# אלקטרוניקה פיזיקלית 044124

# סמסטר אביב 2020

# מועד א' - זום

**<u>הנחיות</u>**

1. משך הבחינה ־ שלוש שעות.

2. בבחינה 3 שאלות. בידקו כי ברשותכם 5 עמודים כולל עמוד זה.

3. ניתן להשתמש בכל החומרים המופיעים באתר המודל של הקורס וכן במחשבון.

5. יש להעלות את הבחינה הסרוקה למטלה המוגדרת באתר המודל של הקורס.

6. כיתבו בכתב יד ברור.

7. תשובות לא מנומקות לא תתקבלנה.

8. אנא ודאו שרשמתם את מספר תעודת הזהות על מחברת הבחינה (לצורך העניין הדפים בהם השתמשתם).

9. משקל טופס זה הינו 60% מציון הבחינה הכולל כאשר 40% הנותרים יתקבלו ע״י בחינה בע״פ ע״י סגל הקורס.

## **שאלה מספר 1 (30 נקודות):**

נתונה שכבה דקה של המל״מ GaAs כך שעובי השכבה קטן מאורך הגל של האלקטרונים בשכבה.

א. **(5 נק')** – עבור אלקטרונים הנמצאים סביב המינימום של פס ההולכה $E_{\min}$, רשמו ביטוי לצפיפות המצבים של האלקטרונים.

ראינו בהרצאה ובתרגול שיחס הנפיצה קרוב לקצות הפסים הוא בקירוב טוב פרבולי:

$$E(k) \approx E_{\min} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}}$$

בתרגול ראינו שעבור שכבה דו-מימדית מתקבלת צפיפות מצבים שאינה תלויה באנרגיה:

$$g(E) = \begin{cases} 0, E < E_{\min} \\ \dfrac{m_{eff}}{\pi\hbar^2}, E \geq E_{\min} \end{cases}$$

למהדרין: בציר העובי בו האלקטרונים כלואים אמנם מתקבל מבנה של בור חד-מימדי, אולם אנו מתייחסים לרמה הנמוכה ביותר בבור זה.

ב. **(5 נק')** – אלקטרון מוזרק לשכבת ה-GaAs ממגע קטן כך שפונקציית הגל של האלקטרון יכולה להיות מתוארת באמצעות חבילת גלים שבמרחב הממשי היא בקירוב טוב גאוסיאן ברוחב $5[nm]$. בהנחה שאין פיזורים והאלקטרון נשאר במינימום של הפס, ציירו איכותית את חבילת הגלים אחרי מרחק התקדמות ארוך. איך ישתנה הרוחב של החבילה? הסבירו.

ראינו שעבור יחסי נפיצה שאינם ליניארים, חבילות גלים נוטות להתרחב מכיוון שרכיבי תדר מרחבי (k) שונים מתקדמים במהירויות שונות. במקרה הנתון יחס הנפיצה הוא פרבולי ולכן חבילת הגלים תתרחב עם הזמן.


כעת מחליפים את השיכבה בשכבת גרפן (שכבה דו-מימדית מאטומי פחמן) עם יחס נפיצה

$$E = \hbar v k \text{ עם } v = 10^6[\frac{m}{s}]$$

ג. **(5 נק')** –עבור אלקטרון המוזרק לגרפן במהירות $10^6[\frac{m}{s}]$ (מהירות החבורה הממוצעת של חבילת הגלים) חשבו את מהירות החבורה של חבילת הגלים של האלקטרון אחרי זמן של $1[ns]$ תחת השפעת שדה חשמלי של $1[\frac{kV}{cm}]$ בהנחה שאין פיזורים.

בהרצאה/תרגול ראינו שמהירות החבורה מוגדרת באופן הבא:

$$v_g \triangleq \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk}$$

עבור גרפן נקבל:

$$v_g \triangleq \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar}\frac{d}{dk}(\hbar v k) = v$$

כלומר שמהירות החבורה של האלקטרונים בגרפן אינה תלויה בתנע!

עוד ראינו שמתקיים הקשר הבא:

$$\hbar\frac{dk}{dt} = F = -e\varepsilon$$

ראינו שאינטגרציה על ביטוי זה תיתן:

$$dk = -\frac{e\varepsilon}{\hbar}dt \Rightarrow k = -\frac{e\varepsilon}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt + k_0 = -\frac{e\varepsilon}{\hbar}t + k_0$$

מכאן שהשדה החשמלי משנה את התנע עם הזמן. אולם היות ומהירות החבורה אינה תלויה בתנע, נקבל שהאלקטרון לא יאיץ תחת השדה ומהירותו תישאר $10^6[\frac{m}{s}]$ בכל זמן וספציפית גם אחרי ננו-שנייה אחת.

ד. **(5 נק')** – כעת נתון שאלקטרון מוזרק לשכבת הגרפן ממגע קטן כך שפונקציית הגל של האלקטרון יכולה להיות מתוארת באמצעות חבילת גלים שבמרחב הממשי היא בקירוב טוב גאוסיאן ברוחב $5[nm]$. בהנחה שאין פיזורים והאלקטרון נשאר במינימום של הפס, ציירו איכותית את חבילת הגלים אחרי מרחק התקדמות ארוך. איך ישתנה הרוחב? הסבירו.

היות וכעת יחס הנפיצה הוא ליניארי, פונקציית הגל של האלקטרון תשמור על צורתה בכל זמן ולא תתרחב!

ה. **(5 נק')** – רשמו את הביטוי לצפיפות המצבים בגרפן על סמך יחס הנפיצה הנתון.

שכבת הגרפן היא דו-מימדית ויחס הנפיצה ליניארי. במצב זה ראינו שמספר המצבים הוא:

$$N(k) = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{\pi k^2}{(\frac{\pi}{L})^2} = \frac{k^2\cdot L^2}{2\pi}$$

כאשר לקחנו רק רבע משטח המעגל עקב התחשבות בניוון של המצבים בכל רביע, הכפלנו ב-2 על מנת לקחת בחשבון את הספין של האלקטרונים ולבסוף חילקנו בשטח אותו תופס כל מצב. מספר המצבים ליחידת שטח יהיה:

$$G(E) = \frac{1}{L^2}\cdot\frac{(\frac{E}{\hbar v})^2\cdot L^2}{2\pi} = \frac{E^2}{2\pi\hbar^2 v^2}$$

לבסוף, צפיפות המצבים ליחידת אנרגיה וליחידת שטח תהיה:

$$g(E) = \frac{dG(E)}{dE} = \frac{E}{\pi\hbar^2 v^2}$$

כלומר שקיבלנו צפיפות מצבים ליניארית!

ו. **(5 נק')** – חשבו את אנרגיית פרמי (בטמפרטורה $T=0$) בשכבת הגרפן אם ידוע כי ריכוז האלקטרונים בשכבה הינו $10^{12}[cm^{-2}]$.

נתון לנו ריכוז האלקטרונים ליחידת שטח וכן שהטמפרטורה היא אפס. מכאן שהתפלגות פרמי-דיראק הופכת לפונקציית מדרגה ונקבל:

$$n = \int_0^\infty g(E)f_{FD}(E)dE = \int_0^{E_F} g(E)dE = \int_0^{E_F}\frac{E}{\pi\hbar^2 v^2}dE = \frac{E^2}{2\pi\hbar^2 v^2}\Big|_0^{E_F} = \frac{E_F^2}{2\pi\hbar^2 v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_F = \sqrt{2\pi\hbar^2 v^2 n} = \sqrt{2\pi\cdot 1.054^2\cdot 10^{-68}[J^2\cdot s^2]\cdot 10^{12}[m^2\cdot s^{-2}]\cdot 10^{16}[m^{-2}]} = 2.641\cdot 10^{-20}[J] = 0.165[eV]$$

**<u>שאלה מספר 2 (40 נקודות):</u>**

נתונה מערכת של חלקיקים חופשיים בעלי ספין חצי הנמצאים בתיבה תלת-מימדית בגודל $L \times L \times L$. אנרגיית החלקיקים נתונה ע"י הביטוי:

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

א. **(7 נק')** - בהנתן שתנאי השפה על פאות התיבה מחזוריים, מהו מספר המצבים בעלי אנרגיה $E(\vec{k}) \le E_0$ ?

**רמז:** עבור תנאי שפה מחזוריים ראינו מגלי בלוך שפונקציית הגל מקיימת: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

חשבו כיצד תנאי זה מתחבר למרחק בין פאות התיבה $L$.

נתון שפונקציות הגל פרופורציוניות לביטוי $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. על מנת שפונקציות הגל יהיו מחזוריות בין $[0, L]$ נדרוש שערכם של פונקציית הגל באפס יהיה שווה לערכה ב- $L$. נעיר כי דרישה זו תקפה לכל ציר בנפרד. הביטוי $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ חוזר על עצמו כל $2\pi$. על מנת שנקבל את דרישה זו נרצה שיתקיים התנאי הבא (עבור מימד איחד):

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k\cdot L = 2\pi n \Rightarrow k = \frac{2\pi n}{L}$$

היות וישנם שלושה מימדים לבעיה, תנאי זה מתורגם לתנאי הבא:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

כאשר $n_x, n_y, n_z$ הם מספרים שלמים. נשים לב שכעת נפח כל מצב הוא $V_{state} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$. נפח זה גדול פי 8 מהנפח אותו ראינו בהרצאה/תרגול אולם למעשה הוא לא שונה. הגדלת הנפח חוסכת לנו את הטיפול בניוון אותו אנו בד"כ עושים (למשל בתלת-מימד חלוקה ב-8, בדו-מימד חלוקה ב-4 וכו'). הנפח הכולל יהיה:

$$V_{total} = \frac{4\pi}{3}k^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

כעת נוכל לחלק את הנפחים ולקבל את מספר המצבים הכולל כאשר נשים לב שהיות וטיפלנו כבר בניוון ע"י הגדלת נפח כל מצב, עלינו להכפיל רק ב-2 עקב הספין:

$$N(E) = 2\cdot\frac{V_{total}}{V_{state}} = 2\cdot\frac{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{(2mE)^{3/2} L^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

ב. **(7 נק')** - חשבו את צפיפות המצבים ליח' נפח.

עלינו לנרמל את מספר המצבים בנפח ואז לגזור לפי האנרגיה. נקבל:

$$g(E)=\frac{1}{L^3}\frac{dN(E)}{dE}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{3\pi^2\hbar^3}=\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E}}{2\pi^2\hbar^3}$$

כעת נתונה מערכת המכילה $N$ חלקיקים בעלי ספין חצי המצויים בשדה מגנטי $B$. נתון כי הטמפרטורה של המערכת היא $T=0$. אנרגיית החלקיקים נתונה ע״י הביטוי הבא:

$$E(\vec{k})=\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu_0\sigma B$$

כאשר $\sigma=\begin{cases}1, spin=1/2\\ -1, spin=-1/2\end{cases}$ (כלומר שערך זה תלוי בספין של החלקיק) ו- $\mu_0$ הינו קבוע כלשהו (זוהי לא מסה אפקטיבית!). עוד נתון כי $\mu_0B>0$.

ג. **(7 נק')** - חשב את צפיפות המצבים ליח' נפח.
**רמז:** התייחסו לכל ספין בנפרד.

נשים לב שכעת אנו מקבלים אנרגיה שונה לכל ספין! משמעות הדבר שגם את צפיפות המצבים ליח' נפח נצטרך לפצל עבור ספינים שונים. מכיוון שהשדה המגנטי יוצר רק הזזה באנרגיה ההתחלתית של החלקיק (כלומר עבור $k=0$) נקבל את התשובה מהסעיף הקודם עד כדי חלוקה ב-2 (מכיוון שכעת אנו מתייחסים לכל ספין בנפרד) וכן נכלול את ההזזה באנרגיה:

$$g_\uparrow(E)=\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E+\mu_0B}}{4\pi^2\hbar^3}$$
$$g_\downarrow(E)=\frac{(2m)^{3/2}\sqrt{E-\mu_0B}}{4\pi^2\hbar^3}$$

ד. **(7 נק')** - מצאו קשר בין אנרגית פרמי לצפיפות החלקיקים ($n\triangleq N/L^3$) וחשבו את המגנטיזציה הכוללת הנתונה ע״י $M\triangleq\mu_0(N_\uparrow-N_\downarrow)$.

היות ו- $T=0$ פונקציית פרמי-דיראק הופכת למדרגה. נחשב את צפיפות החלקיקים לפי הגדרה:

$$n=\int g(E)f_{FD}(E)dE=\int_{-\mu_0B}^{E_F}g_\uparrow(E)dE+\int_{\mu_0B}^{E_F}g_\downarrow(E)dE=\frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\int_{-\mu_0B}^{E_F}\sqrt{E+\mu_0B}dE+\frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\int_{\mu_0B}^{E_F}\sqrt{E-\mu_0B}dE=$$
$$=\frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\cdot\frac{2}{3}[(E+\mu_0B)^{3/2}|_{-\mu_0B}^{E_F}+(E-\mu_0B)^{3/2}|_{\mu_0B}^{E_F}]=\frac{(2m)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}[(E_F+\mu_0B)^{3/2}+(E_F-\mu_0B)^{3/2}]$$

האיבר השמאלי מייצג את צפיפות החלקיקים בעלי ספין חצי בעוד שהאיבר הימני מייצג את צפיפות החלקיקים בעלי ספין מינוס חצי (חישבנו אותם ביחד). לכן לפי הגדרת המגנטיזציה הכוללת יתקיים:

$$M\triangleq\mu_0(N_\uparrow-N_\downarrow)=\frac{\mu_0(2m)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}[(E_F+\mu_0B)^{3/2}-(E_F-\mu_0B)^{3/2}]$$

ה. **(7 נק')** - כעת נתון כי השדה המגנטי הפועל על החלקיקים חלש מאוד ($B\ll\frac{E_F}{\mu_0}$). מצאו את הביטוי לאנרגיית פרמי והשוו אותו לביטוי לאנרגיית פרמי ללא שדה מגנטי. הסבירו את התוצאה אותה קיבלתם.

בהנחה ו- $B \ll \frac{E_F}{\mu_0}$ נקבל שיתקיים :

$$n = \frac{(2m)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}[(E_F+\mu_0 B)^{3/2}+(E_F-\mu_0 B)^{3/2}] \approx \frac{(2m)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}\cdot 2(E_F)^{3/2} = \frac{(2mE_F)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_F = \frac{(3\pi^2\hbar^3 n)^{2/3}}{2m}$$

ביטוי זה זהה לביטוי עבור רמת פרמי במקרה שבו אין שדה. המשמעות הפיזיקלית היא שהשדה המגנטי חלש מאוד כך שהשינוי המתקבל עבור רמת פרמי זניח.

ו. **(5 נק')** - נגדיר את התגובה של המערכת לשדה מגנטי בתור $\chi \triangleq \frac{\partial M}{\partial B}$. מצאו את התגובה של המערכת בהנחה והשדה המגנטי חלש מאוד ($B \ll \frac{E_F}{\mu_0}$). מהי המשמעות של הביטוי אותו קיבלתם מבחינת התנהגות המצבים?

עלינו לגזור את הביטוי למגנטיזציה (לפי השדה המגנטי) אותו קיבלנו בסעיף קודם ולבדוק מה קורה עבור שדות מגנטים חלשים. יתקיים :

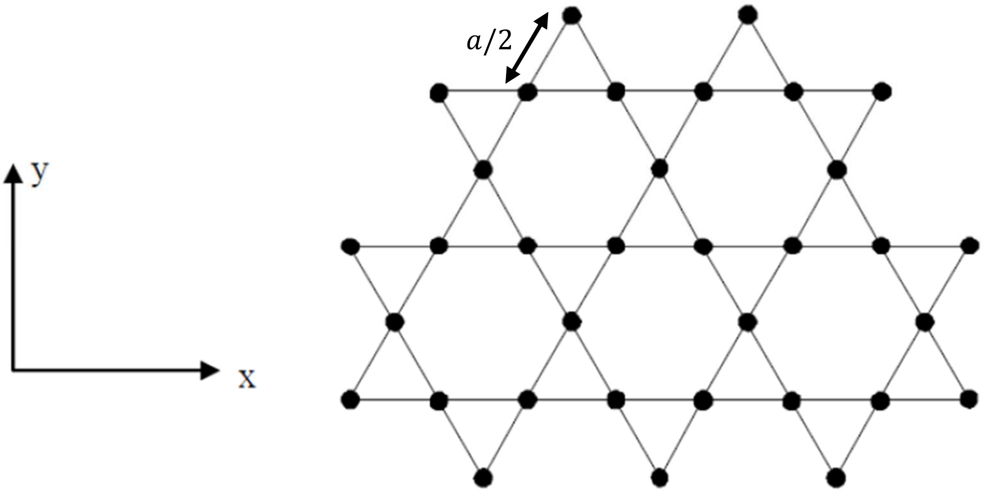
$$\frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\mu_0(2m)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}\frac{3}{2}\mu_0[(E_F+\mu_0 B)^{1/2}+(E_F-\mu_0 B)^{1/2}] \approx \frac{\mu_0^2(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\cdot 2\sqrt{E_F} =$$

$$= \frac{\mu_0^2(2m)^{3/2}\sqrt{E_F}}{2\pi^2\hbar^3} = \mu_0^2 g(E_F)$$

עבור שדות מגנטים חלשים קיבלנו שהתגובה של המערכת פרופורציונית לצפיפות המצבים ברמת פרמי (ובטמפרטורות גדולות מ-0 גם למצבים שמסביב לרמת פרמי). המצבים שמתחת לרמת פרמי מכילים חלקיקים עם שני סוגי הספין ולכן מצבים אלו אינם משתתפים בביטוי.

### **שאלה מספר 3 (30 נקודות):**

נתון סריג דו-מימדי (ראו איור מצורף) כאשר כל משולש בסריג הינו משולש שווה-צלעות.



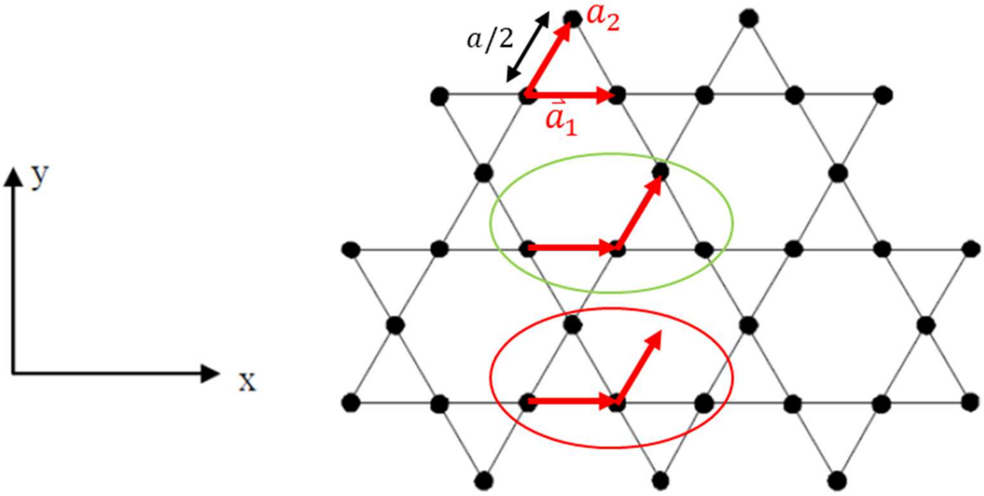

א. **(5 נק')** - האם הסריג הינו סריג ברווה? נמקו!

ניתן לראות כי הסריג הנ"ל אינו סריג ברווה מכיוון שמכל נקודה לא רואים את אותו הסריג.

לחילופין, ניתן להראות שעבור צמד וקטורים פרימיטיביים, מתקבלת סתירה בדמות הקומבינציות הליניאריות המותרות. לדוגמה, נבחר את הוקטורים

$\vec{a}_1=\frac{a}{2}\hat{x}, \vec{a}_2=\frac{a}{4}\hat{x}+\frac{\sqrt{3}a}{4}\hat{y}$ . באיור המצורף ניתן לראות את הוקטורים הפרימיטיבים הנ"ל

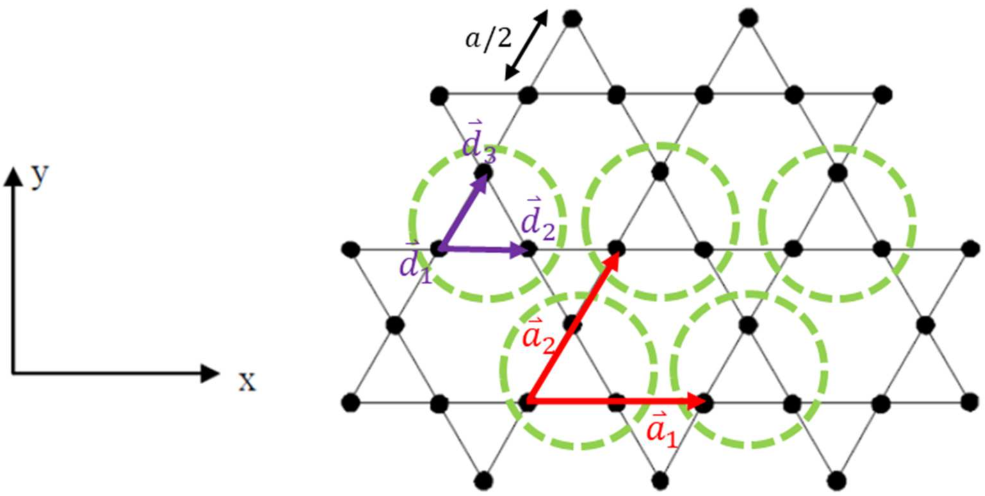
וכן דוגמה לסתירה בקומבינציות הליניאריות המותרות:



ניתן לשים לב כי המצבים המוקפים באדום ובירוק הם למעשה אותן קומבינציה ליניארית של שני הוקטורים, אולם רק אחת מהן מסתיימת בהגעה לאתר סריג בעוד שהשנייה מגיעה לחלל ריק!

ב. **(10 נק')** - מצאו את הוקטורים הפרימיטיביים ואת וקטורי הבסיס (אם ישנם) של הסריג. סמנו על גבי הציור של הסריג את הוקטורים הפרימיטיבים, וקטורי הבסיס (אם ישנם) ואת תא היחידה אותו בחרתם (באם יש צורך באחד).

היות והסריג אינו סריג ברווה, עלינו למצוא תא יחידה אשר יכלול מספר אטומים ואשר יהפוך את הסריג לסריג ברווה. כלומר שעלינו למצוא שני סטים: וקטורים פרימיטיביים ווקטורי בסיס. באיור המצורף ניתן לראות דוגמה למציאת תא יחידה המכיל 3 אטומים וצורתו צורת משולש (קו ירוק מקווקו). האיור כולל גם את הוקטורים הפרימיטיביים שנבחרו (צבע אדום) לצד וקטורי הבסיס (צבע סגול).




במקרה זה הוקטורים הפרימיטיבים הם:

$$\vec{a}_1 = a\hat{x}, \vec{a}_2 = \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y}$$

וקטורי הבסיס הם:

$$\vec{d}_1 = 0\hat{x}, \vec{d}_2 = \frac{a}{2}\hat{x}, \vec{d}_2 = \frac{a}{4}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}a}{4}\hat{y}$$

בשלב זה נציין שקיימות תשובות נכונות נוספות (למשל בחירת תא יחידה בצורת משולש הפוך, בחירה שונה של וקטורים פרימיטיביים ווקטורי בסיס וכו'). תשובה זו מהווה דוגמה לאיך נראית תשובה נכונה.

ג. **(5 נק')** - האם $\vec{a}_1 = a\hat{x}, \vec{a}_2 = a\hat{y}$ הם וקטורים פרימיטיביים? הסבירו!

היות והסריג שלנו הינו סריג משולש עם בסיס, הוקטורים הנתונים אינם מתאימים לשימוש בתור וקטורים פרימיטיביים שכן הם מתארים סריג בעל צורה מרובעת.

ד. **(10 נק')** - מצאו את וקטורי הסריג ההופכי (הפרימיטיביים) וציירו את אזור ברילואן הראשון (התייחסו רק לסריג ההופכי ולא לבסיס כזה או אחר).

התבקשנו למצוא את וקטורי הסריג ההופכי הפרימיטיביים. נסתמך אם כן על הוקטורים הפרימיטיבים שמצאנו בסעיף ב' של השאלה. במקרה של פתרון זה מדובר בוקטורים:

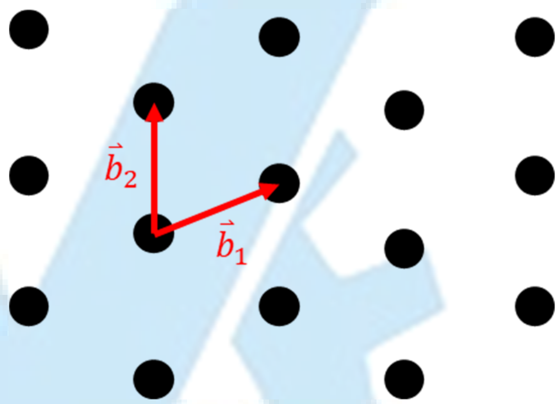
$$\vec{a}_1 = a\hat{x}, \vec{a}_2 = \frac{a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y}$$

היות ומדובר בסריג דו-מימדי, נגדיר לצורך נוחות את הוקטור $\vec{a}_3 = 1\hat{z}$. נעבוד לפי הגדרה:

$$\vec{b}_1 = 2\pi\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)} = 2\pi\frac{(\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y})\times\hat{z}}{a\hat{x}\cdot[(\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y})\times\hat{z}]} = 2\pi\frac{-\frac{a}{2}\hat{y}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{x}}{a\hat{x}\cdot[-\frac{a}{2}\hat{y}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{x}]} = 2\pi\frac{-\frac{a}{2}\hat{y}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{x}}{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}(-\hat{y}+\sqrt{3}\hat{x})$$

$$\vec{b}_2 = 2\pi\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{\vec{a}_2\cdot(\vec{a}_3\times\vec{a}_1)} = 2\pi\frac{\hat{z}\times a\hat{x}}{(\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y})\cdot(\hat{z}\times a\hat{x})} = 2\pi\frac{a\hat{y}}{(\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y})\cdot(a\hat{y})} = 2\pi\frac{a\hat{y}}{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\hat{y}$$

להלן דוגמה של הסריג ההופכי שהתקבל עם הוקטורים המתאימים:



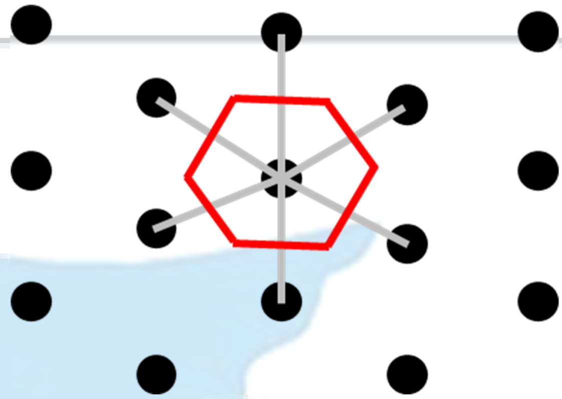

שימו לב שמדובר למעשה בסיבוב של 90 מעלות ביחס לסריג המקורי. למתקשים בלראות מדוע מדובר בסריג משולש, נכתוב את הוקטורים שמצאנו בצורה יותר נוחה:

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}(-\hat{y}+\sqrt{3}\hat{x}) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}(-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x}) = Const\cdot(-\frac{1}{2}\hat{y}+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x})$$

$$\vec{b}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\hat{y} = Const\cdot\hat{y}$$

ניתן לבדוק ולראות שאורך שני הוקטורים זהה וכן שהזוית בינהם היא 60 מעלות, כלומר שאכן מדובר בוקטורים פרימיטיבים אשר יוצרים סריג (הופכי) משולש.

כעת אנו מצוים בשלב בו אנו יכולים למצוא את אזור ברילואן הראשון לפי המתכון אותו ראינו בתרגול:



כאן כאן הציור טיפה עקום (כמו תקופת המבחנים הנוכחית) אבל ניתן לראות שאזור ברילואן הראשון הוא בעל צורת משושה.

## גדלים פיזיקליים שימושיים:

$$m_e = 9.1\cdot 10^{-31}[kg]$$
$$k_B = 1.38\cdot 10^{-23}[J/K]$$
$$h = 6.626\cdot 10^{-34}[J\cdot s]$$

## זהויות טריגונומטריות שימושיות:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$
$$\sin(\pi-a) = \sin(a)$$
$$\cos(\pi-a) = -\cos(a)$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}-a) = \cos(a)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-a) = \sin(a)$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\cos(a) = \frac{1}{2}[e^{ia}+e^{-ia}]$$
$$\sin(a) = \frac{1}{2i}[e^{ia}-e^{-ia}]$$