אלקטרוניקה פיזיקלית 044124

סמסטר חורף 2020

בחן אמצע - <u>פתרון</u>

<u>הנחיות</u>

<u>1. משך הבחן - שעתיים.</u>

<u>2. בבחן 10 שאלות אמריקאיות. בידקו כי ברשותכם 6 עמודים כולל עמוד זה.</u>

<u>3. הבחן הינו עם חומר סגור. לרשותכם דף נוסחאות בעמוד האחרון של הבחן.</u>

<u>4. יש להגיש את דף התשובות האמריקאי המגיע עם המבחן. אנא ודאו שרשמתם את מספר תעודת הזהות בדף זה.</u>

<u>שאלות אמריקאיות (100 נקודות):</u>

לפניכם 10 שאלות אמריקאיות הקשורות לחומר שלמדתם עד כה. הניקוד של כל שאלה הינו 10 נקודות (סה"כ 100 נקודות).

1. **(10 נק')** נתונה מערכת המכילה $N \gg 1$ מתנדים הרמוניים שתדר תנודתם ω ורמות האנרגיה המותרות בהם הן $E_l = \hbar\omega(l+1/2), l \in [\mathbb{N},0]$. עבור n_e יחידות אנרגיה המתחלקות בין המתנדים, מהי האנטרופיה של המערכת? לרשותכם עומד הקירוב $\ln N! \approx N\ln N - N$.

א. $S = k\left(n_e+N\right)\ln\left(n_e+N\right) - kn_e\ln n_e - kN\ln N$

ב. $S = kN + kN\ln\left(\frac{n_e}{N}\right)$

ג. $S = kn_e + kn_e\ln\left(\frac{n_e}{N}\right)$

ד. $S = kN + kN\ln\left(\frac{n_e}{N}\right) + k\frac{N^2}{n_e}$

ה. $S = kn_e + kn_e\ln\left(\frac{n_e}{N}\right) + k\frac{N^2}{n_e}$

למעשה מדובר במערכת של מוצקי איינשטיין. ראינו בתרגול שהריבוי של המערכת הנ"ל הינו:

$$\Omega = \frac{N!}{(N-n_e)!n_e!}$$

נפעיל לוגריתם טבעי על הריבוי ונשתמש בקירוב:

$$\ln\Omega = \ln[\frac{(N+n_e-1)!}{(N-1)!n_e!}] = \ln(N+n_e-1)! - \ln[(N-1)!n_e!] = \ln(N+n_e-1)! - \ln(N-1)! - \ln n_e! \approx$$

$$\approx (N+n_e-1)\ln(N+n_e-1) - (N+n_e-1) - (N-1)\ln(N-1) + (N-1) - n_e\ln n_e + n_e =$$

$$= (N+n_e-1)\ln(N+n_e-1) - (N-1)\ln(N-1) - n_e\ln n_e \approx$$

$$\approx (N+n_e)\ln(N+n_e) - N\ln N - n_e\ln n_e$$

כאשר השתמשנו בכך ש-$N \gg 1$

למעשה כמעט קלענו להגדרת האנטרופיה וכל מה שנותר הוא להכפיל את התשובה בקבוע בולצמן:

$$S \triangleq k_B\ln\Omega = k_B(N+n_e)\ln(N+n_e) - k_BN\ln N - k_Bn_e\ln n_e$$

כלומר שהתשובה הנכונה היא א'.

2. **(10 נק')** נתונה מערכת המכילה 3 מצבי אנרגיה אפשריים $(0,\varepsilon,2\varepsilon,\varepsilon>0)$. מהי האנרגיה הממוצעת של המערכת?

א. $\langle E\rangle = \varepsilon\frac{1}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}}$

ב. $\langle E\rangle = \varepsilon\frac{e^{-\varepsilon/kT}+2e^{-2\varepsilon/kT}}{1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}}$

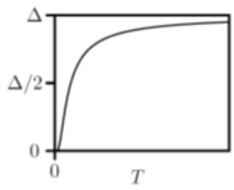
ג. $\langle E\rangle=\varepsilon\left(1+e^{-\varepsilon/kT}+e^{-2\varepsilon/kT}\right)$

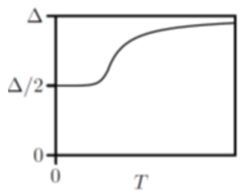
ד. $\langle E\rangle=\dfrac{1}{\exp\left[\left(\varepsilon-E_F\right)/kT\right]+1}$

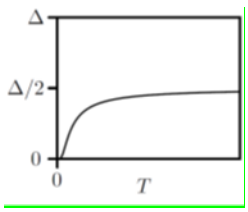
ה. $\langle E\rangle=\dfrac{2\varepsilon}{\exp\left[\left(\varepsilon-E_F\right)/kT\right]+1}$

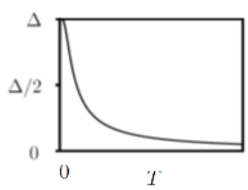
ניתן להשתמש בפקטורי בולצמן ובהגדרת פונקציית החלוקה כדי לחשב את האנרגיה הממוצעת, אולם בפתרון זה נראה כיצד ניתן לפסול את התשובות מטעמים פיזיקלים. תשובה ד' בכלל חסרת יחידות של אנרגיה (אין לה יחידות פיזיקליות) ולכן בהגדרה אינה נכונה. בטמפרטורה השואפת ל-0, אנו מצפים שהאנרגיה הממוצעת תהיה 0. תשובה א' שואפת ל-ε וכך גם תשובה ג' ולכן שתיהן אינן נכונות. בטמפרטורה השואפת לאינסוף (או יותר פורמלית טמפרטורה מספיק גבוהה כך שיתקיים $k_BT\gg\varepsilon$), נצפה שהמערכת תשאף לממוצע של כל רמות האנרגיה (שימו לב שבד"כ ממוצע זה לוקח גם ניוון של כל רמות, אולם כאן אין ניוון ולכן מדובר פשוט בסכום האנרגיות חלקי מספר הרמות). הממוצע במקרה זה הוא ε. תשובה ה' אמנם שואפת ל-ε עבור אנרגיות גבוהות מאוד, אולם היא מוגדרת עבור פרמיונים (התפלגות פרמי-דיראק) ולכן אינה רלוונטית. התשובה הנכונה היא אם כן ב'.

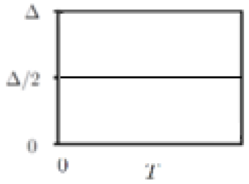
3. **(10 נק')** נתונה מערכת עם שתי רמות אנרגיה $(0,\Delta>0)$. איזה מהגרפים הבאים יכול לתאר את התלות של האנרגיה הממוצעת $\langle E\rangle$ של המערכת בטמפרטורה T?

א. 

ב. 

ג. 

ד. 

ה. 

בטמפרטורה $T=0$ נצפה לכך שכל החלקיקים ימצאו במצב הנמוך שערכו 0 ולכן האנרגיה הממוצעת של המערכת תהיה 0. מכאן שתשובות ב',ד' וה' נפסלות. בטמפרטורות גבוהות כל מצב אנרגטי יאוכלס בהסתברות שווה, כלומר שנצפה לקבל את הממוצע של שתי הרמות שהוא $\Delta/2$. מכאן שתשובה א' נפסלת כך שהתשובה הנכונה היא ג'.

4. **(10 נק')** נתונים N אלקטרונים בעלי ספין חצי הנעים בעולם חד-מימדי. צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה וליחידת אורך היא:

א. $g(E)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2\hbar^2 E}}$

ב. $g(E)=\frac{2E}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2\hbar^2}}$

ג. $g(E)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{E}$

ד. $g(E)=\frac{m}{\pi\hbar^2}$

ה. $g(E)=\frac{m^2}{\pi\hbar^4 E^2}$

במקרה החד-מימדי אנו מתעסקים עם אורכים ולכן נגדיר אורך טיפוסי L. ידוע לנו ש- $k_x=n_x\frac{\pi}{L}$ כאשר האורך הכולל של העולם שלנו הינו $L_{total}=2k$. האורך אותו תופס מצב בודד הינו $\frac{\pi}{L}$ ולכן מספר המצבים הכולל יהיה:

$$N(k)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{L_{total}}{L_{state}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{\frac{\pi}{L}}=\frac{2kL}{\pi}.$$

נציב את יחס הנפיצה האלקטרוני ונקבל את מספר המצבים ליחידת אורך:

$$G(E)=\frac{1}{L}\cdot\frac{2kL}{\pi}=\frac{2k}{\pi}=\frac{2\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}$$

גזירה לפי האנרגיה תיתן את צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה ליחידת אורך:

$$g(E)=\frac{dG(E)}{dE}=\frac{2\sqrt{2m}}{\pi\hbar}\cdot\frac{1}{2\sqrt{E}}=\frac{\sqrt{2m}}{\pi\hbar\sqrt{E}}=\frac{2\sqrt{m}}{\pi\sqrt{2\hbar^2 E}}$$

כלומר שהתשובה הנכונה היא א'.

הערה: קיימים פיתוחים ברשת אשר לוקחים את האורך הכולל כ- k ולא כ- $2k$ וכתוצאה מכך נוצר פקטור מספרי בביטוי. הדבר פחות חשוב ויותר חשובה התלות באנרגיה שהיא הדבר היחודי בבעיה זו.

5. **(10 נק')** עבור גז אידיאלי ב-3 מימדים בעל N חלקיקים ובטמפרטורה T, מהי התלות של הריבוי Ω במספר החלקיקים N?

א. $\Omega \propto e^{\frac{3}{2}N}$

ב. $\Omega \propto e^{-\frac{3}{2}N}$

ג. $\Omega \propto e^{\frac{1}{2}N}$

ד. $\Omega \propto e^{-\frac{3}{2N}}$

ידוע לנו שהאנרגיה הממוצעת של גז אידיאלי ב-3 מימדים הינה $E=\frac{3}{2}Nk_BT$

וכן שמתקיים לפי הגדרה $S=k_B\ln[\Omega(E,N)]$ ידוע שמתקיים הקשר $\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{1}{T}$

, כלומר: $\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{k_B}{\Omega(E,N)}\cdot\frac{d\Omega(E,N)}{dE}=\frac{1}{T}$

נסדר את האיברים כך שנוכל לבצע אינטגרציה:

$$\frac{k_B}{\Omega(E,N)}\cdot\frac{d\Omega(E,N)}{dE}=\frac{1}{T}\Rightarrow\frac{d\Omega(E,N)}{\Omega(E,N)}=\frac{1}{k_BT}dE\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{\Omega}\frac{d\Omega(E,N)}{\Omega(E,N)}=\int_{E}\frac{1}{k_BT}dE\Rightarrow\ln\Omega(E,N)=\frac{E}{k_BT}$$

נכניס את האנרגיה הממוצעת שלנו ונקבל:

$$\ln\Omega(E,N)=\frac{3}{2}N\Rightarrow\Omega(E,N)=e^{\frac{3}{2}N}$$

כלומר שהתשובה הנכונה הינה א'.

לחילופין, ניתן להציב את התשובות ולקבל דרך הגדרות האנטרופיה והטמפרטורה את התוצאה הנכונה. שימו לב שתשובות ב' וד' נפסלות מיידית שכן אנו מצפים שהריבוי יגדל עם הגדלת מספר החלקיקים, כלומר שאקספוננט שלילי הינו בהגדרה לא נכון.

6. **(10 נק')** נתון חומר דו-מימדי שצפיפות המצבים שלו (ליחידת אנרגיה ושטח) g_0 קבועה. נתון שישנה צפיפות משטחית אלקטרונית N בפס ההולכה. עבור טמפרטורה $T=0$, מהו מרחקה של רמת פרמי מתחתית פס ההולכה?

א. $E_F-E_C=\frac{N}{g_0}$

ב. $E_F-E_C=0$

ג. $E_F-E_C=-\frac{N}{g_0}$

ד. $E_F - E_C = -kT\ln\left(\frac{N}{g_0}\right)$

ה. $E_F - E_C = kT\ln\left(\frac{N}{g_0}\right)$

בטמפרטורה $T=0$ התפלגות פרמי-דיראק הינה פונקציית מדרגה שערכה 1 בתחום $[E_c, E_f]$ ו-0 בשאר האנרגיות. נתון שישנם N חלקיקים ליחידת שטח. היות וצפיפות המצבים קבועה והתפלגות פרמי-דיראק הינה פשוט 1 בתחום הרלוונטי, נקבל מיידית ש- $E_f - E_c = \frac{N}{g_0}$ (שימו לב שאכן קיבלנו יחידות של אנרגיה) כך שהתשובה הנכונה היא א'.

הערה: בבחן הועלו טענות לגבי ההגדרות של פס ההולכה ו- E_C שכן מדובר בחומר ממל"מ (ועוד לא ראינו זאת בקורס). לכן במהלך הבחן ניתן הנתון ש- $E_C = 0$ היא פשוט הרמה האנרגטית הנמוכה ביותר במערכת. הדבר אינו משפיע על נכונות התשובה הסופית.

7. **(10 נק')** נתונה מערכת של N חלקיקים כאשר האנרגיה של כל חלקיק היא $E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{3}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{3}{2}aq^2$. בהנחה שהמערכת בש"מ תרמי בטמפ'-T ושדרגות החופש רציפות, מהי האנרגיה הממוצעת של המערכת?

א. $\frac{3}{2}Nk_BT$

ב. $3Nk_BT$

ג. $6Nk_BT$

ד. $5Nk_BT$

ה. $\frac{1}{2}Nk_BT$

הדרך הקלה ביותר לזהות את האנרגיה הממוצעת של המערכת היא לפי משפט החלוקה השווה שלפיו כל דרגת חופש של החלקיק מקבלת $\frac{1}{2}k_BT$ אנרגיה.
ניתן לראות שישנן 6 דרגות חופש ולכן האנרגיה הממוצעת פר חלקיק היא $3k_BT$. היות ונתבקשנו לקבל את האנרגיה הממוצעת של כל המערכת, נכפיל את האנרגיה הממוצעת פר חלקיק במספר החלקיקים ונקבל $3Nk_BT$, כלומר שתשובה ב' היא הנכונה. שימו לב שהמספר הצמוד לקבוע בכל ביטוי אנרגיה הינו מטעה ואינו חשוב. לא מעניין אותנו הקבוע אלא החזקה שמופיעה עבור דרגת החופש!

הערה: בבחן הועלו טענות לגבי חוסר ההגדרה של דרגות החופש בשאלה (לדוגמה, האם יתכן ש- q הוא בכלל קבוע כלשהוא). לכן במהלך הבחן הסגל עבר בין הכיתות והדגיש את ההגדרה הנ"ל.

8. **(10 נק')** נתונה מערכת המכילה בוזונים שצפיפות המצבים שלה היא $g(E)=3N\delta(E-E_0), E_0>0$. עוד נתון כי הפוטנציאל הכימי של המערכת הינו $\mu=0$ וכן ש- $k_BT \ll E_0$. מהו קיבול החום של המערכת?

א. $C_v=3Nk_B$

ב. $C_v=3Nk_B\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)^2 e^{-\frac{E_0}{k_BT}}$

ג. $C_v=3Nk_B\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)^2 e^{\frac{E_0}{k_BT}}$

ד. $C_v=Nk_B$

ה. $C_v=3Nk_B\frac{\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)^2 e^{\frac{E_0}{k_BT}}}{(e^{\frac{E_0}{k_BT}}-1)^2}$

נחשב את האנרגיה הכוללת של המערכת לפי הגדרה:

$$E=\int E\cdot g(E)\cdot f(E)dE=\int E\cdot 3N\delta(E-E_0)\cdot\frac{1}{e^{\frac{E}{k_BT}}-1}dE=\frac{3NE_0}{e^{\frac{E_0}{k_BT}}-1}$$

נתון לנו שהטמפרטורה נמוכה מאוד, כלומר ש- $e^{\frac{E_0}{k_BT}} \gg 1$ כך שנקבל:

$$E=\frac{3NE_0}{e^{\frac{E_0}{k_BT}}-1}\approx\frac{3NE_0}{e^{\frac{E_0}{k_BT}}}=3NE_0e^{-\frac{E_0}{k_BT}}$$

כעת נוכל לקבל את הקיבול החום של המערכת לפי הגדרה:

$$C=\frac{dE}{dT}=3NE_0e^{-\frac{E_0}{k_BT}}\cdot\left(\frac{E_0}{k_BT^2}\right)=3Nk_B\left(\frac{E_0^2}{k_B{}^2T^2}\right)e^{-\frac{E_0}{k_BT}}=3Nk_B\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)^2e^{-\frac{E_0}{k_BT}}$$

כלומר שהתשובה הנכונה הינה ב'.

הערה: התשובה ה' הינה קיבול החום המדויק של המערכת ללא קירובים. תשובה זו לא הייתה אמורה להופיע בבחן ולכן הוחלט לקבל גם אותה.

9. **(10 נק')** נתון גביש המכיל N אטומים המצוי בטמפרטורה T. כל אטום יכול להימצא באחד משני מצבי אנרגיה אפשריים: להישאר במקומו בגביש ($E=0$) או לצאת ממקומו בגביש ($E=E_0>0$) כאשר המצב השני הינו פגם בגביש.
מהו מספר הפגמים בגביש כתלות בטמפרטורה?

א. $N\cdot e^{-E_0/k_BT}$

ב. $N\cdot e^{E_0/k_BT}$

ג. $N/(1+e^{-E_0/k_BT})$

ד. $N/(1+e^{E_0/k_BT})$

ה. $N\cdot\frac{k_BT}{E_0}$

למעשה מדובר בבעיית 2 רמות אנרגיה אותה ראיתם בשיעורי הבית, כאשר אנו מעוניינים למצוא את מספר האטומים המצויים ברמה הגבוהה. פונקציית החלוקה של המערכת היא:

$$Z=1+e^{-\frac{E_0}{k_BT}}$$

מספר החלקיקים המצויים ברמה העליונה (כלומר המהווים פגם) יהיה מספר החלקיקים הכולל כפול ההסתברות להימצא ברמה העליונה, כלומר:

$$N_{defect}=N\cdot\frac{P(E_0)}{Z}=\frac{Ne^{-\frac{E_0}{k_BT}}}{1+e^{-\frac{E_0}{k_BT}}}=\frac{N}{1+e^{\frac{E_0}{k_BT}}}$$

כלומר שהתשובה הנכונה היא ד'.

10. **(10 נק')** נתונה מערכת דו-מימדית ששטחה A המכילה N בוזונים ובעלת צפיפות מצבים ליחידות אנרגיה ושטח g_0 כלשהיא. טמפרטורת המעבר T_B לעיבוי בוזה-איינשטיין במערכת זו תהיה:

א. $T_B=\frac{1}{mk_B}\left(\frac{\pi^2\hbar^3N}{3.27A}\right)^{2/3}$

ב. $T_B=\frac{k_B}{Ng_0A}$

ג. $T_B=\frac{2k_B}{Ng_0A}$

ד. עיבוי בוזה-איינשטיין בלתי אפשרי במערכת זו.

ה. עיבוי בוזה-איינשטיין תמיד מתקיים במערכת זו לכל טמפרטורה.

בתרגול 5 ראינו שעבור מערכת בוזונים, עבור ערך קריטי של N הפוטנציאל הכימי יתאפס, כלומר שמספר הבוזונים שווה לאינטגרל הבא:

$$N=\int_0^\infty g(E)f(E)dE=\int_0^\infty \frac{g_0}{e^{\frac{E}{k_BT}}-1}dE$$

ניתן לראות שאינטגרל זה מתבדר תמיד (בתלת מימד התלות של צפיפות המצבים בשורש האנרגיה ביטלה את ההתבדרות). הדבר היחידה לקבל תוצאה שאינה אינסופית עבור האינטגרל הוא אם הטמפרטורה שואפת ל-0. היות ולא ניתן להגיע ל-0 המוחלט, לא ניתן למעשה לקבל עיבוי בוזה-איינשטיין בדו-מימד ולכן התשובה הנכונה היא ד'.

נוסחאות שימושיות:

ריבוי מצבים עבור מוצק איינשטיין:

$$\Omega(n_e, N) = \frac{(n_e + N - 1)!}{n_e!(N-1)!}$$

הגדרת האנטרופיה:

$$S \triangleq k_B \ln \Omega$$

הגדרת הטמפרטורה (בהנחת ש"מ תרמי):

$$\frac{1}{T} \triangleq \frac{\partial S}{\partial E}$$

הגדרת קיבול החום:

$$C \triangleq \frac{\partial E}{\partial T}$$

יחס הנפיצה עבור חלקיקים חופשיים בעלי מסה ב-1,2,3 מימדים:

$$E = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{1,2,3} v_i^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{1,2,3} k_i^2$$

מצבים אפשריים עבור בורות פוטנציאלים אינסופיים ב-1,2,3 מימדים:

$$k_i = n_i \frac{\pi}{L}$$