אלקטרוניקה פיסיקאלית 044124

סמסטר אביב 2021

מועד א

<u>פתרון</u>

הנחיות

- **משך הבחינה – שלוש שעות**
- **במבחן ישנן 3 שאלות**
- **בדקו שברשותכם עמודים**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 5 דפי נוסחאות דו-צדדיים**
- **הציון המקסימאלי במבחן הינו 105**

בהצלחה!

<u>שאלה מספר 1 (35 נקודות):</u>

(בשאלה הבאה כל הסעיפים בעלי משקל זהה)

נתונה מערכת של שני מומנטים מגנטיים קלאסיים מצומדים המאופיינים ע״י שני <u>וקטורי יחידה בשלושה ממדים</u> $\mathbf{S}_1$ ו- $\mathbf{S}_2$. האנרגיה של המערכת המצומדת נתונה ע״י ההמילטוניאן $H=-J\left(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2\right)$ כאשר J הינו קבוע חיובי נתון בעל יח׳ של אנרגיה.

א. רשמו ביטוי לאנרגיה של המערכת כפונקציה של הזווית θ בין $\mathbf{S}_1$ ו- $\mathbf{S}_2$. מהו הערך של θ במצב היסוד של המערכת?

ב. רשמו ביטוי לפונקציית החלוקה של המערכת.

<u>תזכורת</u>: אינטגרל יחידה בקואורדינטות **כדוריות** של פונקציה $f\left(\varphi,\theta\right)$ מקבל את הצורה:

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\left[f\left(\varphi,\theta\right)\sin\theta\right]$$

ג. רשמו ביטוי עבור האנרגיה הממוצעת של המערכת. למה היא שואפת בטמפרטורות מאוד גבוהות?

ד. מבלי לפתור, תנו הסבר פיזיקלי לאנרגיה הממוצעת המתקבלת בטמפרטורות מאוד גבוהות.

ה. רשמו ביטוי לקיבול החום של המערכת.

<u>נוסחת עזר</u> לסעיפים הבאים - עבור פונקציה פולינומית כלשהי $f\left(\theta\right)$ מתקיים:

$$\int_0^{\pi} f\left(\theta\right)\exp\left(-a\theta^2\right)d\theta \xrightarrow[a\to\infty]{} \int_0^{\infty} f\left(\theta\right)\exp\left(-a\theta^2\right)d\theta$$

ו. <u>בטמפרטורות נמוכות</u>, חשבו את הזווית הממוצעת בין $\mathbf{S}_1$ ו- $\mathbf{S}_2$.

<u>רמז</u>: אילו קרובים אפשר לעשות עם הזווית θ?

ז. <u>בטמפרטורות נמוכות</u>, חשבו את השונות של הזווית בין $\mathbf{S}_1$ ו- $\mathbf{S}_2$.

<u>פתרון:</u>

א. $E=-J\cos\theta$. במצב היסוד, האנרגיה של המערכת מינימלית ולכן $\theta=0$ והמומנטים מקבילים זה לזה.

ב. $$Z=\int d\varphi d\theta\sin\theta\exp\left(\beta J\cos\theta\right)=2\pi\int_{-1}^{1}dx\exp\left(\beta Jx\right)=\frac{4\pi}{\beta J}\sinh\left(\beta J\right)$$

ג. $\left\langle E\right\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -J\coth\left(\beta J\right)+\frac{1}{\beta}$. האנרגיה הממוצעת בטמפרטורות מאוד גבוהות שואפת לאפס. נקרב את הפונקציה

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \approx \frac{1 + x + 1 - x}{1 + x - 1 + x} = \frac{1}{x}$$

לפיכך נקבל $\langle E\rangle = -\frac{J}{\beta J} + \frac{1}{\beta} = 0$

ד. בכדי להבין זאת פיזיקלית, נשים לב שהמצב האנרגטי הכי גבוה של המערכת מתקבל כאשר המומנטים מנוגדים בכיוונם, ואילו המצב האנרגטי הכי נמוך מתקבל כאשר המומנטים מצביעים לאותו כיוון (סעיף א'). כפי שראינו במהלך הקורס, בטמפרטורה מאוד גבוהה הסיכוי לכל מצבי האנרגיה של המערכת נהיה בערך זהה. נובע מכאן שעל הזווית הממוצעת בין המומנטים בטמפ' מאוד גבוהות להיות 90 מעלות – שני הווקטורים ניצבים זה לזה ומכפלה סקלרית ביניהם מתאפסת.

ה. $$C = \frac{\partial\left\langle E\right\rangle}{\partial T} = k_B\left[1+\left(\frac{J}{k_BT}\right)^2\left(1-\coth^2\left(\beta J\right)\right)\right]$$

ו. בטמפרטורות נמוכות המצב לא רחוק ממצב היסוד ולכן הזווית בין המומנטים תהיה קטנה: $\sin\theta\approx\theta, \cos\theta\approx 1-\theta^2/2$, ולכן נקבל:

$$\left\langle\theta\right\rangle = \frac{\int_0^\infty \theta\exp\left(-\beta J\,\theta^2/2\right)\theta d\theta}{\int_0^\infty \exp\left(-\beta J\,\theta^2/2\right)\theta d\theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta J}}$$

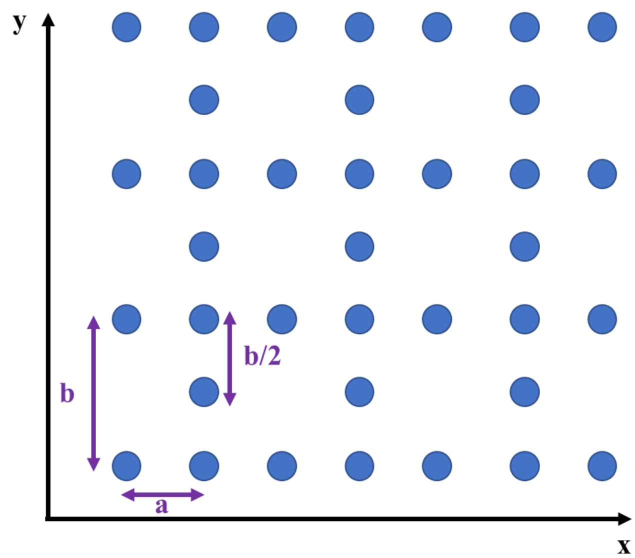
ז. $$\left\langle\theta^2\right\rangle = \frac{\int_0^\infty \theta^2\exp\left(-\beta J\,\theta^2/2\right)\theta d\theta}{\int_0^\infty \exp\left(-\beta J\,\theta^2/2\right)\theta d\theta} = \frac{2}{\beta J}$$

$$\left\langle\theta^2\right\rangle - \left\langle\theta\right\rangle^2 = \frac{1}{\beta J}\left(2-\pi/2\right) = \frac{k_BT}{J}\left(2-\pi/2\right)$$

שאלה מספר 2 (35 + 5 נקודות)

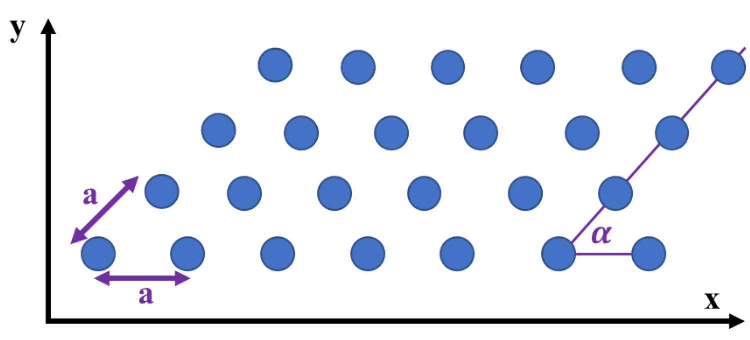
(בשאלה הבאה כל הסעיפים בעלי משקל זהה)

נתון הגביש הדו-ממדי הבא:



א. האם זהו סריג Bravais? כתבו מהם וקטורי השריג הראשוניים ו-וקטורי הבסיס שלו (אם קיימים).
ב. ציירו את תא היחידה. כמה נקודות שריג מוכלות בתוך התא שציירתם?
ג. ציירו את תא Wigner-Seitz. כמה נקודות שריג מוכלות בתוך התא שציירתם?
ד. על גבי הסריג הישיר, ציירו את משפחות קווי השריג הבאות $(31), (12), (\bar{4}1)$

כעת נתון שריג מהצורה הבאה:



כאשר $\alpha = 45°$

ה. הניחו שמקדם הצימוד בין שכנים קרובים הינו $-\gamma$ והאנרגיה של אטום בודד הינה ϵ. קבלו את יחס הנפיצה של אלקטרון בגביש.
ו. חשבו את וקטור מהירות החבורה. חשבו את טנזור המסה האפקטיבית סביב תחתית הפס.
ז. כעת מפעילים שדה קבוע כלשהו E_0 לאורך ציר $\hat{y}$. קבלו ביטוי עבור מהירות החלקיק כפונקציה של הזמן. מהו הזרם הממוצע?
ח. **סעיף בונוס (5 נקודות):** כמה זמן לוקח לחלקיק לחצות את אזור Brillouin הראשון?

פתרון:

א,ב. השריג המתאר את הגביש **אינו** שריג ברווה. אחת מהבחירות האפשריות של וקטורי שריג ראשוניים הינה למשל:

$$a_1 = 2a\hat{x}$$

$$a_2 = b\hat{y}$$

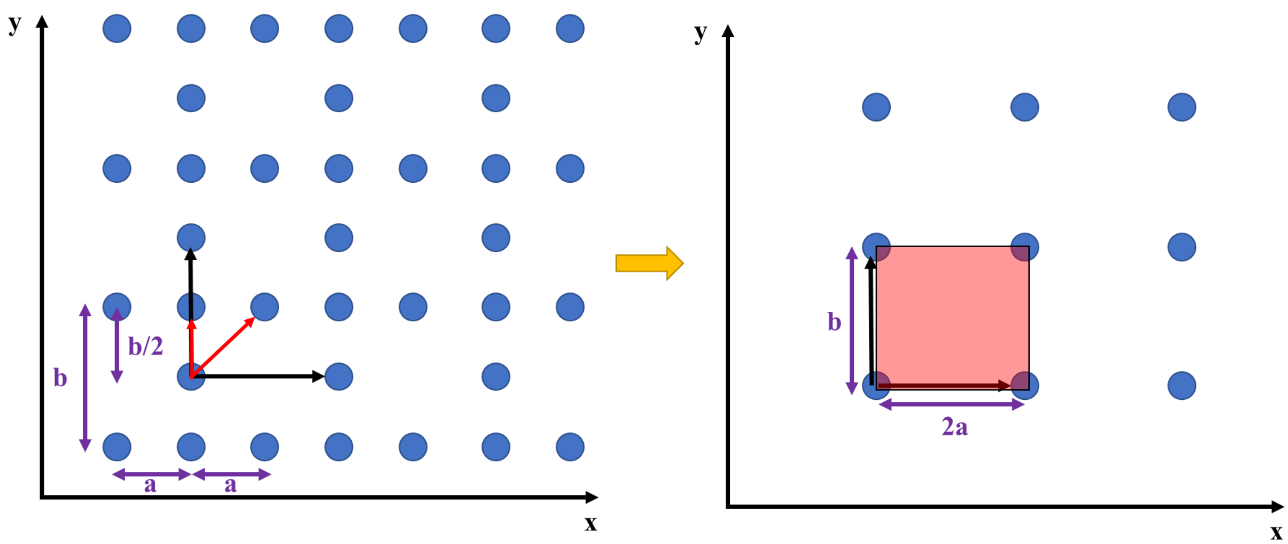
ועבור וקטורי בסיס:

$$d_1 = 0\hat{x} + 0\hat{y}$$

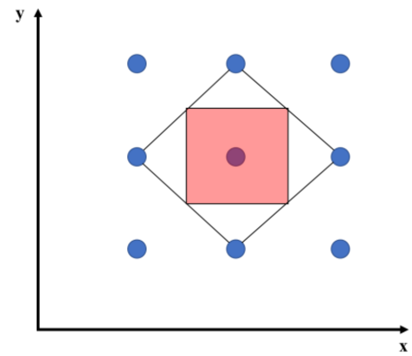
$$d_2 = a\hat{x} + b/2\hat{y}$$

$$d_3 = b/2\hat{y}$$

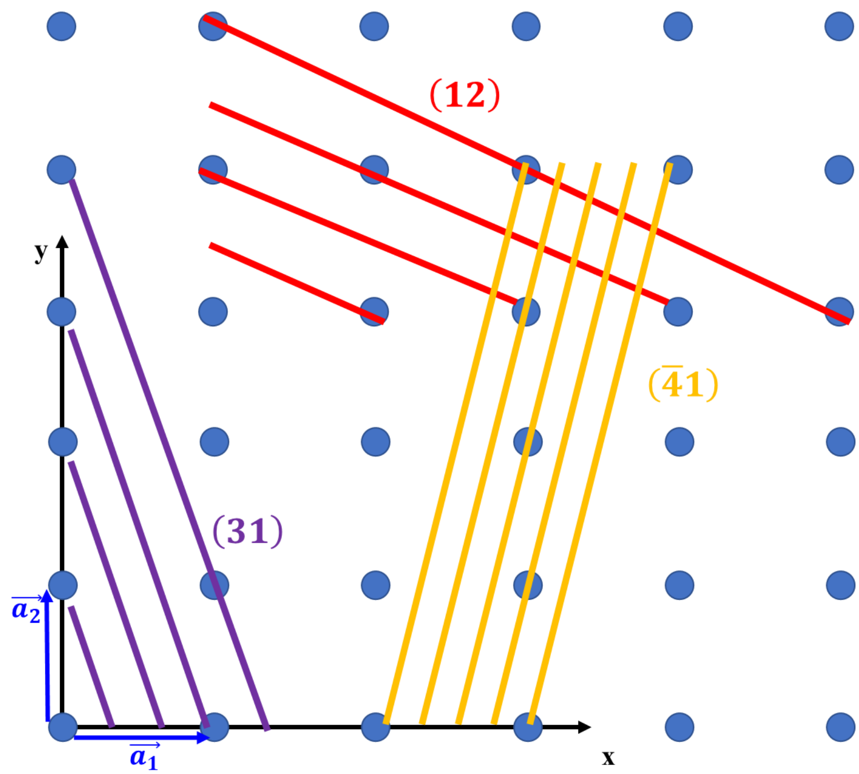
תא היחידה מצויר באדום והינו תא יחידה ראשוני (מכיל נקודת שריג אחת בלבד)



ג. תא Wigner-Seitz מוגדר עבור שריג בלבד ולא עבור גביש ומכיל נקודת שריג אחת בהגדרה



ד. משפחות קווי השריג נקבעות לפי וקטורי השריג הישיר שבחרתם :



ה. נשתמש במודל הקשירה ההדוקה בשביל לקבל את מבנה הפסים :

הוקטורים המחברים נקודת שריג נתונה לשכנים הכי קרובים אליה הינם :

$$R_1 = a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x}-\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}, \qquad R_2 = -a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x}+\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}$$

לפיכך נקבל:

$$E(k_x,k_y)=\epsilon-\gamma\left(e^{i\vec{k}\cdot\left(a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x}-\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}\right)}+e^{i\vec{k}\cdot\left(-a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x}+\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}\right)}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\epsilon-\gamma\left(e^{i\left(k_xa\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{k_ya}{\sqrt{2}}\right)}+e^{i\left(-k_xa\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{k_ya}{\sqrt{2}}\right)}\right)$$

$$=\epsilon-2\gamma\cos\left(k_xa\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{k_ya}{\sqrt{2}}\right)$$

ו. מהירות החבורה נתונה ע״י :

$$\overrightarrow{v_g}=\frac{1}{\hbar}\vec{\nabla}_kE(k_x,k_y)=\frac{2\gamma}{\hbar}\sin\left(k_xa\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{k_ya}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x}-\frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}\right)$$

נקרב את יחס הנפיצה בתחתית הפס כדי לחשב את המסה האפקטיבית בכיוונים השונים :

$$E(k_x,k_y)\approx\epsilon-2\gamma\left(1-\frac{\left(a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{2}k_x^2-\frac{a^2}{2}k_y^2\right)-2\gamma a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)k_xk_y$$

$$=\epsilon-2\gamma-\gamma a^2(\sqrt{2}-1)k_xk_y+\gamma\left(a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2k_x^2+\gamma a^2k_y^2$$

ומהגדרת איברי טנזור המסה האפקטיבית :

$$m_{ij}=\hbar^2\left(\frac{\partial^2E}{\partial k_i\partial k_j}\right)^{-1}$$

נקבל :

$$m_{xx}=\frac{\hbar^2}{2\gamma\left(a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2},m_{yy}=\frac{\hbar^2}{2\gamma a^2},m_{xy}=m_{yx}=-\frac{\hbar^2}{\gamma a^2(\sqrt{2}-1)}$$

ז. לפי המשוואה הסמי-קלאסית לכח שפועל על החלקיק אותה ראינו בתרגול, מתקיים :

$$\vec{F}=\hbar\frac{d\vec{k}}{dt}=-e\vec{E}=-e(0,E_0)$$

לאחר אינטגרציה בזמן עד לזמן t כלשהו (ובהנחת $\vec{k}(t=0)=0$) נקבל :

$$\vec{k}(t)=-\frac{eE_0}{\hbar}(0,t)$$

הצבה בביטוי שקיבלנו למהירות החבורה תניב :

$$\overrightarrow{v_g}(t) = \frac{2\gamma}{\hbar}\sin\left(\frac{eE_0ta}{\hbar\sqrt{2}}\right)\cdot\left(a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{x} - \frac{a}{\sqrt{2}}\hat{y}\right)$$

וקיבלנו שהאלקטרון מבצע תנועה מחזורית (Bloch Oscillations).

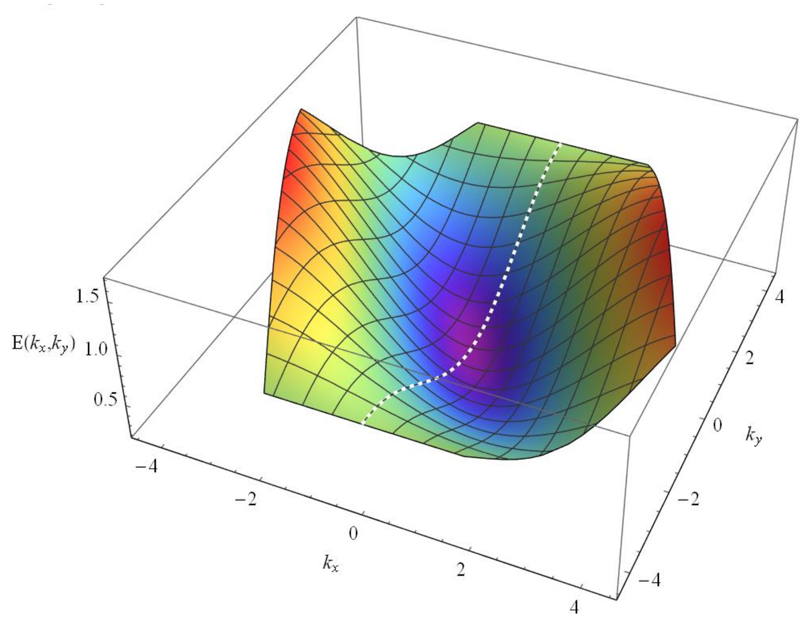
- בונוס - נחשב את זמן המחזור האופייני של התנודות:

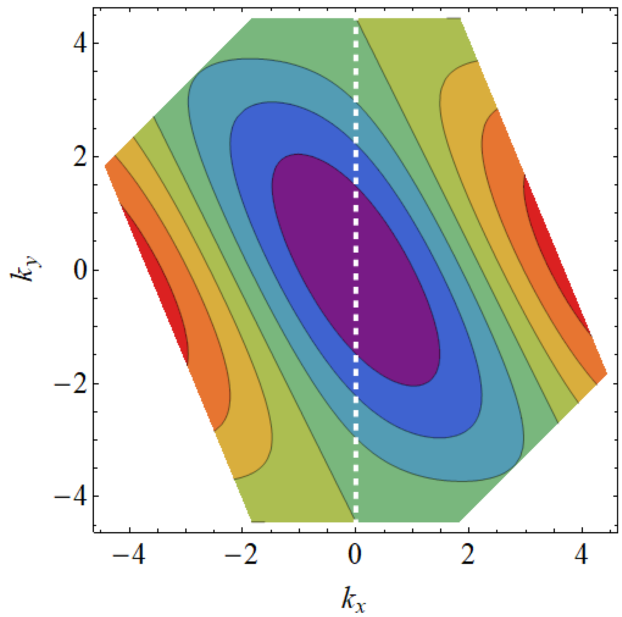
מכיוון שהאלקטרון נע לאורך ציר k_y, עלינו לדעת את אורך אזור Brillouin הראשון בכיוון הזה. לפיכך, נחשב תחילה את וקטור השריג ההופכי בכיוון זה:

$$\overrightarrow{b_2} = \frac{2\pi}{S}\hat{z}\times\overrightarrow{a_1} = \frac{2\pi}{a^2/\sqrt{2}}a\hat{y} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{a}\hat{y}$$

וקיבלנו שאזור Brillouin הראשון הינו ברוחב $\frac{2\sqrt{2}\pi}{a}$ בכיוון $\hat{y}$, כך ש- $-\frac{\sqrt{2}\pi}{a} \le k_y \le \frac{\sqrt{2}\pi}{a}$

נובע מכך שזמן המחזור האופייני של התנועה הינו $T = \frac{2\sqrt{2}\pi\hbar}{aeE_0}$ והזרם הממוצע הינו 0.





4
2
0
−2
−4
k_y
−4
−2
0
2
4
k_x

שאלה מספר 3 (30 נקודות)

נתון גז פוטונים במהוד אלקטרומגנטי תלת ממדי בעל נפח L $V = L \times L \times L$.

א. השתמשו ביחס הנפיצה של פוטונים וחשבו את צפיפות המצבים שלהם במהוד ליח' אנרגיה וליח' נפח.

ב. נתון שגז הפוטונים במהוד נמצא בשווי משקל תרמי עם אמבט חום המוחזק בטמפ' T כלשהי. העזרו בתוצאת הסעיף הקודם וקבלו ביטוי למספר הפוטונים הממוצע N במהוד בעל נפח V.

ג. קבלו ביטוי עבור קיבול החום (בנפח הקבוע V) של גז הפוטונים במהוד. איזו תלות מתקבלת עבור קיבול החום בטמפ'? איפה עוד בקורס ראיתם תלות דומה של קיבול חום בטמפ'? מדוע?

ד. מהי האנרגיה הממוצעת פר פוטון במהוד? האם התוצאה מתיישבת עם זו שהייתם מקבלים לפי משפט החלוקה השווה? (בהנחת 2 דרגות חופש פר פוטון). במידה שלא, הסבירו מהיכן נובע ההבדל.

ה. אורך הגל התרמי של פוטונים במהוד נתון (ביח' של cm) על ידי הקשר הבא:

$$\lambda_T^{photon} \cong \frac{0.51}{T\ [K]}\ \ [cm]$$

נגדיר את צפיפות הפוטונים במהוד בתור $n = N/V$ כאשר N הינו הביטוי שמצאתם בסעיף ב'.

בהינתן שהמהוד מצומד לאמבט חום המוחזק בטמפ' החדר ($T = 300[K]$), מצאו מהו היחס בין אורך הגל התרמי למרחק הממוצע בין פוטונים במהוד והסבירו את משמעות היחס הזה לאופי הבעיה.

פתרון:

א. ראשית נמצא את מספר המצבים הפוטוניים $N(k)$ בתחום $[0, k]$, כאשר נשים לב שהחישוב הינו זהה לחלוטין לזה שעשינו עבור אלקטרונים בתלת-ממד, רק שאת ההכפלה ב-2 עקב הספין מחליפה כעת הכפלה ב-2 עקב שני מצבי קיטוב אפשריים עבור השדה האלקטרומגנטי.

נקבל:

$$N(k) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{A_{sphere}}{A_{state}} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{4\pi k^3}{3}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3} = \frac{Vk^3}{3\pi^2}$$

חלוקה באלמנט הנפח V ושימוש ביחס הנפיצה הפוטוני יניבו:

$$G(E) = \frac{1}{V} \cdot \frac{V\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^3}{3\pi^2} = \frac{E^3}{3\pi^2\hbar^3c^3}$$

לבסוף, גזירה לפי האנרגיה תניב את צפיפות המצבים הפוטונית במהוד ליח' אנרגיה וליח' נפח:

$$g(E) = \frac{E^2}{\pi^2\hbar^3c^3}$$

ב. אנחנו יודעים שהפוטונים הינם בוזונים, ובתרגיל כיתה 6 גם ראינו שהפוטנציאל הכימי שלהם הינו 0. נובע מכאן שהאכלוס של הפוטונים ליח' אנרגיה בטמפ' T כלשהי נקבע לפי התפלגות בוזה-איינשטיין באופן הבא:

$$f(\beta,E)=\frac{1}{e^{\beta E}-1} \qquad ; \qquad \beta \triangleq \frac{1}{k_B T}$$

מספר הפוטונים הממוצע N הנמצאים בשווי משקל תרמי בטמפ' T במהוד יינתן לכן על ידי:

$$N=V\cdot\int_0^\infty g(E)\cdot f(\beta,E)dE=V\cdot\int_0^\infty \frac{E^2}{\pi^2\hbar^3c^3}\cdot\frac{1}{e^{\beta E}-1}dE$$

נכפיל ונחלק ב-β^2 ונבצע החלפת משתנים:

$$x=\beta E \quad ; \quad dx=\beta dE$$

כדי לקבל:

$$\Longrightarrow N=V\cdot\int_0^\infty \frac{(\beta E)^2}{\pi^2\beta^2\hbar^3c^3}\cdot\frac{1}{e^{\beta E}-1}dE=V\cdot\int_0^\infty \frac{1}{\pi^2\beta^2\hbar^3c^3}\cdot\frac{x^2}{e^x-1}\frac{dx}{\beta}\Longrightarrow$$

נשתמש באינטגרל הנתון בדף הנוסחאות:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}dx\approx 2.404$$

ונקבל לבסוף:

$$N\cong 2.404\cdot\frac{V}{\pi^2}\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3$$

ג. נשתמש בצפיפות המצבים שחישבנו ובהתפלגות בוזה-איינשטיין המתאימה לפוטונים כדי לחשב תחילה את האנרגיה הממוצעת הכוללת של הפוטונים בגז:

$$U=V\cdot\int_0^\infty g(E)\cdot E\cdot f(\beta,E)dE=V\cdot\int_0^\infty \frac{E^2}{\pi^2\hbar^3c^3}\cdot E\cdot\frac{1}{e^{\beta E}-1}dE$$

נכפיל ונחלק ב-β^3 ונבצע החלפת משתנים:

$$x=\beta E \quad ; \quad dx=\beta dE$$

כדי לקבל:

$$\Longrightarrow U=V\cdot\int_0^\infty \frac{(\beta E)^3}{\pi^2\beta^3\hbar^3c^3}\cdot\frac{1}{e^{\beta E}-1}dE=V\cdot\int_0^\infty \frac{1}{\pi^2\beta^3\hbar^3c^3}\cdot\frac{x^3}{e^x-1}\frac{dx}{\beta}\Longrightarrow$$

באופן דומה למקודם, נשתמש באינטגרל המתאים מדף הנוסחאות:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

ונקבל:

$$\Longrightarrow U = \frac{V\hbar c}{\pi^2}\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^4\cdot\frac{\pi^4}{15} = V\cdot\frac{8\pi h}{c^3}\cdot\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\cdot\frac{\pi^4}{15}$$

כאשר הכפלנו וחילקנו ב-$\hbar c$ והמרנו ל-h כדי לקבל (עד כדי הכפלה בנפח המהוד V) בדיוק מה שכבר קיבלתם בתרגיל בית 6 (שאלה מספר 1), שם ביצעתם אינטגרציה על פני כל התדרים של צפיפות האנרגיה הממוצעת ליח' נפח וליח' תדר של קרינת גוף שחור (שזה למעשה מה שיש לנו כאן).

מכאן ניתן לקבל את קיבול החום בנפח קבוע V על ידי גזירה של הביטוי שהתקבל לפי הטמפ':

$$C_v = \frac{dU}{dT} = V\cdot\frac{8\pi h}{c^3}\cdot\frac{d}{dT}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\cdot\frac{\pi^4}{15} = V\cdot\frac{32\pi^5 h}{15c^3}\cdot\left(\frac{k_B}{h}\right)^4\cdot\boldsymbol{T^3}$$

קיבלנו שתלות קיבול החום של גז הפוטונים בטמפ' הולכת כמו T^3. תלות זו מזכירה לנו את התלות שראינו עבור קיבול החום הפונוני בטמפ' נמוכות ובקירוב אורך גל ארוך! (מודל דבאי)

עובדה זו איננה מפתיעה שכן בשני המקרים מדובר בחלקיקים בוזונים בעלי פוטנציאל כימי 0, וכן ראינו בתרגיל כיתה 13 שגם יחס הנפיצה של הפונונים הינו ליניארי (כמו של הפוטונים) בקירוב אורך גל ארוך, ולכן צפיפות המצבים שלהם זהה עד כדי קבועים (מהירות הפאזה, הקיטובים האפשריים וכו') ותתקבל תלות זהה של קיבול החום בטמפ'.

ד. נחלק את הביטוי שקיבלנו עבור האנרגיה הממוצעת הכוללת של גז הפוטונים U במספר הפוטונים הממוצע N, ונקבל שהאנרגיה הממוצעת פר פוטון במהוד הינה:

$$\frac{U}{N} \cong \frac{V\cdot\frac{8\pi h}{c^3}\cdot\left(\frac{k_BT}{h}\right)^4\cdot\frac{\pi^4}{15}}{2.404\cdot\frac{V}{\pi^2}\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3} = \frac{V\cdot\frac{8\pi}{8\pi^3\hbar^3c^3}\cdot(k_BT)^4\cdot\frac{\pi^4}{15}}{2.404\cdot\frac{V}{\pi^2}\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3} = \frac{\frac{\pi^4}{15}}{2.404}\cdot k_BT \cong 2.701\cdot k_BT$$

ממשפט החלוקה השווה (כאשר לכל פוטון בגז 2 דרגות חופש), היינו מצפים לקבל:

$$\frac{U}{N} = k_BT$$

עם זאת, קיבלנו שהאנרגיה הממוצעת פר פוטון במהוד גדולה מביטוי זה כמעט פי 3!

הסיבה לפער טמונה בעובדה שמשפט החלוקה השווה מניח כי מספר המצבים האפשריים גדול משמעותית ממספר הפוטונים שיכולים לאכלס אותם, מה שמוביל לאנרגיה ממוצעת נמוכה יותר פר פוטון. דרך אחרת (ריגורוזית יותר) לומר זאת היא שבגבול הקלאסי הזה, אורך הגל התרמי של הפוטונים קטן משמעותית מהמרחק ביניהם במרחב, כלומר:

$$\lambda_T^{photon} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} = \frac{L}{N^{1/3}}$$

ולכן הם מתנהגים כגז קלאסי כפי שראינו במהלך הקורס.

בבעיה שלנו לעומת זאת, מה שקיבלנו מרמז על כך ש-"המרחק" בין הפוטונים במהוד הינו מסדר הגודל של אורך הגל התרמי שלהם, ולכן עלינו לקחת בחשבון תופעות קוונטיות שבגינן האנרגיה הממוצעת פר פוטון נעשית גדולה יותר. [ראה סעיף הבא]

ה. הצבה של טמפ' החדר בביטוי הנתון לאורך הגל התרמי תניב:

$$\lambda_{T=300K}^{photon} \cong \frac{0.51}{300} = 1.7 \cdot 10^{-3}\ [cm]$$

מתוצאת סעיף ב', הביטוי לצפיפות הפוטונים במהוד הינו:

$$n = \frac{N}{V} = 2.404 \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$$

הצבה של טמפ' החדר והקבועים הפיזיקליים בביטוי זה תניב:

$$n = \frac{N}{V} \approx 5.48 \cdot 10^{14}\ [m^{-3}] = 5.48 \cdot 10^{8}\ [cm^{-3}]$$

נובע מכאן שהמרחק הממוצע בין פוטונים במהוד נתון על ידי:

$$n^{-1/3} \cong 1.22 \cdot 10^{-3}\ [cm]$$

והיחס המתקבל בין אורך הגל התרמי של הפוטונים במהוד לבין המרחק הממוצע ביניהם הינו מסדר גודל של 1 (ובפרט אינו קטן קטן מ-1), וערכו שווה ל:

$$n^{1/3} \cdot \lambda_{T=300K}^{photon} \approx 1.39$$

משמעות הדבר היא שהקירוב של גז הפוטונים כגז קלאסי **אינו תקף** ויש לקחת בחשבון את אופיים הקוונטי של הפוטונים בבעיה.

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27}kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\ J\ K^{-1}mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23}J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11}m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^8 m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = (1 - \cos(2a))/2$
$\cos^2 a = (1 + \cos(2a))/2$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = (e^{ia} + e^{-ia})/2$
$\sin(a) = (e^{ia} - e^{-ia})/(2i)$
Hypergeometric Identities
$\cosh(a) = (e^a + e^{-a})/2$
$\sinh(a) = (e^a - e^{-a})/2$
$\mathrm{sech}(a) = \cosh^{-1}(a)$
$\mathrm{csch}(a) = \sinh^{-1}(a)$
$\tanh(a) = \sinh(a) / \cosh(a)$
$\coth(a) = \cosh(a) / \sinh(a)$
$\sinh'(a) = \cosh(a)$
$\tanh'(a) = \mathrm{sech}^2(a)$
$\coth'(a) = -\mathrm{csch}^2(a)$

אינטגרליים שימושיים:

Gaussian Distribution
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ תוחלת μ סטיית תקן σ

Gaussian Integral $\alpha > 0$
$\int_a^b e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$\boldsymbol{n}$	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$\boldsymbol{\Gamma(n)}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2

Polylogarithm

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^{\alpha x} - 1} dx \equiv \frac{1}{\alpha^{n+1}} J(n), \quad n > 0$$

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{J(n)}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$2\zeta(3) \approx 2.404$	$\frac{\pi^4}{15}$	$24\zeta(5) \approx 24.886$	$\frac{8\pi^6}{63}$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{I(n)}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$