אלקטרוניקה פיזיקלית 044124

סמסטר חורף 2021

בחן אמצע

הנחיות

1. משך הבחן - שעתיים.

2. בבחן 7 שאלות אמריקאיות ושאלה פתוחה אחת. בידקו כי ברשותכם 6 עמודים כולל עמוד זה.

3. ניתן להשתמש בחומר עזר מכל סוג שהוא למעט ציוד תקשורת אלקטרוני (טאבלט, טלפון וכו'). השימוש בחומר עזר ממוחשב מותר ללא שימוש ברשת האינטרנט או במודל.

5. יש להגיש את מחברת הבחינה בלבד.

6. כיתבו בכתב יד ברור.

7. תשובות לא מנומקות לא תתקבלנה.

8. אנא ודאו שרשמתם את מספר תעודת הזהות על מחברת הבחינה אותה אתם סורקים.

שאלות אמריקאיות (70 נקודות):

לפניכם 7 שאלות אמריקאיות הקשורות לחומר שלמדתם עד כה. הניקוד של כל שאלה הינו 10 נקודות.

1. **(10 נק׳)** - נתון חומר דו-מימדי בעל יחס נפיצה (דיספרסיה) פרבולי, המכיל n אלקטרונים ליחידת שטח. תרומת האלקטרונים לקיבול החום של החומר הנ״ל היא בעלת התלות הבאה בטמפרטורה:

א. $C \propto T^2$

ב. $C \propto const$

ג. $C \propto T$

ד. $C \propto e^{-\frac{const}{T}}$

ה. $C \propto T^3$

ו. $C \propto T^{3/2}$

בתרגול 6 ראינו שקיבול החום האלקטרוני פרופורציוני לטמפרטורה. למעשה תמיד כך הדבר בלי קשר למימד שכן האלקטרונים מצייתים להתפלגות פרמי-דיראק. מרוחב ההתפלגות הנ״ל מתקבל מספר האלקטרונים המשתתפים בקיבול החום. שינוי המימד ישנה את הצפיפות אך התלות בטמפרטורה תישאר כמו שהיא. לכן התשובה היא ג׳.

תוספת לאחר בדיקת בחני האמצע:

לאחר הבדיקה נמצאה התפלגות כמעט שווה בין תשובות ב׳ ו-ג׳. ראינו שתשובה ב׳ מתקבלת עבור גז חלקיקים קלאסיים בלתי מובחנים, כלומר תחת ההנחה שהאלקטרונים אינם פרמיונים. בניסוח המקורי של השאלה ההתייחסות הייתה לאלקטרונים מתוך מחשבה שברור שהדבר גורר שהם פרמיונים, אולם נתקלנו במצבים בקורס בהם למרות שהצהרנו על כך שמדובר באלקטרונים, בחרנו להתייחס אליהם כאל חלקיקים קלאסיים (למשל מודל דרודה). מכיוון שלא צוין מפורשות שמדובר בפרמיונים, גם תשובה ב׳ התקבלה בחישוב הסופי.

2. **(10 נק׳)** - עבור גז דו-מימדי של חלקיקים בעלי מסה m ויחס נפיצה פרבולי, אורך הגל התרמי יהיה בעל התלות הבאה בטמפרטורה:

א. $\lambda_{th} \propto const$

ב. $\lambda_{th} \propto T$

ג. $\lambda_{th} \propto T^{-1}$

ד. $\lambda_{th} \propto T^{-1/2}$

ה. $\lambda_{th} \propto T^{-2}$

ו. $\lambda_{th} \propto T^2$

חישוב קצר בדומה לחישוב שנעשה בתרגול עבור חלקיקים בתלת מימד יניב את הקשר הבא:

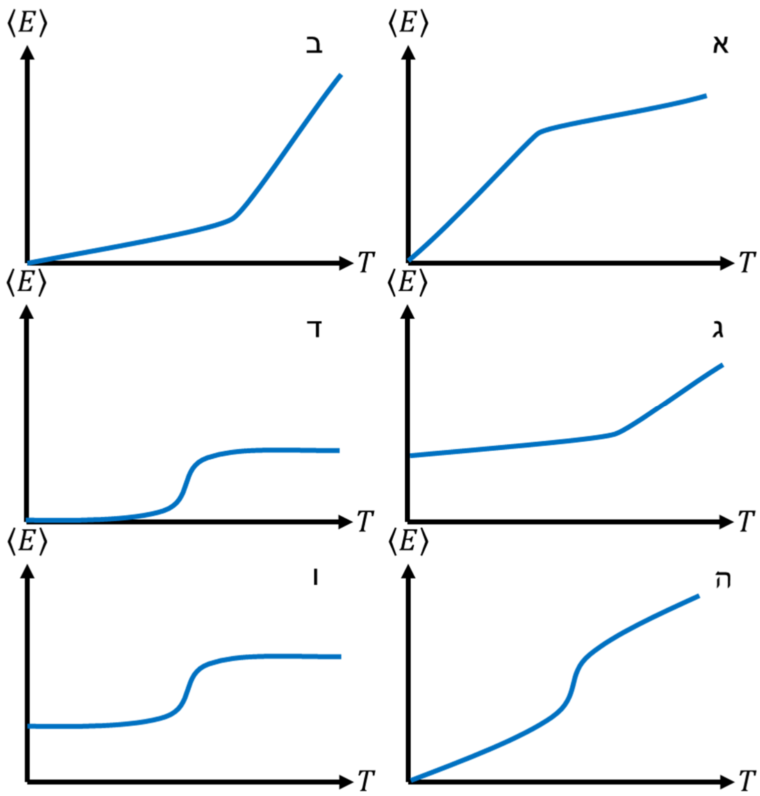
$$\lambda_{th} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot k_B T}} = \frac{h}{\sqrt{2mk_B T}} \propto T^{-1/2}$$

ולכן התשובה היא ד׳.

3. **(10 נק׳)** – נתונה מערכת של N חלקיקים קלאסים שאינם מנהלים אינטרקציה זה עם זה. עבור כל חלקיק נתונה צפיפות המצבים הבאה:

$$g(E) = \begin{cases} g_1, 0 < E < E_0 \\ g_2, E_0 < E \end{cases}, 0 < g_1 < g_2$$

בהינתן שיחס הנפיצה (דיספרסיה) פרבולי, תלות האנרגיה הממוצעת בטמפרטורה תיראה בערך כך:



נשים לב שהניוון $g(E)$ אינו תלוי באנרגיה (בהינתן שיחס הנפיצה פרבולי). כבר ראינו שמשמעות הדבר הוא שהמערכת היא דו-מימדית או בעלת 2 דרגות חופש. עוד ראינו שהאנרגיה חייבת לקבל תלות ליניארית כלשהיא בטמפרטורה. מהסיבה הנ"ל תשובות ד' ו-ו' נפסלות. עוד ראינו שהתלות בטמפרטורה פרופורציונית למספר דרגות החופש (הן בתרגול והן בשיעורי הבית). מכיוון שלכל אנרגיה (פרט לנקודת התפר E_T) הניוון אינו תלוי באנרגיה, נסיק שבכל התחומים מדובר ב-2 דרגות חופש ולכן נצפה שהתלות של האנרגיה הממוצעת בטמפרטורה תישאר זהה (פרט לנקודת התפר). דרישה זו פוסלת את תשובות א',ב' ו-ג' ומשאירה אותנו עם תשובה ה' שהיא התשובה הנכונה. כמובן שניתן לבצע חישוב מדוייק ולהראות את התלות הנ"ל אך לא זאת כוונת השאלה.

4. **(10 נק')** - קיבול החום בלחץ קבוע למול של גרפיט, נתון בקירוב טוב (עבור תחום טמפ' סופי הרחוק מ- $T=0$) ע"י:

$$c_p \approx a + bT - \frac{c}{T^2}$$

כאשר הקבועים הם:

$$a \approx 16.86[\frac{J}{K\cdot mol}], b \approx 4.77\cdot 10^{-3}[\frac{J}{K^2\cdot mol}], c \approx 8.54\cdot 10^{5}[\frac{J\cdot K}{mol}]$$

מחממים 3 מול של גרפיט בלחץ קבוע מטמפ' החדר ($298[K]$) לטמפ' של $500[K]$. מהי האנטרופיה של המערכת במצב הסופי?

נתון כי האנטרופיה במצב ההתחלתי עבור 1 מול של גרפיט הינה

$$S(298K) = 5.74[\frac{J}{K\cdot mol}]$$

א. $19.765[\frac{J}{K}]$

ב. $25.505[\frac{J}{K}]$

ג. $36.985[\frac{J}{K}]$

ד. $12.328[\frac{J}{K}]$

ה. $9.213[\frac{J}{K}]$

ו. $40.927[\frac{J}{K}]$

האנטרופיה של המערכת (3 מול של גרפיט) במצב ההתחלתי נתונה ע"י:

$$S(298K) = 3[mol] \cdot 5.74[\frac{J}{K \cdot mol}] = 17.22[\frac{J}{K}]$$

השינוי הדיפרנציאלי באנרגיית החום המועברת לגרפיט נתון ע"י:

$$dQ = C_p dT = 3c_p dT = 3(a + bT - \frac{c}{T^2})dT$$

ולכן השינוי הדיפרנציאלי באנטרופיה של המערכת נתון ע"י:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{3(a + bT - \frac{c}{T^2})}{T} dT$$

מכך נובע שהשינוי באנטרופיה של המערכת בתהליך החימום הינו:

$$\Delta S = \int ds = \int_{298K}^{500K} \frac{3(a + bT - \frac{c}{T^2})}{T} dT = 3a\ln(\frac{500}{298}) + 3b(500 - 298) + \frac{3c}{2}(\frac{1}{500^2} - \frac{1}{298^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = 3 \cdot 16.86 \cdot \ln(\frac{500}{298}) + 3 \cdot 4.77 \cdot 10^{-3} \cdot (500 - 298) + \frac{3 \cdot 8.54 \cdot 10^5}{2}(\frac{1}{500^2} - \frac{1}{298^2}) \Rightarrow$$

$$\Delta S = 19.765[\frac{J}{K}]$$

והאנטרופיה במצב הסופי תהיה:

$$S(500K) = S(298K) + \Delta S = 3 \cdot 5.74[\frac{J}{K}] + 19.765[\frac{J}{K}] = 36.985[\frac{J}{K}]$$

לכן התשובה הנכונה היא ג'.

5. **(10 נק')** - נתון חלקיק בעל 3 מצבי ספין ($s = 0, \pm 1$) ויחס נפיצה (דיספרסיה) מהצורה $E = \frac{4}{9}\frac{p^{3/2}}{m^{3/4}} + E_0$ הנמצא בבור פוטנציאל תלת ממדי שמימדיו $V = L \times L \times L$. צפיפות המצבים של החלקיק ליחידת אנרגיה ליחידת נפח היא:

א. $\dfrac{m^{3/2}\sqrt{E-E_0}}{\hbar^3\pi^2}$

ב. $\dfrac{81m^{3/2}}{16\hbar^3\pi^2}(E-E_0)^2$

ג. $\dfrac{81m}{16\hbar^2\pi^3}(E-E_0)$

ד. $\dfrac{81m^{3/2}}{16\hbar^3\pi^2}(E-E_0)$

ה. $\dfrac{m}{\hbar^2\pi^2}$

ו. $\dfrac{m^{3/2}}{\hbar^3\pi^2\sqrt{E-E_0}}$

החלקיק מצוי בבור פוטנציאל אינסופי תלת-מימדי. לכן ערכי k שלו מקוונטטים ומקיימים:

$$k_i=\frac{\pi}{L}n_i, i=x,y,z$$

נגדיר את $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$. מספר המצבים הכולל בתוך כדור בעל רדיוס k יהיה:

$$N(k)=3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{4\pi}{3}k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$$

צפיפות המצבים ליחידת נפח תהיה אם כן:

$$G(k)=3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{4\pi}{3}k^3}{\pi^3}=\frac{k^3}{2\pi^2}$$

כעת נביע את k באמצעות יחס הנפיצה הנתון. יתקיים:

$$E=\frac{4}{9}\frac{p^{3/2}}{m^{3/4}}+E_0=\frac{4}{9}\frac{\hbar^{3/2}k^{3/2}}{m^{3/4}}+E_0\Rightarrow\frac{4}{9}\frac{\hbar^{3/2}k^{3/2}}{m^{3/4}}=E-E_0\Rightarrow k^{3/2}=\frac{9m^{3/4}}{4\hbar^{3/2}}(E-E_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^3=\left(\frac{9m^{3/4}}{4\hbar^{3/2}}\right)^2(E-E_0)^2$$

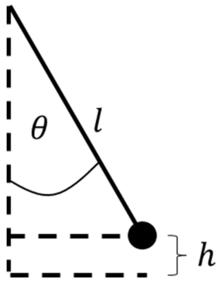
הצבת הקשר הנ"ל תיתן:

$$G(E)=\frac{k^3}{2\pi^2}=\left(\frac{9m^{3/4}}{4\hbar^{3/2}}\right)^2\frac{(E-E_0)^2}{2\pi^2}$$

גזירה לפי האנרגיה תניב את צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה ליחידת נפח:

$$g(E)=\left(\frac{9m^{3/4}}{4\hbar^{3/2}}\right)^2\frac{(E-E_0)}{\pi^2}=\frac{81m^{3/2}}{16\hbar^3\pi^2}(E-E_0)$$

כלומר תשובה ד'.



6. **(10 נק')** - נתון אוסף מטוטלות בעלות אורך החוט l ומסה m, הנמצאות תחת השפעת פוטנציאל כובד מהצורה $V(h)=mgh$. האוסף מוחזק בטמפרטורה $T>0$ כלשהי זווית המטוטלת ביחס לאנך נתונה על ידי θ. קבלו ביטוי עבור ערך התוחלת של $\langle\theta^2\rangle$.
הדרכה: מצאו את האנרגיה הפוטנציאלית של מטוטלת בודדת. השתמשו בקירוב לזוויות קטנות $\sin\theta\approx\theta,\cos\theta\approx 1-\theta^2/2$

א. $\langle\theta^2\rangle=\frac{k_BT}{mgl}$

ב. $\langle\theta^2\rangle=\left(\frac{k_BT}{mgl}\right)^2$

ג. $\langle\theta^2\rangle=\frac{3k_BT}{2mgl}$

ד. $\langle\theta^2\rangle=\frac{k_BT}{2mgl}$

ה. $\langle\theta^2\rangle=\frac{k_BT}{2}$

ו. $\langle\theta^2\rangle=\frac{2k_BT}{mgl}$

נחשב את h כתלות באורך החוט ובזווית. באופן כללי יתקיים מטעמי טריגונומטריה:

$$h=l-l\cos\theta$$

תחת קירוב זוויות קטנות יתקיים:

$$\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$$

מכאן שהגובה יהיה בקירוב:

$$h=l-l\cos\theta\approx l-l(1-\frac{\theta^2}{2})=\frac{l\theta^2}{2}$$

מכאן שהאנרגיה הפוטנציאלית של המסה תהיה:

$$V(h)=mgh\approx\frac{mgl\theta^2}{2}$$

המיקום האופקי של המסה ביחס לאפס יהיה $x=l\sin\theta$. בקירוב לזוויות קטנות נקבל:

$$x=l\sin\theta\approx l\theta$$

מכאן שהאנרגיה הקינטית של המסה תהיה:

$$E_{kin}=\frac{mv^2}{2}\approx\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}$$

כאשר השתמשנו בקשר הבא:

$$x \approx l\theta \Rightarrow \dot{x} \approx l\dot{\theta}$$

מכאן שסך האנרגיה של המטוטלת תהיה:

$$E = E_{kin} + V(h) \approx \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mgl\theta^2}{2}$$

נשים לב שישנן 2 דרגות חופש רציפות: $\theta, \dot{\theta}$. לפי משפט החלוקה השווה, האנרגיה הממוצעת שכל דרגת חופש רציפה מקבלת היא $\frac{k_BT}{2}$. לכן נקבל מיידית:

$$\left\langle \frac{mgl\theta^2}{2} \right\rangle = \frac{k_BT}{2} \Rightarrow \langle \theta^2 \rangle = \frac{k_BT}{mgl}$$

ולכן התשובה הנכונה היא א'.

תוספת לאחר בדיקת בחני האמצע:

למען הסר ספק, החלק הרלוונטי בפתרון זה הינו החלק עבור האנרגיה הפוטנציאלית בלבד. התיאור עבור האנרגיה הקינטית (השינוי בזוית) מובא לצורך תיאור מלא של הבעיה ולא נדרש כדי לפתור את השאלה.

7. **(10 נק')** - נתון אוסף של N דיפולים חשמליים אשר אינם מקיימים אינטרקציה זה עם זה. האנרגיה של כל דיפול היא $E = \pm qFa$ (שימו לב שישנם 2 מצבי אנרגיה מותרים) כאשר F הוא השדה החשמלי. בהנחה שהמערכת מצויה בטמפרטורה $T > 0$ כלשהי האנרגיה הממוצעת של המערכת היא:

א. $\langle E \rangle = -NaqF \tanh\left(\frac{aqF}{kT}\right)$

ב. $\langle E \rangle = -NaqF \sinh\left(\frac{aqF}{2kT}\right)$

ג. $\langle E \rangle = NaqF \tanh\left(\frac{2kT}{aqF}\right)$

ד. $\langle E \rangle = NaqF \sinh\left(\frac{kT}{aqF}\right)$

ה. $\langle E \rangle = NaqF \sinh\left(\frac{3kT}{2aqF}\right)$

ו. $\langle E \rangle = NaqF \cosh\left(\frac{2kT}{aqF}\right)$

מכיוון שישנם 2 מצבים מותרים, למעשה המערכת המדוברת זהה למערכת 2 רמות אותה פתרנו הן בתרגול והן בשיעורי הבית. בכל זאת נפתור את הבעיה. פונקציית החלוקה תהיה:

$$Z = \sum_n e^{-E_n/k_BT} = e^{qFa/k_BT} + e^{-qFa/k_BT} = 2\cosh(\frac{qFa}{k_BT}) = 2\cosh(\beta qFa)$$

האנרגיה הממוצעת של כל מערכת תהיה:

$$\langle E\rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = -\frac{1}{2\cosh(\beta qFa)}2qFa\sinh(\beta qFa) =$$
$$= -qFa\tanh(\beta qFa) = -qFa\tanh(\frac{qFa}{k_BT})$$

נזכור להכפיל את הביטוי הנ"ל ב- N כדי להתחשב בכל המערכות. לכן התשובה הנכונה היא א'.

<u>שאלה פתוחה (30 נקודות):</u>

נתונים שני מוצקי אינשטיין חד מימדיים. מוצק A עם N_1 אטומים ואנרגיה כללית של $E_1 = n_1\hbar\omega_1$ ומוצק B עם N_2 אטומים ואנרגיה כללית של $E_2 = n_2\hbar\omega_2$. n_1, n_2, N_1, N_2 כולם שלמים חיוביים וגדולים מאד מאחד אבל לא ידוע דבר נוסף על היחסים בין ארבעתם **(כלומר, לא ניתן לעשות את ההנחה של אנרגיות גבוהות)**. בתחילה כל מוצק נמצא בשיווי משקל תרמודינמי עם עצמו אבל שני המוצקים לא יכולים להחליף חום ביניהם.

א. **(10 נק')** - חשבו מהי הטמפרטורה של מוצק A ושל מוצק B?

הדרכה: השתמשו בקירוב סטירלינג מהצורה $\ln N! \approx N\ln N - N$

ראשית כל, נשים לב שהפיתוח עבור כל מוצק בנפרד יהיה זהה ולכן נבצע פיתוח כללי אשר יתאים לכל אחד מהמוצקים. על מנת לחשב את הטמפרטורות, נרצה להתחיל מחישוב הריבויים, מהם לחשב את האנטרופיה של כל מוצק ואז לגזור את האנטרופיה לפי האנרגיה ולקבל את הטמפרטורה. ידוע לנו שעבור מוצקי איינשטיין יתקיים באופן כללי:

$$\Omega(n_e) = \binom{n_e + N - 1}{n_e} = \frac{(n_e + N - 1)!}{n_e!(N-1)!}$$

תחת ההנחה ש- $n_1, n_2, N_1, N_2 \gg 1$ נוכל להזניח את ה-1 עבור כל מוצק ולקבל:

$$\Omega(n_e) = \frac{(n_e + N - 1)!}{n_e!(N-1)!} \approx \frac{(n_e + N)!}{n_e!N!}$$

האנטרופיה של הביטוי הנ"ל תהיה:

$$S = k_B\ln\Omega(n_e) = k_B\ln\frac{(n_e+N)!}{n_e!N!} = k_B\ln(n_e+N)! - k_B\ln n_e! - k_B\ln N!$$

שימוש בקירוב סטירלינג לכל איבר יתן:

$$S = k_B\ln(n_e+N)! - k_B\ln n_e! - k_B\ln N! \approx k_B[(n_e+N)\ln(n_e+N) - (n_e+N) - (n_e\ln n_e - n_e) - (N\ln N - N)] =$$
$$= k_B[(n_e+N)\ln(n_e+N) - n_e - N - n_e\ln n_e + n_e - N\ln N + N] =$$
$$= k_B[(n_e+N)\ln(n_e+N) - n_e\ln n_e - N\ln N]$$

ידוע לנו שהאנרגיה של כל מוצק מתקבלת ע"י שימוש בקשר $E = n_e\hbar\omega$. נוכל להשתמש בכלל השרשרת לגזירה ולקבל את הביטוי לטמפרטורה:

$$\frac{1}{T}=\frac{dS}{dE}=\frac{dS}{dn_e}\frac{dn_e}{dE}=\frac{dS}{dn_e}\frac{1}{\hbar\omega}=\frac{1}{\hbar\omega}\frac{dS}{dn_e}=\frac{k_B}{\hbar\omega}\frac{d}{dn_e}[(n_e+N)\ln(n_e+N)-n_e\ln n_e-N\ln N]=$$

$$=\frac{k_B}{\hbar\omega}[\ln(n_e+N)+\frac{n_e+N}{n_e+N}-\ln n_e-\frac{n_e}{n_e}]=\frac{k_B}{\hbar\omega}[\ln(n_e+N)-\ln n_e]=\frac{k_B}{\hbar\omega}[\ln(1+\frac{N}{n_e})]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{\frac{k_B}{\hbar\omega}[\ln(1+\frac{N}{n_e})]}$$

בפרט לכל אחד מהמוצקים נקבל:

$$T_1=\frac{1}{\frac{k_B}{\hbar\omega_1}\ln(1+\frac{N_1}{n_1})}$$

$$T_2=\frac{1}{\frac{k_B}{\hbar\omega_2}\ln(1+\frac{N_2}{n_2})}$$

ב. **(6 נק')** - מהביטוי שקיבלתם עבור הטמפרטורה קבלו את מספר הקוונטות הממוצע עבור כל אטום במוצק A ובמוצק B? האם הביטוי נראה מוכר? תנו הסבר איכותי לתוצאה שנתקבלה.

עלינו להפוך את הביטוי כך שנקבל את התלות של מספר הקוונטות בטמפרטורה. יתקיים לדוגמה עבור המוצק הראשון (הדרך עבור המוצק השני זהה לחלוטין):

$$T_1=\frac{1}{\frac{k_B}{\hbar\omega_1}\ln(1+\frac{N_1}{n_1})}\Rightarrow\ln(1+\frac{N_1}{n_1})=\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}\Rightarrow1+\frac{N_1}{n_1}=e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}\Rightarrow\frac{N_1}{n_1}=e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1\Rightarrow\frac{n_1}{N_1}=\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1=\frac{N_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1}$$

מספר החלקיקים שקיבלנו במקרה הנ"ל הוא הגודל הממוצע לו נצפה בהינתן הטמפרטורה. נשים לב שהביטוי שקיבלנו הינו התפלגות בוזה-איינשטיין עם פוטנציאל כימי השווה לאפס (הדבר מתקיים עבור חלקיקים חסרי מסה). אכן ראינו במספר תרגולים והרצאות שניתן לייצג פוטונים (בוזונים) ע"י האוסילטור ההרמוני הקוונטי.

תוספת לאחר בדיקת בחני האמצע:

בחלק לא קטן מהפתרונות נעשה שימוש בפונקציית החלוקה או בטכניקות אחרות כדי לחשב את מספר הקוונטות הממוצע. שימו לב שאין בכך כל צורך! עצם הגדרת הטמפרטורה משמעה שאנו מסתכלים על המערכת באופן סטטיסטי. המעבר שבוצע בסעיף זה מניב לכן את מספר הקוונטות הממוצע ואין צורך לבצע חישוב מסובב נוסף.

ג. **(7 נק')** - מהי האנרגיה הממוצעת פר אטום עבור מוצק A ועבור מוצק B? מה קורה בגבול בו הטמפרטורה של כל מוצק גדולה מאד מערך כלשהו או קטנה מאד ממנו? מהו אותו ערך? תנו הסבר איכותי לתוצאה שנתקבלה.

בסעיף הקודם קיבלנו את מספר יחידות האנרגיה בממוצע לכל מוצק. האנרגיה הממוצעת הכוללת תתקבל מהכפלת מספר זה באנרגיה של כל יחידה:

$$E_1=\hbar\omega_1 n_1=\frac{\hbar\omega_1 N_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1}$$

האנרגיה פר אטום תתקבל מחלוקת גודל זה במספר האטומים/אוסילטורים:

$$E_{1-atom}=\frac{E_1}{N_1}=\frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1}$$

כפי שראינו בקורס, עלינו לבדוק מה קורה כאשר היחסים בין סקאלות האנרגיה הטיפוסיות משתנים. במקרה זה, סקאלות האנרגיה הן מרווחי האנרגיות $\hbar\omega_1$ של כל מוצק והאנרגיה התרמית הטיפוסית k_BT_1. בתחום $\hbar\omega_1 \gg k_BT_1$ האקספוננט מנצח ונקבל:

$$E_{1-atom}=\frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1}\approx\frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}}=\hbar\omega_1 e^{-\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}$$

במקרה זה האנרגיה התרמית קטנה הרבה יותר ממרווחי האנרגיה של כל אוסילטור ונקבל תלות המזכירה את פקטור בולצמן. בתחום $\hbar\omega_1 \ll k_BT_1$ נקרב את האקספוננט לטור טיילור מסדר ראשון:

$$E_{1-atom}=\frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}}-1}\approx\frac{\hbar\omega_1}{1+\frac{\hbar\omega_1}{k_BT_1}-1}=k_BT_1$$

במקרה זה האנרגיה התרמית הטיפוסית גדולה הרבה יותר מהמרווח בין רמות האנרגיה של כל אוסילטור וקיבלנו למעשה מצב של דרגות חופש רציפות. בתחום זה משפט החלוקה השווה מתקיים ואכן נשים לב שקיבלנו שהאנרגיה ליניארית בטמפרטורה. במקרה הנ"ל יש 2 דרגות חופש. כל האמור כאן נכון גם למוצק השני.

תוספת לאחר בדיקת בחני האמצע:

כמו בסעיף הקודם, בחלק לא קטן מהפתרונות נעשה שימוש בפונקציית החלוקה או בטכניקות אחרות כדי לחשב את האנרגיה הממוצעת. אין בכך כל צורך! ברגע שמצאנו את מספר הקוונטות (יחידות האנרגיה) הממוצע, הכפלה באנרגיה של כל קוונטה כזו תניב מיידית את האנרגיה הממוצעת הכוללת. חלוקה במספר האוסילטורים תניב לכן את האנרגיה הממוצעת פר אוסילטור.

נקודה נוספת שעלתה מהבדיקה היא נושא הגבולות. כאשר עוסקים ב-2 גדלים אשר אחד מהם גדול יותר מהשני כמו במקרה לפיו $\frac{\hbar\omega_1}{k_B} \gg or \ll T_1$, זה שהגודל שברצוננו לנתח (הטמפרטורה) גדול מאוד אינו גורר מיידית שהוא שואף לאינסוף! כך למשל, בפתרון הרשמי קיבלנו שהאנרגיה הממוצעת שווה ל-k_BT_1, כלומר שבטמפרטורות גדולות מספיק אנו מקבלים את משפט החלוקה השווה. בתשובות רבות האנרגיה הממוצעת בטמפרטורות גבוהות נלקחה כאינסוף. אין בכך צורך והתשובה הנכונה יותר היא התשובה הסופית התלויה בטמפרטורה באופן ליניארי. עם זאת לא הורדו נקודות עבור תשובות שבהן האנרגיה הממוצעת בטמפרטורות גבוהות נלקחה כאינסוף.

עוד נקודה מאוד קריטית הייתה פתרונות שעשו שימוש ישירות במשפט החלוקה השווה ללא התייחסות לסעיפים הקודמים. פעולה זו שגויה באופן אינהרנטי שכן ראינו פעמים רבות שמשפט החלוקה השווה אינו מתקיים באופן אוטומטי ויש להצדיק את קיומו!

ד. **(7 נק')** - עתה מאפשרים מעבר חום בין שני המוצקים ושניהם מצומדים לאמבט חום בטמפרטורה T. מה תהיה האנרגיה הממוצעת עבור מוצק A ועבור מוצק B? מה תהיה האנרגיה הממוצעת פר אטום עבור מוצק A ועבור מוצק B? כיצד יראו האנרגיות האלו עבור טמפרטורות גבוהות (רשמו תנאי מתאים לטמפרטורות)? תנו הסבר מדוע נוצר המצב שהתקבל.

באם היה מדובר בצימוד רק בין המוצקים ללא אמבט חום, היה עלינו לחשב במפורט את שיווי המשקל בהינתן האנרגיות ההתחלתיות של כל מוצק. במקרה הנ"ל החיים קלים הרבה יותר שכן אמבט החום הוא זה שנותן את הטון. במקרה הנ"ל שני המוצקים יתקבעו על הטמפרטורה T של אמבט החום. נקבל מיידית:

$$E_1 = \hbar\omega_1 n_1 = \frac{\hbar\omega_1 N_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_B T}} - 1}, E_{1-atom} = \frac{E_1}{N_1} = \frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_B T}} - 1}$$

עבור טמפרטורות גבוהות, כלומר טמפרטורות שעבורן $\hbar\omega_1 \ll k_B T_1$ משפט החלוקה השווה יתקיים ונקבל את אותה התוצאה מהסעיף הקודם (עם אותו הסבר).

תוספת לאחר בדיקת בחני האמצע:

בפתרונות רבים בוצע ניסיון לחשב מחדש את החלוקה של יחידות האנרגיה במערכת. כפי שמופיע בפתרון הרשמי, אם היה מדובר בצימוד בין 2 המוצקים בלבד, הדבר אכן היה נכון (פתרנו דוגמה לכך בתרגול). באם מדובר בצימוד של כל המערכות לאמבט חום חיצוני, אמבט החום הוא זה שקובע את הטמפרטורה הגלובלית במערכת! הסיבה להבדל היא שכאשר הטמפרטורה נקבעת מבחוץ, למעשה ישנה אספקה של אנרגיה (חום) בהתאם. במקרה שבו ישנם 2 מוצקים מצומדים, אין אספקה חיצונית של חום ושיווי המשקל התרמודינמי חייב להיקבע על סמך האנרגיה הפנימית האצורה במערכת (ולכן ההבדל).