אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר חורף 2022-2023

בוחן אמצע

פתרון

הנחיות

- משך הבחינה – שעתיים.
- במבחן יש 11 שאלות, 10 נקודות לכל שאלה, ציון מקסימלי הוא 100.
- מותר להשתמש במחשבון ו- 4 דפי נוסחאות (8 עמודים).

בהצלחה!

שאלה 1

נתונים שני מוצקים מבודדים מהסביבה, כאשר המוצק הראשון בטמפרטורה T1, והמוצק השני בטמפרטורה T2 (כאשר הטמפרטורות לא שוות). בזמן t=0 מחברים את שני המוצקים יחד כך שמקבלים מערכת אחת מבודדת.

מה הם הגדלים שבהכרח נשמרים (במערכת הכוללת) לפני ואחרי החיבור? בחרו בטענה הנכונה.

א. אנרגיה וטמפרטורה נשמרים, קיבול חום ואנטרופיה לא נשמרים.

ב. אנרגיה נשמרת. טמפרטורה, קיבול חום ואנטרופיה לא נשמרים.

ג. אנרגיה וקיבול חום נשמרים. אנטרופיה וטמפרטורה לא נשמרים.

ד. קיבול חום וטמפרטורה נשמרים, אנטרופיה ואנרגיה לא נשמרים.

ה. קיבול חום ואנטרופיה נשמרים. טמפרטורה ואנרגיה לא נשמרים.

אנטרופיה: בהתאם לחוק שני, האנטרופיה יכולה רק לעלות או להישאר זהה. האנטרופיה מושפעת מריבוי מצבים. טמפרטורות שונות יכול לרמז על אנרגיות שונות בין המוצקים, ולכן כאשר מחברים את שני המוצקים יש מספר רב יותר של דרכים לחלק את האנרגיה, כלומר הריבוי עולה ולכן האנטרופיה הכוללת גם עולה.

טמפרטורה: אם מסכלים על החוק הראשון $\frac{1}{T}=\frac{ds}{dE}$, מפני שהאנטרופיה לא משתנה בקצב ליניארי, אין סיבה ש- $\left(\frac{ds}{dE}\right)^{-1}$ ישתנה בקצב ליניארי, כלומר שני המוצקים מגיעים לשוויון טמפרטורות, אבל לא בהכרח מתקיים כי $T_1+T_2=T_{final}$, כך שאי אפשר להגדיר טמפרטורה של המערכת הכוללת שהיא נשמרת במצב שהוא לא שיווי משקל.

אנרגיה: חייבת להישמר (כי נתון ששני המוצקים מבודדים מהסביבה, אז הם חולקים את האנרגיה רק ביניהם כך שהאנרגיה הכוללת נשמרת).

קיבול חום: מוגדר ע"י $C=\frac{dQ}{dT}$, מאחר ו-T לא חייב להישמר, אז גם הקיבול חום לא.

שאלה 2

נתון מוצק עם 20 חלקיקים. כל חלקיק יכול להיות ברמת היסוד עם 0 אנרגיה או ברמה המעוררת עם אנרגיה ε. נתון כי האנרגיה הכוללת במוצק היא $E=10\varepsilon$.

בזמן t=0 מפרקים את המוצק **לשני מוצקים זהים**, כאשר לכל אחד מהם יש 10 חלקיקים.

מה יחס הקונפיגורציה הכי סבירה מבחינה אנרגטית מול הקונפיגורציה הכי לא סבירה מבחינה אנרגטית $\frac{\Omega_{\text{tot}}(\,most\ likely)}{\Omega_{\text{tot}}(\,most\ unlikely)}$?

א. 1

ב. $\binom{20}{10}$

ג. $\binom{10}{5}$

ד. $\frac{1}{2}\binom{10}{5}^2$

ה. $\frac{1}{2}\binom{10}{5}$

המצב הכי סביר אנרגטי הוא שחצי מהאנרגיה נמצאת במוצק הראשון, וחצי מהאנרגיה במוצק השני. אם חצי מהאנרגיה נמצאת בכל מוצק, זה אומר שבכל מוצק ישנם 5 אלקטרונים מעוררים מתוך ה10, ולכן ריבוי מצבים לכל מוצק בנפרד זה $\binom{10}{5}$. ריבוי עבור שני המוצקים יחדיו זה המכפלה ולכן $\binom{10}{5}^2$. לבסוף ריבוי המצב הכי פחות סביר הוא כאשר כל האנרגיה אגורה במוצק אחד בלבד, כלומר כל אלקטרונים במוצק אחד מעוררים ובשני ברמת היסוד, ולכן קיימים 2 מצבים כאלו.

שאלה 3

נתון חומר עם מספר חלקיקים, כאשר כל אחד מהחלקיקים יכול להיות באחת מרמות האנרגיה $2m\varepsilon$ כאשר $m = 0,1,..$.
מי מבין התשובות הבאות **<u>לא אפשרית</u>**?

א. סה"כ $E = 6\varepsilon$, 3 חלקיקים, 10 קונפיגורציות אפשריות

ב. סה"כ $E = 2\varepsilon$, 2 חלקיקים, 2 קונפיגורציות אפשריות

ג. סה"כ $E = 4\varepsilon$, 3 חלקיקים, 2 קונפיגורציות אפשריות

ד. סה"כ $E = 4\varepsilon$, 3 חלקיקים, 6 קונפיגורציות אפשריות

ה. סה"כ $E = 4\varepsilon$, 2 חלקיקים, 3 קונפיגורציות אפשריות

נתונה לנו מערכת חלקיקים של אוסצילטורים הרמוניים (אפשר להסיק את זה ממבנה רמות האנרגיה של כל חלקיק), כלומר נתון לנו מוצק איינשטיין עם N חלקיקים (או מתנדים) ו- q יחידות אנרגיה, שהאנרגיה של כל יחידה היא 2ε (כך שהאנרגיה הכוללת היא מספר שלם של יחידות אנרגיה אלו). מספר הקונפיגורציות השונות של מוצק איינשטיין נתון לפי : $\Omega = \binom{N+q-1}{q}$. אז מה שצריך לעשות הוא להסיק מה מספר יחידות האנרגיה במערכת $q = E/_{2\varepsilon}$ ומספר המתנדים N ולבדוק איזה תשובה היא לא נכונה. תשובה של סעיף ג :

$$N = 3, q = 2$$

$$\Omega = \binom{4}{2} = 6 \neq 2$$

שאלה 4

נתון שהתנגדות של מוליך נובעת רק מפיזורים של אלקטרונים מתנודות של אטומים (פיזור שריגי). הסברות הפיזור של אלקטרון מתנודות של אטומים פרופורציונית לשונות של אמפליטודת התנודה סביב 0, כלומר $P \propto \langle x^2 \rangle$. בהנחה שתנודות האטומים הן של מתנד הרמוני, מה התלות של ההתנגדות בטמפרטורה לפי מודל דרודה:

א. $R(T) \propto T$

ב. $R(T) \propto T^{-1}$

ג. $R(T) \propto T^{\frac{3}{2}}$

ד. $R(T) \propto T^{-\frac{3}{2}}$

ה. ההתנגדות לא תלויה בטמפרטורה

לפי מודל דרודה, ההתנגדות החשמלית פרופורציונית להסתברות הפיזור של האלקטרון, זאת בגלל שההסתברות לפיזור P לפי משוואת התנועה של התנע היא פרופורציונית ל $1/\tau$, כאשר τ הוא הזמן האופייני שלוקח לאלקטרון להתנגש באטום. ההתנגדות הסגולית מקיימת $P \propto 1/\tau \propto \rho$, ואז בסוף ההתנגדות החשמלית מקיימת $R \propto \rho \propto P$. ממשפט החלוקה השווה, הממוצע של דרגת חופש ריבועית באנרגיה הוא ליניארי בטמפרטורה, לכן: $< x^2 > \propto T$ (אין צורך לעשות את החישוב עם פקטור חצי וקבוע בולצמן, כי אנחנו פה מנסים רק לקבל את החזקה של הטמפרטורה ולא את הפתרון המדויק), ובסוף:

$$R(T) \propto P \propto < x^2 > \propto T$$

שאלה 5

נתונים שני גופים <u>זהים</u> שמוחזקים בהתחלה בטמפרטורות שונות T_1, T_2 באמצאות מאגרים ומחוברים בצורה של מכונת חום בלי הפסדים.

ברגע מסוים מנתקים את שני הגופים מהמאגרים כך שהטמפרטורה שלהם משתנה, 2 המערכות מחליפות אנרגית חום עד הגעה לשיווי משקל תרמי. אחרי הגעה לש"מ – מה הטמפרטורה הסופית של שני הגופים T_f **בהנחה שהאנטרופיה הכוללת לא משתנה לאורך כל התהליך**?

א) $T_f = (T_1 + T_2)/2$

ב) $T_f = 2T_1T_2/(T_1+T_2)$

ג) $T_f = \sqrt{T_1T_2}$

ד) $T_f = \sqrt{2}T_1T_2\Big/\sqrt{T_1^2+T_2^2}$

ה) $T_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{T_1^2+T_2^2}$

במערכת הכוללת הזאת, הנתון המרכזי הוא **ששתי המערכות מחליפות אנרגית חום ושהאנטרופיה הכוללת של המערכת לא משתנה** לאורך כל התהליך (למדנו בכיתה שהאנטרופיה **במערכת מבודדת** גדלה עד ההגעה לשיווי משקל, אבל פה לא נתון שהמערכת היא מבודדת, למרות שאין הפסדים לסביבה, בגלל זה שימור של אנטרופיה כוללת הוא תהליך אפשרי).

השינוי באנטרופיה של מערכת נתון לפי : $\Delta S = \int dS = \int_{T_{intial}}^{T_{final}} (\frac{C}{T})\ dT$

כאשר C הוא קיבול החום. השינוי באנטרופיה הכוללת הוא סכום השינוי באנטרופיה של 2 תתי המערכות (לזכור ששתי המערכות זהות אז יש להן את אותו קיבול חום) :

$$\Delta S_{total} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_f} (\frac{C}{T})\ dT + \int_{T_2}^{T_f} (\frac{C}{T})\ dT$$

$$= C\ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + C\ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) = C\ln\left(\frac{T_f^2}{T_1T_2}\right) = 0$$

$$\frac{T_f^2}{T_1T_2} = 1 \ \rightarrow\ T_f = \sqrt{T_1T_2}$$

שאלה 6

נתונה מערכת שיש בה חלקיק אחד שיכול להיות באחת מ **2 רמות אנרגיה**. הפרש האנרגיה בין 2 הרמות הוא $\Delta E > 0$.

מה צריכה להיות הטמפרטורה כדי שתהיה לחלקיק הסתברות $\frac{2}{3}$ להיות ברמה הנמוכה?

א. $\frac{2\Delta E}{3k_B}$

ב. $\frac{\Delta E}{k_B \ln(2)}$

ג. אין טמפרטורה שנותנת את ההסתברות הזאת.

ד. $\frac{\Delta E}{k_B \ln(\frac{2}{3})}$

ה. אי אפשר לדעת כי האנרגיה של כל רמה לא נתונה.

יחס ההסתברויות של 2 הרמות מקיים (כאשר ההסתברות להיות ברמה הגבוהה היא $^1/_3$, משלמות ההסתברות) :

$$\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = \frac{e^{-E_2/k_BT}}{e^{-E_1/k_BT}} = e^{-(E_2-E_1)/k_BT} = e^{-\Delta E/k_BT} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta E/k_BT = \ln(2) \quad \rightarrow \quad T = \frac{\Delta E}{k_B \ln(2)}$$

שאלה 7

נתון חלקיק עם אנרגיה נתונה לפי $E = \varepsilon \frac{(\sigma+1)}{2}$, כאשר ε הוא קבוע בעל יחידות של אנרגיה ו- σ הוא פרמטר בעל 2 ערכים אפשריים שהם ± 1.

מה היא האנרגיה הממוצעת של החלקיק כפונקציה של הטמפרטורה?

בטאו את התשובה בעזרת T, ε.

מה היא האנרגיה בטמפרטורה אינסופית וטמפרטורה 0?

א. $<\mathrm{E(T)}> = \frac{(k_BT)^2}{\varepsilon}, <E(\infty)> = \infty, <E(0)> = 0$

ב. $<\mathrm{E(T)}> = \frac{\varepsilon^2}{k_BT}, <E(\infty)> = 0, <E(0)> = \infty$

ג. $<\mathrm{E(T)}> = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_BT}+1}, <E(\infty)> = \frac{\varepsilon}{2}, <E(0)> = 0$

ד. $<\mathrm{E(T)}> = \frac{\varepsilon}{e^{-\varepsilon/k_BT}+1}, <E(\infty)> = \frac{\varepsilon}{2}, <E(0)> = \varepsilon$

ה. $<\mathrm{E(T)}> = \varepsilon\, e^{-\varepsilon/k_BT}, <E(\infty)> = \varepsilon, <E(0)> = 0$

פונקצית החלוקה היא (לזכור $\beta = {}^{1}/_{k_B T}$) :

$$Z = e^{-\beta\, 0} + e^{-\beta\varepsilon} = 1 + e^{-\beta\varepsilon}$$

האנרגיה הממוצעת נתונה לפי :

$$< E(T) > = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} = \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}+1} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_B T}+1}$$

האנרגיה בשני הגבולות :

$$< E(\infty) > = \frac{\varepsilon}{2}, < E(0) > = \ 0$$

שאלה 8

נתונה מערכת עם 2 רמות אנרגיה, הרמה הנמוכה עם אנרגיה 0 והרמה הגבוהה עם אנרגיה ε. נתון שיש חלקיק אחד במערכת הזאת ונגדיר את σ בצורה הבאה: כאשר החלקיק נמצא ברמה הנמוכה אז $\sigma = -1$, כאשר החלקיק נמצא ברמה הגבוהה אז $\sigma = +1$. עכשיו נגדיר את המגנטיזציה של המערכת להיות $M =< \sigma >$.

עבור איזה טמפרטורה המגנטיזציה תתאפס? עבור איזה טמפרטורה המגנטיזציה תהיה שווה ל- $+1$?

א. $M = 0$ מקרה בלתי אפשרי, $M = 1$ עבור $T = 0$
ב. $M = 0$ עבור $T = 0$, $M = 1$ עבור $T = \infty$
ג. $M = 0$ מקרה בלתי אפשרי, $M = 1$ מקרה בלתי אפשרי
ד. $M = 0$ עבור $T = \infty$, $M = 1$ מקרה בלתי אפשרי
ה. $M = 0$ עבור $T = \frac{\varepsilon}{k_B}$, $M = 1$ עבור $T = 0$

$$M =< \sigma > = \sum_{\sigma=\pm1} \sigma \frac{e^{-\beta E_\sigma}}{Z} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}-1}{e^{-\beta\varepsilon}+1} = \frac{1-e^{\beta\epsilon}}{1+e^{\beta\epsilon}}$$

כאשר השתמשנו באותה פונקציית חלוקה מהשאלה הקודמת (כי זאת אותה מערכת).

אפשר לראות שהמגנטיזציה מתאפסת בגבול $\beta \to 0$ או $T \to \infty$ ושהמקרה של $\mathrm{M} = 1$ הוא בלתי אפשרי.

אפשר להסיק את זה גם בלי לעשות חישובים. כדי שהמגנטיזציה תתאפס, ההסתברות של σ צריכה להיות שווה בכל אחד מהמצבים ± 1 (כלומר הסתברות שווה לחלקיק להיות ב 2 הרמות), שוויון של הסתברות בין רמות עם אנרגיות שונות קורה רק בגבול $T \to \infty$. כדי שהמגנטיזציה תהיה שווה ל 1, ההסתברות של החלקיק להיות ברמה הגבוהה (הרמה עם $\sigma = 1$) צריכה להיות 1, כלומר ההסתברות להיות ברמה הגבוהה היא יותר גדולה מההסתברות להיות ברמה הנמוכה, דבר שהוא בלתי אפשרי.

שאלה 9

נתון אלקטרונים שנמצאים במוצק תלת ממדי הנמצא בטמפרטורה $T = 0$. קבלו ביטוי לאנרגיה הממוצעת של האלקטרון **לפי מודל Sommerfeld.**

א. $3/2k_bT$
ב. E_F
ג. $3/5E_F$
ד. $1/2E_F$
ה. $3k_bT$

פתרון:

אנרגיה ממוצעת של האלקטרון ניתן לקבל מהביטוי לאנרגיה הכוללת חלקי מספר האלקטרונים. הביטוי עבור האנרגיה הכוללת נקבל ע"י שימוש בצפיפות המצבים ואינטגרציה על האנרגיה

$$E_{tot} = V\int_0^\infty Eg(E)f_{FD}(E,T=0)dE = V\int_0^{E_F} Eg(E)dE = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}V\int_0^{E_F} E^{3/2}dE$$
$$= \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}V \times \frac{2}{5}E_F^{5/2}$$

$$\langle E\rangle = \frac{E_{tot}}{N} = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \times \underbrace{\frac{V}{N}}_{n^{-1}} \times \frac{2}{5}E_F^{5/2}$$

בשביל להתקדם נזכר בקשר בין אנרגיה פרי לצפיפות האלקטרונים בתלת ממד

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \to n = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

לבסוף נקבל

$$\langle E\rangle = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \times \frac{3\pi^2\hbar^3}{(2mE_F)^{3/2}} \times \frac{2}{5}E_F^{5/2} = \frac{3}{5}E_F$$

שאלה 10

נתונה מתכת בעלת התנגדות סגולית של $\rho = 2.22 \times 10^{-8}\Omega\, m$ וצפיפות האלקטרונים של $n = 8.47 \times 10^{28} m^{-3}$. הניחו שמסת האלקטרון שווה למסת האלקטרון החופשי בריק וחשבו את המרחק הממוצע בין ההתנגשויות **לפי מודל Sommerfeld** בטמפרטורה $T = 0$.

(רמז: תיזכרו מה היא מהירות האלקטרונים שתורמים למוליכות החשמלית בטמפרטורה אפס לפי מודל Sommerfeld)

א. $3A°$
ב. $30nm$
ג. $300nm$
ד. $3nm$
ה. $3\mu m$

לפי מודל $Sommerfeld$, האלקטרונים המשתתפים בהולכה נעים עם המהירות $v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$, כאשר הזמן הממוצע בין ההתנגשויות נתון על ידי ביטוי של דרודה (מודל דרודה נתן מודל נכון מבחינה פיזיקלית בכך שהוא אמר שהאלקטרונים חווים התנגשויות עם האטומים, והגדיר זמן אופייני להתנגשות τ, אבל הטעות היא שהוא אמר שכל האלקטרונים משתתפים בהתנגשויות האלה ותורמים למוליכות החשמלית, דבר שלא עובד בטמפרטורה אפס. $Sommerfeld$ תיקן את זה בלהגיד שבטמפרטורה אפס האלקטרונים מסודרים בתוך ים פרמי במרחב התנע, ובכך שהאלקטרונים ברמת\קליפת פרמי הם אלה שחווים את ההתנגשויות, בגלל שהם יכולים לשנות את התנע שלהם כי הם האלקטרונים היחידים הקרובים למצבי תנע לא מאוכלסים, לעומת האלקטרונים שנמצאים בתוך כדור פרמי שמצבי התנע סביבם מאוכלסים כבר ואז לא יכולים לשנות את התנע שלהם לפי עקרון האיסור של פאולי).

$$\langle l\rangle = v_F\tau$$

$$\tau = \frac{m\sigma}{e^2n} = \frac{m}{e^2n\rho} \approx 19fs$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \frac{\hbar}{m}(3\pi^2n)^{1/3} = 1.6 \times 10^6 m/sec$$

$$\langle l\rangle = v_F\tau \approx 30nm$$

שאלה 11

נתונה מערכת במימד אחד שיש בה חלקיק אחד המצומד לאמבט חום בטמפ' T ובעל דרגת חופש x. האנרגיה של החלקיק נתונה על ידי $E = \alpha x^4$, כאשר x מסמן את מיקום החלקיק לאורך ציר x (החלקיק יכול לנוע לאורך כל ציר x) ו- α הינו קבוע חיובי ממשי כלשהו. חשבו מהי האנרגיה הממוצעת של החלקיק? (רמז: אין צורך לחשב במפורש את האינטגרלים בחישובים אם ממירים אותם לאינטגרלים של משתנה חסר יחידות, תחשבו מה ההצבה שצריך לעשות).

א. $\frac{1}{2}(\frac{k_B T}{\alpha})^{1/4} \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt$

ב. $\frac{1}{2}(\frac{k_B T}{\alpha}) \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt$

ג. $(1/4)k_b T$

ד. $k_b T$

ה. $\frac{1}{2}(\frac{k_B T}{\alpha})^{1/2} \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt$

עלינו לחשב את פונקציית החלוקה המתאימה וממנה לקבל את האנרגיה הממוצעת:

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

$$Z = \int_x e^{-\beta E(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \cdot \alpha x^4} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\beta \cdot \alpha x^4} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\beta\alpha)^{1/4}} \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt$$

$$t = \beta \alpha x^4 \rightarrow dt = 4\beta\alpha x^3 dx = 4(\beta\alpha)^{1/4}\ t^{3/4} dx \rightarrow dx = \frac{t^{-3/4} dt}{4(\beta\alpha)^{1/4}}$$

ההצבה הזאת נתנה אינטגרל של משתנה חסר יחידות t (כך שהאינטגרל הוא איזשהו מספר) והוצאנו את התלות בטמפרטורה (או β) מהאינטגרל, כך שהוא פשוט מצטמצם בחישוב :

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{4}\beta^{-1} = \frac{1}{4}k_b T$$

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27}kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\ J\ K^{-1}mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31}kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11}m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^{8}m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$
$\sin(a) = 1/(2i)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

אינטגרלים שימושיים:

Gaussian Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

תוחלת μ

סטיית תקן σ

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n - 1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

3	5/2	2	3/2	1	1/2	$\boldsymbol{n}$
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\boldsymbol{\Gamma(n)}$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	$\boldsymbol{n}$
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\boldsymbol{I(n)}$