקיבול החום. בטמפרטורות נמוכות או גבוהות קיבול החום שואף ל-0 שכן או שלמצב הנמוך ביותר אין מספיק אנרגיה כדי "לדבר" עם המצבים האחרים או שכל המצבים מאוכלסים במידה שווה.

__שאלה מספר 4 (20 נקודות):__

ענו על הסעיפים הבאים בקצרה – עד 4-5 משפטים לכל סעיף **(הסעיפים אינם קשורים זה לזה)**. נמקו את תשובותיכם היטב. באם יש צורך, השתמשו בנוסחאות אותן ראינו בקורס:

1. (2 נקי) - עבור מחסום פוטנציאל ריבועי, הסבירו: מדוע ישנן אנרגיות אשר בהן מתקבל שיא בהסתברות למנהור?

מדובר באנרגיות אשר אורך הגל שלהן כפול מספר שלם נותן את רוחב המחסום, כלומר שמדובר בהתאבכות בונה הגוררת מקסימום העברה.

2. (2 נקי) - הצדיקו את השימוש בקירוב יחס הנפיצה הפרבולי עבור צפיפות המצבים במוליכים למחצה.

היות ובמוליכים למחצה, רמת פרמי נמצאת בתוך הפס האסור, עיקר האכלוס של החלקיקים נמצא בקצות הפסים (בזנבות של התפלגויות פרמי-דיראק עבור האלקטרונים והחורים). קצות הפסים במוליכים למחצה הם בקירוב טוב פרבוליים ולכן מותר לנו להשתמש ביחס הנפיצה הנ"ל.

3. (2 נקי) - בליעה/פליטה של פוטון מצויינת כקו אנכי במבנה הפסים של השריג. מדוע?

אורך הגל הפוטוני גדול הרבה יותר מאורך הגל האלקטרוני ומכיוון ומרחב התנע שקול ל-1 חלקי אותו אורך, יחס הנפיצה של הפוטון יראה אנכי שכן התנע שלו קטן הרבה יותר מהתנע השריגי.

4. (2 נק׳) – נתון שריג בעל מבנה פסים כלשהוא. כאשר מחממים את השריג, פער האנרגיה קטן. מדוע?

חימום השריג גורם לאלקטרונים לנוע ולהתרחק זה מזה (החומר מתרחב). כתוצאה מכך הצימוד בין האטומים קטן ואיתו פער האנרגיה.

5. (2 נק׳) - בהרצאה ראיתם שעבור בור-פוטנציאל כלשהוא, רמת האנרגיה הראשונה תמיד ממוקמת באנרגיה מסויימת שהיא מעל לתחתית הבור. מדוע?

ראינו שעקב עקרון אי הודאות, לחלקיק חייבת להיות אנרגיה כלשהיא שכן הוא כלוא, ולכן האנרגיה חייבת לקבל ערך כלשהוא שאינו אפס.

6. (2 נק׳) – עבור בעיית פיזור של חלקיק מפוטנציאל, כיצד ניתן להתגבר על בעיה שפונקציית הגל הכוללת איננה ניתנת לנרמול (ישנן שתי דרכים שונות עליהן דיברנו בכיתה – ציינו אחת)?

ראינו שניתן לתחום את כל הבעיה בעולם סופי ואז ניתן לנרמל את פונקציית הגל. לחילופין, ידוע לנו מעקרון אי הודאות שפונקציית גל אמיתית היא למעשה חבילת גלים כלשהיא. היות וחבילת הגלים בעלת מיקום כלשהוא במרחב, ניתן לנרמל אותה.

7. (2 נק׳) - בהרצאה ראיתם שניתן להגדיר את מהירות הקול עבור שריגים (שהם מבנים מסודרים) כשם שניתן להגדיר אותה עבור חומרים אמורפיים (שאינם מסודרים) כמו אויר, מים וכו׳. הצדיקו את ההגדרה הנ״ל (תחת איזה קירוב שעשינו היא מתקיימת?).

מהירות הקול מוגדרת עבור וקטורי גל שואפים לאפס, כלומר עבור אורכי גל גדולים. בחומרים אמורפיים, משמעות הדבר היא שאורך הגל האקוסטי גדול הרבה יותר מאי הסדר במערכת ואנו מקבלים גלי קול.

8. (2 נק׳) – מהי ההצדקה הפיזיקלית לשימוש בהתפלגות מקסוול-בולצמן במוליכים למחצה?

היות ועבור מוליכים למחצה, בד״כ רמת פרמי תימצא בתוך הפער האסור (גם אם יש סימום כזה או אחר), פסי האנרגיה רואים רק את זנבות התפלגות פרמי-דיראק. משמעות הדבר היא שצפיפות החלקיקים נמוכה בהרבה מצפיפות המצבים ולכן ניתן להתייחס לחלקיקים כאל חלקיקים קלאסים

ולא קוונטים (עקרון אי הודאות לא מתקיים שכן אין מספיק נושאי מטען כדי שהנ"ל ירגישו זה את זה).

9. (2 נק') - "פסי אנרגיה מלאים אינם תורמים להולכה החשמלית" – הצדיקו משפט זה.

   ראינו שפסי אנרגיה סימטריים במרחב התנע ולכן על כל מצב עם תנע כלשהוא יש מצב עם מינוס אותו תנע והתנע הכולל הינו אפס.

10. (2 נק') - נתונה מערכת תרמודינמית קנונית המחולקת ל-2 חלקים נפרדים, כאשר שני החלקים בעלי אותה טמפרטורה. האם האנטרופיה של המערכת מקסימלית?

   במערכת ת"ד קנונית מותר לאנרגיה לעבור אך לא לחלקיקים. היות והטמפרטורה זהה, שתי המערכות נמצאות בש"מ ת"ד.