תרגיל בית מספר 7: התפלגויות פרמי-דיראק ובוזה-איינשטיין, אורך הגל התרמי

שאלה 1: קרינת גוף שחור

בתרגול ראיתם את הביטוי לצפיפות האנרגיה של קרינת גוף שחור ליחידת נפח וליחידת תדר:

$$u(f)=\frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/k_BT}-1}$$

כמו כן ניתן להניח לאורך כל השאלה שאנו עוסקים בפוטונים ובתוצאות של התרגול.

א. בצעו אינטגרציה על פני כל התדרים, מהו הביטוי שהתקבל עבור האנרגיה ליחידת נפח? מהי התלות של האנרגיה בטמפרטורה? האם היה ניתן לקבל את הביטוי הנ"ל באופן קלאסי? מדוע?

הערה: נתון ש:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{\pi^4}{15}$$

נשתמש בהחלפת המשתנים הבאה:

$$x=\frac{hf}{k_BT},dx=\frac{h}{k_BT}df$$

כעת נבצע את האינטגרציה:

$$u=\int_0^\infty u(f)df=\int_0^\infty\frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/k_BT}-1}df=\frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\frac{\pi^4}{15}$$

שימו לב שהתלות של האנרגיה הכוללת (ליח' נפח) היא בטמפרטורה בחזקת 4. כמו כן, קיומו של קבוע פלאנק בביטוי מעיד על כך שמדובר בביטוי שכביכול ניתן לקבל רק באופן קוונטי.

הערה: למעשה, התלות בטמפרטורה היא קלאסית לחלוטין! הפקטור שבו אנו מכפילים את התלות הזאת מכיל את הטיפול הקוונטי לבעיה.

בנוסף, ניתן לכפול את הביטוי שקיבלתם בפקטור $c/4$ (כהיא מהירות האור) ולקבל את ההספק ליחידת שטח הנפלט מהגוף השחור. הקבוע הכולל המקשר בין הטמפרטורה לבין ההספק ליחידת שטח נקרא גם קבוע סטפן-בולצמן וסימונו σ. הביטוי הכולל שקיבלתם ידוע גם בשם חוק סטפן-בולצמן.

בתרגולים ראינו שכאשר אנו עוסקים בגדלים בעלי אופי הסתברותי (למשל התפלגות מקסוול-בולצמן או התפלגות קרינת הגוף השחור), החלפת משתנים יכולה לשנות בצורה משמעותית את ההתפלגות. במקרה של קרינת הגוף השחור, ראינו שניתן להביע את צפיפות האנרגיה הן בתדר f והן באורך הגל λ.

ב. מצאו את λ_{max} עבורו $u(\lambda)$ מקבלת מקסימום ואת f_{max} עבורו $u(f)$ מקבלת מקסימום.

הדרכה: לאחר גזירת שתי ההתפלגויות, ניתן להגיע למשוואה סתומה מהצורה $f(x)=x$ אותה אפשר לפתור בצורה איטרטיבית למציאת הקבוע. שימו לב שאנו מחפשים $x\neq 0$!

עבור צפיפות האנרגיה כתלות בתדר, נקבל:

$$\frac{du(f)}{df}=\frac{d}{df}\left[\frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3}{e^{hf/k_BT}-1}\right]=\frac{8\pi h}{c^3}\frac{d}{df}\left[f^3\left(e^{hf/k_BT}-1\right)^{-1}\right]=$$
$$=\frac{8\pi h}{c^3}\left[3f^2\left(e^{hf/k_BT}-1\right)^{-1}-f^3\left(e^{hf/k_BT}-1\right)^{-2}\frac{h}{k_BT}e^{hf/k_BT}\right]$$

אנו רוצים למצוא נק' מקסימום ולכן נשווה את הביטוי ל-0:

$$\frac{du(f)}{df}\Big|_{f=f_{\max}}=\frac{8\pi h}{c^3}[3f_{\max}^2(e^{hf_{\max}/k_BT}-1)^{-1}-f_{\max}^3(e^{hf_{\max}/k_BT}-1)^{-2}\frac{h}{k_BT}e^{hf_{\max}/k_BT}]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-f_{\max}(e^{hf_{\max}/k_BT}-1)^{-1}\frac{h}{k_BT}e^{hf_{\max}/k_BT}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(e^{hf_{\max}/k_BT}-1)-\frac{hf_{\max}}{k_BT}e^{hf_{\max}/k_BT}=0$$

זוהי משוואה סתומה. ניתן לבצע את החלפת המשתנים $x=\frac{hf_{max}}{k_BT}$ ולקבל את הצורה הפשוטה יותר:

$$3(e^x-1)-xe^x=0\Rightarrow 3(1-e^{-x})=x$$

ניתן לפתור את המשוואה הנ"ל באופן איטרטיבי במחשבון (למשל להציב $x=1$ ולהמשיך משם). הפתרון המתקבל הוא $x\approx 2.821$. שימו לב שגם $x=0$ הוא פתרון אך אנו מחפשים פתרון עם תדר סופי שאינו אפס (למעשה גם ב-f_{max} ישנה נקודת קיצון אך זוהי נקודת מינימום).

קיבלנו אם כן את הקשר הבא:

$$\frac{hf_{max}}{k_BT\frac{k_BT}{h}^{10}{}_{max}}$$

באם היינו מביעים את צפיפות האנרגיה באמצעות אורך הגל היינו מקבלים (לפי התרגול):

$$u(\lambda)=\frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}$$

נגזור את הביטוי הנ"ל לפי אורך הגל:

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}[\frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}]=8\pi hc\frac{d}{d\lambda}[\lambda^{-5}(e^{hc/\lambda k_BT}-1)^{-1}]=$$
$$=8\pi hc[-5\lambda^{-6}(e^{hc/\lambda k_BT}-1)^{-1}+\lambda^{-5}(e^{hc/\lambda k_BT}-1)^{-2}\frac{hc}{\lambda^2k_BT}e^{hc/\lambda k_BT}]$$

אנו רוצים למצוא נקי' מקסימום ולכן נשווה את הביטוי ל-0:

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_{\max}}=8\pi hc[-5\lambda_{\max}^{-6}(e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}-1)^{-1}+\lambda_{\max}^{-5}(e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}-1)^{-2}\frac{hc}{\lambda_{\max}^2k_BT}e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\lambda_{\max}^{-1}+(e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}-1)^{-1}\frac{hc}{\lambda_{\max}^2k_BT}e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}=0\Rightarrow -5(e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}-1)+\frac{hc}{\lambda_{\max}k_BT}e^{hc/\lambda_{\max}k_BT}=0$$

זוהי משוואה סתומה. ניתן לבצע את החלפת המשתנים $x=\frac{hc}{\lambda B_{max}}$ ולקבל את הצורה הפשוטה יותר:

$$-5(e^x-1)+xe^x=0\Rightarrow 5(1-e^{-x})=x$$

ניתן לפתור את המשוואה הנ"ל באופן איטרטיבי במחשבון (למשל להציב $x=1$ ולהמשיך משם). הפתרון המתקבל הוא $x\approx 4.965$. שימו לב שגם $x=0$ הוא פתרון אך אנו מחפשים פתרון עם תדר סופי שאינו אפס (למעשה גם ב-λ_{max} ישנה נקודת קיצון אך זוהי נקודת מינימום).

קיבלנו אם כן את הקשר הבא:

$$\frac{hc}{\lambda B_{max}\frac{hc}{4.965k_BT}\frac{2.901\cdot 10^{-3}}{T}_{max}}$$

ג. עבור גלים אלקטרומגנטיים, אורך הגל והתדר מקיימים את הקשר $f\lambda = c$ כאשר c היא מהירות האור. האם ערכי המקסימום שקיבלתם בסעיף הקודם מקיימים את הקשר הנ״ל? מדוע?

נכפיל את $fmax_{max}$ זה בזה. נקבל:

$$f10\frac{2.901\cdot 10^{-3^8}}{T}\frac{m^8}{s}\frac{m}{s}max_{max}$$

קיבלנו שמכפלת ערכי המקסימום של כל התפלגות לא שווה למהירות האור! האם שברנו את חוקי הפיזיקה? כנראה שלא. אמנם אינטגרציה על שתי ההתפלגויות הנ״ל מניבה את אותה התוצאה, אולם עלינו לזכור שהחלפת המשתנים שביצענו כללה גם את השינוי הדיפרנציאלי (היעקוביאן). התוצאה היא שתי התפלגויות שאין קשר בין ערכי הקיצון שלהן. למעשה ראינו את הדוגמה הנ״ל בתרגול קודם בדמות ההצגות השונות של התפלגות מקסוול-בולצמן לגז אידיאלי.

ד. הקשר בין אורך הגל/תדר המקסימליים לבין הטמפרטורה אותו מצאתם בסעיף ב׳ ידוע גם בתור חוק וין (Wien's Law). לרוב משתמשים בגרסת אורך הגל של חוק וין, כלומר ב-λ_{max}.

a. נניח שבני אדם המצויים בטמפרטורת החדר הם גופים שחורים. מהו אורך הגל המקסימלי אותו בני אדם פולטים?

הצבה בחוק וין לאורך הגל תיתן:

$$\lambda\frac{2.901\cdot 10^{-3}}{T}\frac{2.901\cdot 10^{-3}}{300}_{max}$$

כלומר שבני אדם פולטים קרינה בעיקר בתחום האינפרא-אדום (תת-אדום) ואכן כך הדבר!

b. נתון שהשמש היא בקירוב טוב מאוד גוף שחור ושאורך הגל המקסימלי אותו היא פולטת הוא $\sim 590nm$. מהי טמפרטורת פני השמש בקירוב?

הצבה בחוק וין לאורך הגל תיתן:

$$\lambda\frac{2.901\cdot 10^{-3}}{T}\frac{2.901\cdot 10^{-3}}{\lambda_{max}\frac{2.901\cdot 10^{-3}}{590\cdot 10^{-9}}}_{max}$$

זוהי אכן טמפרטורת פני השמש בקירוב טוב!

שאלה מספר 2 : התפלגות פרמי דיראק ובוז איינשטיין

נתונה מערכת היכולה להכיל אפס אחד שניים או שלושה חלקיקים.

אם המערכת מכילה חלקיקים, אז החלקיקים מאכלסים שתי רמות אנרגיה ϵ ו 2ϵ .

המערכת בטמפרטורה T ופוטנציאל כימי μ.

א. בהנחה שהחלקיקים הם פרמיונים בעלי ספין $\frac{1}{2}$, מה תהיה פונקציית החלוקה הגרנד קנונית?

ב. כעת רשמו את פונקציית החלוקה הגרנד קנונית במקרה שהחלקיקים הם בוזונים.

שלושת הסעיפים הבאים לא קשורים לסעיפים הקודמים.

ג. נניח מערכת הנתונה בטמפרטורה T ופוטנציאל כימי μ.
נתמקד במצב קוונטי אחד במערכת, בעל אנרגיה ϵ.
בהנחה שמדובר בפרמיונים. מה האכלוס הממוצע של המצב הקוונטי?
מהו האכלוס הממוצע של המצב הקוונטי אם מדובר בבוזונים?
(הדרכה – רשמו את פונקציית החלוקה בשני המקרים וגזרו ממנה את האכלוס הממוצע).
האם קיבלתם מה שציפיתם לו?

ד. כעת נניח מערכת דו ממדית המכילה אלקטרונים בעלי ספין חצי. יחס הנפיצה של האלקטרונים הוא

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

בהינתן שהמערכת מכילה N אלקטרונים, מהו הפוטנציאל הכימי של המערכת? כעת הניחו $T = 0$, ורשמו ביטוי אינטגרלי לצפיפות האלקטרונים במערכת. פתרו את האינטגרל וקבלו ממנו את אנרגיית פרמי, וודאו שהפוטנציאל הכימי שווה לאנרגיית פרמי עבור $T = 0$.

לשימושכם, נתון האינטגרל הבא :

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{a(x-b)}+1}dx = \frac{1}{a}ln(1+e^{a\cdot b})$$

א. לא יותר מאלקטרון אחד יכול לאכלס מצב קוונטי אחד, לכן בהינתן הספין, לכל היותר שני אלקטרונים יכולים לאכלס רמת אנרגיה מסויימת.
התרומה לפונקציית החלוקה ממצב בו יש אפס אלקטרונים היא 1 .
במצב בו יש אלקטרון אחד, הוא יכול להיות באחת משתי הרמות לכן התרומה לפונקציית החלוקה היא

$$e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + e^{-\beta(2\epsilon-\mu)}$$

עבור שני חלקיקים, המצבים האפשריים הם ששניהם מאכלסים את הרמה התחתונה, שניהם מאכלסים את הרמה העליונה, ואחד מאכלס את התחתונה והשני את העליונה.
התרומה לפונקציית החלוקה הגרנד קנונית ממצב זה היא

$$e^{-\beta(2\epsilon-2\mu)} + e^{-\beta(4\epsilon-2\mu)} + e^{-\beta(3\epsilon-2\mu)}$$

עבור שלושה חלקיקים, כלל האיסור של פאולי כבר בא לידי ביטוי.
המצבים האפשריים אז הם שני אלקטרונים ברמה הראשונה ואחד בשניה, או שניים בשניה ואחד בראשונה.
התרומה לפונקציית החלוקה ממצב זה היא

$$e^{-\beta(4\epsilon-3\mu)} + e^{-\beta(5\epsilon-3\mu)}$$

סך הכל פונקציית החלוקה הגרנד קנונית היא

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + e^{-\beta(2\epsilon-\mu)} + e^{-\beta(2\epsilon-2\mu)} + e^{-\beta(4\epsilon-2\mu)} + e^{-\beta(3\epsilon-2\mu)} + e^{-\beta(4\epsilon-3\mu)} + e^{-\beta(5\epsilon-3\mu)}$$

ב. אם מדובר בבוזונים, אז אין הגבלה על מספר החלקיקים המאכלסים כל רמה. למעשה, השינוי היחיד מהסעיף הקודם הוא כאשר יש שלושה חלקיקים במערכת, אז נוספים שני מצבים בהם שלושה חלקיקים מאכלסים את הרמה הראשונה, או ששלושה חלקיקים מאכלסים את הרמה השניה, זה יוסיף לפונקציית החלוקה את שני האיברים הבאים

$$e^{-\beta(6\epsilon-3\mu)}+e^{-\beta(3\epsilon-3\mu)}$$

לכן פונקציית החלוקה הגרנד קנונית עכשיו תהיה

$$=1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}+e^{-\beta(2\epsilon-\mu)}+e^{-\beta(2\epsilon-2\mu)}+e^{-\beta(4\epsilon-2\mu)}+e^{-\beta(3\epsilon-2\mu)}$$
$$+e^{-\beta(4\epsilon-3\mu)}+e^{-\beta(5\epsilon-3\mu)}+e^{-\beta(6\epsilon-3\mu)}+e^{-\beta(3\epsilon-3\mu)}$$

ג. אם המערכת יכולה לאכלס רק פרמיונים, לא יותר מפרמיון אחד יכול לאכלס את הרמה לכן פונקציית החלוקה הגרנד קנונית היא

$$\mathcal{Z}=1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$$

האכלוס הממוצע אז יקבל מהקשר

$$<n>=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln(\mathcal{Z})=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$$

וזו התפלגות פרמי דיראק.

אם המערכת מאכלסת בוזונים, אין הגבלה על מספר החלקיקים המאכלסים את הרמה ולכן

$$\mathcal{Z}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta(\epsilon-\mu)n}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\beta(\epsilon-\mu)})^n=\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}$$

כעת נקבל את האכלוס הממוצע על ידי

$$<n>=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln(\mathcal{Z})=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}$$

וזו התפלגות בוז אינשטיין.

ד. צפיפות האלקטרונים היא $n=\frac{N}{L^2}$.

ראינו שצפיפות המצבים ליחידת שטח ליחידת אנרגיה בדו מימד עבור אלקטרונים בעלי ספין חצי היא

$$g(\epsilon)=\frac{m}{\pi\hbar^2}$$

מספר החלקיקים ליחידת שטח אז יהיה

$$n=\int_0^{\infty}g(\epsilon)f_{FD}d\epsilon=\int_0^{\infty}\frac{m}{\pi\hbar^2}\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}=\frac{m}{\pi\hbar^2}\frac{1}{\beta}\ln\left(1+e^{\beta\mu}\right)$$

מכאן נקבל שהפוטנציאל הכימי הוא

$$\mu=\frac{1}{\beta}\ln\left(e^{\frac{n\pi\hbar^2\beta}{m}}-1\right)$$

ה. כאשר $T=0$ התפלגות פרמי דיראק שווה ל1 עבור אנרגיה קטנה או שווה לאנרגיית פרמי ו0 עבור אנרגיות הגבוהות מאנרגיית פרמי.

לכן נקבל

$$n=\int_0^{\infty}g(\epsilon)f_{FD}(T=0)d\epsilon=\int_0^{E_f}g(\epsilon)1d\epsilon=\frac{m}{\pi\hbar^2}E_f$$

ומכאן אנרגיית פרמי היא

$$E_f=\frac{\pi\hbar^2}{m}n$$

כאשר n צפיפות האלקטרונים במערכת.

עבור $T=0$, $\beta\to\infty$ אז נקבל מהביטוי לפוטנציאל הכימי בגבול זה

$$\mu(T=0) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln\left(e^{\frac{n\pi\hbar^2\beta}{m}} - 1\right) = \frac{1}{\beta} \ln\left(e^{\frac{n\pi\hbar^2\beta}{m}}\right) = \frac{1}{\beta} \frac{n\pi\hbar^2\beta}{m} = E_f$$

שאלה 3: צפיפות מצבים בממד אחד

נתון בור פוטנציאל אינסופי במימד אחד בעל רוחב L, הבור יכול לאכלס בוזונים בעלי מסה m וללא ספין.

1. מהן רמות האנרגיה בבור? מהי האנרגיה הנמוכה ביותר?
2. מצאו את צפיפות המצבים ליחידת אורך בבור $g(E)$.
3. בהינתן טמפרטורה T, קבלו ביטוי אינטגרלי למספר החלקיקים הכולל במערכת. (הניחו פוטנציאל כימי אפס.)
4. בהנחה ובמערכת יש 8 בוזונים, מה תהיה האנרגיה הכוללת במערכת בטמפרטורה אפס?
עכשיו במקום בוזונים נניח כי במערכת יש 8 פרמיונים עם אותה מסה m ועם ספין חצי. מה עכשיו תהיה האנרגיה הכוללת בטמפרטורה אפס?
5. כעת נניח כי במערכת יש פרמיונים (במקום הבוזונים) עם צפיפות ליחידת אורך n. נתון שהמערכת בעלת טמפרטורה T כלשהיא. חשבו את קיבול החום של המערכת. ניתן להניח כי $E_f \gg k_B T$.

1. עבור בור אינסופי במימד אחד, ראינו שמתקיים:
$$k = \frac{\pi}{L} n$$
יחס הנפיצה הינו ריבועי כיוון שמדובר בחלקיקים בעלי מסה
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$$
אנרגיית מצב היסוד היא
$$E_{ground} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$
2. נחשב את מספר המצבים עד ל k נתון
$$N(k) = \frac{k}{\Delta k} = \frac{kL}{\pi}$$
כאשר נשים לב כי אין ספין לכן לא הכפלנו ב2, וגם רק ערכי k חיוביים הם רלוונטיים.
מספר המצבים ליחידת אורך בבור היא
$$n(k) = \frac{k}{\pi}$$
נציב $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ונקבל
$$n(E) = \sqrt{\frac{2mE}{\pi^2 \hbar^2}}$$
שזהו מספר המצבים ליחידת אורך עד לאנרגיה E.
לבסוף, נגזור לפי האנרגיה כדי לקבל את צפיפות המצבים ליחידת אורך ליחידת אנרגיה
$$g(E) = \frac{dn(E)}{dE} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{E}}$$
3. כפי שראיתם בתרגול, מספר החלקיקים הכולל במערכת בוזונים בהינתן טמפרטורה T הוא (נניח כי הפוטנציאל הכימי הוא $\mu = 0$)
$$N = L \int_{-\infty}^{\infty} g(E) f_{BE}(E) dE = L \int_{E_{ground}}^{\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\pi^2 \hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{E}} \times \frac{1}{e^{\frac{E}{k_b T}} - 1} dE$$

נשתמש בהפרדת המשתנים

$$x = \frac{E}{k_b T}$$

$$dE = k_b T dx$$

ונקבל

$$N = \frac{\frac{L}{2}\sqrt{2m}}{\pi\hbar}(k_b T)^{\frac{1}{2}} \int_{x_{ground}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{e^x - 1} dx$$

כאשר

$$x_{ground} = \frac{E_{ground}}{k_b T} = \frac{\frac{\hbar^2 m^2}{2mL^2}}{k_b T}$$

שימו לב שעבור $E_{ground} \to 0$ האינטגרל מתבדר, כלומר אין עיבוי בוז איינשטיין לא מתרחש במימד אחד.

4. בטמפרטורה אפס כל הבוזונים יאכלסו את רמת היסוד, לכן האנרגיה הכוללת תהיה

$$E = 8E_{ground} = \frac{8\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

אם במקום הבוזונים יהיו פרמיונים ללא ספין, אז כל מצב תנע יוכל להיות מאוכלס על ידי לא יותר מפרמיון אחד בלבד. בטמפרטורה אפס הפרמיונים יסתדרו כך שרמות האנרגיה הנמוכות ביותר יתמלאו קודם. כל רמת אנרגיה תוכל לאכלס שני פרמיונים (כתוצאה מהספין) ולכן האנרגיה הכוללת תהיה

$$E = 2E_{ground} + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 = \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}(1 + 4 + 8 + 16) = 29\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

5. בכדי לחשב את תרומת האלקטרונים לקיבול החום במצב זה עלינו להיעזר בקירוב Sommerfeld. תחילה נכתוב את הביטוי לאנרגיה הכוללת במערכת:

$$E_{tot} = V \times \int_0^{\infty} E g(E)\, f_{FD}(E - \mu) dE$$

נדגיש שעבור טמפרטורה השונה מאפס, הפוטנציאל הכימי μ שונה בערכו מאנרגיית פרמי (הפוטנציאל הכימי משתנה בכדי לשמור על אותה כמות חלקיקים, התלות המדויקת כרוכה בצפיפות המצבים של הבעיה).

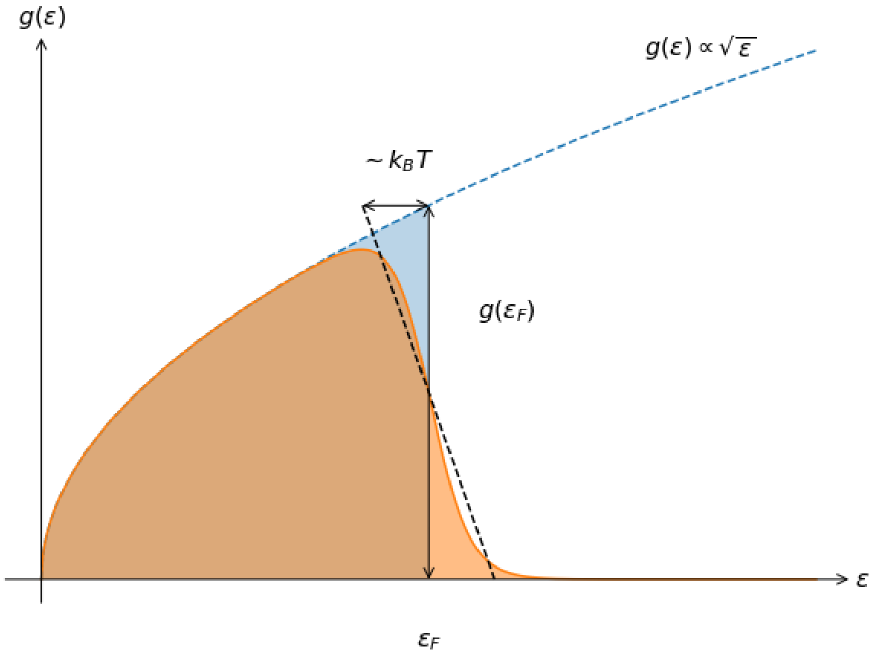
אנרגיית פרמי במתכות הינה גדולה מאוד, כך שעבור טמפרטורות נמוכות נקבל שהפוטנציאל הכימי כמעט ולא משתנה (תרגול 7) ונוכל להחליפו באנרגיית פרמי:

$$E_{tot} = V \times \int_0^{\infty} E g(E)\, f_{FD}(E - E_F) dE$$

נרצה לקרב את הביטוי הנ״ל עבור טמפרטורה השונה מאפס (הגם שעדיין מתקיים $E_F \gg k_B T$).

לצורך כך נעריך את כמות האלקטרונים שיכולים לאכלס אנרגיות גבוהות יותר עקב המריחה של פונקציית פרמי-דיראק, כפי שראינו בכיתה (ראו שרטוט למטה):

$$\frac{1}{2} V \times g(E_F) \times k_b T$$



אלקטרונים הנמצאים מעל רמת פרמי מקבלים תוספת ארגיה ממוצעת של $\sim k_b T$ (שימו לב שהתוספת הזו של אנרגיה אינה קשורה למשפט החלוקה השווה, שכלל לא תקף עבור גז קוונטי של חלקיקים). נקבל לכן שהאנרגיה הממוצעת הכוללת שווה ל :

$$E_{tot}(T) \sim E(T=0) + \gamma/2 \times V \times g(E_F) \times (k_b T)^2$$

כך שקיבול חום האלקטרוני מתקבל להיות :

$$C_{el}(T) = \frac{dE}{dT} \sim \gamma \times V \times g(E_F) \times k_b^2 T$$

בקירוב שעשינו, אין לנו יכולת לגלות את התלות המדויקת אלא רק להגיד שקיבול החום האלקטרוני הולך לינארית עם הטמפרטורה, תוצאה שגם מתיישבת עם המדידות הניסיוניות.

החישוב המדויק והמלא הינו מסובך מתמטית (ראו Ashcroft and Mermin Chapter 2).