אלקטרוניקה פיסיקאלית 044124

סמסטר אביב 2022

מועד א

הנחיות

- **משך הבחינה – שלוש שעות**
- **במבחן ישנן 2 שאלות פתוחות ו-5 שאלות רב-ברירה**
- **בדקו שברשותכם 11 עמודים**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 6 דפי נוסחאות דו-צדדיים**

בהצלחה!

שאלה 1 (6 נקודות):

יעל בוגרת אלקטרוניקה פיסיקאלית ניגשה לבעיה הבאה. נתון אלקטרון בגביש חד-ממדי בעל קבוע שריג a הנע תחת השפעה של השדה חשמלי קבוע - $\mathcal{E}_0\hat{x}$. הגביש מכיל פס אנרגיה בודד מהצורה:

$$E(k) = \gamma_0[\cos(ak) + \cos(2ak)]$$

נניח שבזמן $t_0 = 0$ האלקטרון נמצא ב- $k_0 = 0$ במרחב ההופכי וב- $x_0 = 0$ במרחב הישיר. איפה יהיה האלקטרון בזמן $t_f = \frac{2\pi\hbar}{ae\mathcal{E}_0}$ ומה תהיה מהירותו בנקודה הזאת?

א. $x_f = \gamma\frac{1}{e\epsilon_0}, v_f = \gamma\frac{a}{\hbar}$

ב. $x_f = 2\gamma\frac{1}{e\epsilon_0}, v_f = -\pi\gamma\frac{a}{\hbar}$

ג. $x_f = \gamma\frac{1}{e\epsilon_0}, v_f = -3\gamma\frac{a}{\hbar}$

ד. $x_f = 0, v_f = 0$

ה. $x_f = a, v_f = 0$

<u>שאלה 2 (6 נקודות):</u>

סטודנטים בקורס אלקטרוניקה פיסיקאלית מנסים להעריך את התדר המקסימאלי של האופן האקוסטי של מתכת חד ממדית (ללא בסיס) בעלת מהירות קול של $v_s = 2260m/sec$, מסה אטומית של $29amu$ ומרחק בין אטומים של $3.61\AA$. מהו הערך של התדר הזוויתי המקסימאלי של האופן?

א. $\omega_{max} = 12.5 \times 10^{12} rad/sec$

ב. $\omega_{max} = 21.5 \times 10^{16} rad/sec$

ג. $\omega_{max} = 1.25 \times 10^{6} rad/sec$

ד. $\omega_{max} = 51.2 \times 10^{9} rad/sec$

ה. $\omega_{max} = 22.5 \times 10^{13} rad/sec$

<u>שאלה 3 (6 נקודות):</u>

נתון מוצק חד ממדי בעל שני פסי אנרגיה מהצורה:

$$E_A(k) = -2t_A \cos(ka)\,, t_A > 0$$

$$E_B(k) = -t_B \cos(ka)\,, t_B > 0$$

$$t_A > t_B$$

נתון שכל תא יחידה במוצק תורם שני אלקטרונים. מהו התנאי שהמוצק יהיה מבודד ב- $T = 0$?

א. $t_A - 2t_B > 0$

ב. $t_A - t_B < 0$

ג. $2t_A + t_B < 0$

ד. המוצק תמיד מבודד

ה. המוצק תמיד מוליך

<u>שאלה 4 (6 נקודות):</u>

נתון גז המורכב מ N פרמיונים חופשיים (יחס דיספרסיה פרבולי) ללא אינטראקציה ביניהם. כל פרמיון הוא בעל מסה m וספין 3/2. הפרמיונים נמצאים בקופסא דו-מימדית ששטחה A $(A = L \times L)$.

מהו הפוטנציאל הכימי μ בטמפרטורה השואפת לאפס קלווין? (n הוא צפיפות האלקטרונים $n = \frac{N}{A}$).

א. $\mu = 0$

ב. $\mu = \frac{n\pi\hbar^2}{2m}$

ג. $\mu = k_B T$

ד. $\mu = \frac{2}{3}\frac{m}{\pi\hbar^2 n}$

ה. $\mu = \frac{n\pi\hbar^2}{m}$

<u>שאלה 5 (6 נקודות):</u>

נתונות שתי מערכות (1 ו- 2) מצומדות תרמית לאמבטי חום שונים בטמפרטורות $T_1^0 = T \gg 0$ ו $T_2^0 = 2T \gg 0$ ומבודדות אחת מהשניה.

מערכת 1: גז אידאלי דו-מימדי המורכב מ $N_1 = N \gg 1$ חלקיקים חופשיים עם המילטוניאן שנתון ע״י הביטוי הבא:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{P}^2}{2m}$$

מערכת 2: מכילה $N_2 = 2.5N \gg 1$ אוסצילטורים הרמונים קלאסיים דו-מימדיים עם המילטוניאן שנתון ע״י הביטוי הבא:

$$E_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^2$$

כעת מנתקים את שתי המערכות מאמבטי החום שלהן ולאחר מכן מצמדים לאמבט נוסף בטמפרטורה $T_3^0 = 1.5T \gg 0$. מה יהיה הפרש האנרגיות בין המצב הסופי למצב ההתחלתי של שתי המערכות.

א. $-2Nk_BT$

ב. $-4Nk_BT$

ג. $-2.5Nk_BT$

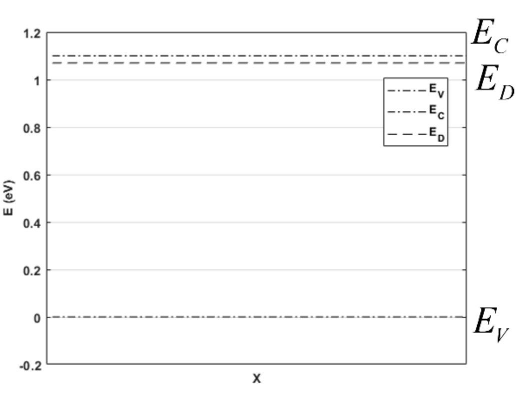
ד. $-Nk_BT$

ה. 0

<u>**שאלות פתוחות**</u>

<u>**שאלה 6 (35 נקודות):**</u>

נתונה פיסה דו-מימדית של מוליך למחצה עם פער אנרגיה ישיר של E_g=1.1eV. יחס הדיספרסיה של החורים ושל האלקטרונים הוא פרבולי עם מסה אפקטיבית זהה וכמו של אלקטרון חופשי ($E = \pm\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$). מסממים את המל"מ בתורמים בריכוז של $N_D = 10^{12}\ cm^{-2}$ עם רמת אנרגיה של $E_D = E_g - \Delta$ כאשר $\Delta = 30\ meV$. הניחו כי פס הערכיות של המל"מ נמצא באנרגיה אפס (ראו ציור מצורף).



התורם יכול להיות מאוכלס עם אלקטרון אחד עם ספין UP או עם אלקטרון אחד עם ספין DOWN או ללא אף אלקטרון. בלתי אפשרי לשני אלקטרונים להיות בו-זמנית על האטום התורם.

למצב שבו יש אלקטרון יחיד על התורם אנו קוראים מצב לא מיונן (ניטרלי חשמלית). למצב שבו אין אף אלקטרון על התורם אנו קוראים מצב מיונן (חיובי חשמלית).

מטרת השאלה הינה למצוא את כמות נושאי המטען במל"מ כפונקציה של הטמפרטורה. לשם כך, נחשב שלב אחר שלב את הגדלים הרלוונטים לשם מציאת התשובה ששאלנו. הניחו תחילה שהפוטנציאל הכימי (μ) של המל"מ ידוע. במרוצת הסעיפים נמצא משוואה שמחלצת אותו.

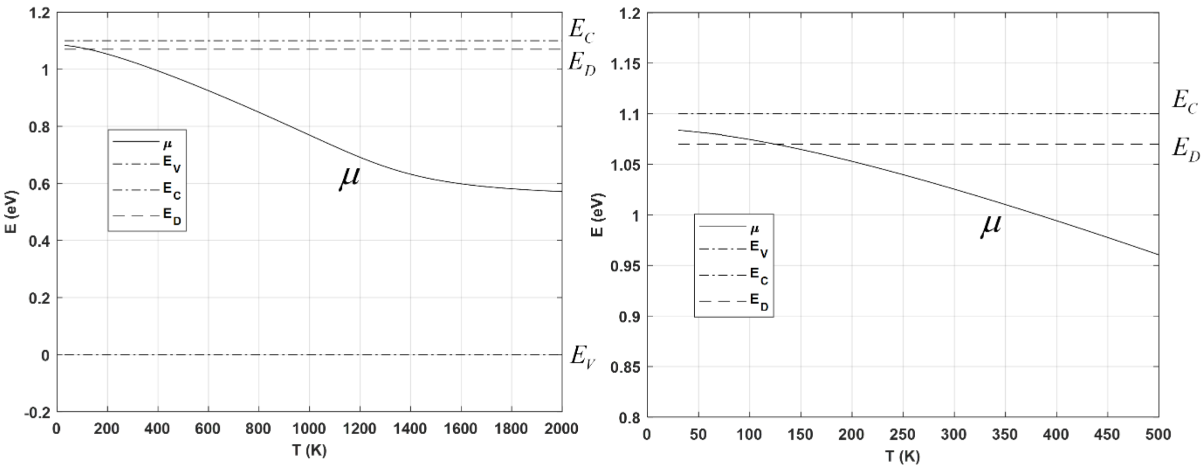
א. (7 נק') מהי צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה ליחידת שטח של האלקטרונים והחורים במל"מ הדו-מימדי?

ב. (7 נק') חשבו את ריכוז האלקטרונים והחורים בפס ההולכה והערכיות במל"מ כפונקציה של T בהנחה שהפוטנציאל הכימי (μ) ידוע. רמז: רשמו עבור אלקטרונים וחורים את הסיכוי לאכלס רמת אנרגיה כלשהי. לאחר מכן השתמשו באינפורמציה שהסיכוי לאכלס מצב אנרגטי כלשהו בפס ההולכה או הערכיות הוא נמוך מאד ביחס לאחד (הפוטנציאל הכימי נמצא בתוך פער האנרגיה). רשמו מה התנאי הזה אומר מבחינה אנרגטית? לאחר קבלת הביטוי המתאים (של הסיכוי לאכלוס) בצעו אינטגרציה על האנרגיה בגבולות האנרגיה המתאימים. אתם צריכים לקבל אינטגרלים פשוטים שאין כל בעיה לבצעם. בכדי לא להיגרר עם קבועים רבים ניתן להשתמש ב ν_0 עבור צפיפות המצבים.

ג. (7 נק') מהו ריכוז התורמים שאינם מיוננים (תורמים שלא תרמו את האלקטרון הנוסף שלהם)? רמז: הניחו שהפוטנציאל הכימי (μ) ידוע והתייחסו לבעיה של רמת אנרגיה מנוונת אחת המצומדת לאמבט תרמי ולאמבט חלקיקים. מצאו את הביטוי כפונקציה של הטמפרטורה (T), רמת האנרגיה של התורם (E_D) ו μ.

ד. (7 נק') רשמו משוואה שבאמצעותה ניתן יהיה לחלץ את הפוטנציאל הכימי. רמז: השתמשו במשוואת הניטרליות החשמלית של סך כל המטענים בבעיה (מטען (אלקטרונים) + מטען (חורים) + מטען (**תורמים מיוננים**) = 0).

ה. (7 נק') הפיתרון של μ כפונקציה של T נתון ע"י הגרפים הבאים (הגרף הימני הוא זום של הגרף השמאלי):

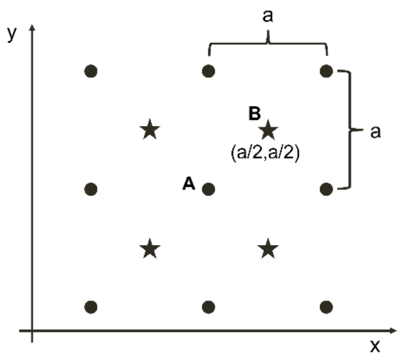


בהינתן הגרפים האלו, ציירו את הסיכוי לתורם להיות מיונן כפונקציה של T בטווח שבין 50 ל 2000 קלווין. רמז: בחרו 4 טמפרטורות שונות (בטווח המדובר בצורה נבונה (אפשר לקחת יותר נקודות על מנת להיות בטוחים בציור)), העריכו את μ (לא חייב להיות מדוייק לחלוטין) וחשבו את הסיכוי להיות מיונן על פי הנוסחא שכבר חישבתם קודם לכן. הסבירו את התוצאות שקיבלתם מטמפרטורות נמוכות מאד עד 2000 קלווין.

עבור טמפרטורות מאד גבוהות ($k_BT \gg E_g$) חשבו את הסיכוי לתורם להיות מיונן (על סמך אותה נוסחא שחישבתם קודם לכן). הסבירו את התוצאות שקיבלתם.

שאלה 7 (36 נקודות):

נתון שריג ריבועי דו-מימדי עם מרחק שריג a ובסיס כמצוייר באיור המצורף. אטומי A (עיגול) הינם בעלי אורביטל $|\varphi_A\rangle$ ואנרגיה ε_A ואטומי B (כוכב) בעלי אורביטל $|\varphi_B\rangle$ ואנרגיה ε_B. כל אינטגרלי החפיפה בין שכנים קרובים זהים והינם $(-\gamma)$ כאשר $\gamma > 0$. הניחו מודל הקשירה ההדוקה וענו על הסעיפים הבאים:



א. (9 נק') רשמו את המטריצה הסקולרית במודל הקשירה ההדוקה.

ב. (9 נק') מצאו את פסי האנרגיה מהמטריצה הסקולרית.

ג. (9 נק') הניחו כי $\varepsilon_A > \varepsilon_B$ ובנוסף $\varepsilon_A - \varepsilon_B \gg \gamma$ ובצעו פיתוח טיילור של השורש עד סדר ראשון. קבלו ביטוי לפסי האנרגיה בקירוב שקיבלתם. ציירו את פסי האנרגיה שקיבלתם עבור $k_y = 0$ באזור ברילואן הראשון. סמנו את הערכים המינימליים והמקסימליים של הפסים עבור $k_y = 0$. סמנו בברור מהו אזור ברילואן הראשון עבור $k_y = 0$ וחשבו מהי מהירות החבורה בכיוון ציר x בקצה אזור ברילואן של הפסים שקיבלתם עבור $k_y = 0$. הסבירו את התוצאות.

רמז: השתמשו בקשרים הבאים: $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + x^2/2$, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.

ד. (9 נק') הניחו כי פסי האנרגיה של הבעיה נתונים ע"י הקשרים הבאים:

$$\varepsilon_+ = \varepsilon_A + \alpha\big(1 + cos(k_x a) + cos(k_y a) + cos(k_x a)\, cos(k_y a)\big)$$
$$\varepsilon_- = \varepsilon_B - \alpha\big(1 + cos(k_x a) + cos(k_y a) + cos(k_x a)\, cos(k_y a)\big)$$

חשבו את המסות האפקטיביות של הפסים בכיוונים השונים. האם המסות זהות? האם הן חיוביות או שליליות. מה המשמעות הנובעת מכך? האם המסות בכיוון x ובכיוון y זהות? ציירו במישור $k_x - k_y$ עקומות שוות אנרגיה (energy contours) של שני פסי האנרגיה שמצאתם אחרי הקרוב שעשיתם למסה האפקטיבית.

רמז: השתמשו בקשר הבא $(\text{for } \beta \ll 1 \ \rightarrow \ \cos(\beta) \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2)$ ופתחו את האנרגיות ליד נקודות האקסטרימום שלהן.

טבלת נוסחאות שימושיות:
גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\, J\, K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^{8} m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$
$\sin(a) = 1/(2i)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

אינטגרלים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

תוחלת μ
סטיית תקן σ

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n-1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

3	$5/2$	2	$3/2$	1	$1/2$	$\boldsymbol{n}$
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\boldsymbol{\Gamma(n)}$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	$\boldsymbol{n}$
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\boldsymbol{I(n)}$