אלקטרוניקה פיסיקלית – 044124
חורף תשפ״ג

תרגיל בית מס. 5

שם: אור ניצן ת״ז: 207687823

שם: תומר אשכנזי ת״ז: 314645029

שאלה 1:

א.

נעזר בהדרכה, נזכר מקורסים קודמים באיזון הלמים שלמדנו (אינטואיטיבית) שההלם "נספג" ע"י הנגזרת הגבוהה ביותר. נרשום את משוואת שרדינגר ונבצע אינטרגציה, מתוך רציפות פונקציית נזהה את האיבר שמתאפס, ונשתמש בתכונות של פונקציית דלתא

$$\widehat{\mathscr{H}}\psi(x) = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + H\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$using\ the\ guideness:$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^-} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + H\delta(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^-} E\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$becuse\ \psi(x)\ is\ continuous\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^-} E\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$using\ delta\ function\ as\ a\ sampler\ at\ x=0:$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^+} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + H\delta(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big|_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^+}\psi'(x) + H\psi(0) = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Big|_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^+}\psi'(x) = H\psi(0)$$

הגענו לקשר על נגזרת פונקציית הגל משני צידי הדלתא כפי שהתבקש.

ב.

נחלק את המרחב לשני אזורים 1)x<0 , 2)x>0 , נדרוש תנאי רציפות בx=0 , ואת התנאי על הנגזרות שהגענו אליו בסעיף הקודם. עבור חלקיק שנע מinf- לכיוון inf (מניחים בה"כ הפתרון סימטרי), ננחש פתרון חלקיק חופשי עבור אזור 1 וחלקיק שנע ימינה עבור אזור 2 (החלקיק יכול לעבור את המחסום או להינתז אחורה). עבור האמפליטודה של החלקיק שנע ימינה לפני המחסום נציב 1 (בכל מקרה היינו יכולים להציב פרמטר ולחשב אותו מתנאי נרמול – זה לא ישפיע על יחסי העברה החזרה).

$$\begin{cases} \psi_1(x) = e^{-ikx} + re^{ikx} & , \quad x<0 \\ \psi_2(x) = te^{-ikx} & , \quad x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1'(x) = ik\left(re^{ikx} - e^{-ikx}\right) & , \quad x<0 \\ \psi_2'(x) = -ik\, te^{-ikx} & , \quad x>0 \end{cases}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow t = r+1 \ (*)$$

$$using \ the \ connection \ we \ found \ earlier:$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(-ik\, te^{-ik0^+} - ik\left(re^{ik0^-} - e^{-ik0^-}\right)\right) = Ht \quad , \quad \frac{\hbar^2 ki}{2m}(1-r) = t\left(H + \frac{\hbar^2 ki}{2m}\right)$$

$$using \ (*):$$

$$\frac{\hbar^2 ki}{2m}(1-(t-1)) = t\left(H + \frac{\hbar^2 ki}{2m}\right)$$

$$\frac{\hbar^2 ki}{m} = t\left(H + \frac{\hbar^2 ki}{m}\right) \quad , \quad t = \frac{\frac{\hbar^2 ki}{m}}{\left(H + \frac{\hbar^2 ki}{m}\right)} = \frac{\frac{\hbar^2 ki}{m}}{\left(H + \frac{\hbar^2 ki}{m}\right)}$$

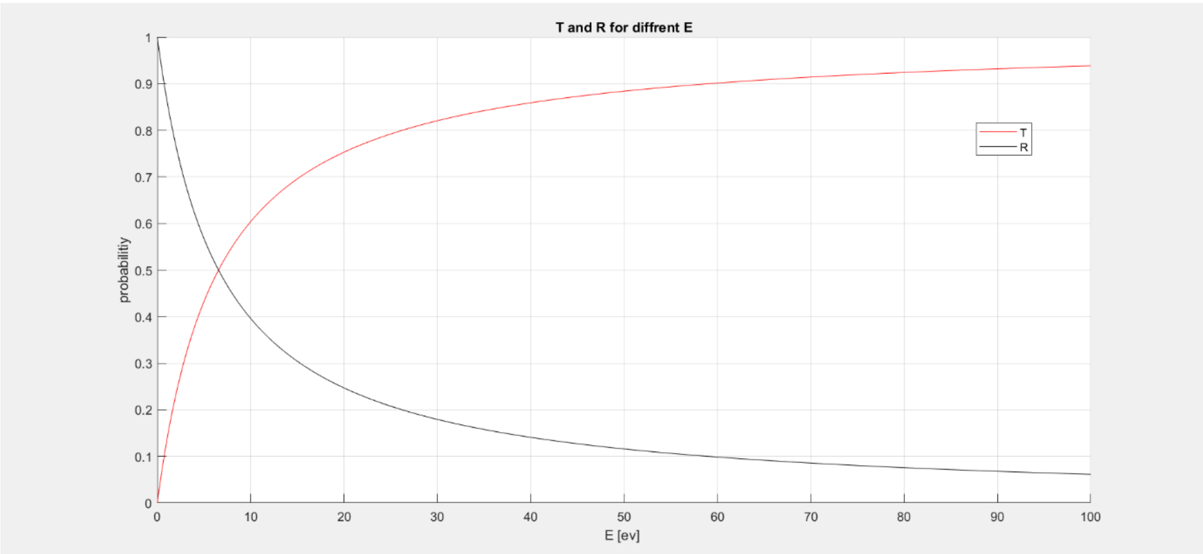
כעת נוכל לחלץ את אופיין העברה\החזרה כתלות באנרגייה.

$$t = \frac{\frac{\hbar^2 ki}{m}}{\left(H + \frac{\hbar^2 ki}{m}\right)} = \frac{\frac{\hbar^2 ki}{m}}{\frac{Hm + \hbar^2 ki}{m}} = \frac{\hbar^2 ki}{Hm + \hbar^2 ki} = \frac{\hbar^2 k}{\hbar^2 k + Hmi}$$

$$T = |t|^2 = \left|\frac{\hbar^2 k}{\hbar^2 k + Hmi}\right|^2 = \frac{\hbar^4 k^2}{\hbar^4 k^2 + H^2 m^2} \qquad \left\{K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right\}$$

$$T(E) = \frac{2mE\hbar^2}{2mE\hbar^2 + H^2 m^2} = \frac{1}{1 + \frac{H^2 m}{2E\hbar^2}}$$

$$R(E) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{H^2 m}{2E\hbar^2}}$$



ג.

כעת מוסיפים מחסום נוסף, לכן המרחב יתחלק ל3 אזורים : 1) x<0 , 2) 0<x<10nm, 3) 10nm<x

באזור הראשון ננחש פתרון חלקיק חופשי כאשר אמפליטודת הגל שנע ימינה הינה 1 (בדומה לסעיף הקודם), באזור השני חלקיק חופשי עם שני מקדמים עבור הגל המתקדם והנסוג. עבור האזור השלישי רק גל מתקדם. נכפה את התנאים הנדרשים מרציפות פונקציית הגל:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = e^{ikx} + r_1 e^{-ikx} & , \quad x<0 \\ \psi_2(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & , \quad 0<x<10nm \\ \psi_3(x) = t_2 e^{ikx} & , \; 10nm<x \end{cases}$$

$L = 10nm$

because $\psi(x)$ *is continous*:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow \quad 1 + r_1 = A + B \\ \psi_2(L) = \psi_3(L) \Rightarrow \quad Ae^{ikL} + Be^{ikL} = t_2 e^{ikL} \end{cases}$$

נרחיב את שמצאנו בסעיף א גם עבור המחסום השני עלמ ליצור תנאים על נגזרות פונקציית הגל:

$$\begin{cases} \psi_1'(x) = ik\left(e^{-ikx} - r_1 e^{ikx}\right) & , \quad x<0 \\ \psi_2'(x) = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}) & , \quad 0<x<10nm \\ \psi_3'(x) = ikt_2 e^{ikx} & , \; 10nm<x \end{cases}$$

because of delta properties:

$$\begin{cases} \psi_2'(0^+) - \psi_1'(0^-) = \frac{2mH}{\hbar}\psi(0) \rightarrow ik(A-B) - ik\left(1 - r_1\right) = \frac{2mH}{\hbar}(A+B) \\ \psi_3'(L^+) - \psi_2'(L^-) = \frac{2mH}{\hbar}\psi(L) \rightarrow ikt_2 e^{ikL} - ik(Ae^{ikL} - Be^{-ikL}) = \frac{2mH}{\hbar} \; t_2 e^{ikL} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - B = \frac{2mH}{ik\hbar}(A+B) + 1 - r_1 \\ Ae^{ikL} - Be^{-ikL} = t_2 e^{ikL}\left(1 - \frac{2mH}{ik\hbar}\right) \end{cases}$$

קיבלנו 4 משוואות עם ארבע נעלמים כאשר רק t2 ו r1 מעניינים אותנו:

$$\begin{cases} A-B = \frac{2mH}{ik\hbar}(A+B)+1-r_1 \ (1) \\ Ae^{ikL}-Be^{-ikL} = t_2e^{ikL}\left(1-\frac{2mH}{ik\hbar}\right) \to A-Be^{-2ikL} = t_2\left(1-\frac{2mH}{ik\hbar}\right) \ (2) \\ 1+r_1 = A+B \ (3) \\ Ae^{ikL}+Be^{-ikL} = t_2e^{ikL} \to A+Be^{-2ikL} = t_2(4) \end{cases}$$

$using \ (4) \ \& \ (2):$

$$\frac{A-Be^{-2ikL}}{\left(1-\frac{2mH}{ik\hbar}\right)} = A+Be^{-2ikL} \to \left(A+Be^{-2ikL}\right)\left(1-\frac{2mH}{ik\hbar}\right) = A-Be^{-2ikL}$$

$$Be^{-2ikL}\left(\left(1-\frac{2mH}{ik\hbar}\right)+1\right)=A\left(1-\left(1-\frac{2mH}{ik\hbar}\right)\right) \to 2Be^{-2ikL}\left(1-\frac{mH}{ik\hbar}\right) = \frac{2mH}{ik\hbar}A \to A = Be^{-2ikL}\left(1-\frac{mH}{ik\hbar}\right)\frac{ik\hbar}{mH}$$

$$A=Be^{-2ikL}\left(\frac{ik\hbar}{mH}-1\right)$$

$using \ (4):$

$$t_2=Be^{-2ikL}\left(\frac{ik\hbar}{mH}-1\right)+Be^{-2ikL} = Be^{-2ikL}\frac{ik\hbar}{mH}$$

$$B=t_2\cdot e^{2ikL}\frac{mH}{ik\hbar}$$

$therefore:$

$$A=t_2\cdot\frac{mH}{ik\hbar}\left(\frac{ik\hbar}{mH}-1\right) = t_2\cdot\left(1-\frac{mH}{ik\hbar}\right)$$

$lets \ calculate \ A+B \ and \ B-A:$

$$A+B = t_2\left(1-\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}-1\right)\right) \quad B-A = t_2\cdot\left\{\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}+1\right)-1\right\}(*)$$

$now \ lets \ use \ (1) \ \& \ (3):$

$$A+B-1 = \frac{2mH}{ik\hbar}(A+B)+1-A+B$$

$$(A+B)\left[\frac{2mH}{ik\hbar}-1\right]+B-A = -2 \{ \text{we will use the connections} \}(*)$$

$$t_2\left(1-\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}-1\right)\right)\left[\frac{2mH}{ik\hbar}-1\right]+t_2\cdot\left\{\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}+1\right)-1\right\} = -2 \to t_2\left\{\left(1-\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}-1\right)\right)\left[\frac{2mH}{ik\hbar}-1\right]+\left\{\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}+1\right)-1\right\}\right\} = -2$$

$$t_2\left\{\frac{2mH}{ik\hbar}-1+\frac{2m^2H^2}{k^2\hbar^2}\left(e^{2ikL}-1\right)-\left(e^{2ikL}-1\right)+\frac{mH}{ik\hbar}\left(e^{2ikL}+1\right)-1\right\} = -2 \to t_2\left\{e^{2ikL}\left[\frac{2m^2H^2}{k^2\hbar^2}+\frac{mH}{ik\hbar}-1\right]+\frac{3mH}{ik\hbar}-1-\frac{2m^2H^2}{k^2\hbar^2}\right\} = -2$$

$$t_2 = \frac{-2}{\left\{e^{2ikL}\left[\frac{2m^2H^2}{k^2\hbar^2}+\frac{mH}{ik\hbar}-1\right]+\frac{3mH}{ik\hbar}-1-\frac{2m^2H^2}{k^2\hbar^2}\right\}}$$

$lets \ put \ K=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$lets \ calculate \ some \ usefull \ expersions:$

$$\frac{mH}{ik\hbar} = \frac{mH}{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\hbar} = \frac{mH}{i\sqrt{2mE}} = -\sqrt{\frac{m}{2E}}Hi$$

$$\frac{m^2H^2}{k^2\hbar^2} = \frac{mH^2}{2E}$$

$now \ we \ can \ express \ T(E):$

$$T(E)=\left|t_2(E)\right|^2 = \left|\frac{-2}{e^{2i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L}\left[\frac{mH^2}{E}-\sqrt{\frac{m}{2E}}Hi-1\right]-3\sqrt{\frac{m}{2E}}Hi-1-\frac{mH^2}{E}}\right|^2 = \frac{4}{\left|e^{2i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L}\left[\frac{mH^2}{E}-\sqrt{\frac{m}{2E}}Hi-1\right]-3\sqrt{\frac{m}{2E}}Hi-1-\frac{mH^2}{E}\right|^2}$$

נשים לב כי אכן מתקיים העברה שואפת ל-1 עבור אנרגיה אינסופית ול-0 עבור אנרגיה 0, נראה גם שישנו אופי גלי כלשהו (מהאקספודנט המרוכב) שנובע מהתאבכויות של גלים הנעים בין המחסומים.

שאלה 2:

הביטוי למקדם ההעברה דרך המחסום (כפי שהוראה בתרגול) הוא:

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}L\right)}{4E(V-E)}}$$

בשאלה שלנו נתון כי $V = 4[eV]$, $E = 2[eV]$. נציב $L = a$ ונדרוש $T(E = 2[eV]) < 0.05$:

$$T(E = 2[eV]) = \frac{1}{1 + \frac{4^2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}{(1.05 \cdot 10^{-34})^2} \cdot (4-2) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \cdot a\right)}{4 \cdot 2(4-2)}}$$
$$= \frac{1}{1 + \sinh^2(7.27 \cdot 10^9 a)} < \frac{1}{20}$$

$$\sinh(7.27 \cdot 10^9 a) > \sqrt{19} \quad \Rightarrow \quad a > 2.99 \cdot 10^{-10}[m] \approx \boxed{3[\text{Å}]}$$

העובי המינימלי של השכבה המבודדת הוא $3[\text{Å}]$.

שאלה 3:

א.

ראינו בתרגול שתחילה עלינו לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$Even\ Modes: \begin{cases} k_0 \left|\cos\left(k\frac{L}{2}\right)\right| = k \\ \tan\left(k\frac{L}{2}\right) > 0 \end{cases} \quad ; \quad Odd\ Modes: \begin{cases} k_0 \left|\sin\left(k\frac{L}{2}\right)\right| = k \\ \tan\left(k\frac{L}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

כאשר $k_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V}$ ו-$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_n}$.

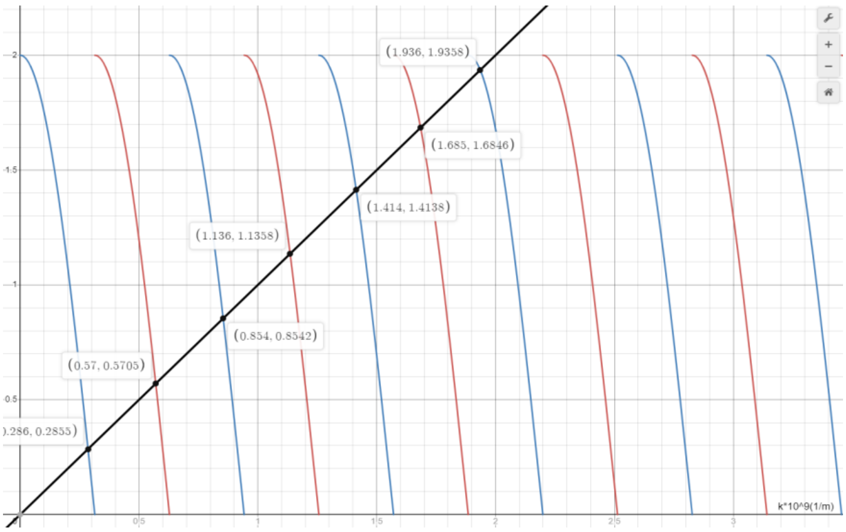
גובה הבור V הוא ההפרש בין פסי ההולכה של המוליכים למחצה.

$$V = \Delta E_C = x \cdot \Delta E_g = x\left[E_g(AlGaAs) - E_g(GaAs)\right] = 0.6[1.673 - 1.424] = 149.4[meV]$$

נחשב כעת את k_0 ובנוסף נבטא את האנרגיה E כפונקציה של k:

$$k_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}{(1.05 \cdot 10^{-34})^2} \cdot 0.1494 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 2 \cdot 10^9 \left[\frac{1}{m}\right]$$

להלן הגרף של המערכת (k בסקלה של 10^9):



נבטא את האנרגיה E כפונקציה של k:

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_n} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = 37.8k^2[meV]$$

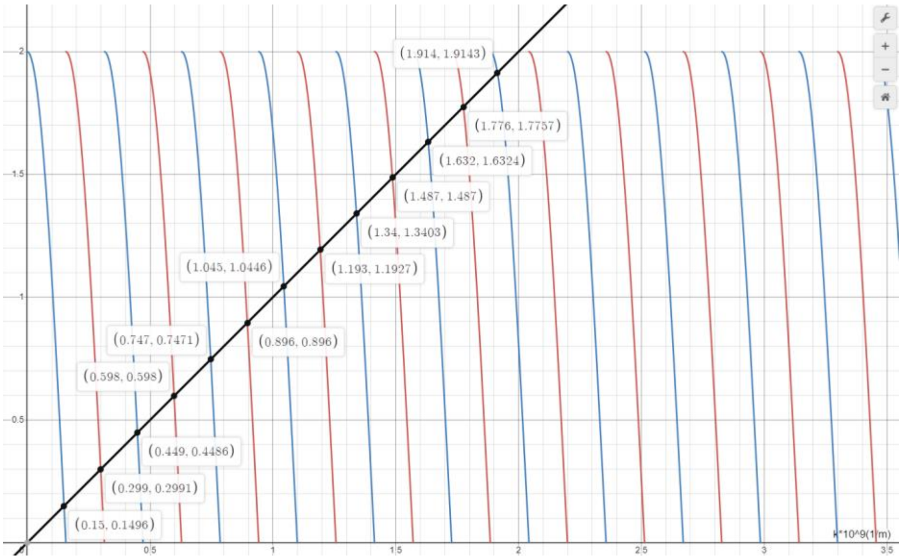
נציב את ערכי k המנורמלים (אשר מתקבלים בחיתוך בין הגרפים) לקבלת האנרגיות הבדידות:

$$E_n = \{3.1\,, 12.3\,, 27.6\,, 48.8\,, 75.6\,, 107.3\,, 141.7\}[meV]$$

מצאנו 7 אנרגיות בדידות בהן יכול להימצא האלקטרון.

ב.

המערכת כעת "התכווצה" פי 2. להלן הגרף:



נציב את ערכי k המנורמלים (אשר מתקבלים בחיתוך בין הגרפים) לקבלת האנרגיות הבדידות:

$$E_n = \{0.85\,, 3.4\,, 7.6\,, 13.5\,, 21.1\,, 30.4\,, 41.3\,, 53.8\,, 67.9\,, 83.6\,, 100.7\,, 119.2\,, 138.5\}[meV]$$

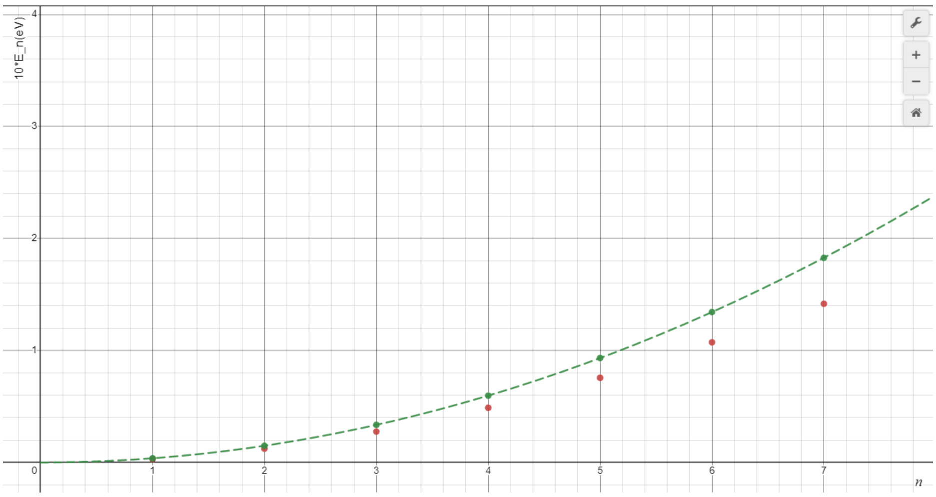
מצאנו 13 אנרגיות בדידות בהן יכול להימצא האלקטרון (כמעט פי 2 מסעיף קודם).

ג.

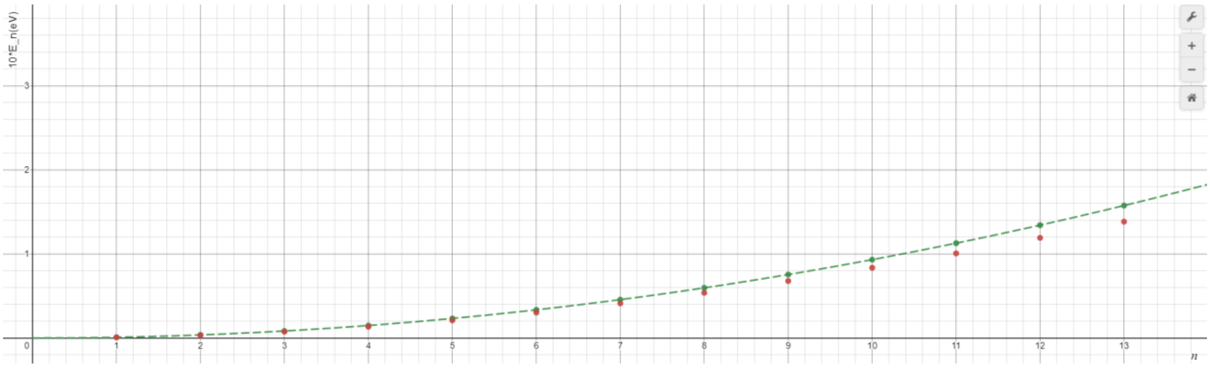
רמות האנרגיה הבדידות עבור בור אינסופי נתונות ע"י הנוסחה הבאה:

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 = \frac{3.73\cdot 10^{-19}}{L^2}n^2[eV] = \begin{cases} 3.73n^2[meV] & ;L = 10[nm] \\ 0.9325n^2[meV] & ;L = 20[nm] \end{cases}$$

להלן גרף האנרגיות הבדידות עבור $L = 10[nm]$ כתלות ב-n (באדום האנרגיות שמצאנו בבור הסופי בסעיף א' ובירוק האנרגיות עבור בור אינסופי) [האנרגיה נמדדת בסדר גודל אחד יותר]:



להלן גרף האנרגיות הבדידות עבור $L = 20[nm]$ כתלות ב-n (באדום האנרגיות שמצאנו בבור הסופי בסעיף ב' ובירוק האנרגיות עבור בור אינסופי) [האנרגיה נמדדת בסדר גודל אחד יותר]:



ד.

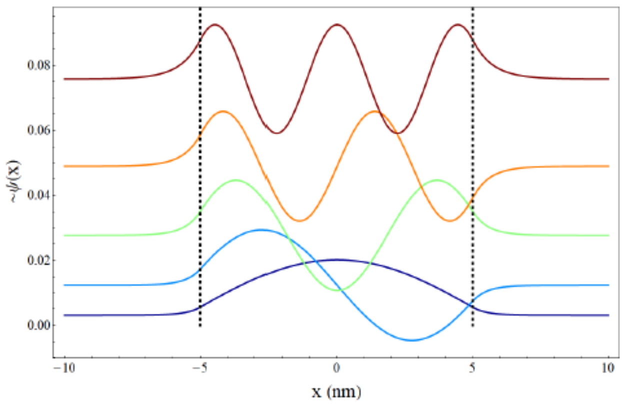
פונקציית הגל עבור בור פוטנציאל סופי באורך L היא:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\rho x} & ; x \le -\frac{L}{2} \\ Be^{ikx} + Ce^{-ikx} & ; |x| < -\frac{L}{2} \\ De^{-\rho x} & ; x \ge \frac{L}{2} \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \\ \rho = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)} \end{matrix}$$

על מנת למצוא פונקציות עצמיות, נדרוש רציפות של פונקציית הגל ושל נגזרתה בנקודות $x = \pm\frac{L}{2}$. נבטא באמצעות A את המקדמים כפי שראינו בתרגול:

$$\begin{cases} Ae^{-\rho\frac{L}{2}} = Be^{-ik\frac{L}{2}} + Ce^{ik\frac{L}{2}} \\ \rho Ae^{-\rho\frac{L}{2}} = ik\left(Be^{-ik\frac{L}{2}} - Ce^{ik\frac{L}{2}}\right) \\ De^{-\rho\frac{L}{2}} = Be^{ik\frac{L}{2}} + Ce^{-ik\frac{L}{2}} \\ -\rho De^{-\rho\frac{L}{2}} = ik\left(Be^{ik\frac{L}{2}} - Ce^{-ik\frac{L}{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -i\frac{\rho + ik}{2k}e^{(-\rho+ik)\frac{L}{2}}A \\ C = i\frac{\rho - ik}{2k}e^{-(\rho+ik)\frac{L}{2}}A \\ D = \frac{\rho^2 + k^2}{2k\rho}\sin(kL)\,A \end{cases}$$

להלן גרף של מס' פונקציות עצמיות:



ה.

הפרמטר x קובע את עומק בור הפוטנציאל עבור האלקטרונים ואת עומק בור הפוטנציאל עבור החורים.