spring2023B

דורון שפיגל

08.04.24

`שאלה: 1`

שאלה 1.
נתון גביש דו מימדי מלבני עם וקטורי תא יחידה $(b > a) \quad \vec{a} = a\hat{x}, \vec{b} = b\hat{y}$. הפוטנציאל הגבישי נתון על ידי הביטוי הבא:

$$U(x,y) = C_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) + 2C_0 \cos\left(\frac{4\pi}{a}x\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{b}y\right)$$

פער האנרגיה בנקודות הבאות מסומן באופן הבא:

$$\Delta E_1\left(k_x = \pi/a,\, k_y = 0\right),\, \Delta E_1\left(k_x = 0,\, k_y = 2\pi/b\right),\, \Delta E_3\left(k_x = 0\, k_y = \pi/2b\right)$$

חשב: $\Delta E_1,\, \Delta E_2,\, \Delta E_3$.

`פתרון: 1`

פתרון 1.
פוטנציאל הגבישי נתון על ידי הביטוי הבא: $U(x,y) = \sum_{\vec{G}} C_G e^{iG_x x + iG_y y}$ כאשר G הם וקטורים של השריג ההופכי. במקרה של תרגיל זה:

$$G_x = \pm\frac{2\pi}{a}n,\, G_y = \pm\frac{2\pi}{b}n$$

הביטוי שנתון בשאלה מורכב מסכום הכולל $n =$, האיבר הראשון, ו- $n = 2$, האיבר השני.
פער האנרגיה נפתח עבור אותם k שקרובים (או ממש נמצאים) בקצוות אזור ברילואן השונים. הפרש האנרגיה בקצה אזור ברילואן נתון על ידי הקשר הבא:

$$\Delta E\left(G/2\right) = 2C_G$$

נמצא את המקדמים של $U(x,y)$ עבור הכיוונים השונים של התנע.

$$\begin{aligned}
U(x,0) &= C_0\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 2C_0\cos\left(\frac{4\pi}{a}x\right)\\
&= \frac{C_0}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{a}x} + e^{-i\frac{2\pi}{a}x}\right) + C_0\left(e^{i\frac{4\pi}{a}x} + e^{-i\frac{4\pi}{a}x}\right)\\
U(0,y) &= C_0\cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) + 2C_0\cos\left(\frac{4\pi}{b}y\right)\\
&= \frac{C_0}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{b}y} + e^{-i\frac{2\pi}{b}y}\right) + C_0\left(e^{i\frac{4\pi}{b}y} + e^{-i\frac{4\pi}{b}y}\right)
\end{aligned}$$

עבור ההפרש הראשון:

$$\Delta E_1\left(k_x=\pi/a,\,k_y=0\right)=\Delta E_1\left(k_x=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{a},k_y=0\right)$$
$$\Rightarrow\Delta E_1\left(\frac{G=\frac{2\pi}{a}}{2}\right)=2C_{G=\frac{2\pi}{a}}=2\frac{C_0}{2}=C_0$$

עבור ההפרש השני:

$$\Delta E_2\left(k_x=0,\,k_y=2\pi/b\right)=\Delta E_2\left(k_x=0,\,k_y=\frac{1}{2}\frac{4\pi}{b}\right)$$
$$\Rightarrow\Delta E_2\left(\frac{G=\frac{4\pi}{b}}{2}\right)=2C_{G=\frac{4\pi}{b}}=2C_0$$

עבור ההפרש השלישי:

$$\Delta E_3\left(k_x=0,\,k_y=\pi/2b\right)=\Delta E_3\left(k_x=0,\,k_y=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{b}\right)$$
$$\nexists n\in\mathbb{N}\quad\text{that such}\quad G_{x,y}=\frac{2\pi}{b}n=\frac{\pi}{2b}\qquad\Rightarrow\Delta E_3\left(k_x=0,\,k_y=\pi/2b\right)=0$$

ובסך הכל: $\Delta E_1=C_0\neq 0,\ \Delta E_2=2C_0\neq 0,\ \Delta E_3=0$. ■

שאלה: 2

שאלה 2.

מודל פשוט למעבר פאזה ממוצק לגז מבוסס על ההנחות הבאות: נתון שריג ריבועי דו מימדי עם N אתרים המוצמד לאמבט חום בטמפרטורה T. בכל אתר נמצא אטום יחיד. כאשר האטום נמצא בפאזה המוצקה, האנרגיה של האתר היא שלילית: $\epsilon=-\epsilon_0$ כאשר $\epsilon_0>0$. כאשר האטום נמצא בפאזה הגזית, האנרגיה של האתר היא $\epsilon=0$. בנוסף, בפאזה הגזית הניוון של רמת האנרגיה היא $\Omega>>1$.
מה הביטוי למספר האטומים הנמצאים בפאזה המוצקה?

פתרון: 2

פתרון 2.

אחשב את פונקציית החלוקה, הנוסחה לחישוב פונקציית החלוקה Z היא:

פונקציית החלוקה

$$1=\sum_S P\left(s\right)=\frac{1}{Z}\sum_S e^{-\beta E(s)} \tag{1}$$

$$\to Z\triangleq\sum_S g(s)e^{\frac{-E(s)}{kT}}=\sum_S g(s)e^{-\beta E(s)} \tag{2}$$

ובמקרה שלנו:

$$Z=1\cdot e^{\frac{-(-\epsilon_0)}{kT}}+\Omega\cdot e^{\frac{-0}{kT}}=e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}+\Omega$$

ההסתברות להיות בפאזה המוצקה היא:

$$P\left(s\right)=\frac{e^{-\beta E(s)}}{Z}=\frac{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}+\Omega}$$

ולכן מספר האטומים בפאזה המוצקה יהיה מכפלת של מספר האטומים N בסתברות להיות בפאזה המוצקה:

$$n\left(\epsilon=-\epsilon_0\right)=N\cdot P\left(s\right)=N\cdot\frac{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}}+\Omega}$$

■

שאלה: 3

שאלה 3.
נתון מוצק תלת מימדי עם N אתרים המוצמד לאמבט עם טמפרטורה T. בכל אתר נמצא אטום עם שתי רמות אנרגיה אפשריות. רמת יסוד עם $\epsilon_g=0$ ורמה מעוררת עם $\epsilon_{ex}=\epsilon_0$, מצא את הגרף המתאים לקיבול החום לאטום.

פתרון: 3

פתרון 3.
אחשב את פונקציית החלוקה:

$$Z=1\cdot e^{\frac{-\epsilon_g}{kT}}+1\cdot e^{\frac{-\epsilon_{ex}}{kT}}=1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}$$

כעת אחשב את האנרגיה הממוצעת במערכת, הנוסחה לחישוב האנרגיה הממוצעת על ידי פונקציית החלוקה היא:

אנרגיה ממוצעת

$$\begin{cases}\langle E\rangle=\sum\limits_S E\left(s\right)P\left(s\right)=\frac{1}{Z}\sum\limits_S E\left(s\right)e^{-\beta E\left(s\right)}\\ \frac{\partial Z}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\sum\limits_S e^{-\beta E\left(s\right)}=-\sum\limits_S E\left(s\right)e^{-\beta E\left(s\right)}\end{cases}\tag{3}$$

$$\langle E\rangle=-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\leftrightarrow\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z\tag{4}$$

ובמקרה שלנו:

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\frac{1}{kT}}\ln\left(1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)=-\frac{1}{1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}}\cdot\left(-\epsilon_0e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)=\frac{\epsilon_0e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}}{1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}}$$

כעת אחשב את הקיבול החום, הנוסחה לחישוב הקיבול החום היא:

קיבול החום

$$C_V=\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\tag{5}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}\left(\epsilon_0e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)&=\frac{\epsilon_0}{kT^2}\cdot\epsilon_0e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}=\frac{\epsilon_0^2}{kT^2}e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\\ num&=\frac{\epsilon_0^2}{kT^2}e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\left(1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)-\frac{\epsilon_0^2}{kT^2}e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\epsilon_0e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\\ &=\frac{\epsilon_0^2}{kT^2}e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\\ den&=\left(1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)^2\\ C_V&=\frac{num}{den}=\frac{\frac{\epsilon_0^2}{kT^2}e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}}{\left(1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)^2}=\frac{\epsilon_0^2}{kT^2}\cdot\frac{e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}}{\left(1+e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}\right)^2}\end{aligned}$$

כאשר $T \to 0 \leftrightarrow \epsilon_0 >> kT$ הגורם $e^{\frac{-\epsilon_0}{kT}}$ מתנהג כמו $e^{-\infty} = 0$ ולכן:

$$\lim_{T\to 0} C_V = \frac{\epsilon_0^2}{kT^2} \cdot \frac{0}{(1+0)^2} = 0$$

כאשר $T \to \infty \leftrightarrow \epsilon_0 << kT$ היחס אז ישאף לאפס: $\frac{\epsilon_0}{kT} \to 0$ ומקבלים ש:

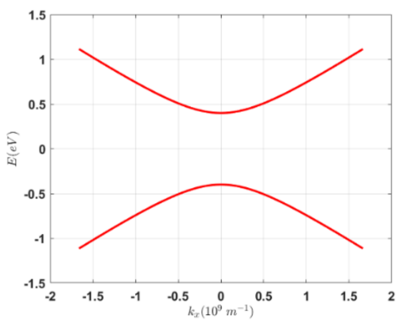
$$\lim_{T\to \infty} C_V = 0 \cdot \frac{\epsilon_0}{T} \cdot \frac{1}{(1+1)^2} = 0$$

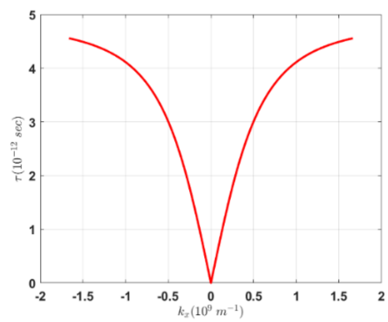
כלומר, על גרף הקיבול לשאוף לאפס עבור טמפרטורות נמוכות מאוד, ומאוד גבוהות. ■

שאלה: 4

שאלה 4.

נתונה צינורית פחמן חד מימדית מסוג מוליך למחצה עם יחס דיספריסה מהצורה הבאה: $E(k_x) = \pm\sqrt{\Delta^2 + (\hbar v_0 k_x)^2}$ כאשר $v_0 = 10^6 \left[m/sec\right]$, $\Delta = 0.4\,[eV]$ (איור שמאלי). כתוצאה מאי סדר לאורך הצינורית זמן הפיזור הממוצע (τ) בטמפרטורות נמוכות מרמת פרמי מוצג באיור הימני. בנוסף נתון כי צפיפות נושאי המטען של האלקטרונים היא $n = 6.35 \cdot 10^8 \left[m^{-1}\right]$ ושהניוון של כל רמת אנרגיה הוא 4 (שני ספינים ושני תתי שריגים). בהנחה שהטמפרטורה נמוכה מאוד יחסית לרמת פרמי, מהי רמת פרמי של צינורית הפחמן?





פתרון: 4

פתרון 4.

מספר המצבים עד מספר גל k עבור מערכת באורך L הוא:

מספר מצבים

$$N(k) = 2 \cdot \frac{k}{\frac{\pi}{L}} \tag{1d}$$

$$N(k) = 2 \cdot \frac{\pi k^2}{4\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)} \tag{2d}$$

$$N(k) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} k^3}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} \tag{3d}$$

ובמקרה אצלנו, צינורית פחמן חד מימדית, נקבל:

$$N(k) = 2 \cdot \frac{k}{\frac{\pi}{L}}$$

מספר מצבים ליחידת V הוא:

$$n(\epsilon) = \text{degenerate} \cdot \frac{N(k)}{V} \tag{6}$$

ובמקרה אצלנו:

$$\begin{cases} V = 2L & \text{כי יש שני תת שריגים} \\ \text{degenerate} = 4 & \text{ניוון רמת אנרגיה} \end{cases}$$

ומקבלים:

$$n = 4 \cdot \frac{2 \cdot \frac{k_f}{\frac{\pi}{L}}}{2L} = 4 \cdot \frac{k_f}{\pi}$$
$$\longrightarrow k_f = \frac{\pi n}{4} = 6.35 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 10^8 = 0.498 \cdot 10^9 \left[m^{-1}\right]$$

כעת לפי הגרף השמאלי, רמת פרמי צריכה להימצא בין הפסים, ולכן עבור $k_f \approx 0.5 \cdot 10^9$ נקבל ש $E_f = 0.5\,[eV]$. ■

שאלה: 5

שאלה 5.

מהו מרחק הפיזור הממוצע $\left(l_{mfp}\right)$ בטמפרטורות נמוכות יחסית לרמת פרמי של צינורית הפחמן המתוארת בשאלה הקודמת?

פתרון: 5

פתרון 5.

מרחק הפיזור הממוצע הוא:

מרחק פיזור ממוצע

$$l_{mfp} = v_f \cdot \tau \tag{7}$$

את זמן הפיזור הממוצע אמצע לפי הגרף הימני בשאלה הקודמת עבור $k_f = 0.5 \cdot 10^9 \left[m^{-1}\right]$ נקבל ש:

$$\tau = 3 \cdot 10^{-12}\,[sec]$$

מהירות פרמי נתונה לפי:

$$v_f = \frac{P_f}{m_0} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_k}{\partial k}$$

אחשב את הנגזרת:

$$\frac{\partial E_k}{\partial k} = \frac{\partial\sqrt{\Delta^2+(\hbar v_0 k_x)^2}}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\Delta^2+(\hbar v_0 k_x)^2}} \cdot 2\left((\hbar v_0)^2 k_x\right)$$
$$= \frac{(\hbar v_0)^2 k_x}{\sqrt{\Delta^2+(\hbar v_0 k_x)^2}} = \frac{(\hbar v_0)^2 k_x}{E(k_x)}$$

ולכן:

$$v_f = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_k}{\partial k} = \frac{\hbar (v_0)^2 k_x}{E(k_x)} = \frac{1.05 \cdot 10^{-34} \cdot \left(10^6\right)^2 \cdot 0.5 \cdot 10^6}{0.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}$$
$$= 0.65625 \cdot 10^6 \left[m/sec\right]$$
$$\Rightarrow l_{mph} = v_f \cdot \tau = 0.65625 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-12} = 1.96875 \cdot 10^{-6} = 1.95\,[\mu m]$$

■

שאלה: 6

שאלה 6.

נתונות 2 מערכות דו ממדיות עם שטח זהה A. יחסי הנפיצה של האלקטרונים במערכת הראשונה והשנייה נתונים על ידי הביטויים הבאים בהתאמה:

$$\epsilon_1\left(\vec{k}\right)=\frac{\hbar^2}{2m}k_x^2+\frac{\hbar^2}{2m}k_y^2$$
$$\epsilon_2\left(\vec{k}\right)=\hbar c\left|\vec{k}\right|^{\frac{1}{a}}$$

$$0<a,c\in\Re$$

צפיפות המצבים ליחידת שטח עבור כל מהמערכות:

עבור המערכת הראשונה, ראינו בתרגול כי:

$$g_1\left(\epsilon\right)=\frac{m}{\pi\hbar^2}$$

עבור המערכת השנייה:

נתון כי השטח הוא A, כלומר, עבור קופסה דו ממדית עם צלעות L נקבל: $A=L^2$. מצבי התנע המותרים הם $n=1,2,3,\ldots$ $k_x=\frac{\pi n_x}{L},\ k_y=\frac{\pi n_y}{L}$ ולכן, המרחק בין כל 2 נקודות תנע הוא $\frac{\pi}{L}$, אפשר לחלק את מערכת הצירים לריבועים באורכים $\frac{\pi}{L}\times\frac{\pi}{L}$ ואז שטח של מצב בודד הוא:

$$V_{single-state}=\left(\frac{\pi}{L}\right)^2=\frac{\pi^2}{A}$$

נסתכל על רדיוס עקום שווה אנרגיה:

$$\epsilon_2=\hbar c\left|\vec{k}\right|^{\frac{1}{a}}$$
$$\left|\vec{k}\right|=\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^a$$
$$0<a,c,\epsilon\in\Re\implies 0<\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^a\in\Re$$
$$\implies\left|\vec{k}\right|=\vec{k}=\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^a$$

$\sum\left(\epsilon\right)$ הוא שטח מעגל בעל רדיוס $\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^a$, ולכן:

$$\sum\left(\epsilon\right)=\pi\cdot\text{radius}^2=\pi\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^{2a}$$

ולפי נוסחה לצפיפות מצבים:

(8)

$$g\left(\epsilon\right)=\frac{d}{d\epsilon}\underbrace{\left[\text{\#degenerate}\cdot\sum\left(\epsilon\right)\cdot\frac{1}{V_{single-state}\cdot\text{\#sub-lattice}}\cdot\underset{\text{spin}}{\underset{\sqcup}{2}}\cdot\frac{1}{2^{\{d:0,2,3\}}}\cdot\frac{1}{V_{system}}\right]}_{=n}$$

ולכן:

$$g\left(\epsilon_2\right)=\frac{d}{d\epsilon}\left[1\cdot\pi\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^{2a}\cdot\frac{1}{\frac{\pi^2}{A}\cdot 1}\cdot 2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{A}\right]$$

$$g\left(\epsilon_2\right)=\frac{d}{d\epsilon}\left[\cancel{\pi}\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^{2a}\cdot\frac{\cancel{A}}{\pi\cancel{^2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{2\cancel{^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{A}}\right]=\frac{d}{d\epsilon}\left[\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^{2a}\cdot\frac{1}{2\pi}\right]$$

$$g_2\left(\epsilon\right)=\frac{\cancel{2}a\cdot\epsilon^{2a-1}}{\left(\hbar c\right)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\pi}=\boxed{\frac{a\cdot\epsilon^{2a-1}}{\pi\left(\hbar c\right)^{2a}}}$$

כעת, נתון כי שומרים על טמפרטורה השואפת לאפס בשתי המערכות.
נתון שמספר האלקטרונים בשתי המערכות הוא N, מחברים את שתי המערכות באמצעות תיל מוליך. אחרי זמן ארוך מאוד, מודדים את צפיפות האלקטרונים בשתי המערכות ומוצאים שהצפיפויות שוות. מהו c?

זמן ארוך מאוד $\Leftrightarrow$ שיווי משקל, המערכות מחוברות בתיל ולכן מחליפות חלקיקים, כלומר יש שוויון פוטנציאל כימי: $\mu_{c1}=\mu_{c2}$. ידוע כי בטמפרטורות נמוכות $E_f\triangleq\mu_c\left(T=0\right)$, אזי, יש שוויון בין אנרגיות פרמי של המערכות.

$$g_1\left(\epsilon\right)=\frac{m}{\pi\hbar^2}\rightarrow n_f=\int_0^{\epsilon_{f1}}g_1\left(\epsilon\right)d\epsilon=\frac{m\epsilon_{f1}}{\pi\hbar^2}$$

$$\Rightarrow\epsilon_{f1}=\frac{\pi\cdot\hbar^2\cdot n}{m}$$

$$g_2\left(\epsilon\right)=\frac{a\cdot\epsilon^{2a-1}}{\pi\left(\hbar c\right)^{2a}}\rightarrow n_f=\int_0^{\epsilon_{f2}}g_2\left(\epsilon\right)d\epsilon=\left(\frac{\epsilon_2}{\hbar c}\right)^{2a}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow\epsilon_{f2}=\left(2\pi\cdot n\right)^{\frac{1}{2a}}\cdot\hbar c$$

מהנתון שצפיפויות האלקטרונים שוות, ומזה שבסך הכל בשתי המערכות יחדיו יש N אלקטרונים, אז הצפיפות בכל מערכת היא: $n=\frac{N}{2}\cdot\frac{1}{A}$. אציב את n בכל רמת פרמי ואשווה:

$$\epsilon_{f1}=\frac{\pi\cdot\hbar^2\cdot n}{m}=\frac{\pi N\hbar^2}{2Am}$$

$$\epsilon_{f2}=\left(2\pi\cdot n\right)^{\frac{1}{2a}}\cdot\hbar c=c\hbar\left(\frac{\pi N}{A}\right)^{\frac{1}{2a}}$$

$$\epsilon_{f1}=\epsilon_{f2}\rightarrow c=\frac{\pi N\hbar(\frac{\pi N}{A})^{-\frac{1}{2a}}}{2Am}$$

מהו התנע הגדול ביותר של האלקטרונים בכל אחת מהמערכות?

מספר המצבים עד מספר גל k עבור מערכת באורך L הוא:

$$N\left(k\right)=2\cdot\frac{k}{\frac{\pi}{L}} \quad \textbf{(1d)}$$

$$N\left(k\right)=2\cdot\frac{\pi k^{2}}{4\left(\frac{\pi^{2}}{L^{2}}\right)} \quad \textbf{(2d)}$$

$$N\left(k\right)=2\cdot\frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi}{3}k^{3}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^{3}} \quad \textbf{(3d)}$$

במקרה פה, המערכת היא מ 2 מימדים, ולכן:

$$N\left(k\right)=\frac{Ak^{2}}{2\pi}$$

אחשב תנע פרמי עבור מערכת 1:

$$\begin{cases}\epsilon_{1}=\frac{\hbar^{2}\cdot k^{2}}{2m} & \text{יחס נפיצה נתון}\\ \epsilon_{f1}=\frac{\pi\cdot N\cdot\hbar^{2}}{2\cdot A\cdot m} & \text{רמת פרמי}\end{cases}\rightarrow k_{f}=\sqrt{\frac{\pi\cdot N}{A}}$$

אחשב תנע פרמי עבור מערכת 2:

$$\begin{cases}\epsilon_{2}=\hbar c\cdot k^{\frac{1}{a}} & \text{יחס נפיצה נתון}\\ \epsilon_{f2}=c\cdot\hbar\left(\frac{\pi N}{A}\right)^{\frac{1}{2a}} & \text{רמת פרמי}\end{cases}\rightarrow k_{f}=\sqrt{\frac{\pi\cdot N}{A}}$$

כעת מסירים את התייל שמחבר את שתי המערכות ולאחר מכן מוסיפים אלקטרונים למערכת 2, כך שנוצר מתח חשמלי בין המערכות.
כיצד אנרגיית פרמי משתנה במערכת 2 (גדלה/ קטנה) והאם היא משתנה במערכת 1?
ראינו כי אנרגיית פרמי בכל מערכת תלויה במספר האלקטרונים שבה,לכן הוספת אלקטרונים למערכת 2 תגדיל בה את רמת פרמי, לא הוספנו או החסרנו אלקטרונים ממערכת 1 ולכן רמת פרמי בה לא משתנה.
כעת, מחברים את שתי המערכות באמצעות תיל מוליך. נתייחס לתיל כאל מערכת תלת מימדית של גליל שהציר הראשי שלו (ציר x) ארוך מאוד, והוא מחבר את שתי המערכות.
יחס הנפיצה של האלקטרונים בתיל נתונה על ידי הביטוי הבא:

$$\epsilon\left(\vec{k}\right)=\frac{\hbar^{2}}{2m_{x}}k_{x}^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2m_{y}}k_{y}^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2m_{z}}k_{z}^{2}$$

צפיפות האלקטרונים בתייל היא n_0 וזמן הפיזור הממוצע הוא τ_0. רשמו ביטוי למוליכות החשמלית שנמדדה בתיל.
מוליכות החשמלית היא: $\sigma=\frac{1}{\rho}=\frac{nq^{2}\tau}{m}$, נתון אצלנו:

$$\begin{cases}n=n_{0} & \text{צפיפות אלקטרונים בתיל}\\ q=-e & \text{אלקטרונים}\\ \tau=\tau_{0} & \text{זמן פיזור ממוצע}\end{cases}$$

המסה m בנוסחה היא המסה האפקטיבית,

$$\frac{1}{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_z} \end{pmatrix}$$

ואקבל את טנזור המוליכות החשמלית:

$$\sigma = n_0 \cdot e^2 \cdot \tau_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_z} \end{pmatrix}$$

לפי חוק אום, צפיפות זרם היא המכפלה בין המוליכות לשדה החשמלי, במקרה פה, השדה הוא בכיוון המחבר את שתי המערכות: $E = E\hat{x}$, ולכן:

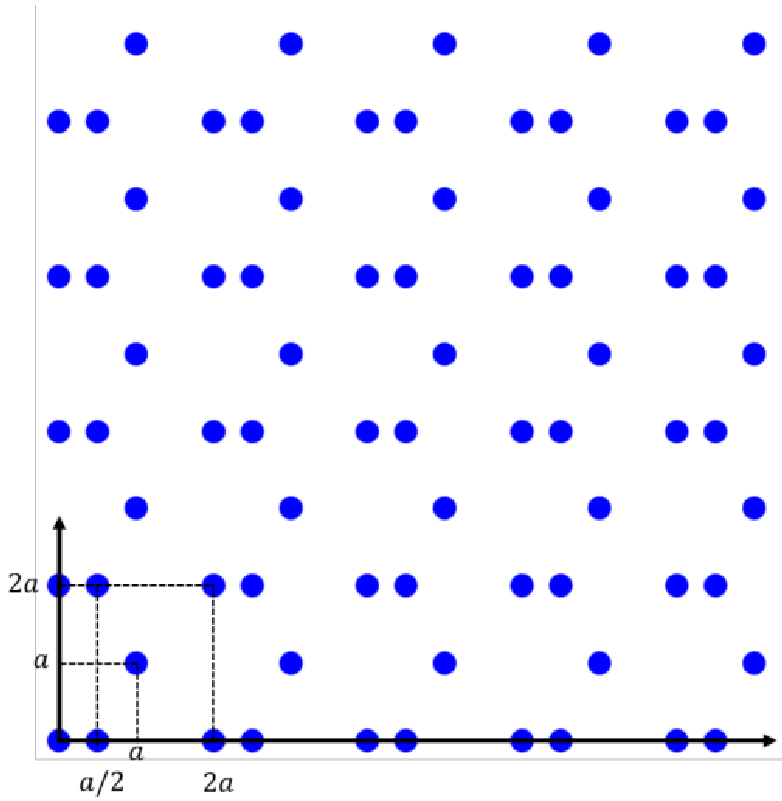
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = n_0 \cdot e^2 \cdot \tau_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n_0 \tau_0 e^2 \begin{bmatrix} \frac{E}{m_x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{n_0 \tau_0 e^2 E}{m_x} \hat{x}$$

ורכיב המוליכות בכיוון $\hat{x}$ בצפיפות הזרם הוא:

$$\sigma_{xx} = \frac{J_x}{E} = \frac{n_0 \tau_0 e^2}{m_x}$$

שאלה 7. | שאלה: 7

נתון הגביש הבא:



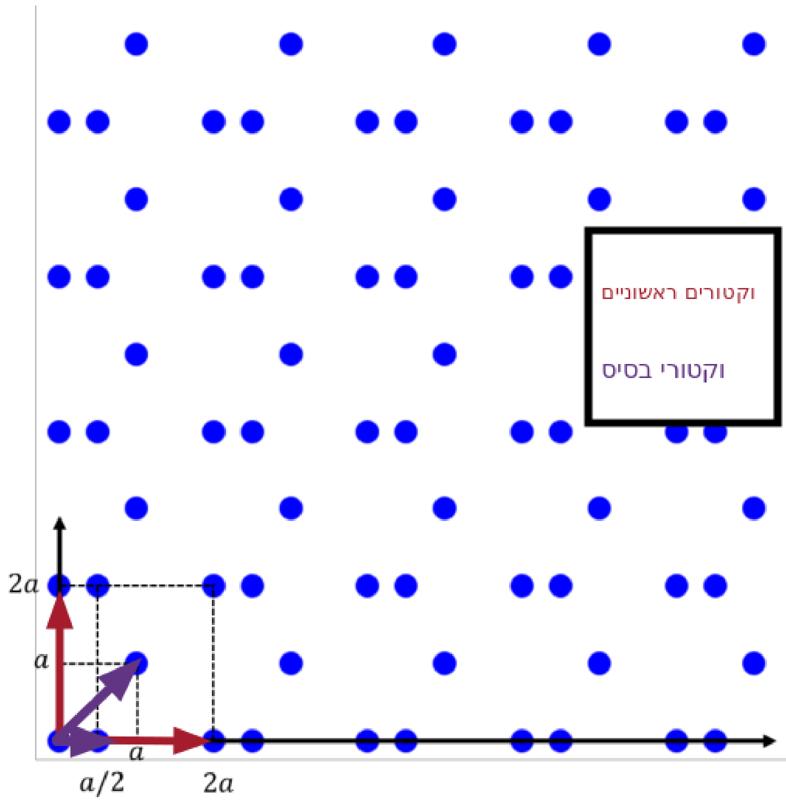
הווקטורים הראשוניים של הגביש הם:

$$\begin{cases} a_1 = 2a\hat{x} \\ a_2 = 2a\hat{y} \end{cases}$$

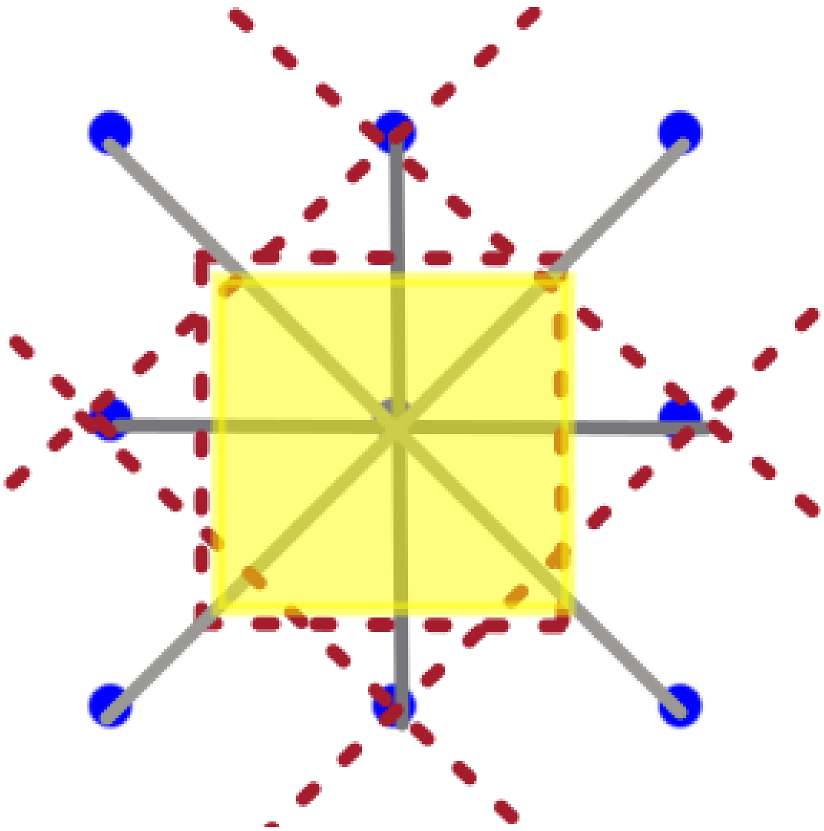
ווקטורי הבסיס הם:

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = \frac{a}{2}\hat{x} \\ d_3 = a\hat{x} + a\hat{y} \end{cases}$$

כמתואר בציור:



תא Wigner-Seitz של הגביש הוא תא ריבועי:



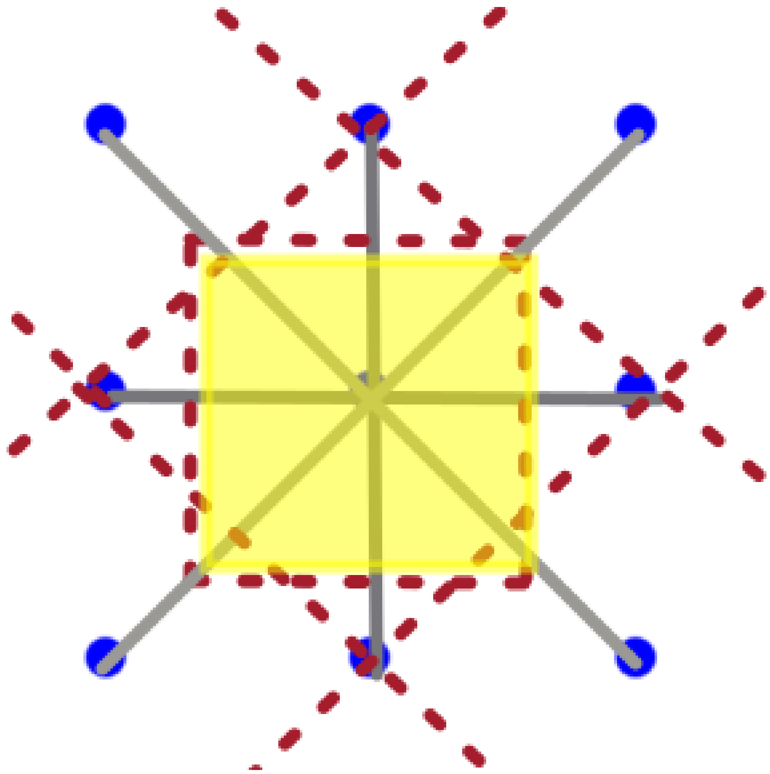
כדי למצוא את הווקטורים של השריג ההופכי, תחילה אחשב את שטח תא היחידה הנפרש על ידי הווקטורים הראשוניים:

$$S = |\vec{a_1} \times \vec{a_2}| = |2a\hat{x} \times 2a\hat{y}| = 4a^2$$

כעת, אמצע את הווקטורים הראשונים של הסריג ההפכי:

$$\begin{cases} \vec{b_1} = 2\pi\frac{\vec{a_2}\times\hat{z}}{S} = \frac{\pi}{2a^2}\cdot 2a\hat{y}\times\hat{z} = \frac{\pi}{a}\hat{x} \\ \vec{b_2} = 2\pi\frac{\hat{z}\times\vec{a_1}}{S} = \frac{\pi}{2a^2}\cdot 2a\hat{z}\times\hat{x} = \frac{\pi}{a}\hat{y} \end{cases}$$

השריג ההפכי הוא ריבוע עם אורך צלע $\frac{\pi}{a}$.



מבלי לפתור את הבעיה, ניתן לראות שווקטור הבסיס של תא היחידה הולך ל 3 אטומים, לכל אטום אורביטל אחד, לכן נצפה לקבל שלושה פסי אנרגיה.

~~נתון כעת הגביש הבא:~~

~~נניח שהצימוד בין השכנים הוא $\gamma_1 = \gamma,\ \gamma_2 = 0$ והאנרגיה של האורביטלים הינה E_0. נתייחס רק לשכנים עם הצימוד γ_1 ונמצא את מבנה הפסים בעזרת שיטת הקשירה ההדוקה.~~