

## 1. קרינת גוף שחור

הביטוי לצפיפות האנרגיה של קרינת גוף שחור ליחידת נפח וליחידת תדר:

$$u(f) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1}$$

לאורך כל השאלה אנו עוסקים בפוטונים ובתוצאות של התרגול.

### 1.1. סעיף א:

$$\int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1} df = \frac{8\pi h}{c^3} \left( \frac{K_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi h}{c^3} \left( \frac{K_B T}{h} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \frac{8\pi^5 K_B^4 T^4}{15(hc)^3}$$

לא היה ניתן להגיע לתוצאה בחישוב קלאסי.

### 1.2. סעיף ב:

$$\begin{aligned} u'(f) &= \frac{d}{df} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1} \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \left( 3f^2 \left( e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1 \right)^{-1} - f^3 \left( e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1 \right)^{-2} \cdot e^{\frac{hf}{K_B T}} \cdot \frac{h}{K_B T} \right) \\ &= 3f^2 \left( e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1 \right)^{-1} - f^3 \left( e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1 \right)^{-2} \cdot e^{\frac{hf}{K_B T}} \cdot \frac{h}{K_B T} \\ &= 3 - f^1 \left( e^{\frac{hf}{K_B T}} - 1 \right)^{-1} \cdot e^{\frac{hf}{K_B T}} \cdot \frac{h}{K_B T} \\ &= 3 - x(e^x - 1)e^x \\ x &= 2.821 \\ f_{max}(T) &= 2.821 \frac{K_B T}{h} \end{aligned}$$

אורך הגל:

$$\begin{aligned} \frac{du(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1} \right) = 8\pi hc \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1 \right)} \right) \\ &= 8\pi hc \cdot \left( -5\lambda^{-6} \left( e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1 \right)^{-1} + \lambda^{-5} \left( e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1 \right)^{-2} \cdot \frac{hc}{\lambda^2 K_B T} \cdot e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} \right) \\ &= -5 + \left( e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} - 1 \right)^{-1} \frac{hc}{\lambda K_B T} \cdot e^{\frac{hc}{\lambda K_B T}} \\ &= -5 + (e^x - 1)^{-1} x e^x \end{aligned}$$

$$\frac{hc}{\lambda K_B T} = x = 4.965$$

$$\lambda_{max}(T) = \frac{hc}{4.965 K_B T}$$

### 1.3. סעיף ג:

נכפיל  $f_{max}$  ב-  $\lambda_{max}$  ונקבל:

$$2.821 \frac{K_B T}{h} \cdot \frac{hc}{4.965 K_B T} = \frac{2.821}{4.965} c \neq 1c$$

הקשר לא מתקיים, כיוון שההתפלגויות השונות דרשו הכפלה ביעקוביאנים שונים.

### 1.4. סעיף ד:

#### 1.4.1. עבור בני אדם

$$\lambda_{max}(T = 300) = \frac{hc}{1489.5 K_B} = 9.533 [\mu m]$$

#### 1.4.2. עבור שמש

$$\lambda_{max}(T = ?) = \frac{hc}{4.965 K_B T} = 560 [nm] \rightarrow T = 4847 [Kelvin]$$

## 2. התפלגות פרמי דיראק ובוז איינשטיין

נתונה מערכת היכולה להכיל אפס או אחד או שניים או שלושה חלקיקים.  
אם המערכת מכילה חלקיקים, אז החלקיקים מאכלסים שתי רמות אנרגיה

### 3. שאלה 3: צפיפות מצבים בממד אחד

נתון בור פוטנציאל אינסופי במימד אחד בעל רוחב  $L$ , הבור יכול לאכלס בוזונים בעלי מסה  $m$  וללא ספין.

#### 3.1. סעיף 1:

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$E_{min} = E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

#### 3.2. סעיף 2:

עבור בור פוטנציאל אינסופי חד ממדי  $k = \frac{n\pi}{L}$ , וחיס הנפיצה:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$N(k) = \frac{Lk}{\pi}$$

מחלקים את הביטוי ב  $L$  כדי לקבל  $G(k)$  ונציב את  $k$  כך ש:

$$G(E) = \frac{\sqrt{2mE}}{\pi \hbar} = \frac{2\sqrt{2mE}}{h}$$

נגזור:

$$\frac{dG(E)}{dE} = g(E) = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

#### 3.3. סעיף 3:

מספר החלקיקים במערכת:

$$N = L \cdot n = L \cdot \int_{E_g}^{\infty} g(E) f_{BE}(E) dE = \frac{L\sqrt{2m}}{h} \int_{E_g = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{E}} \frac{1}{e^{\frac{E-0}{K_B T}} - 1} dE$$

#### 3.4. סעיף 4:

עבור 8 בוזונים, כולם יהיו ברמת הייסוד בטמפרטורת אפס כי אין עליהם חוק איסור (כמו על פרמיונים) לכן

$$E_{total}(T=0) = 8E_g = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{mL^2}$$

עבור 8 פרמיונים עם מסה  $m$  וספין חצי, חל חוק האיסור, לכן יהיו 2 פרמיונים בכל רמה אנרגיה. לכן:

$$E_{total}(T=0) = 2E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 = 2E_g(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} \cdot 30$$

#### 3.5. סעיף 5:

במערכת יש פרמיונים עם צפיפות ליחידה אורך  $n$ .

$$n \approx g(E_f) \cdot K_B T = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E_f}} K_B T$$

לפי משפט החלוקה השווה, בממד אחד לכל פרמיון יש אנרגיה ממוצעת של  $0.5K_B T$ , לכן:

$$E = n \cdot 0.5K_BT \approx \frac{1}{h}\sqrt{\frac{m}{2E_f}}(K_BT)^2$$

וקיבול החום:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2m}{E_f}}K_B^2T$$