אלקטרוניקה פיסיקאלית 044124

סמסטר אביב 2022

בוחן אמצע

הנחיות

- **משך הבחינה – שעתיים**
- **בבחן 6 שאלות אמריקאיות ושאלה פתוחה.**
- **הניקוד של כל שאלה מופיע בכותרת שלה.**
- **בדקו שברשותכם 13 עמודים**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 2 דפי נוסחאות דו-צדדיים**

בהצלחה!

שאלה 1 (10 נק')

נתון מתנד הרמוני אידיאלי קוונטי המצומד לאמבט חום בטמפרטורה T. הניוון של הרמה החמישית הוא g. הניוון של הרמה הראשונה (רמת היסוד) הוא 1. מה יהיה היחס בין הסיכוי להימצא ברמה החמישית לבין הסיכוי להימצא ברמה הראשונה:

תשובות

א. $\frac{1}{g}e^{\frac{4\hbar\omega}{k_B T}}$

ב. $ge^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T}}$

ג. $ge^{-\frac{4\hbar\omega}{k_B T}}$

ד. $\frac{1}{g}e^{-\frac{5\hbar\omega}{k_B T}}$

פתרון:

רמות האנרגיה של מתנד הרמוני קוונטי אידיאלי נתונות ע"י הביטוי הבא:

$$E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

לכן הרמה הראשונה היא עבור n=0. הרמה החמישית היא עבור n=4.

$$E_0 = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad E_5 = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+4\right)$$

$$P(E_0) = \frac{e^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T}\frac{1}{2}}}{Z} \quad ; \quad P(E_5) = \frac{ge^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T}\left(\frac{1}{2}+4\right)}}{Z}$$

ולכן נקבל:

$$\frac{P(E_5)}{P(E_0)} = \frac{ge^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T}\left(\frac{1}{2}+4\right)}}{e^{\frac{-\hbar\omega}{k_B T}\frac{1}{2}}} = ge^{\frac{-4\hbar\omega}{k_B T}}$$

ולכן התשובה הנכונה היא ג'.

שאלה 2 (10 נק')

נתונה שרשרת של N ספינים מצומדים לאמבט חום בטמפרטורה T. כל ספין יכול להיות בשני מצבים ½ ו ½- בכיוון ציר z. נתון שדה מגנטי B בכיוון ציר z. נתון כי כמות הספינים בכיוון השדה גדולה פי e^{10} מאשר בכיוון הפוך לשדה. מה היחס בין אנרגיית זימן לאנרגיה התרמית:

תשובות

א. $k_B T = 5B\mu_0$

ב. $10k_B T = B\mu_0$

ג. $k_B T = B\mu_0$

ד. $5k_B T = B\mu_0$

פתרון:

כמות הספינים בכל כיוון נתונה ע"י הביטוי הבא:

$$n_{UP} = N\frac{e^{\frac{B\mu_0}{k_B T}\frac{1}{2}}}{Z} \quad ; \quad n_{DN} = N\frac{e^{-\frac{B\mu_0}{k_B T}\frac{1}{2}}}{Z}$$

לכן היחס ביניהם יהיה:

$$e^{10} = \frac{n_{UP}}{n_{DN}} = \frac{e^{\frac{B\mu_0}{k_B T}\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{B\mu_0}{k_B T}\frac{1}{2}}} = e^{\frac{B\mu_0}{k_B T}} \quad \Rightarrow \quad \ln(e^{10}) = 10 = \frac{B\mu_0}{k_B T}$$

$$\Rightarrow$$

$$10k_B T = B\mu_0$$

ולכן התשובה הנכונה היא ב'.

שאלה 3 (10 נק')

נתונים אלקטרונים בעלי ספין 3/2 במוליך תלת מימדי בנפח $V=L^3$ עם יחס דיספרסיה מהצורה הבאה $\varepsilon(k)=a\cdot k$. צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה וליחידת נפח נתונה ע"י הביטוי הבא:

(רמז: היזכרו כמה מצבי ספין בכיוון z קיימים עבור ספין 3/2)

תשובות

א. $\frac{2}{\pi^2}\frac{\varepsilon^2}{a^3}$

ב. $\frac{1}{\pi^2}\frac{\varepsilon^2}{a^3}$

ג. $\frac{2L^3}{\pi^2}\frac{\varepsilon^{1/2}}{a^4}$

ד. $\frac{2}{\pi^2}\frac{\varepsilon}{a^2}$

פתרון:

מכיוון שהספין הוא 3/2 הרי שלכל מצב יש ניוון 4 (-3/2,-1/2,1/2,3/2). מכיוון שמדובר בשלושה מימדים נקבל:

$$g(\varepsilon)=4\cdot\frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3}\frac{dk}{d\varepsilon}=\frac{2}{\pi^2}\frac{\varepsilon^2}{a^2}\frac{1}{a}$$

ולכן התשובה הנכונה היא א'.

שאלה 4 (10 נק')

נתונה מערכת המצומדת לאמבט חום בטמפ' T ובעלת שתי דרגת חופש x, y. האנרגיות האפשריות במערכת נתונות על ידי $E = a|x| + b|y|$ כאשר x, y מסמן את מיקום החלקיק לאורך ציר x ו- y בהתאמה ו- a, b הינם קבועים חיוביים ממשים כלשהם. חשבו מהי האנרגיה הממוצעת של החלקיק ?

תשובות

א. $3/2k_bT$
ב. $2k_bT$
ג. $\alpha/2k_bT$
ד. $1/2k_bT$
ה. $7/2k_bT$

פתרון:

עלינו לחשב את פונקציית החלוקה המתאימה וממנה לקבל את האנרגיה הממוצעת:

$$\langle E\rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

מכיוון שאנריגיה זאת פונקציה פרידה בשני המשתנים שלה (x ו-y) ניתן להפריד את האינטגרלים

$$Z = \int_x e^{-\beta E(x)}dx \int_y e^{-\beta E(y)}dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\cdot a|x|}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\cdot b|y|}dy = \frac{4}{ab\beta^2}$$

$$\langle E\rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{ab\beta^2}{4}\times\left(-\frac{8}{ab\beta^3}\right) = 2k_bT$$

ולכן התשובה הנכונה היא ב'

שאלה 5 (10 נק')

נתון תיל עשוי זהב (Au) באורך $10m$ ובעל חתך עגול עם רדיוס של $50\mu m$ והתנגדות של $R = 4.58\Omega$.
ידועה הצפיפות של זהב $\rho_V = 19.3\ g/cm^3$ ומשקלו האטומי $197\ amu$. הניחו שכל אטום תורם אלקטרון הולכה אחד וחשבו את הזמן הממוצע בין פיזורים. הניחו שלאלקטרון יש מסה של אלקטרון חופשי.

תשובות:

א. $90 \times 10^{-15} sec$
ב. $2.5 \times 10^{-14} sec$
ג. $1.67 \times 10^{-13} sec$
ד. $3.2 \times 10^{-13} sec$
ה. $1.7 \times 10^{-12} sec$

לפי מודל דרודה מתקיים:

$$\frac{1}{\rho_e} = \sigma = \frac{q^2 n\tau}{m_e} \to \tau = \frac{m_e}{q^2 n\rho_e}$$

לכן עלינו לדעת את ההתנגדות הסגולית ואת ריכוז האלקטרונים בתיל:

$$R = \frac{\rho_e l}{A} \to \rho_e = \frac{RA}{l}$$

ניתן לחשב את מסת התיל על ידי הכפלה של המשקל האטומי של זהב w במספר אטומים בתיל N,
ומכיוון שכל אטום תורם אלקטרון בודד אז מספר האלקטרונים בתיל זהה למספר אטומי זהב שבו:

$$m = N \times w = \rho_V V \to n = \frac{N}{V} = \frac{\rho_V}{w}$$

לבסוף נקבל

$$\tau = \frac{m_e}{q^2 n\rho_e} = \frac{w m_e l}{q^2 \rho_V RA}$$
$$= \frac{(3.27 \times 10^{-25}[kg])(9.11 \times 10^{-31}[kg])(10\ [m])}{(1.6 \times 10^{-19}[C])^2 (19.3 \times 10^3 [kg/m^3])(4.58[\Omega])(\pi(50 \cdot 10^{-6}[m])^2)}$$
$$\tau = 1.67 \times 10^{-13} sec$$

ולכן התשובה הנכונה היא ג'

שאלה 6 (10 נק')

נתון חלקיק בעל מסה m הנמצא בפוטנציאל הרמוני החד-ממדי. נתון שהמצב אותו מאכלס החלקיק הינו המצב המעורר השלישי ($n = 2$) המתואר ע"י פונקצית הגל מהצורה הבאה

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\alpha^2 x^2/2} H_n(\alpha x)$$

כאשר $H_n(\alpha x)$ הם פולינומי Hermit.

$$\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$$

n	פולינומי Hermite
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 2$

חשבו את ערך התצפית של האופרטור תנע ומיקום.

תזכורת: האנרגיה הפוטנציאלית של מתנד הרמוני היא מהצורה: $\frac{1}{2}kx^2$

א. $\langle p \rangle = \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}, \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

ב. $\langle p \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}, \langle x \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$

ג. $\langle p \rangle = 2\sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}, \langle x \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

ד. $\langle p \rangle = 0, \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

ה. $\langle p \rangle = 0, \langle x \rangle = 0$

פתרון

הפוטנציאל של המתנד הרמוני הינו סימטרי סביב ראשית הצירים ולכן נצפה שהחלקיק יימצא בראשית $\langle x \rangle = 0$ וינוע עם התנע הממוצע של $\langle p \rangle = 0$

לכן התשובה הנכונה היא ה'

<u>שאלה פתוחה</u>

<u>ניקוד 40 נקודות</u>

נתונה שרשרת עם N ספינים מבודדת מהסביבה. לכל ספין יש שני מצבים. UP ו DOWN בכיוון ציר Z. נתון שדה מגנטי בכיוון ציר Z (מצביע כלפי מעלה, z>0). הניחו כי האנרגיה של הבעיה נתונה ע"י:

$$H = -B \cdot \mu_0 \sum_{i=1}^{N} S_i \quad ; \quad S_i = \pm\frac{1}{2}$$

האנרגיה של השרשרת הינה $E=E_0$.

א. (5 נק') מצאו את מספר הספינים UP (בכיוון השדה) ומספר הספינים DOWN (הפוך לכיוון השדה).

נסמן n_{UP} בתור מספר הספינים במצב UP ו n_{DN} עבור המצב DOWN. מכיוון שכמות הספינים ידועה וגם האנרגיה צריך להתקיים:

$$E_0 = -B \cdot \mu_0 \sum_{i=1}^{N} S_i = -B \cdot \mu_0 \frac{1}{2}(n_{UP} - n_{DN}) \quad ; \quad N = n_{UP} + n_{DN}$$

אם נסמן $\alpha = \dfrac{2E_0}{\mu_0 B}$ נקבל את הפתרונות הבאים:

$$\alpha = n_{DN} - n_{UP} \quad ; \quad N = n_{UP} + n_{DN}$$
$$\Rightarrow$$
$$n_{UP} = \frac{1}{2}(N-\alpha) \quad ; \quad n_{DN} = \frac{1}{2}(N+\alpha)$$

ב. (5 נק') חשבו את האנטרופיה של השרשרת.

$$\Omega(E_0, N) = \frac{N!}{n_{UP}!\,n_{DN}!} = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)\right)!\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)!}$$
$$\Rightarrow$$
$$S(E_0, N) = k_B \ln(\Omega(E_0, N)) = k_B \ln\left(\frac{N!}{\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)\right)!\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)!}\right) \approx$$
$$k_B\left(N\ln N - \left(\frac{1}{2}(N-\alpha)\right)\ln\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)\right) - \left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)\ln\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)\right)$$

ג. (10 נק') חשבו את הטמפרטורה של השרשרת. הסבירו את התוצאה בגבולות המתאימים.

$$\frac{1}{T}=\frac{\partial S(E_0,N)}{\partial E_0}=\frac{\partial S(E_0,N)}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial E_0}=\frac{2k_B}{\mu_0 B}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{\mu_0 B}{k_B T}=\ln\left(\frac{N-\alpha}{N+\alpha}\right)=\ln\left(\frac{N-\frac{2E_0}{\mu_0 B}}{N+\frac{2E_0}{\mu_0 B}}\right)$$

הגבולות המתאימים מתייחסים ליחס בין אנרגיית זימן לאנרגיה התרמית כלומר האם $\mu_0 B\gg k_B T \quad or \quad \mu_0 B\ll k_B T$. בגבול של אנרגיה E0 שקרובה לאנרגיה המינימלית של המערכת ($-\frac{1}{2}\mu_0 BN$) הלוגריתם שואף לאינסוף והטמפרטורה שואפת לאפס. כלומר – למערכת אין הרבה אנרגיה תרמית ביחס לאנרגיית זימן וכן רוב הספינים מצביעים בכיוון השדה. בגבול השני, האנרגיה שואפת לאפס. במקרה כזה הלוגריתם שואף לאפס ולכן הטמפרטורה שואפת לאינסוף (מהצד החיובי). במקרה כזה כמות הספינים UP ו DOWN משתוות ושואפות ל N/2.

כעת, נוסף ניוון של 2 לרמת האנרגיה UP של כל ספין. כל שאר הנתונים נשארים זהים.

ד. (5 נק') מצאו את מספר הספינים בכל מיקרומצב בשרשרת (רמז: יש שתי אוכלוסיות ברמה של ספין UP ואחת ברמה של ספין DOWN) כפונקציה של אוכלוסיה מסויימת (למשל n_{UP}^a שמייצג את מספר הספינים במצב UP(a)), N, B ו E_0.

הפעם במצב UP יש ניוון, כלומר שני מיקרומצבים לכל ספין עם אנרגיה של $-\frac{1}{2}\mu_0 B$. נסמן מצב אחד באות a ומצב שני באות b. המצב DOWN נשאר כמו קודם עם אנרגיה של $\frac{1}{2}\mu_0 B$.

נסמן n_{UP}^a בתור מספר הספינים במצב UP(a), n_{UP}^b בתור מספר הספינים במצב UP(b) ו n_{DN} עבור מספר הספינים במצב DOWN.

מכיוון שכמות הספינים ידועה וגם האנרגיה צריך להתקיים:

$$E_0=-B\cdot\mu_0\sum_{i=1}^{N}S_i=-B\cdot\mu_0\frac{1}{2}(n_{UP}^a+n_{UP}^b-n_{DN})\quad;\quad N=n_{UP}^a+n_{UP}^b+n_{DN}$$

אם נסמן $\alpha=\frac{2E_0}{\mu_0 B}$ נקבל את הקשרים הבאים:

$$\alpha = n_{DN} - n_{UP}^a - n_{UP}^b \quad ; \quad N = n_{UP}^a + n_{UP}^b + n_{DN}$$
$$\Rightarrow$$
$$n_{UP}^b = \frac{1}{2}(N-\alpha) - n_{UP}^a \quad ; \quad n_{DN} = \frac{1}{2}(N+\alpha)$$

ה. (5 נק') חשבו את האנטרופיה כפונקציה של אוכלוסיה מסויימת (למשל n_{UP}^a), N, B ו E_0.

$$\Omega(E_0, N, n_{UP}^a) = \frac{N!}{n_{UP}^a!\,n_{UP}^b!\,n_{DN}!} = \frac{N!}{n_{UP}^a!\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)-n_{UP}^a\right)!\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)!}$$
$$\Rightarrow$$
$$S(E_0, N, n_{UP}^a) = k_B \ln(\Omega(E_0, N, n_{UP}^a)) = k_B \ln\left(\frac{N!}{n_{UP}^a!\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)-n_{UP}^a\right)!\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)!}\right) \approx$$
$$k_B\left(N\ln N - n_{UP}^a \ln\left(n_{UP}^a\right) - \left(\frac{1}{2}(N-\alpha)-n_{UP}^a\right)\ln\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)-n_{UP}^a\right) - \left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)\ln\left(\frac{1}{2}(N+\alpha)\right)\right)$$

ו. (10 נק') מצאו את מספר הספינים המסתבר ביותר לכל אוכלוסייה בשרשרת כפונקציה של N, B ו E_0. הסבירו את התוצאה עבור האנרגיה הנמוכה ביותר, הגבוהה ביותר ואנרגיה אפס.

מכיוון שהסרנו אילוץ המערכת תתייצב במצב שיווי משקל חדש בו האנטרופיה היא מקסימלית,

כלומר, נמצא את n_{UP}^a ע"י דרישה להתאפסות הנגזרת של S :

$$0 = \frac{\partial S(E_0, N, n_{UP}^a)}{\partial n_{UP}^a} = k_B\left(-\ln\left(n_{UP}^a\right) + \ln\left(\frac{1}{2}(N-\alpha)-n_{UP}^a\right)\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$n_{UP}^a = \frac{1}{2}(N-\alpha) - n_{UP}^a \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^a = \frac{1}{4}(N-\alpha)$$
$$\alpha = \frac{2E_0}{\mu_0 B} \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^a = \frac{1}{4}\left(N - \frac{2E_0}{\mu_0 B}\right) = \frac{N\mu_0 B - 2E_0}{4\mu_0 B}$$

האנרגיה הנמוכה ביותר מתקבלת כאשר כל הספינים בכיוון השדה. במקרה כזה $E_0 = -\frac{1}{2}N\mu_0 B$ ואז מתקבלות התוצאות הבאות :

$$\alpha = \frac{2E_0}{\mu_0 B} = \frac{2(-\frac{1}{2}N\mu_0 B)}{\mu_0 B} = -N \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^{a} = \frac{1}{4}(N-\alpha) = \frac{1}{2}N$$

$$n_{UP}^{b} = \frac{1}{2}(N-\alpha) - n_{UP}^{a} \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^{b} = \frac{1}{2}N$$

$$n_{DN} = \frac{1}{2}(N+\alpha) \quad \Rightarrow \quad n_{DN} = 0$$

כלומר, התוצאות מתיישבות עם האינטואיציה שלנו.
כאשר כמות הספינים בכיוון מעלה משתווה לכמות הספינים בכיוון מטה, המגנטיזציה מתאפסת וגם האנרגיה של המערכת. במקרה כזה נקבל:

$$\alpha = \frac{2E_0}{\mu_0 B} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^{a} = \frac{1}{4}(N-\alpha) = \frac{1}{4}N$$

$$n_{UP}^{b} = \frac{1}{2}(N-\alpha) - n_{UP}^{a} \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^{b} = \frac{1}{4}N$$

$$n_{DN} = \frac{1}{2}(N+\alpha) \quad \Rightarrow \quad n_{DN} = \frac{1}{2}N$$

שוב בהתאם לציפיות. עבור האנרגיה הגדולה ביותר, כל הספינים מכוונים בניגוד לכיוון השדה, ואז האנרגיה היא $E_0 = \frac{1}{2}N\mu_0 B$. במקרה כזה נקבל:

$$\alpha = \frac{2E_0}{\mu_0 B} = \frac{2(\frac{1}{2}N\mu_0 B)}{\mu_0 B} = N \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^{a} = \frac{1}{4}(N-\alpha) = 0$$

$$n_{UP}^{b} = \frac{1}{2}(N-\alpha) - n_{UP}^{a} \quad \Rightarrow \quad n_{UP}^{b} = 0$$

$$n_{DN} = \frac{1}{2}(N+\alpha) \quad \Rightarrow \quad n_{DN} = N$$

שוב, בהתאם לציפיות.

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\ J\ K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^{8} m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$
$\sin(a) = 1/(2i)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

:אינטגרליים שימושיים

Gaussian Distribution
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ תוחלת μ סטיית תקן σ

Gaussian Integral $\alpha > 0$
$\int_{a}^{b} e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$\boldsymbol{n}$	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$\boldsymbol{\Gamma(n)}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{I(n)}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$