אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר חורף 2022-2023

מועד א

הנחיות

- **משך הבחינה – 3 שעות.**
- **במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 6 שאלות רב ברירה**
  חלק 2 : 2 שאלות פתוחות
- **בדקו שברשותכם 11 עמודים .**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.**

בהצלחה!

<u>חלק 1</u> (48 נקודות – ניקוד זהה לכל שאלה)

שאלה 1

נתונה מערכת בעלת 4 רמות אנרגיה כאשר לרמה ה-n יש $n\varepsilon$ אנרגיה עבור $n = 1,2,3,4$. מבצעים מספר ניסויים כאשר בכל פעם משתמשים בחלקיקים שונים:

ניסוי 1: 4 חלקיקים עם ספין ½

ניסוי 2: 4 חלקיקים עם ספין 1

ניסוי 3: 8 חלקיקים עם ספין ½

ניסוי 4: 8 חלקיקים עם ספין 1

בכל ניסוי מדדו את האנרגיה של המערכת בטמפרטורה 0 ובטמפרטורה מאוד גבוה. סמנו את התוצאות שכנראה קבלו בניסוי:

א.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	4ε	4ε	8ε	8ε
$T \to \infty$	10ε	10ε	20ε	20ε

ב.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	6ε	4ε	20ε	8ε
$T \to \infty$	10ε	10ε	20ε	20ε

ג.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	6ε	4ε	20ε	8ε
$T \to \infty$	16ε	16ε	32ε	32ε

ד.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	4ε	4ε	8ε	8ε
$T \to \infty$	16ε	16ε	32ε	32ε

ה.

	ניסוי 1	ניסוי 2	ניסוי 3	ניסוי 4
$T = 0$	10ε	4ε	20ε	8ε
$T \to \infty$	10ε	10ε	20ε	20

פתרון :

חלקיקים עם ספין חצי הם פרמיונים, ולכן לפי חוק איסור של פאולי הם אינם יכולים לשבת יחד עם אותו הספין, כלומר בכל רמת אנרגיה יכולים להיות עד 2 פרמיונים.
חלקיקים עם ספין 1 הם בוזונים, ולכן עבורם אין מגבלה כמו אצל הפרמיונים.
כאשר הטמפרטורה 0, החלקיקים ישבו ברמות הנמוכות, כאשר פרמיונים יתחילו למלא את הרמות על פי חוק האיסור של פאולי, בזמן שבוזונים ישבו כולם ברמה הכי נמוכה.
כאשר הטמפרטורה עולה מאוד, החלקיקים ישבו בקונפיגורציה שהכי סבירה לפי מקסימום אנטרופיה, כלומר במקרה של 4 חלקיקים יהיה בכל רמה חלקיק אחד, ובמקרה של 8 חלקיקים יהיה בכל רמה 2 חלקיקים.

שאלה 2

נתון חלקיק בעל ספין $1/_2$ עם אנרגיה ε. נתון בנוסף כי הניוון של רמת האנרגיה שבה יושב החלקיק הינו 3 (לא כולל ספין). מה מספר החלקיקים הממוצע באנרגיה ε?

א. $2\cdot\frac{1}{e^{\frac{3\varepsilon-\mu}{k_BT}}+1}$
ב. $2\cdot\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_BT}}+1}$
ג. $3\cdot\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_BT}}+1}$
ד. $6\cdot\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_BT}}+1}$
ה. $3\cdot\frac{1}{e^{\frac{2\varepsilon-\mu}{k_BT}}+1}$

פתרון :

חלקיקים עם ספין חצי הם פרמיונים ולכן מתפלגים לפי התפלגות פרמי-דיראק. כמו כן, קיימות 3 רמות אנרגיה בעלות אנרגיה ε, כאשר בכל אחת מהן החלקיקים יכולים לשבת בספין מעלה או ספין למטה, סה״כ הריבוי הכללי הינו 2*3 ולכן התשובה הסופית

$$2\cdot 3\cdot f_{FD}(\varepsilon)$$

שאלה 3

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה $m = 12amu$ כך שהמרחק בין האטומים הינו $a = 1.42\text{Å}$. נתון שקבוע הקפיץ המחבר בין האטומים הינו $\kappa = 165N/m$, קבלו מהי מהירות הקול בחומר והאנרגיה הגבוה ביותר של פוננים.

א. $12922\ m/sec, 120meV$
ב. $22352\ m/sec, 1020meV$
ג. $2022\ m/sec, 100meV$
ד. $5345\ m/sec, 200meV$
ה. $422\ m/sec, 20meV$

פתרון :

$$v_s = a\sqrt{\kappa/m} = 1.42 \times 10^{-10} \times \sqrt{\frac{165}{12 \times 1.66 \times 10^{-27}}} \approx 12922\ m/sec$$

$$E_{max} = \hbar\omega_{max} = 2\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = 120meV$$

שאלה 4

נתון גביש שהושתלו לתוכו N אטומים זרים – סיגים מאותו סוג. לסיגים יש 3 מצבים של תנע זוויתי $m = 1, m = 0, m = -1$. כשהסיגים מחוץ לגביש, שלושת המצבים מנוונים – בעלי אנרגיה זהה. בתוך הגביש, השדות הפנימיים מסירים את הניוון, כך **שמצבים עם תנע זוויתי שלא מתאפס מקבלים תוספת אנרגיה של Δ**.

חשבו את תרומת הסיגים לאנרגיה של הגביש.

א. $E_d = 2\Delta N \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)+2}$

ב. $E_d = 2\Delta N \frac{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)+2}$

ג. $E_d = 3\Delta N \frac{1}{\exp\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)+2}$

ד. $E_d = 2\Delta N k_B T$

ה. $E_d = 3\Delta N k_B T$

פתרון :

יש לנו מערכת עם 3 מצבים, מצב אחד $(m = 0)$ עם אנרגיה 0 ושני מצבים מנוונים $(m = \pm 1)$ עם אנרגיה Δ.
נחשבת את פונקציית החלוקה של המערכת וממנה את האנרגיה הממוצעת :

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 1 + 2\exp[-\Delta/k_B T] \\
<\epsilon> &= \sum_{\text{states}} \epsilon_{\text{state}}\, p(\text{state}) = \frac{2\Delta \exp[-\Delta/k_B T]}{1 + 2\exp[-\Delta/k_B T]} = 2\Delta \frac{1}{\exp[\Delta/k_B T] + 2} \\
U(T, N) &= N <\epsilon> = \underline{2\Delta N \frac{1}{\exp[\Delta/k_B T] + 2}}
\end{aligned}
$$

כאשר $p(state) = e^{-\varepsilon(state)/k_B T}/Z$ היא ההסתברות של המערכת להיות במצב מסויים לפי משקל בולצמן.

שאלה 5

חשבו את תרומת הסיגים (משאלה 4) לאנטרופיה של הגביש בגבול של טמפרטורה אפסית ובגבול של טמפרטורה אינסופית .

א. $S(T \to \infty) = 0$, $S(T \to 0) = Nk_B \ln(3)$,

ב. $S(T \to \infty) = Nk_B \ln(3)$, $S(T \to 0) = 0,$

ג. $S(T \to \infty) = Nk_B \ln(2)$, $S(T \to 0) = 0,$

ד. $S(T \to \infty) = -Nkln(3)$, $S(T \to 0) = 0,$

ה. $S(T \to \infty) = Nk_B \ln(3)$, $S(T \to 0) = Nk_B \ln(2)$,

פתרון :

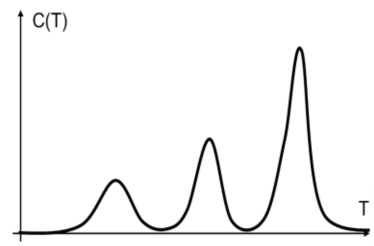
לפי החוק השלישי של התרמודינמיקה, צריך תמיד להתקיים $S(T \to 0) = 0$. דרך אחרת היא להבין שב $T = 0$ רק הרמה הכי נמוכה אנרגטית תהיי מאוכלסת בהסתברות של 1, מכאן אנחנו מסתכלים על מערכת עם ריבוי של $\Omega = 1$ ואז האנטרופיה נתונה לפי $S = Nk_B \ln(\Omega) = Nk_B \ln(1) = 0$. כאשר $k_B \ln(\Omega)$ זאת האנטרופיה של אטום בודד והאנטרופיה הכוללת היא N כפול אנטרופיה זאת.

בגבול $T \to \infty$ 3 המצבים הם בעלי הסתברות זהה, זאת אומרת שלפי הצבר המיקרוקנוני הריבוי הוא $\Omega = 3$ ואז :
$S(T \to \infty) = Nk_B \ln(\Omega) = Nk_B \ln(3)$.

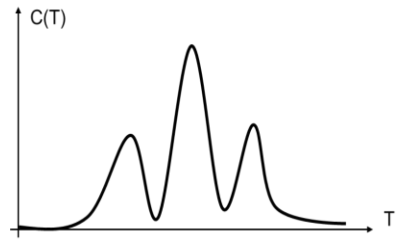
שאלה 6

איזה גרף מתאר במטרה נכונה את התלות של התרומה של הסיגים (משאלה 4) לקיבול החום של הגביש - בצורה איכותית?

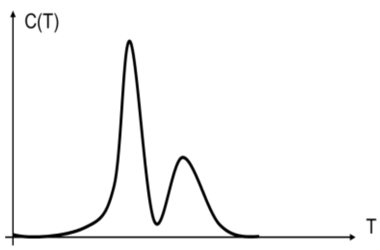
א.



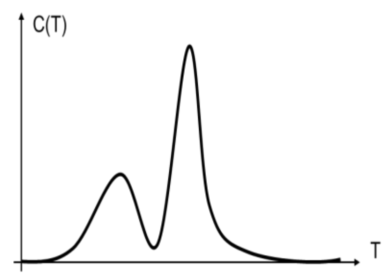
ב.



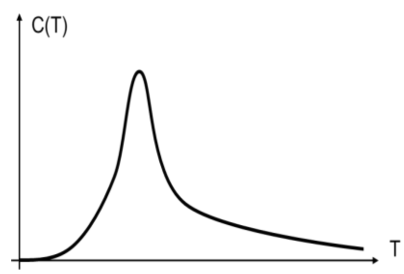
ג.



ד.



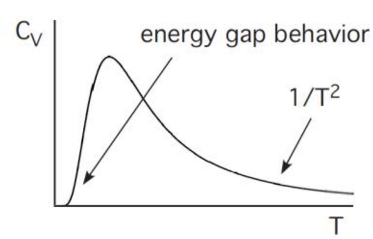
ה.



פתרון :

זאת מערכת של 2 רמות אנרגיה (כאשר הרמה השנייה מנוונת) עם פער אנרגיה בודד, לכן מצפים לקבל נקודת מקסימום אחת בקיבול החום. חישוב מפורש של קיבול החום גם מראה :

$$
\begin{aligned}
C_V &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 2\Delta N \frac{d}{dT}\left(\frac{1}{\exp[\Delta/k_B T]+2}\right) \\
&= 2\Delta N \frac{(\Delta/k_B T^2)\exp[\Delta/k_B T]}{(\exp[\Delta/k_B T]+2)^2} \\
&= \underline{2Nk_B\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)^2 \frac{\exp[\Delta/k_B T]}{(\exp[\Delta/k_B T]+2)^2}}
\end{aligned}
$$



חלק 2 (52 נקודות)

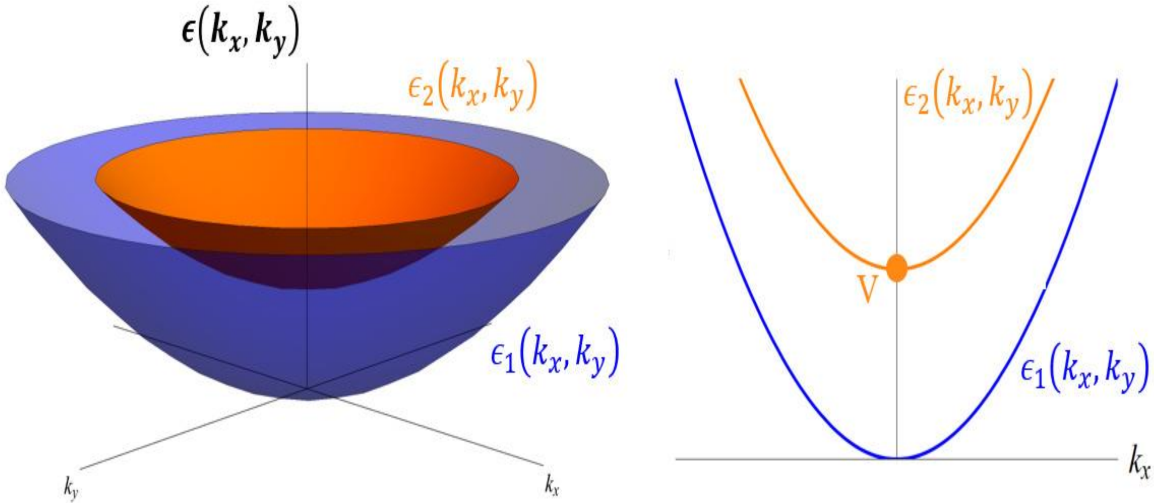
שאלה 7 (26 נקודות)

נתון חומר דו-ממדי עם שטח A. נתון 2 פסי אנרגיה אלקטרוניים :

$$\varepsilon_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2)$$

$$\varepsilon_2(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) + V$$

כאשר V הוא קבוע חיובי בעל יחידות של אנרגיה.



בתמונה משמאל, אפשר לראות את 2 פסי האנרגיה כפונקציה של התנעים (k_x, k_y), כאשר הגרף הכחול הוא הפס הראשון והכתום הוא הפס השני מוזז ב V למעלה בציר האנרגיה. מצד ימין אפשר לראות את החתך של שני הפסים על ציר k_x.
שימו לב שיש חפיפה בערכי האנרגיה בין 2 הפסים עבור $\varepsilon > V$.

א. חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח לכל אחד מפסי האנרגיה : $g_1(\varepsilon), g_2(\varepsilon)$.
מה היא צפיפות המצבים **הכוללת של המערכת** ליחידת שטח $(g_{tot}(\varepsilon))$, שבעזרתה סופרים את מספר המצבים הכולל במערכת עבור כל ε ?
בטאו אותה בעזרת 2 צפיפויות המצבים שחישבתם, עבור 2 תחומי האנרגיה $\varepsilon \le V$ ו- $\varepsilon > V$. (10 נקודות)

$$g_{tot}(\varepsilon) = \begin{cases} ? & ,\varepsilon \le V \\ ? & ,\varepsilon > V \end{cases}$$

(הדרכה- תחשבו איך מאכלסים את האלקטרונים ב 2 הפסים עבור 2 תחומי האנרגיה).

ב. נגדיר את n_0 כצפיפות האלקטרונים שבה האלקטרונים מאכלסים את כל מצבי האנרגיה המקיימים $0 \leq \varepsilon \leq V$. חשבו את n_0.

עכשיו נתון שצפיפות האלקטרונים בחומר היא n. חשבו את אנרגיית פרמי ε_F עבור 2 מקרים: $n > n_0$ ו- $n \leq n_0$. (8 נקודות)

$$\varepsilon_F = \begin{cases} ? & , n \leq n_0 \\ ? & , n > n_0 \end{cases}$$

ג. (סעיף זה לא קשור לשני הסעיפים הקודמים)
נתון פס אנרגיה של אלקטרונים בחומר דו-ממדי:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_x}k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m_y}k_y^2$$

מפעילים על המערכת שדה חשמלי סטטי בכיוון כללי במישור XY: $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$.
מה הוא היחס $\frac{m_x}{m_y}$ שהמסות האפקטיביות צריכות לקיים כדי שהזרם החשמלי יהיה באותו כיוון של השדה החשמלי? (8 נקודות)
תזכרו שלפי מודל דרודה, המוליכות החשמלית היא $\sigma = ne^2\tau m^{-1}$, כאשר n היא צפיפות האלקטרונים, τ הוא הזמן האופייני לפיזור של האלקטרון ו- m^{-1} הוא טנזור המסה האפקטיבית ההופכי.

פתרון:

א. בגלל שהבעיה היא דו-ממדית ויחס הדיספרסיה הא פרבולי, לפי החישוב שעשינו בכיתה, צפיפות המצבים ליחידת שטח עבור כל פס היא $\frac{m}{\pi\hbar^2}$. נשים לב שהפס השני מוזז למעלה ב V, לכן ספירת המצבים עבור פס זה תהיה רק עבור $\varepsilon > V$. נקבל:

$$g_1(\varepsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \quad , for\ all\ \varepsilon$$

$$g_2(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & , \varepsilon \leq V \\ \frac{m}{\pi\hbar^2} & , \varepsilon > V \end{cases}$$

צפיפות המצבים הכוללת ליחידת שטח סופרת את המצבים עבור כל רמת אנרגיה עבור 2 הפסים, לכן:

$$g_{tot}(\varepsilon) = g_1(\varepsilon) + g_2(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{m}{\pi\hbar^2} & , \varepsilon \leq V \\ \frac{2m}{\pi\hbar^2} & , \varepsilon > V \end{cases}$$

ב. נתון שצפיפות האלקטרונים היא n_0 ושהאלקטרונים מאכלסים בוודאות את כל רמות האנרגיה עד V, לכן מתקיים ש $f_{FD}=1$ עבור $0\le\varepsilon\le V$ ונסיק ש $T=0$. לכן:

$$n_0=\int_0^V g_{tot}(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^V \frac{m}{\pi\hbar^2}d\varepsilon=\frac{mV}{\pi\hbar^2}$$

בעצם כאשר $n=n_0$ מתקיים $\varepsilon_F=V$.

עבור $n\le n_0$ אפשר לאכלס אלקטרונים עבור הרמות שמקיימות $\varepsilon\le V$ (כלומר רק בפס 1), ולכן נסיק שמתקיים $\varepsilon_F\le V$. מכאן אנרגית פרמי עבור צפיפות אלקטרונים נתונה מחושבת לפי:

$$n=\int_0^{\varepsilon_F\le V} g_{tot}(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_F}\frac{m}{\pi\hbar^2}d\varepsilon=\frac{m\varepsilon_F}{\pi\hbar^2}$$

$$\varepsilon_F=\frac{n\pi\hbar^2}{m}$$

עבור $n>n_0$ מתחילים לאכלס את האלקטרונים בתחום $\varepsilon>V$ (תחום החפיפה בין 2 הפסים), ולכן נסיק שאנרגית פרמי צריכה לקיים $\varepsilon_F>V$. לכן:

$$n=\int_0^{\varepsilon_F>V} g_{tot}(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^V\frac{m}{\pi\hbar^2}d\varepsilon+\int_V^{\varepsilon_F}\frac{2m}{\pi\hbar^2}d\varepsilon=\frac{mV}{\pi\hbar^2}+\frac{2m(\varepsilon_F-V)}{\pi\hbar^2}$$

$$\varepsilon_F=\frac{n\pi\hbar^2}{2m}+\frac{V}{2}$$

בסוף:

$$\varepsilon_F=\begin{cases}\dfrac{n\pi\hbar^2}{m} & ,n\le n_0\\[2mm] \dfrac{n\pi\hbar^2}{2m}+\dfrac{V}{2} & ,n>n_0\end{cases}$$

נשים לב שאנרגית פרמי רציפה כפונקציה של n, בפרט עבור $n=n_0$.

ג. עבור יחס דיספרסיה פרבולי $\varepsilon(\vec{k})=\frac{\hbar^2}{2m_x}k_x^2+\frac{\hbar^2}{2m_y}k_y^2$, נחשב את טנזור המסה האפקטיבית ההופכי:

לפי הנוסחה $m_{ij}^{-1}=\frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2\varepsilon(\vec{k})}{\partial k_i\partial k_j}$ מתקבל: $m^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{m_x} & 0\\ 0 & \frac{1}{m_y}\end{pmatrix}$. עכשיו נחשב את רכיבי צפיפות הזרם לפי חוק אוהם המיקרוסקופי ונשתמש במוליכות לפי מודל דרודה:

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}=ne^2\tau m^{-1}\vec{E}$$

$$\begin{pmatrix}J_x\\ J_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{ne^2\tau}{m_x} & 0\\ 0 & \frac{ne^2\tau}{m_y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{ne^2\tau}{m_x}E_x\\ \frac{ne^2\tau}{m_y}E_y\end{pmatrix}$$

כדי שהזרם יהיה באותו כיוון של השדה, צפיפות הזרם צריך להיות באותו כיוון של השדה. כדי ששני וקטורים יצביעו לאותו כיוון בדו-ממד, הם צריכים להיות עם אותה זווית עם הכיוון החיובי של ציר x, נסמן את הזווית ב α :

$$\tan\alpha = \frac{J_y}{J_x} = \frac{E_y}{E_x}$$

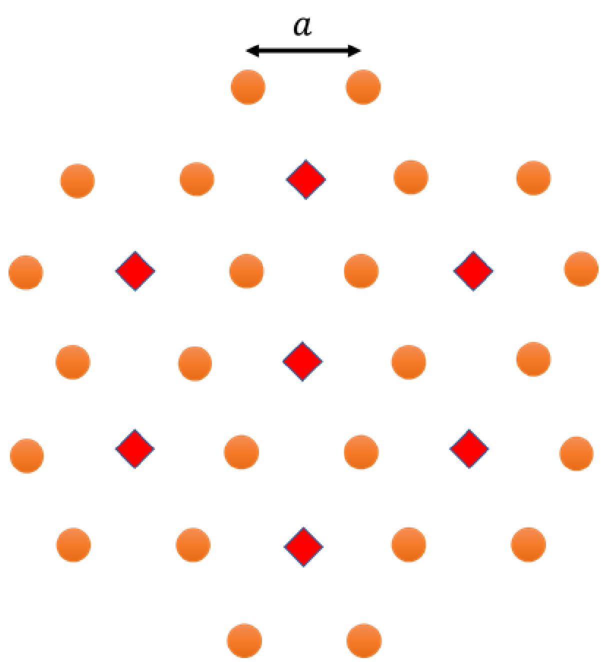
$$\rightarrow \quad \frac{J_y}{J_x} = \frac{E_y}{E_x}$$

$$\frac{\frac{ne^2\tau}{m_y}E_y}{\frac{ne^2\tau}{m_x}E_x} = \frac{E_y}{E_x}$$

$$\frac{m_x}{m_y} = 1$$

שאלה 8 (26 נקודות)

נתון הגביש הבא



המורכב משני אטומים כאשר

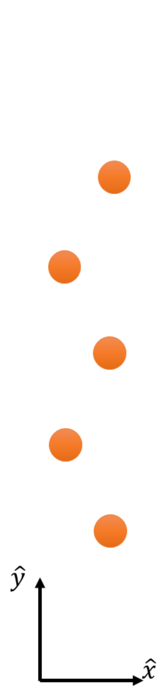
מסמן אטום מסוג A

מסמן אטום מסוג B

זהו גביש משושה של אטומים מסוג A עם מרחק a בין שכנים קרובים, ובמרכז של כל משושה יש אטום מסוג B עם מרחק a מהשכנים הקרובים שלו מסוג A.

א. רשמו וקטורים ראשוניים ווקטורי הבסיס. (4 נקודות)
ב. ציירו על גבי השריג שבחרתם את תא Wigner-Seitz. (4 נקודות)
ג. מצאו את הווקטורים של השריג ההופכי וציירו אותו. ציירו את איזור Brillouin הראשון. (4 נקודות)
ד. מבלי לפתור את הבעיה הסבירו מהו מספר פסי אנרגיה הצפוי להתקבל בהנחה שכל אטום תורם אורביטל אחד בלבד. הצדיקו את תשובתכם. (4 נקודות)

כעת נניח שיש גביש הבא



נתונים פסי האנרגיה עבור המבנה שלעיל שהתקבל מפתרון משוואות הקשירה ההדוקה :

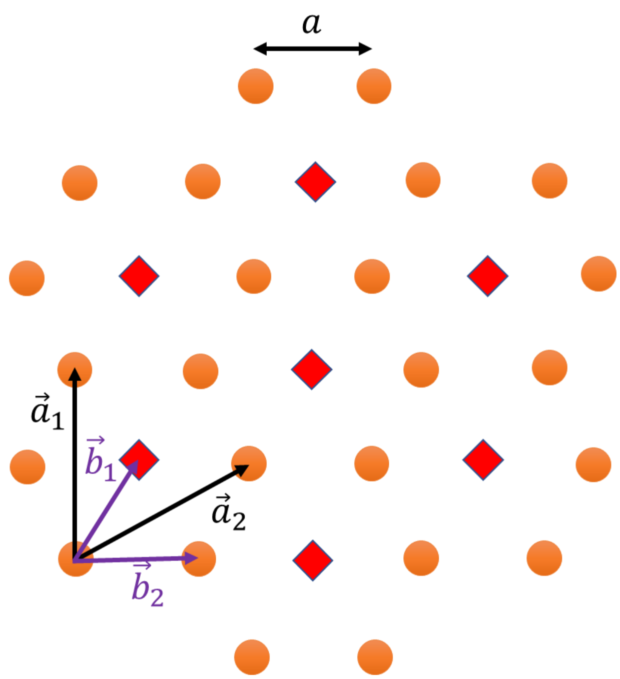
$$E_{\pm}(k_x,k_y) = E_0 \pm |\gamma|\sqrt{1 + 4\cos^2\left(k_y a\sqrt{3}/2\right) + 4\cos(k_x a\, 3/2)\cos\left(k_y a\sqrt{3}/2\right)}$$

ה. ציירו איכותית את פסי האנרגיה לאורך הקו $k_x = 0$ ולאורך $k_y = 0$. ציינו מהו גודל פער האנרגיה עבור שני הכיוונים האלו. (4 נקודות)

ו. הסבירו איך משתנה צפיפות המצבים כפונקציה של האנרגיה בקצה איזור Brillouin עבור שני הכיוונים מסעיף הקודם. אין צורך לחישוב מפורש של צפיפות המצבים. (6 נקודות)

פתרון

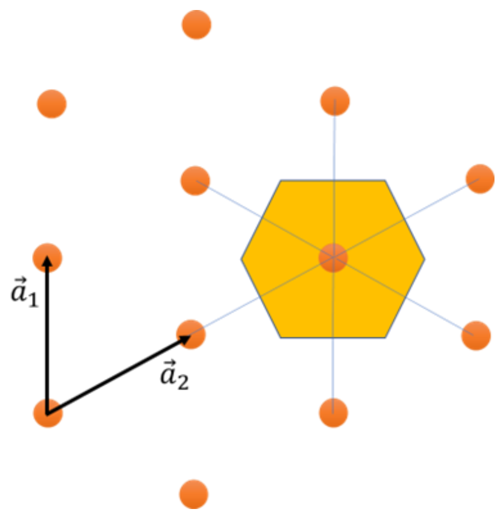
א. דוגמא לווקטורים ראשוניים ווקטורי בסיס



$$\vec{a}_1 = \sqrt{3}a\hat{y}$$
$$\vec{a}_2 = \frac{3}{2}a\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{y}$$

$$\vec{d}_1 = \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{y}$$
$$\vec{d}_2 = \frac{a}{2}\hat{x}$$
$$\vec{d}_3 = 0$$

ב.



ג. תחילה נמצא את שטחו של תא היחידה הנפרש על ידי וקטורים ראשוניים

$$S=|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|=\left|\sqrt{3}a\hat{y}\times\left(\frac{3}{2}a\hat{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{y}\right)\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\vec{b}_1=\frac{\vec{a}_2\times\hat{z}}{S}=\frac{\left(\frac{3}{2}a\hat{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{y}\right)\times\hat{z}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}=-\frac{1}{\sqrt{3}a}\hat{y}+\frac{1}{3a}\hat{x}$$

$$\vec{b}_2=\frac{\hat{z}\times\vec{a}_1}{S}=\frac{\hat{z}\times\sqrt{3}a\hat{y}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}=-\frac{2}{3a}\hat{x}$$

מכיוון שסריג ההופכי נראה כמו שריג המקורי אך מסובב ב-90 מעלות נקבל שאזור *Brillouin* הראשון דומה לתא *Wigner-Seitz* המסובב ב-90 מעלות. לכן נקבל את אותה צורה של אזור *Brillouin* הראשון

ד. מכיוון שתא היחידה המינימאלי מכיל שלושה אטומים נצפה לקבל שלושה פסי אנרגיה.

ה. לאורך ציר $(0,k_y)$ נקבל מבנה פסים של גרפן שראינו בתרגול, מגאומטריה של אזור *Brillouin* הראשון נקבל גבולות הבאים

$$k_y\in\left[-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a},\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right]$$

$$E_\pm(k_x,k_y)=E_0\pm|\gamma|\sqrt{1+4\,cos^2\left(k_y\sqrt{3}/2\,a\right)+4\,cos\left(k_y\sqrt{3}/2\,a\right)}$$

בגבולות האזור נפתח את הביטוי לטור

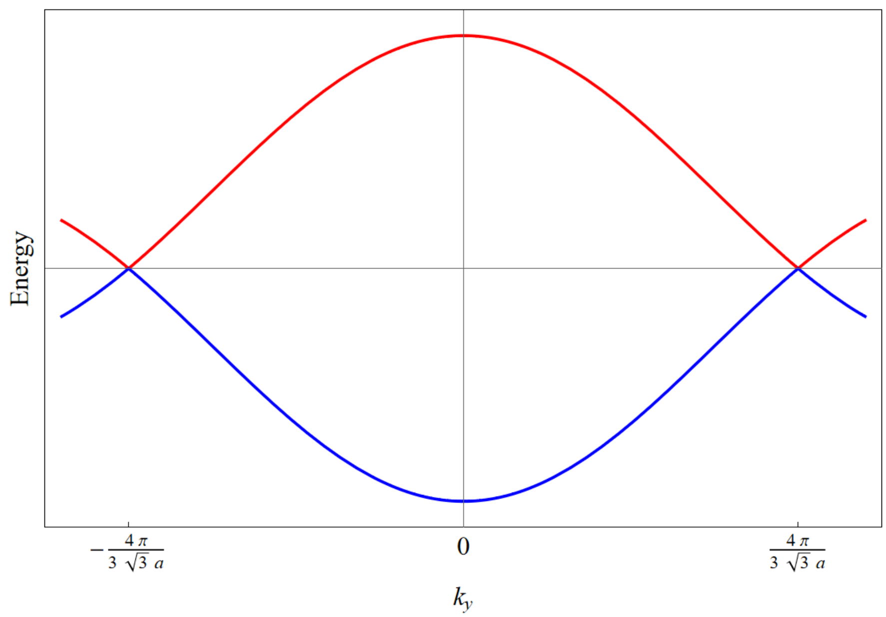
$$cos\left(k_y\sqrt{3}/2\,a\right) \approx -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\left(k_y-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right)+\frac{3}{16}\left(k_y-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right)^2$$

$$cos^2\left(k_y\sqrt{3}/2\,a\right) \approx \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(k_y-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right)+\frac{3}{8}\left(k_y-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right)^2$$

$$1+4\,cos^2\left(k_y\sqrt{3}/2\,a\right)+4\,cos\left(k_y\sqrt{3}/2\,a\right) \approx \frac{9}{4}\left(k_y-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right)^2$$

$$E_\pm\left(k_x,k_y\right)=E_0\pm\frac{3}{2}|\gamma|\left|k_y-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\right|$$

לכן נקבל שיחס נפיצה משתנה באופן ליניארי

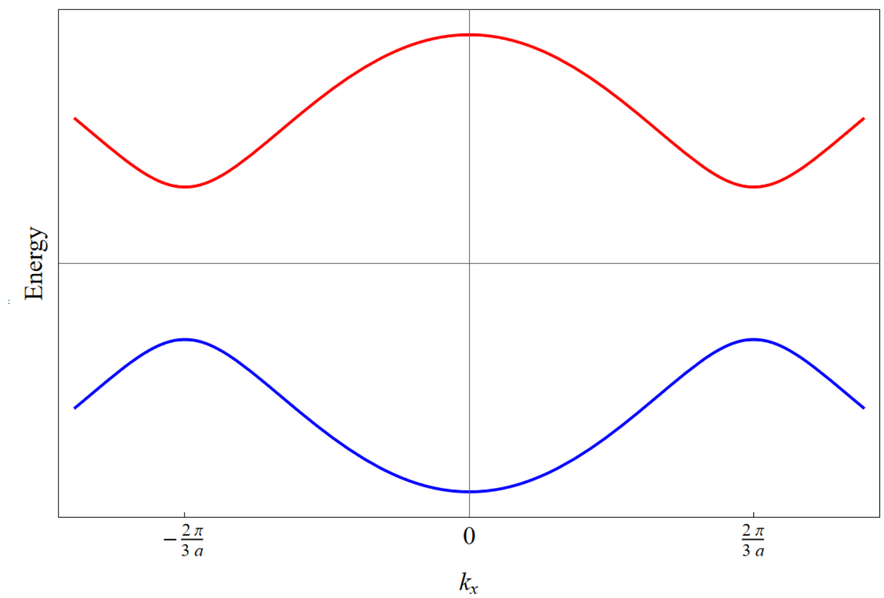


לאורך ציר $(k_x,0)$ נקבל יחס נפיצה פרבולי

$$k_x \in \left[-\frac{2\pi}{3a},\frac{2\pi}{3a}\right]$$

$$E_\pm(k_x,0)=E_0\pm|\gamma|\sqrt{5+4\,cos(k_x\,3/2\,a)} \approx E_0\pm|\gamma|\left(1+\frac{9}{4}\left(k_x-\frac{2\pi}{3a}\right)^2\right)$$

במקרה זה אין אפילו צורך לקרב את יחס הנפיצה, ניתן לראות מייד שהיחס נפיצה הינו פרבולי



ו. תחליה נזכר שמדובר בדו-ממד. ראינו בסעיף הקודם שיחס הנפיצה לאורך k_y הוא ליניארי לכן נקבל צפיפות המצבים מהצורה $g(E)\sim E$. לארוך ציר k_x יחס הנפיצה הינו פרבולי ולכן נקבל $g(E)\sim const$.

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\ J\ K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^{8} m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$
$\sin(a) = 1/(2i)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ μתוחלת σסטיית תקן

Gaussian Integral $\alpha>0$
$\int_{a}^{b}e^{-\alpha(x+b)^2}dx=\sqrt{\pi/\alpha}$

Gamma Function

$$\Gamma(n)\equiv\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx=n-1!$$

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$$

3	5/2	2	3/2	1	1/2	$\boldsymbol{n}$
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\boldsymbol{\Gamma(n)}$

More Gaussian Integrals $\alpha>0,n\geq0$

$$I(n)\equiv\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{-\alpha x^2}dx=\begin{cases}2I(n) & n\in Even\\ 0 & n\in Odd\end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	$\boldsymbol{n}$
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\boldsymbol{I(n)}$