תרגיל בית 6

פתרון

שאלה 1: מודל Drude, מוליכות AC

בתרגיל הזה נפתח ביטוי עבור מוליכות AC תחת הנחות של מודל דרורה. נניח שמופעל שדה מהצורה $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t}$ על פיסת מתכת בעלת זמן הממוצע בין הפיזורים τ, ריכוז האלקטרונים n. הניחו אלקטרונים בעלי מסה של אלקטרון חופשי m_0

א. כתבו את המשוואה המתארת את התנע הממוצע של האלקטרון לפי מודל דרודה.
ב. פתרו את המשוואה על ידי ניחוש הפתרון מהצורה הבאה $p(t) = p(\omega)e^{-i\omega t}$ וקבלו ביטוי עבור $p(\omega)$ כתלות בשאר הפרמטרים של הבעיה
ג. קבלו ביטוי עבור צפיפות זרם הסחיפה
ד. קבלו ביטוי עבור מוליכות AC בעזרת חוק Ohm המיקרוסקופי. מה גודל המוליכות עבור $\omega = 0$. האם הביטוי מוכר לכם?
ה. ציירו חלק ממשי, מדומה וערך מוחלט של המוליכות AC עבור מתכת אלומיניום Al בה נמדד $\tau = 8 \times 10^{-15}$ ומוליכות DC $\sigma = 4.1 \times 10^{7}\Omega^{-1}m^{-1}$

פתרון

א. משוואת דרודה

$$\frac{d\langle p(t)\rangle}{dt} + \frac{\langle p(t)\rangle}{\tau} = F(t) = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

ב. מכיוון שהמשוואה הינה לינארית ננחש פתרון מהצורה $p(t) = p(\omega)e^{-i\omega t}$

$$-i\omega p(\omega)e^{-i\omega t} + \frac{p(\omega)e^{-i\omega t}}{\tau} = -eE_0 e^{-i\omega t}$$

$$-i\omega p(\omega) + \frac{p(\omega)}{\tau} = -eE_0$$

$$p(\omega) = -\frac{e\tau E_0}{1 - i\omega\tau}$$

$$p(t) = -\frac{e\tau E_0}{1 - i\omega\tau} e^{i\omega t}$$

ג. כזכור ממודל דרודה

$$J(t) = -en\vec{v} = -\frac{en}{m}p(t) = \frac{\frac{e^2 n\tau}{m}}{1 - i\omega\tau} E_0 e^{i\omega t} = \frac{\frac{e^2 n\tau}{m}}{1 - i\omega\tau} E$$

ד. לפי חוק Ohm המיקרוסקופי

$$J = \sigma E$$

לפיכך מקבל

$$\sigma = \frac{\frac{e^2 n\tau}{m}}{1 - i\omega\tau}$$

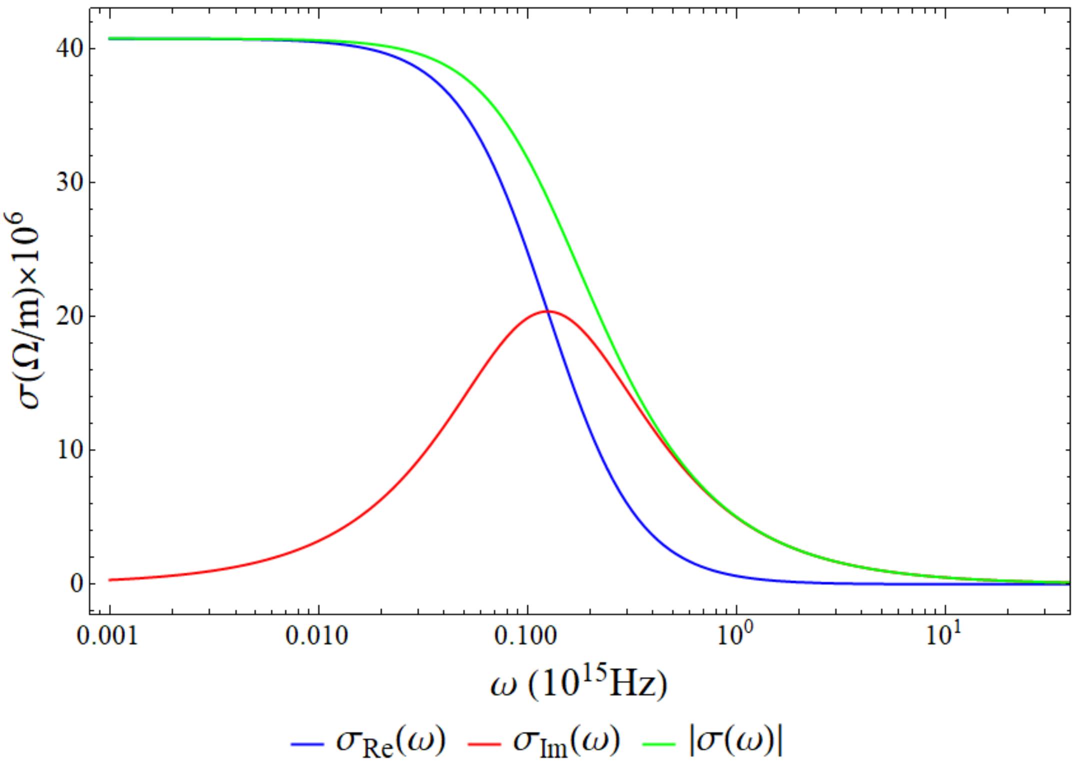
בתדר $\omega = 0$ נקבל בדיוק את הביטוי עבור מוליכות DC

$$\sigma_{DC} = \frac{e^2 n\tau}{m}$$

לפיכך

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_{DC}}{1 - i\omega\tau}$$

ה.



שאלה 2: צפיפות מצבים

1. נתון גז של אלקטרונים חופשיים עם יחס הדיספרסיה הידוע : $\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

חשבו את :

(א) צפיפות המצבים ליחידת אורך עבור מערכת חד-ממדית.

(ב) צפיפות המצבים ליחידת שטח עבור מערכת דו-ממדית.

(ג) צפיפות המצבים ליחידת נפח עבור מערכת תלת-ממדית.

א) מספר המצבים עד מספר גל k עבור מערכת חד מימדית באורך L, הוא

$$N(k) = 2 * \frac{k}{\frac{\pi}{L}}$$

כאשר הכפלנו ב 2 עבור הספין, ו $\frac{\pi}{L}$ הוא ההפרש בין שני מצבי k סמוכים.

נחליף את k ב ϵ מיחס הדיספרסיה ונקבל

$$k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

מכאן נקבל כי מספר המצבים ליחידת אורך הוא

$$\frac{N(\epsilon)}{L} = n(\epsilon) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

מכאן שצפיפות המצבים בחד מימד היא

$$g(\epsilon) = \frac{dn}{d\epsilon} = \sqrt{\frac{2m}{\pi^2\hbar^2}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

ב) עבור מערכת דו מימדית

$$N(k) = 2 * \frac{\pi k^2}{4\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)}$$

החלוקה ב4 היא כיוון שרק ערכי k חיוביים הם רלוונטיים

נציב

$$k = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}$$

ונקבל את כי מספר המצבים ליחידת שטח הוא

$$\frac{N(\epsilon)}{L^2} = n(\epsilon) = \frac{m\epsilon}{\pi\hbar^2}$$

צפיפות המצבים מכאן היא

$$g(\epsilon) = \frac{dn}{d\epsilon} = \frac{m}{\pi\hbar^2}$$

ג) עבור מערכת תלת מימדית

$$N(k) = \frac{\frac{2}{8}\frac{4\pi}{3}k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$$

כאשר הכפלנו ב2 עבור הספין וחילקנו ב8 כדי להתחשב רק בערכי k חיוביים.
מיחס הדיספרסיה נקבל כי מספר המצבים ליחידת נפח הוא

$$\frac{N(\epsilon)}{L^3} = n(\epsilon) = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

צפיפות המצבים מכאן היא

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}$$

2. עכשיו נתון שיחס הדיספרסיה עבור אלקטרונים בתלת-ממד הוא :

$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

כאשר נתון ש ε_g הוא קבוע חיובי וסימנו את המסה של האלקטרונים בתור m^*.

חשבו את צפיפות המצבים ליחידת נפח, שימו לב שיש חסם תחתון על ערכי האנרגיה. קבעו מהו תחום האנרגיות שבו מוגדרת צפיפות המצבים ליחידת נפח.

רשות : אם נציב את הביטוי זה לצפיפות מצבים בתוך האינטגרל לחישוב צפיפות האלקטרונים המספרית בחומר, האם אתם יכולים לזהות את האינטגרל הזה? עבור איזה סוג של חומרים מקבלים אינטגרל מסוג זה? איך קוראים לאלקטרונים שמחשבים את הצפיפות המספרית שלהם באינטגרל זה?

כמו קודם, נקבל $N(k) = \frac{\frac{\pi}{3}k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}$ אבל הפעם

$$k = \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}(\epsilon - \epsilon_g)}$$

לכן

$$n(\epsilon) = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2m(\epsilon - \epsilon_g)}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

וצפיפות המצבים כעת היא

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon - \epsilon_g}$$

הצפיפות מוגדרת עבור $\epsilon > \epsilon_g$.

רשות: האינטגרל המדובר הוא

$$n = \frac{(2m_e^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2\hbar^3}\int_{\epsilon_g}^{\infty}\frac{\sqrt{\epsilon - \epsilon_g}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}d\epsilon$$

ביטוי זה הוא ריכוז האלקטרונים בפס ההולכה במוליכים למחצה, והוא האינטגרל על צפיפות המצבים כפול התפלגות פרמי דיראק, כאשר הגבול התחתון הוא האנרגיה בתחתית פס ההולכה, ϵ_g. אלקטרונים אלו נקראים אלקטרוני הולכה.

3. עכשיו נתון שיחס הדיספרסיה עבור אלקטרונים בדו-ממד הוא:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_x} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_y}$$

חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח. שימו לב שעקום שווה האנרגיה עכשיו הוא לא מעגל אלא בעל צורה גאומטרית אחרת, מהי הצורה הגאומטרית הזאת?

עקום שווה אנרגיה כאן הוא אליפסה, נביא את הביטוי לצורה הסטנדרטית של אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. כאן נקבל $\frac{k_x^2}{\left(\frac{2\epsilon m_x}{\hbar^2}\right)} + \frac{k_y^2}{\left(\frac{2\epsilon m_y}{\hbar^2}\right)} = 1$

כלומר הצירים ראשיים הם

$$a = \sqrt{\frac{2m_x\epsilon}{\hbar^2}}, b = \sqrt{\frac{2m_y\epsilon}{\hbar^2}}$$

השטח במרחב k המוכל בתוך עקום שווה אנרגיה (האליפסה) הוא

$$\pi ab = \frac{\pi 2\sqrt{m_x m_y}}{\hbar^2}\epsilon$$

ומכאן שמספר המצבים ליחידת שטח הוא (נכפיל ב2 עבור הספין ונחלק ב 4 כדי להתחשב רק בערכי k חיוביים, ונחלק ב π^2 עבור ההפרש בין מצבי k סמוכים.

$$n(k) = \frac{\pi\sqrt{m_x m_y}}{\hbar^2 \pi^2}\epsilon$$

לבסוף, צפיפות המצבים ליחידת שטח היא

$$g(\epsilon) = \frac{\sqrt{m_x m_y}}{\hbar^2 \pi}$$