winter24A

דורון שפיגל

18.05.24

שאלה: 1

שאלה 1.
נתונה מערכת של 2 רמות בטמפרטורה T. רמה ראשונה עם אנרגיה ϵ וניוון 1 ורמה שנייה עם אנרגיה 2ϵ וניוון 3. מהי הטמפרטורה T אם ידוע כי ההסתברות שהמערכת תהיה במצב אנרגיה ϵ שווה לרבע ההסתברות שהמערכת תהיה עם אנרגיה 2ϵ.

פתרון: 1

פתרון 1.
הנוסחה לחישוב פונקציית החלוקה Z היא:

פונקציית החלוקה

$$1=\sum_{S}P\left(s\right)=\frac{1}{Z}\sum_{S}e^{-\beta E(s)} \tag{1}$$

$$\rightarrow Z\triangleq\sum_{S}g(s)e^{\frac{-E(s)}{kT}}=\sum_{S}g(s)e^{-\beta E(s)} \tag{2}$$

נסמן את הרמה הראשונה כ s_1 ואת הרמה השנייה כ s_2, נתון ש $P(s_1)=\frac{1}{4}P(s_2)$. מהנתון על הניוון של כל רמה, נסמן: $g(s_1)=1$ ו $g(s_2)=3$.
נכתוב את פונקציית החלוקה:

$$Z=g(s_1)e^{-\beta E(s_1)}+g(s_2)e^{-\beta E(s_2)}=e^{-\beta\epsilon}+3e^{-\beta 2\epsilon}$$

$$P(s_1)=\frac{1}{Z}e^{-\beta\epsilon}=\frac{1}{4}P(s_2)=\frac{3}{4Z}e^{-\beta 2\epsilon}$$

$$\frac{1}{Z}e^{-\beta\epsilon}=\frac{3}{4Z}e^{-\beta 2\epsilon}$$

$$\frac{4}{3}e^{-\beta\epsilon}=e^{-\beta 2\epsilon}\quad\backslash\cdot e^{2\beta\epsilon}$$

$$\frac{4}{3}e^{\beta\epsilon}=1\rightarrow e^{\beta\epsilon}=\frac{3}{4}\quad\backslash\ln()$$

$$\beta\epsilon=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

כידוע $\beta = \frac{1}{kT}$, לכן:

$$\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \beta\epsilon \to \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{\beta} = \epsilon \to \frac{1}{\beta} = \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \leftrightarrow \frac{1}{\beta} = kT$$

$$kT = \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$T = \frac{\epsilon}{k\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

■

שאלה: 2

שאלה 2.
נתונה מערכת מבודדת של שני גופים. גוף אחד עם קיבול חום $C_1 = bT$ שהטמפרטורה שלו היא T_1 והשני בעל קיבול חום קבוע $C_2 = aT$ שהטמפרטורה שלו היא T_2. נתון כי $T_1 < T_2$. הגופים באים במגע. מה השינוי באנטרופיית המערכת עד ההגעה לשיווי משקל?

פתרון: 2

פתרון 2.
כיוון שגוף חם מעביר חום לגוף קר, בשיווי משקל המערכות יגיעו לטמפרטורה שנסמנה T_f כך ש: $T_1 < T_f < T_2$. כמות האנרגיה שדרושה למערכת הראשונה כדי להגיע לטמפרטורה זאת שווה לכמות האנרגיה שהמערכת השנייה מאבדת, נמצא ביטוי לטמפרטורה זאת:

$$Q_1 = C_1 \Delta T = \int_{T_1}^{T_f} b \cdot T dT = \frac{b(-T_1^2 + T_f^2)}{2}$$
$$Q_2 = C_2 \Delta T = \int_{T_f}^{T_2} a \cdot T dT = \frac{a(T_2^2 - T_f^2)}{2}$$
$$Q_1 = Q_2 \to \frac{b(-T_1^2 + T_f^2)}{2} = \frac{a(T_2^2 - T_f^2)}{2}$$
$$T_f = \sqrt{\frac{T_1^2 b + T_2^2 a}{a+b}}$$

כעת, ידוע כי השינוי באנטרופית המערכת הוא סכום השינוי באנטרופיה של כל גוף: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$. נחשב את השינוי באנטרופיה של כל גוף ונסכום:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{C_1}{T} dT = \int_{T_1}^{T_f} \frac{bT}{T} dT = b(-T_1 + T_f)$$
$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_f} \frac{C_2}{T} dT = \int_{T_2}^{T_f} \frac{aT}{T} dT = a(-T_2 + T_f)$$
$$\Delta S = b(-T_1 + T_f) + a(-T_2 + T_f) = T_f(a+b) - bT_1 - aT_2$$
$$\Delta S = \sqrt{\frac{T_1^2 b + T_2^2 a}{a+b}}(a+b) - bT_1 - aT_2$$

■

שאלה: 3

שאלה 3.

נתונה מערכת המורכבת מ N אתרים. לכל אתר יש 2 מצבים, **מצב מלא** שבו הוא מכיל חלקיק עם אנרגיה ϵ **ומצב ריק** שבו הוא לא מכיל חלקיק (אנרגיה 0). מה מספר האתרים המלאים הממוצע במערכת?

(תזכורת: פונקציית חלוקה כוללת של מערכת של N חלקיקים ללא אינטרקציה היא $Z = Z_1^N$, כאשר Z_1 היא פונקציית חלוקה של חלקיק אחד).

פתרון: 3

פתרון 3.

פילוג ההסתברויות של מצבי האנרגיה באתר מסוים הן:

$$P_{\text{full}} = \frac{1}{Z}e^{-\beta\epsilon}$$
$$P_{\text{empty}} = \frac{1}{Z}e^{-\beta\cdot 0} = \frac{1}{Z}$$

ופונקצית החלוקה עבור אתר מסוים היא:

$$Z = Z_{\text{full}} + Z_{\text{empty}} = e^{-\beta\epsilon} + 1$$

לכן ההסתברות שאתר מסוים יהיה מלא היא:

$$P_{\text{full}} = \frac{1}{Z}e^{-\beta\epsilon} = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}+1}$$

לכן מספר האתרים המלאים הממוצע במערכת עם N אתרים הוא:

$$n = N \cdot P_{\text{full}} = N \cdot \frac{e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}+1}$$

■

שאלה: 4

שאלה 4.
נתונה שכבת מתכת דו ממדית. כמו כן נתונה אנרגיית פרמי - עמוק בתוך הפס כך ש $E_f \gg kT$ וגם נתון יחס נפיצה פרבולי בפס. חשבו את האנרגיה הממוצעת של אלקטרון בודד בפס E_{av}.

פתרון: 4

פתרון 4.
פונקצית המצבים עבור אלקטרונים ב $2D$ אינה תלויה באנרגיה, והיא:

$$g(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \equiv g_0$$

ממהנחה ש $E_f \gg kT$ נוכל להניח שהתפלגות פרמי דיראק היא מדרגה:

$$f_{FD}(E) = \begin{cases} 1 & E < E_f \\ 0 & E > E_f \end{cases}$$

צפיפות החלקיקים ליחידת אנרגיה ויחידת נפח היא:

$$n(E) = g(E)f_{FD}(E)$$

מכפלה זאת נותנת את מספר המצבים באנרגיה E שמאוכלסים על ידי אלקטרונים. ולכן, מספר החלקיקים במערכת הוא:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} g(E)f_{FD}(E)dE = \int_0^{E_f} g(E)dE = \int_0^{E_f} g_0 dE = E_f g_0$$

עבור אינטגרל על $E \cdot n(E)$ אקבל את סכום התרומות שניתנות על ידי כל מצב E.

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} E \cdot g(E)f_{FD}(E)dE = \int_0^{E_f} E \cdot g_0 dE = \frac{1}{2}E_f^2 g_0$$

האנרגיה הממוצעת של אלקטרון בודד היא פשוט המנה של האנרגיה הכוללת על מספר החלקיקים:

$$E_{av} = \frac{E_{tot}}{N} = \frac{\frac{1}{2}E_f^2 g_0}{E_f g_0} = \frac{1}{2}E_f$$

■

שאלה: 5

שאלה 5.

נתונה מתכת עם ריכוז אלקטורנים n וזמן ממוצע בין פיזורים τ. לפי מודל דרודה, בשדה שתלוי בזמן $E\left(t\right)=E_0e^{i\omega t}$

הניחו $\infty \to$ אומר גדול מאוד ו $0 \to$ אומר קטן מאוד, אבל הגדלים הם עדיין סופיים.

ההספק החשמלי יהיה מינימלי עבור?

$$\omega \to ?\, \tau \to ?\, n \to ?$$

פתרון: 5

פתרון 5.

מוליכות המתכת היא:

$$\sigma\left(\omega\right)=\frac{ne^2\tau}{m\left(1-i\omega\tau\right)}$$

כאשר $\omega \to \infty, \quad \tau \to \infty, \quad n \to 0$ נקבל שהמוליכות שואפת לאפס.

ההספק הנצרך על ידי המתכת הוא:

$$P\left(\omega\right)=\frac{1}{2}\sigma\left(\omega\right)\left|E_0\right|^2$$

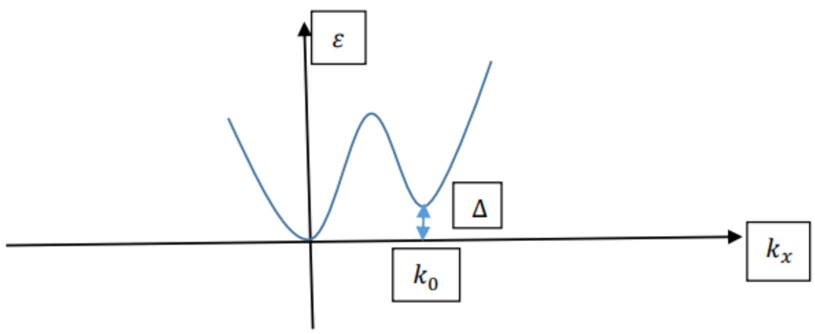
לכן נקבל שההספק הנצרך יהיה מינימלי עבור $\omega \to \infty, \quad \tau \to \infty, \quad n \to 0$. ■

שאלה: 6

שאלה 6.

נתון גביש דו-ממדי כאשר לפס האנרגיה שלו יש 2 נקודות מינימום, נקודה 1 ב $\vec{K}_1 = (0,0)$ ונקודה 2 ב $\vec{K}_2 = (k_0, 0)$. נסמן את הפרש האנרגיה בין 2 נקודות המינימום ב Δ, הפרש זה קטן מספיק כך שכשמאכלסים מעט אלקטרונים סביב נקודה 1 אפשר לאכלס גם מעט אלקטרונים סביב נקודה 2. פס האנרגיה סביב כל אחת מהנקודות נתון לפי הפרבולות:

$$\epsilon_1\left(\vec{k}\right) = \frac{\hbar^2}{2m_1^*}\left(k_x^2 + k_y^2\right)$$
$$\epsilon_2\left(\vec{k}\right) = \frac{\hbar^2}{2m_2^*}\left(\left(k_x - k_0\right)^2 + k_y^2\right) + \Delta, \quad \Delta > 0$$



איור 1: בתמונה רואים חתך של הפס על ציר k_x שבו מופיעות 2 נקודות המינימום (שימו לב שהמסות האפקטיביות שונות).

.1.6

חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח עבור כל אחת מהפרבולות.

.1.6

יחס הנפיצה עבור חלקיקים בעלי מסה הוא:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

ראינו שפתרון המשוואה לצפיפות המצבים ליחידת אנרגיה וליחידת גודל, $g(E) = \frac{\mathrm{d}G(E)}{\mathrm{d}E}$, במקרה ה $2D$ הוא:

$$g(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2}$$

לכן:

$$\begin{cases} g_1(\epsilon) = \frac{m_1^*}{\pi\hbar^2} & \epsilon \geq 0 \\ g_2(\epsilon) = \frac{m_2^*}{\pi\hbar^2} & \epsilon \geq \Delta \end{cases}$$

□

2.6.

עבור $T=0$, מה התנאי על רמת פרמי כך שיש אכלוס של אלקטרונים בפרבולה 2?
חשבו את צפיפות האלקטרונים בכל אחת משתי הפרבולות במקרה זה.

2.6.

כדי שיהיה אכלוס של אלקטרונים בפרבולה 2, יש צורך שהרמת פרמי תהיה גבוהה מהמינימום של פרבולה זאת:

$$\epsilon_F > \min\left(\epsilon_2\right) = \Delta$$

במקרה זה, פילוג פרמי דיראק הוא:

$$f_{FD}\left(\epsilon\right) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \Delta \\ 0 & \epsilon > \Delta \end{cases}$$

מהנתון ש Δ מספיק קטן, עבור פרבולה 1, מספיק לדרוש עבורה:

$$f_{FD}\left(\epsilon_1\right) = \begin{cases} 1 & \epsilon_1 < \Delta \approx 0 \\ 0 & \epsilon_1 > \Delta \approx 0 \end{cases}$$

ולכן:

$$n_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g_1\left(\epsilon_1\right) f_{FD}\left(\epsilon_1\right) dE = \int_0^{\epsilon_f} \frac{m_1^*}{\pi\hbar^2} dE = \frac{m_1^*}{\pi\hbar^2}\epsilon_f$$

ועבור פרבולה 2:

$$n_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_2\left(\epsilon_2\right) f_{FD}\left(\epsilon_2\right) dE = \int_{\Delta}^{\epsilon_f} \frac{m_2^*}{\pi\hbar^2} dE = \frac{m_2^*}{\pi\hbar^2}\left(\epsilon_f - \Delta\right)$$

□

3.6.

האם יתכן ויהיו יותר אלקטרונים בפרבולה 2 מאשר בפרבולה 1 למרות שבפרבולה 2 האלקטרונים מאכלסים קטע יותר קטן על ציר האנרגיה?

3.6.

כן, כי צפיפות המצבים בפרבולה 2 גבוהה יותר מאשר בפרבולה 1. עבור $m_2^* > m_1^*$.
כאשר צפיפות המצבים גבוהה יותר, יש יותר אלקטרונים בכל קטע אנרגיה.

□