פיסיקליקה אלקטרונית

044124

גיליון 4

נבו עָדַנֵי

213228943

אליה אמיתי

213269251

19.02.2024

שאלה 1:

א. האנרגיה של מצב מיקרו כלשהו של המערכת היא:

$$E=\sum_i \epsilon_i m_i = m_1\epsilon_1+m_2\epsilon_2+m_3\epsilon_3$$

ב. פונקציית החלוקה היא:

$$Z=\sum_{i,j,k} e^{-\frac{E_i}{k_BT}}=\sum_{m_i=0}^{\infty}\sum_{m_j=0}^{\infty}\sum_{m_k=0}^{\infty} e^{-\frac{m_i\epsilon_1+m_j\epsilon_2+m_k\epsilon_3}{k_BT}}=$$

$$=\sum_{m_i=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\epsilon_1}{k_BT}}\right)^{m_i}\sum_{m_j=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\epsilon_2}{k_BT}}\right)^{m_j}\sum_{m_k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\epsilon_3}{k_BT}}\right)^{m_k}=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\frac{\epsilon_1}{k_BT}}}\frac{1}{1-e^{-\frac{\epsilon_2}{k_BT}}}\frac{1}{1-e^{-\frac{\epsilon_3}{k_BT}}}$$

כלומר, אם נסמן $\beta=\frac{1}{k_BT}$ נקבל:

$$Z=\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_1}}\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_2}}\frac{1}{1-e^{-\beta\epsilon_3}}$$

ומתקיים:

$$\ln(Z)=-\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_1}\right)-\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_2}\right)-\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_3}\right)$$

ג. האנרגיה הממוצעת נתונה ע"י:

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}[\ln(Z)]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_1}\right)+\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_2}\right)+\ln\left(1-e^{-\beta\epsilon_3}\right)\right]=$$

$$=\frac{\epsilon_1e^{-\beta\epsilon_1}}{1-e^{-\beta\epsilon_1}}+\frac{\epsilon_2e^{-\beta\epsilon_2}}{1-e^{-\beta\epsilon_2}}+\frac{\epsilon_3e^{-\beta\epsilon_3}}{1-e^{-\beta\epsilon_3}}\to$$

$$\to\langle E\rangle=\frac{\epsilon_1e^{-\beta\epsilon_1}}{1-e^{-\beta\epsilon_1}}+\frac{\epsilon_2e^{-\beta\epsilon_2}}{1-e^{-\beta\epsilon_2}}+\frac{\epsilon_3e^{-\beta\epsilon_3}}{1-e^{-\beta\epsilon_3}}$$

ד. קיבול החום הוא:

$$C=\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}=\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial T}=-\frac{1}{k_BT^2}\cdot\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}$$

נחשב את הנגזרת של אחת מהאנרגיות בנפרד ונציב:

$$\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\epsilon_1e^{-\beta\epsilon_1}}{1-e^{-\beta\epsilon_1}}\right]=\frac{\beta\epsilon_1\left(e^{-\beta\epsilon_1}-1\right)e^{-\beta\epsilon_1}-\beta\epsilon_1e^{-2\beta\epsilon_1}}{(1-e^{-\beta\epsilon_1})^2}=$$

$$=-\frac{\beta\epsilon_1e^{-\beta\epsilon_1}}{(1-e^{-\beta\epsilon_1})^2}$$

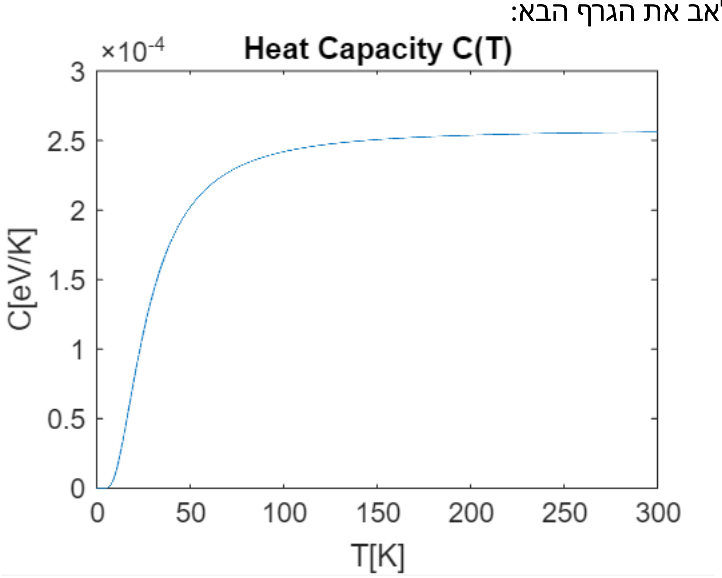
ולכן:

$$C(T)=\frac{1}{k_BT^2}\left(\frac{\epsilon_1^2e^{-\beta\epsilon_1}}{(1-e^{-\beta\epsilon_1})^2}+\frac{\epsilon_2^2e^{-\beta\epsilon_2}}{(1-e^{-\beta\epsilon_2})^2}+\frac{\epsilon_3^2e^{-\beta\epsilon_3}}{(1-e^{-\beta\epsilon_3})^2}\right)\quad\beta=\frac{1}{k_BT}$$

נצייר את הקיבול כפונקציה של הטמפרטורה עבור הערכים הבאים:

$$\epsilon_1 = 5[meV] \quad \epsilon_2 = 7[meV] \quad \epsilon_3 = 10[meV] \quad k_B = 8.6 \cdot 10^{-5}\left[\frac{eV}{K}\right]$$

קיבלנו במטלאב את הגרף הבא:



כאשר הקוד הוא:

```
k = 8.6e-5;
e1 = 5e-3;
e2 = 7e-3;
e3 = 10e-3;

T = linspace(0,300,10000);

f = (1./(k .* (T.^2))) .* (((e1*e1.*exp(-e1./(k.*T)))./((1 - exp(-
e1./(k.*T))).^2)) + ((e2*e2.*exp(-e2./(k.*T)))./((1 - exp(-
e2./(k.*T))).^2)) + ((e3*e3.*exp(-e3./(k.*T)))./((1 - exp(-
e3./(k.*T))).^2)));

figure(1);
plot(T,f);
title("Heat Capacity C(T)");
xlabel('T[K]');
ylabel('C[eV/K]');
```

ה. התנאי על הטמפרטורה בטמפרטורות גבוהות: $k_B T \gg \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

התנאי על הטמפרטורה בטמפרטורות נמוכות: $k_B T \ll \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

ו. החוק שלישי של התרמודינמיקה אומר שהאנטרופיה תשאף ל – 0 כאשר הטמפרטורה שואפת ל – 0. כמו כן, גם קיבול החום ישאף ל – 0 כאשר הטמפרטורה תשאף ל – 0.

נבדוק אם קיבול החום ישאף ל – 0:

$$C(T) = \underbrace{\frac{1}{k_B T^2}}_{\to\infty}\left(\frac{\overbrace{\epsilon_1^2 e^{-\beta\epsilon_1}}^{\to 0}}{\underbrace{(1-e^{-\beta\epsilon_1})^2}_{\to 1}} + \frac{\overbrace{\epsilon_2^2 e^{-\beta\epsilon_2}}^{\to 0}}{\underbrace{(1-e^{-\beta\epsilon_2})^2}_{\to 1}} + \frac{\overbrace{\epsilon_3^2 e^{-\beta\epsilon_3}}^{\to 0}}{\underbrace{(1-e^{-\beta\epsilon_3})^2}_{\to 1}}\right)$$

אמנם הביטוי השמאלי שואף לאינסוף, אף הוא שואף לשם ממש לאט ביחס לאקספוננט ולכן יתקיים: $C(T \to 0) = 0$.

עבור טמפרטורות גבוהות, מתקיים:

$$\lim_{T\to\infty} C(T) = 2.5 \cdot 10^{-4} \left[\frac{eV}{K}\right]$$

וניתן לראות שהמערכת היא כמו אוסילטור הרמוני.

שאלה 2:

א. נתונה לנו פונקציית פילוג מהצורה:

$$g(v_x) = A \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}}$$

נחשב את קבוע הנרמול (נסמן $\alpha = \frac{m}{2k_BT}$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v_x)dv_x = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha v_x^2} dv_x \underset{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}}{=} A \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

מכאן:

$$A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}$$

ב. נחשב את $\langle v_x \rangle$:

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 0$$

כאשר המעבר האחרון נובע מאינטגרל על פונקציה אי זוגית בקטע סימטרי.

נחשב את $\langle |v_x| \rangle$:

$$\langle |v_x| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |v_x| \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 2 \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} v_x \cdot e^{-\alpha v_x^2} dv_x =$$

$$\underset{\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot a^{-\frac{n+1}{2}}}{=} 2 \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\Gamma(1)}_{1} \cdot \alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}$$

ולכן:

$$\langle |v_x| \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{2k_BT}{\pi m}}$$

נחשב את $\langle v_x^2 \rangle$:

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot e^{-\alpha v_x^2} dv_x \underset{*}{=} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{8\alpha} = \frac{k_BT}{4m}$$

ולכן:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_BT}{4m}$$

ג. נעבור לכדוריות:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m}{2k_BT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(v, \theta, \varphi) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m}{2k_BT}v^2} \cdot v^2 \cdot \sin(\theta)$$

כאשר ניתן לראות שהכפלנו ביעקוביאן של קואורדינטות כדוריות.

ד. נחשב את $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\alpha v^2} dv = 4\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma(2)}_{1} \alpha^{-2} = 2\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

נחשב את $\langle v^2 \rangle$:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^4 \sin(\theta) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\alpha v^2} dv d\theta d\varphi =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v^4 \cdot e^{-\alpha v^2} dv\right)\left(\int_0^\pi \sin(\theta)\, d\theta\right) =$$

$$= 4\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \cdot \alpha^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{2\alpha}$$

ולכן:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2\alpha} = \frac{3k_BT}{m}$$

ה. לפי משפט החלוקה השווה, כל חלקיק בגרדת חופש אחת יקבל $\frac{1}{2}k_BT$ אנרגיה. האנרגיה היחידה היא אנרגיה קינטית ויש 3 דרגות חופש ולכן:

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3k_BT}{2} \rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3k_BT}{m}$$

ו. נחשב בעזרת נגזרת והשוואה ל -0:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\alpha v^2} \cdot v^2 \cdot \sin(\theta)\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(\theta) \cdot [2v - 2\alpha v^3] \cdot e^{-\alpha v^2}$$

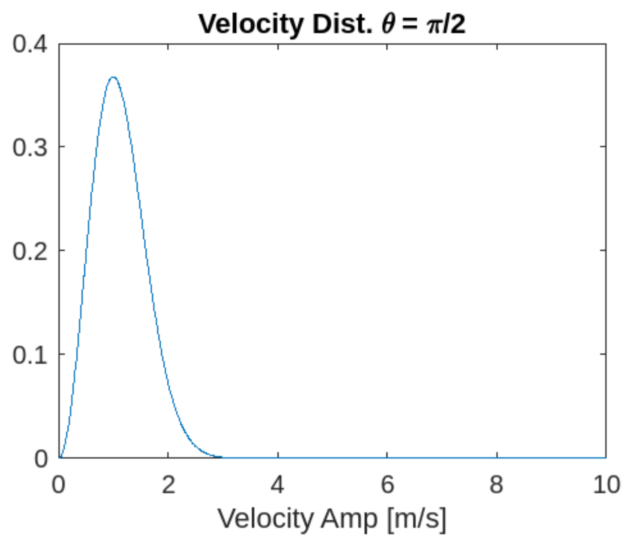
נשווה ל -0:

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin(\theta) \cdot [2v - 2\alpha v^3] \cdot e^{-\alpha v^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v - \alpha v^3 = 0 \rightarrow v^2 = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

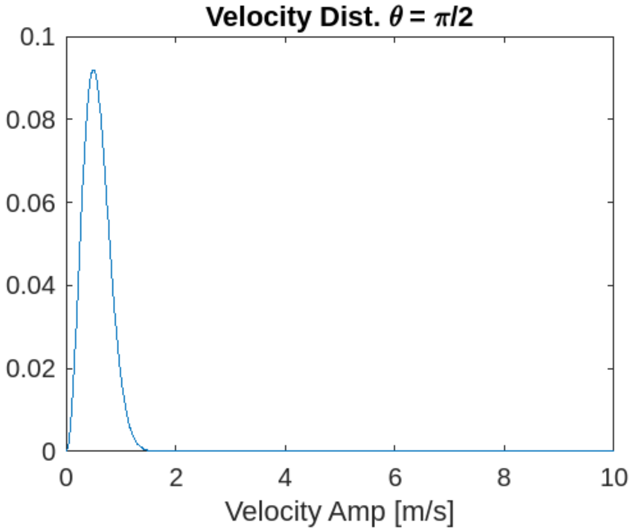
זה v שיתן מקסימום ל - $f(v)$.

הגרף של זה:



לקחנו $\alpha = 1$ וניתן לראות כי המקסימום מתקבל ב – 1 (כתבנו לשם כך קוד) ולכן החישוב שלנו נכון. נציין כי עשינו את החישוב עבור $\theta \neq 0$ כי עבור $\theta = 0$ הפילוג עצמו הוא 0 ואין לנו איך לחשב את המהירות. עשינו גם עבור $\alpha = 4$ וקיבלנו שהמקסימום מתקבל עבור $\frac{1}{2}$.

הנה הגרף:



כמו כן, קיבלנו שהממוצע של שמהירות $\langle v \rangle$ הוא 1.1284 עבור $\alpha = 1$ ואכן, מתקיים:

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha\pi}} \approx 1.1284$$

בנושף, קיבלנו עבור $\alpha = 1$ מהירות $v_{RMS} = 1.2247$ ואכן מתקיים:

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3\alpha}} \approx 1.2247$$

ז. הנוסחה נתונה ע"י:

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

כאשר m זו המסה המולרית של מולקולה של הגז (כלומר, $\frac{kg}{mol}$ – אם יש לנו מספר אבוגדרו של חלקיקים, מה המסה שלהם?).

המסה המולרית של כל אחת מהמולקולות שנתתם לנו היא:

$$\begin{cases} m_{H_2} = 2.016 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg}{mol}\right] \\ m_{O_2} = 32 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg}{mol}\right] \\ m_{He} = 4.0026 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg}{mol}\right] \end{cases}$$

ולכן:

$$v_{RMS_{H_2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_{H_2}}} \approx 2.47 \cdot 10^{-9} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_{RMS_{O_2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_{O_2}}} = 6.2 \cdot 10^{-10} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$v_{RMS_{He}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_{He}}} = 1.75 \cdot 10^{-9} \left[\frac{m}{s}\right]$$

שאלה 3:

א. יש שתי דרגות חופש בבעיה – המיקום של כל אחת מהמסות.

ב. האנרגיה של המערכת היא:

$$E=\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{2}k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)\rightarrow$$

$$\rightarrow Z=$$

$$=\sum_i e^{-\beta E_i}\underset{\text{רציף}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\beta\left[m(v_1^2+v_2^2)+k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)\right]}dx_1dx_2dv_1dv_2$$

$$==\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\beta mv^2}dv\right]^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\beta k(x-x_b)^2}dx\right]^2=\frac{2\pi}{\beta m}\cdot\frac{2\pi}{\beta k}=\frac{4\pi^2}{mk\beta^2}$$

ולכן:

$$Z=\frac{4\pi^2}{mk\beta^2}\rightarrow\ln(z)=\ln(4\pi^2)-\ln(mk)-\ln(\beta^2)$$

ג. נחשב את האנרגיה:

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}[\ln(Z)]=\frac{1}{\beta^2}\cdot 2\beta=\frac{2}{\beta}=2k_BT$$

היינו יכולים להגיע לזה גם לפי משפט החלוקה השווה – יש לנו 4 איברים בריבוע שאנרגיה ולכן על כל אחד מהם האנרגיה הממוצעת תקבל $\frac{1}{2}k_BT$ ובסה"כ: $2k_BT$.

ד. ראשית, נכתוב בכל מקום שכתוב בו $v_i\rightarrow\frac{p_i}{m}$ ונקבל:

$$\rho(x_1,x_2,p_1,p_2)=\frac{mk\beta^2}{4\pi^2}e^{-\frac{\beta}{2}\left[k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)+\frac{1}{m}(p_1^2+p_2^2)\right]}$$

הכוונה היא להסתברות השולית. נחשב בעזרת אינטגרל (כרגיל):

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{mk\beta^2}{4\pi^2}e^{-\frac{\beta}{2}k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta\cdot\frac{p_1^2+p_2^2}{2m}}dp_1dp_2=$$

$$=\frac{mk\beta^2}{4\pi^2}e^{-\frac{\beta}{2}k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}dp\right]^2}_{\frac{2m\pi}{\beta}}=$$

$$=\frac{m^2k\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta}{2}k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)}$$

ולכן:

$$\rho(x_1,x_2)=\frac{m^2k\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta}{2}k((x_1-x_a)^2+(x_2-x_b)^2)}$$

ה. נחשב את צפיפות ההסתברות של כל אחד מהמיקומים בנפרד:

$$\rho(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x_1,x_2)dx_2=\frac{m^2k\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta}{2}k(x_1-x_a)^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta}{2}k(x_2-x_b)^2}dx_2}_{\sqrt{\frac{2\pi}{k\beta}}}=$$

$$=m^2\sqrt{\frac{k\beta}{2\pi}}e^{-\frac{\beta}{2}k(x_1-x_a)^2}$$

ולכן:

$$\rho(x_1) = m^2\sqrt{\frac{k\beta}{2\pi}}e^{-\frac{\beta}{2}k(x_1-x_a)^2}$$

ומטעמי סימטריה:

$$\rho(x_2) = m^2\sqrt{\frac{k\beta}{2\pi}}e^{-\frac{\beta}{2}k(x_2-x_b)^2}$$

ו. המרחק בין החלקיקים מתואר ע"י: $d = x_2 - x_1$ ולכן:

$$\langle d\rangle = \langle x_2\rangle - \langle x_1\rangle = x_b - x_a$$

ז. כעת האנרגיה במערכת היא:

$$U = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{2}((x_1 - x_a)^2 + (x_2 - x_b)^2) - q(x_1 - x_a)E + q(x_2 - x_b)E$$

ולכן פונקציית העבודה היא:

$$Z =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta p_1^2}{2m}}e^{-\frac{\beta p_2^2}{2m}}e^{-\frac{\beta k}{2}(x_1-x_a)^2-q\beta E(x_1-x_a)}e^{-\frac{\beta k}{2}(x_2-x_b)^2+q\beta E(x_2-x_b)}\,dx_1dx_2dp_1dp_2$$

$$= \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}dp\right]^2}_{\frac{2\pi m}{\beta}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta k}{2}(x_1-x_a)^2-q\beta E(x_1-x_a)}dx_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta k}{2}(x_2-x_b)^2+q\beta E(x_2-x_b)}dx_2\right] \underset{\substack{x_1-x_a=x\\ x_2-x_b=y}}{=}$$

$$= \frac{2\pi m}{\beta}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta k}{2}x^2-q\beta x}dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta k}{2}y^2+q\beta y}dy\right] =$$

$$= \frac{2\pi m}{\beta}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overbrace{\left(\frac{\beta k}{2}x^2+q\beta x+\frac{(qE)^2\beta}{2k}\right)}^{\left(\sqrt{\frac{\beta k}{2}}x+qE\sqrt{\frac{\beta}{2k}}\right)^2}+\frac{(qE)^2\beta}{2k}}dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overbrace{\left(\frac{\beta k}{2}y^2-q\beta y+\frac{(qE)^2\beta}{2k}\right)}^{\left(\sqrt{\frac{\beta k}{2}}y-qE\sqrt{\frac{\beta}{2k}}\right)^2}+\frac{(qE)^2\beta}{2k}}dy\right] =$$

$$= \frac{2\pi m}{\beta}e^{\frac{(qE)^2\beta}{k}}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta k}{2}\left(x+\frac{qE}{k}\right)^2}dx\right]}_{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}}}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta k}{2}\left(y-\frac{qE}{k}\right)^2}dy\right]}_{\sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}}} = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\cdot\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{(qE)^2\beta}{k}}$$

ולכן פונקציית החלוקה היא:

$$Z = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\cdot\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{(qE)^2\beta}{k}}$$

ח. תוך כדי החישוב של פונקציית החלוקה היה ניתן לראות שהממוצע של (x,y) הוא הוקטור הבא: $\left(-\frac{qE}{k},\frac{qE}{k}\right)$. ולכן הממוצע של (x_1,x_2) הוא: $\left(x_a-\frac{qE}{k},x_b+\frac{qE}{k}\right)$.

מכאן נקבל:

$$\langle dipole\rangle = q\langle x_1\rangle - q\langle x_2\rangle = q\left[x_a - x_b - \frac{2qE}{k}\right]$$