תרגיל בית מספר 4: פקטור בולצמן, פונקציות חלוקה, התפלגויות ומשפט החלוקה השווה

שאלה 1: פקטור בולצמן

במערכת יש שלושה אתרים, ובכל אתר יש חלקיק שיכול להימצא ברמות אנרגיה שונות. רמות האנרגיה האפשריות באתר הראשון הן $m_1\epsilon_1$, בשני $m_2\epsilon_2$ ובשלישי $m_3\epsilon_3$ כאשר כל ה m_i מספרים שלמים בין 0 לאינסוף.

האנרגיה הכוללת של המערכת היא סכום האנרגיות בכל האתרים.

א. מה האנרגיה של מצב מיקרו כלשהו של המערכת?
ב. רשמו את פונקציית החלוקה של המערכת.
ג. מה האנרגיה הממוצעת של המערכת?
ד. מצאו את קיבול החום של המערכת, שרטטו אותו עבור כפונקציה של הטמפרטורה עבור $\epsilon_1 = 5[meV]$, $\epsilon_2 = 7[meV]$ ו $\epsilon_3 = 10[meV]$.
ה. בהנחה שכל ה ϵ_i הם מאותו סדר גודל, מה התנאי על הטמפרטורה בקירוב טמפרטורות גבוהות? מהו התנאי בקירוב טמפרטורות נמוכות?
ו. האם החוק השלישי של התרמודינמיקה מתקיים בגבול הטמפרטורות הנמוכות? איך מתנהג קיבול החום בגבול הטמפרטורות הגבוהות? האם אתם יכולים להסביר את ההתנהגות הזו? (חשבו לאיזו מערכת שאתם מכירים יש התנהגות כזו, רמז – הסתכלו על רמות האנרגיה).

שאלה 2: התפלגות מקסוול-בולצמן והגז האידיאלי

בתרגול ראיתם את התפלגות מקסוול בולצמן עבור חלקיקים חופשיים:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_b T}}$$

א. כעת נסתכל לעל ההתפלגות המהירויות במימד אחד, ננחש שפונקציה פילוג הינה מהצורה הבאה

$$g(v_x) \sim e^{-\frac{m v_x^2}{2k_b T}}$$

חשבו את קבוע הנרמול של הפילוג

ב. חשבו את הגדלים הבאים $\langle v_x \rangle, \langle |v_x| \rangle, \langle v_x^2 \rangle$ כאשר הסוגרים המשולשים מציינים מיצוע על המהירויות

ג. בצעו מעבר מקואורדינטות קרטזיות לקואורדינטות כדוריות. קבלו ביטוי עבור פילוג גודל המהירות $f(v)$

ד. חשבו את הגדלים הבאים $\langle v \rangle, \langle v^2 \rangle$

ה. השתמשו במשפט החלוקה השווה בכדי לחשב את הגודל $\langle v^2 \rangle$ הפעם מבלי לחשב אינטגרליים.

ו. חשבו עבור איזה גודל המהירות פילוג הסתברות מקבל את ערכו המקסימאלי. ציירו את הפילוג וסמנו על גבי הגרף מהירות שמצתם, מהירות הממוצע ומהירות RMS (ראו למטה את ההגדרה)

ז. נגדיר מהירות RMS כ-

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

חשבו מהירויות RMS עבור גזים הבאים H_2, O_2, He בטמפרטורת חדר $(T = 293K)$

הערה: עזרו בטבלת האינטגרלים בסוף הגיליון

שאלה 3:קפיץ ודיפול

נתונים שני גופים בעלי מסה m_1 ו m_2. הגוף הראשון מחובר לקצה של קפיץ שקצהו האחר מקובע לנקודה x_a והשני לקצה של קפיץ שקצהו האחר מקובע לנקודה x_b. קבוע הקפיץ של שני הקפיצים הוא k (הגופים לא מחוברים ביניהם). המערכת נמצאת בטמפרטורה T, והבעיה חד ממדית וקלאסית.

א. מהן דרגות החופש בבעיה?
ב. חשבו את פונקציית החלוקה של המערכת.
ג. מצאו את האנרגיה הממוצעת של המערכת מתוך פונקציית החלוקה. האם ניתן היה לקבל תשובה זו גם משיקולים פשוטים יותר? הסבירו.
ד. חשבו את צפיפות ההסתברות למצוא את החלקיקים עם תנעים p_1 ו p_2 ובמיקומים x_1, x_2 בהתאמה? כלומר חשבו את $\rho(p_1, p_2, x_1, x_2)$. כעת חשבו את צפיפות ההסתברות למצוא את החלקיק הראשון במיקום x_1 וגם את השני במיקום x_2, כלומר $\rho(x_1, x_2)$.
ה. חשבו את צפיפות ההסתברות $\rho(x_1)$ ואת $\rho(x_2)$.
ו. חשבו את המרחק הממוצע בין החלקיקים.
ז. כעת נתון כי הגוף הראשון טעון במטען חיובי $+q$ והגוף השני במטען שלילי $-q$. במרחב כולו שורר שדה חשמלי אחיד $\vec{E} = E\hat{x}$, ונתון כי הפוטנציאל שווה אפס בראשית. החלקיקים נתונים להשפעה השדה החשמלי, אך לא מבצעים כל אינטראקציה ביניהם. מה פונקציית החלוקה כעת?
ח. הדיפול החשמלי מוגדר על ידי $q(x_1 - x_2)$. מצאו את הממוצע של הדיפול החשמלי. האם הממוצע תלוי בטמפרטורה? הסבירו.

אינטגרלים שימושיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n-1!$$

$\boldsymbol{n}$	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$\boldsymbol{\Gamma(n)}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}} \quad \alpha > 0 \; and \; n \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}} & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{I(n)}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$