אלקטרוניקה פיסיקלית 044124

סמסטר חורף 2023-2024

מועד א

פתרון

הנחיות

- **משך הבחינה – 3 שעות.**
- **במבחן ישנן 2 חלקים - חלק 1 : 5 שאלות רב ברירה**
  חלק 2 : 2 שאלות פתוחות
- **בדקו שברשותכם 10 עמודים .**
- **ניתן להשתמש במחשבון ו- 8 דפי נוסחאות דו-צדדיים.**

בהצלחה!

חלק 1 (30 נקודות)

שאלה 1 (6 נקודות):

נתונה מערכת של 2 רמות בטמפרטורה T. רמה ראשונה עם אנרגיה ϵ וניוון 1 ורמה שנייה עם אנרגיה 2ϵ וניוון 3.

מהי הטמפרטורה T אם ידוע כי ההסתברות שהמערכת תהיה במצב עם אנרגיה ϵ שווה לרבע ההסתברות שהמערכת תהיה עם אנרגיה 2ϵ?

א. $\varepsilon/(k_b \ln\frac{3}{4})$
ב. $\varepsilon/(k_b \ln\frac{4}{3})$
ג. $T = 0$
ד. $T \to \infty$
ה. $\varepsilon/2\mathrm{k_B}$

פתרון:

ההסתברות להיות במצב עם אנרגיה ϵ באנסמבל הקנוני היא

$$\frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z}$$

כאשר Z היא פונקציית החלוקה. ההסתברות להיות עם אנרגיה 2ϵ היא $3e^{-2\beta\epsilon}$ וההסתברות להיות עם אנרגיה ϵ היא $e^{-\beta\epsilon}$. מכאן נקבל

$$\frac{1}{4}3e^{-2\beta\epsilon} = e^{-\beta\epsilon}$$

$$e^{\beta\epsilon} = \frac{3}{4}$$

$$T = \varepsilon/(k_b \ln\frac{3}{4})$$

שאלה 2 (6 נקודות):

נתונה מערכת מבודדת של שני גופים. גוף אחד בעל קיבול חום $C_1(T) = bT$ שהטמפרטורה שלו היא T_1 והשני בעל קיבול חום קבוע $C_2(T) = aT$ שהטמפרטורה שלו היא T_2. נתון כי $T_1 < T_2$.

הגופים באים במגע. מה השינוי באנטרופיית המערכת עד ההגעה לשיווי משקל?

א. $\sqrt{\frac{aT_2^2+bT_1^2}{a+b}}(a+b) - bT_1 - aT_2$

ב. 0

ג. $\frac{aT_2+bT_1}{b}(a+b) - bT_1 - aT_2$

ד. $\frac{aT_2+bT_1}{a}(a+b) - bT_1 - aT_2$

ה. $\frac{bT_2+aT_1}{b}(a+b) - bT_1 - aT_2$

פתרון:

נמצא את הטמפרטורה הסופית שהגופים מגיעים אליה, נסמנה ב T_f.

חום עובר מהגוף השני לגוף הראשון כאשר כמות החום המועברת לגוף הראשון שווה לכמות החום העוזבת את הגוף השני. כלומר

$$\int_{T_1}^{T_f} bT\,dT = \frac{b(T_f^2 - T_1^2)}{2} = \int_{T_f}^{T_2} aT\,dT = -\frac{a(T_f^2 - T_2^2)}{2}$$

לכן הטמפרטורה הסופית היא

$$T_f = \sqrt{\frac{aT_2^2 + bT_1^2}{a+b}}$$

השינוי באנטרופיה של המערכת הוא

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{C_1(T)}{T} dT + \int_{T_2}^{T_f} \frac{C_2(T)}{T} dT$$

$$= b\left(\sqrt{\frac{aT_2^2 + bT_1^2}{a+b}} - T_1\right) + a\left(\sqrt{\frac{aT_2^2 + bT_1^2}{a+b}} - T_2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{aT_2^2 + bT_1^2}{a+b}}(a+b) - bT_1 - aT_2$$

שאלה 3 (6 נקודות):

נתונה מערכת המורכבת מ N אתרים. לכל אתר יש 2 מצבים, **מצב מלא** שבו הוא מכיל חלקיק עם אנרגיה ε **ומצב ריק** שבו הוא לא מכיל חלקיק (אנרגיה 0). מה מספר האתרים המלאים הממוצע במערכת ?

(תזכורת – פונקציית חלוקה כוללת של מערכת של N חלקיקים ללא אינטראקציה היא $Z = Z_1^N$, כאשר Z_1 היא פונקציית חלוקה של חלקיק בודד).

א. $\frac{Ne^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}+1}$

ב. $\frac{Ne^{+\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}+1}$

ג. $Ne^{-\beta\epsilon}$

ד. $\frac{N\beta e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}+1}$

ה. $N\varepsilon\beta e^{-\beta\epsilon}$

פתרון:

נרשום את פונקציית החלוקה עבור אתר יחיד

$$Z_1 = e^{-\beta\epsilon} + 1$$

עבור N אתרים נקבל

$$Z = Z_1^N = (e^{-\beta\epsilon} + 1)^N$$

האנרגיה הממוצעת היא

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{N\varepsilon e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon} + 1}$$

כיוון שהאנרגיה הממוצעת היא האנרגיה באתר המכיל חלקיק כפול מספר האתרים הממוצע המכיל חלקיק, נקבל כי מספר האתרים המלאים הממוצע במערכת הוא:

$$n = \frac{Ne^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon} + 1}$$

שאלה 4 (6 נקודות):

נתונה שכבת מתכת דו-ממדית. כמו כן נתונה אנרגית פרמי – עמוק בתוך הפס כך ש $E_F \gg k_B T$ וגם נתון יחס נפיצה פרבולי בפס. חשבו את האנרגיה הממוצעת של אלקטרון בודד בפס , E_{av} .

א) $E_{av} = \frac{E_F}{2}$

ב) $E_{av} = \frac{\sqrt{k_B T E_F}}{2}$

ג) $E_{av} = \frac{3E_F^{\frac{3}{2}}}{2}$

ד) $E_{av} = \frac{2E_F^{\frac{3}{2}}}{3}$

ה) $E_{av} = \frac{E_F^2}{2k_B T}$

פתרון : **א** - בפס פרבולי בדו-ממד צפיפות המצבים לא תלויה באנרגיה ועבור $E_F \gg kT$ האנרגיה הממוצעת פשוט חצי E_F או במפורש :

$$E_{av} = \frac{\int_0^{E_F} g(E) E dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE} = \frac{g\int_0^{E_F} E dE}{g\int_0^{E_F} dE} = \frac{E_F^{\ 2}}{2E_F} = \frac{E_F}{2}$$

שאלה 5 (6 נקודות):

נתונה מתכת עם ריכוז אלקטרונים n ל וזמן ממוצע בין פיזורים τ. לפי מודל דרודה, בשדה שתלוי בזמן $E(t)=E_0e^{i\omega t}$ ההספק החשמלי יהיה **מינימלי** עבור:

(הניחו $\to\infty$ אומר גדול מאוד ו $\to 0$ אומר קטן מאוד, אבל הגדלים הם עדיין סופיים)

א) $\omega\to\infty, \tau\to\infty, n\to\infty$

ב) $\omega\to 0, \tau\to\infty, n\to\infty$

ג) $\omega\to 0, \tau\to 0, n\to 0$

ד) $\omega\to 0, \tau\to\infty, n\to\infty$

ה) $\omega\to\infty, \tau\to\infty, n\to 0$

פתרון: **ה** - ההספק החשמלי מינימלי בתדר מקסימלי וזמן פיזור ארוך – כך אלקטרונים לא מספיקים להתפזר ולהפסיד אנרגיה בזמן מחזור של השדה. כמו כן פיזור הספק גדל עם ריכוז האלקטרונים. או באופן מפורש המוליכות: $\sigma(\omega)=\dfrac{e^2n\tau/m}{1-i\omega\tau}\xrightarrow[\omega\to\infty,\tau\to\infty]{} i\dfrac{e^2n\tau/m}{\omega\tau}$

כלומר נוצר הפרש פאזה של 90 מעלות בין זרם למתח בדומה לקבל ב-AC. אין צריכת הספק – יש רק טעינה של אנרגיה ופריקה.

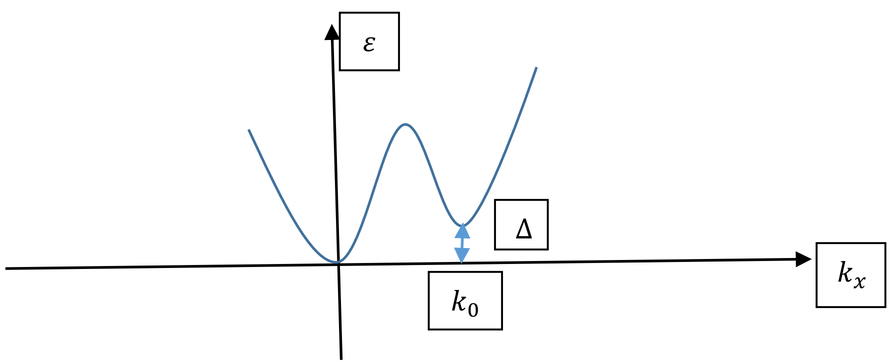
חלק 2 (70 נקודות)

שאלה 6 – אלקטרונים בפסי אנרגיה והמודל הסמי-קלאסי_(35 נקודות)

נתון גביש דו-ממדי כאשר לפס האנרגיה שלו יש 2 נקודות מינימום, נקודה 1 ב $\overrightarrow{k_1} = (0,0)$ ונקודה 2 ב $\overrightarrow{k_2} = (k_0, 0)$. נסמן את הפרש האנרגיה בין 2 נקודות המינימום ב Δ, הפרש זה הוא קטן מספיק כך כשמאכלסים מעט אלקטרונים סביב נקודה 1 אפשר לאכלס גם מעט אלקטרונים סביב נקודה 2. פס האנרגיה סביב כל אחת מהנקודות נתון לפי הפרבולות :

$$\varepsilon_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_1^*}(k_x^2 + k_y^2)$$

$$\varepsilon_2(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_2^*}\left((k_x - k_0)^2 + k_y^2\right) + \Delta \quad , \quad \Delta > 0$$



בתמונה רואים חתך של הפס על ציר k_x שבו מופיעות 2 נקודות המינימום (שימו לב שהמסות האפקטיביות שונות).

א. חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח עבור כל אחת מהפרבולות. (7 נקודות)

פתרון :

ראינו בכיתה שעבור אלקטרונים חופשיים בדו-ממד, צפיפות המצבים ליחידת שטח היא $g(\varepsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}$. במקרה שלנו נחליף את המסה בריק במסה האפקטיבית ונשים לב לתחום האנרגיה שבו מוגדרת כל פרבולה :

$$g_1(\varepsilon) = \frac{m_1^*}{\pi\hbar^2} \quad , \qquad \varepsilon \geq 0$$

$$g_2(\varepsilon) = \frac{m_2^*}{\pi\hbar^2} \quad , \qquad \varepsilon \geq \Delta$$

ההזזה של מרכז המעגלים שווה האנרגיה סביב פרבולה 2 לא משפיעים על צפיפות המצבים.

ב. עבור $T = 0$, מה התנאי על רמת פרמי כך שיש אכלוס של אלקטרונים בפרבולה 2? חשבו את צפיפות האלקטרונים בכל אחת משתי הפרבולות במקרה זה. (7 נקודות)

פתרון :

כדי שיהיה אכלוס אלקטרונים בפרבולה 2, רמת פרמי צריכה להיות מעל המינימום של פרבולה זאת : $\varepsilon_F > \Delta$.

צפיפויות האלקטרונים נתונות לפי :

$$n_1 = \int_0^{\varepsilon_F} g_1(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{m_1^*}{\pi\hbar^2}\, d\varepsilon = \frac{m_1^*}{\pi\hbar^2}\varepsilon_F$$

$$n_2 = \int_\Delta^{\varepsilon_F} g_2(\varepsilon)d\varepsilon = \int_\Delta^{\varepsilon_F} \frac{m_2^*}{\pi\hbar^2}\, d\varepsilon = \frac{m_2^*}{\pi\hbar^2}(\varepsilon_F - \Delta)$$

ג. האם יתכן ויהיו יותר אלקטרונים בפרבולה 2 מאשר פרבולה 1 למרות שבפרבולה 2 האלקטרונים מאכלסים קטע יותר קטן על ציר האנרגיה? הסבירו. (7 נקודות)

פתרון :

$n_2 > n_1$ מתקיים במקרה שצפיפות המצבים בפרבולה 2 היא מספיק גדולה מזאת של פרבולה 1, זה קורה בתנאי : $\frac{m_2^*}{m_1^*} > \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_F - \Delta}$.

במקרה זה המסה האפקטיבית בפרבולה 2 היא גדולה כך שהעקמומיות היא מספיק קטנה כדי להכיל יותר חלקיקים מאשר פרבולה 1.

ד. מפעילים שדה חשמלי בכיוון ציר x ונתון שזמן הפיזור האופייני של אלקטרונים בשתי הפרבולות הוא זהה. לפי מודל דרודה, חשבו את היחס בין המוליכות החשמלית של האלקטרונים בפרבולה 1 והמוליכות החשמלית של האלקטרונים בפרבולה 2, σ_1/σ_2. בטאו את תשובתכם בעזרת ε_F, Δ (התייחסו רק לכיוון x בסעיף זה). (7 נקודות)

פתרון :

המוליכות החשמלית של כל אחת מהפרבולות היא :

$$\sigma_1 = \frac{n_1}{m_1^*}e^2\tau = \frac{\varepsilon_F}{\pi\hbar^2}e^2\tau$$

$$\sigma_2 = \frac{n_2}{m_2^*}e^2\tau = \frac{\varepsilon_F - \Delta}{\pi\hbar^2}e^2\tau$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_F - \Delta}$$

דבר מעניין שקורה זה שבגלל שרמת פרמי היא יותר רחוקה מתחתית פרבולה 1, המוליכות של אלקטרונים בפרבולה 1 היא תמיד יותר גדולה מהמוליכות של אלקטרונים בפרבולה 2 בלי קשר למספר האלקטרונים שמשתתפים בהולכה החשמלית או למסה שלהם.

ה. סעיף זה לא קשור לסעיפים הקודמים.

נתונה מערכת חד-ממדית שנמצאת לאורך ציר x ואלקטרון שנמצא בפס אנרגיה פרבולי חד-ממדי : $\varepsilon(k_x) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}$.

מפעילים שדה מגנטי אחיד בכיוון ציר z : $\vec{B} = B\hat{z}$ ונתון שהאלקטרון בזמן $t = 0$ היה עם תנע $k_x(t = 0) = 0$. מצאו את התנע $k_x(t)$ והאנרגיה $\varepsilon(\mathrm{t})$ של האלקטרון כפונקציה של הזמן.

(תזכורת – כוח מגנטי שפועל על אלקטרון עם מהירות $\vec{v}$ הוא $\vec{F}_{magnetic} = -e\vec{v} \times \vec{B}$)

(7 נקודות)

פתרון :

נשתמש במשוואות של המודל הסמי-קלאסי, עבור מערכת תלת-ממדית :

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{1}{\hbar}\vec{F}_{magnetic} = -\frac{e}{\hbar}\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{e}{\hbar}B(v_y\hat{x} - v_x\hat{y})$$

לכן נסיק שעבור המערכת החד-ממדית מתקיים כאשר האלקטרון יכול לנוע רק לאורך ציר x ($v_y = v_z = 0$) :

$$\frac{dk_x}{dt} = 0$$

מכאן $k_x(t) = 0$ והאנרגיה נשמרת $\varepsilon(t) = 0$ (לא תלויה בזמן) כמו שמצפים מאלקטרון חופשי בשדה מגנטי.

ו. (בונוס)

בחזרה למערכת הדו-ממדית מהסעיפים הראשונים. אם מפעילים שדה מגנטי בכיוון ציר z המאונך לשטח המערכת, מה היא הצורה הגאומטרית של המסלול של אלקטרון במרחב התנע שנמצא בפרבולה 2?

הסבירו ללא צורך לחשב בצורה מפורשת איך התנע של האלקטרון תלוי בזמן, $\vec{k}(t)$.

(הדרכה – הסתמכו על התשובה מסעיף (ה) ותארו איך תיראה ההתנהגות בדו-ממד).

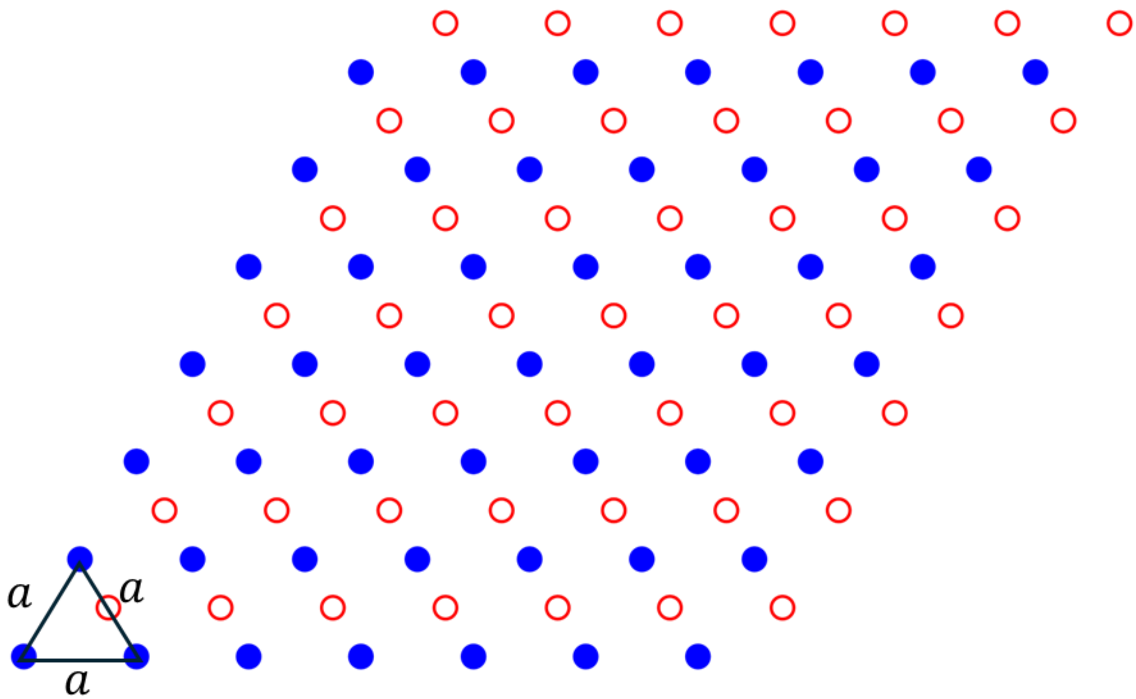
(5 נקודות)

פתרון :

כמו שראינו בסעיף הקודם, האלקטרון שומר על האנרגיה שלו תחת ההשפעה של שדה מגנטי. בסעיף הקודם האלקטרון נשאר בנקודת שווה אנרגיה (מערכת חד-ממדית), במערכת דו-ממדית הוא נע לאורך עקום שווה אנרגיה. בפרבולה 2, זה יהיה מסלול מעגלי שהמרכז שלו הוא ב $\vec{k} = (k_0, 0)$, תחתית הפרבולה.

שאלה 7 – גבישים ופוננים (35 נקודות + 5 נקודות בונוס)

נתון הגביש הבא :



כאשר הנקודה החלולה נמצאת באמצע של המשולש שבציור.

חלק א – גבישים

א. רשמו וקטורים ראשוניים ווקטורי בסיס. (5 נקודות)

ב. העתיקו למחברת את השריג שמצאתם וציירו (**באופן מדויק**) את תא **Wigner-Seitz** . (5 נקודות)

ג. מצאו את הווקטורים של שריג ההופכי וציירו אותו. ציירו את **איזור Brillouin הראשון**. (5 נקודות)

ד. עבור השריג שבחרתם ציירו את משפחות קווי שריג : (11) ו(21). (5 נקודות)

חלק ב- פוננים

ה. נתון גביש חד ממדי עם N תאי יחידה שבו קיים רק ענף אחד של יחס נפיצה שהוא הענף האקוסטי. היחס הנפיצה שלו נתון על ידי ביטוי הבא :

$$\omega(k) = \omega_0 |\sin(ka) + 0.5\sin(3ka)|$$

כאשר a הינו פרמטר בעל יחידות מתאימות.

ענו על השאלות הבאות :

מהן הגבולות של אזור ברילואן הראשון?

מהו קבוע השריג?

כמה אטומים יש בתוך תא יחידה? אם יש יותר מאחד, מהם וקטורי הבסיס?

מהי מהירות הקול בחומר הנ"ל?

ציינו את הנקודות בהן מהירות החבורה מתאפסת. (5 נקודות)

ו. קירבו את היחס הנפיצה לקו ישר וקיבלו את צפיפות המצבים של הפוננים האקוסטיים (זכרו שמדובר בממד אחד) (5 נקודות)

ז. מצאו את אנרגית Debye. (5 נקודות)

ח. **(בונוס)** קבלו את התלות בטמפרטורה של קיבול החום הפונוני בטמפרטורות נמוכות. איך תשתנה התשובה בגבול טמפרטורות גבוהות? (5 נקודות)

אינטגרל עזר : $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^2}{6}$

פתרון :

סעיף א

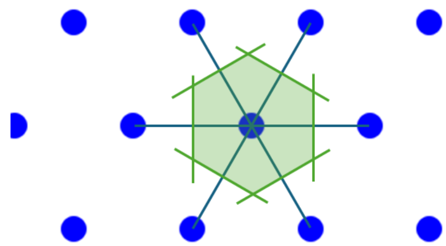
וקטורי שריג

$$\vec{a_1} = a(1,0), \vec{a_2} = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

וקטורי בסיס

$$\vec{d_1} = (0,0), \vec{d_2} = a\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

סעיף ב



סעיף ג

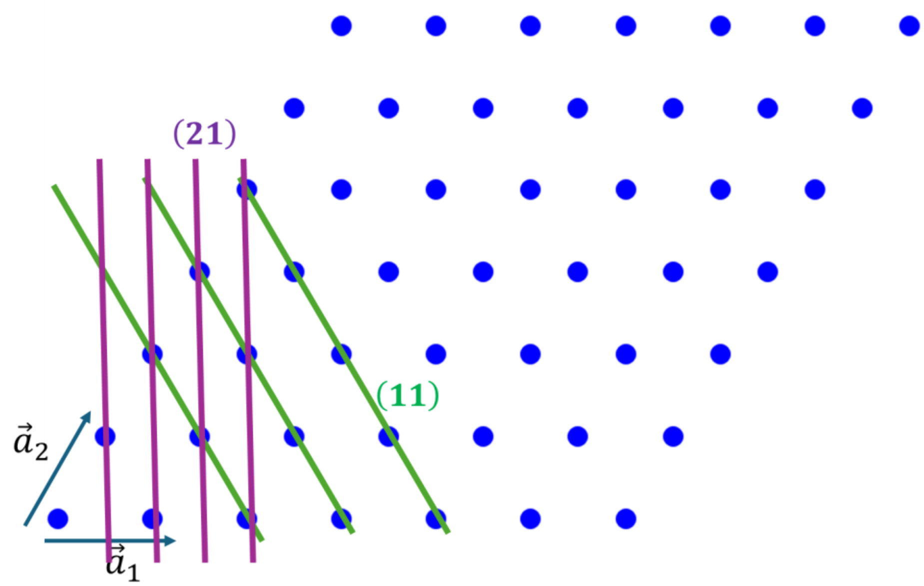
תחילה נמצא שטח של התא היחידה

$$S = |R_1 \times R_2| = \left(\sqrt{3}/2\right)a^2$$

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{2\pi}{S}\ (\boldsymbol{a_2} \times \hat{\boldsymbol{z}}) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{S}(\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{a}_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}(0,1)$$

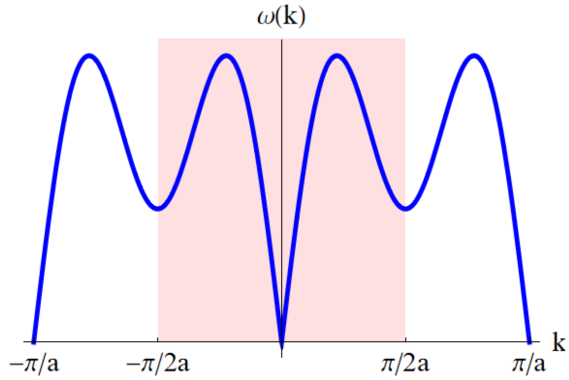
סעיף ד



סעיף ה

כדי להבין מהן הגבולות אזור ברילואן הראשון צריך לבדוק את מרחק המחזור של יחס הנפיצה.

המחזור המשותף של $\sin(x)$ ושל $\sin(3x)$ הינו 2π. מכיוון שישנו ערך מוחלט נקבל מחזוריות של π לכן איזור ברילואן הראשון הינו $k \in \left[-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right]$



מכאן נסיק שקבוע שריג הינו $2a$

מכיוון שישנו ענף אקוסטי בלבד אזי יש רק אטום אחד בתוך תא היחידה ולכן אין וקטורי בסיס מלבד $d = \mathbf{0}$.

נקרב את יחס הנפיצה לקו ישר ע״י קירוב טיילור מסדר ראשון

$$\omega(k) \approx \omega_0 \left|ka + \frac{3ka}{2}\right| = \omega_0 \left|\frac{5}{2}ka\right|$$

מכאן נסיק שמהירות הקול הינה

$$v_s = \frac{\omega(k)}{k} = 2.5a\omega_0$$

מהירות החבורה חייבת להתאפס בקצוות אזור ברילואן (2 נקודות) ובנוסף קיימות שתי נקודות נוספות המקיימות

$$\cos(ka) + 1.5\cos(3ka) = 0$$

ניתן לראות שקיימת נקודה נוספת כי ב-$k = 0$ ערך הפונקציה חיובי וב-$k = \pi/3a$ ערך הפונקציה הינו שלילי, לכן חייבות להיות נקודות נוספות. לא ייתכנו יותר נקודות.

סעיף ו

$$N(k) = \frac{2k}{V_k} = \frac{2k}{(\pi/L)}$$

$$g(k) = \frac{1}{L}\frac{dN}{dk} = \frac{1}{\pi}$$

$$g(E)dE = g(k)dk$$

$$g(E) = g(k)\frac{dk}{dE} = \frac{1}{\pi\hbar v_s}$$

סעיף ז

בכדי למצוא את אנרגיית Debye יש להשוות את מספר המצבים באזור ברילואן המתקבל באמצעות היחס הנפיצה המקורב ל-N

$$N = L\int_0^{\hbar\omega_D} g(E)dE = \frac{L}{\pi\hbar v_s}\hbar\omega_D \rightarrow \omega_D = \frac{N\pi v_s}{L} = \frac{2.5N\pi a\omega_0}{L}$$

סעיף ח

$$\langle E\rangle = L\int_0^{\hbar\omega_D} Eg(E)f_{BE}(E)dE = \frac{L}{\pi\hbar v_s}\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{E}{e^{\beta E}-1}dE$$

$$x = \beta E \rightarrow dx = \beta dE$$

$$\langle E\rangle = (k_bT)^2\frac{L}{\pi\hbar v_s}\int_0^{\hbar\omega_D/k_bT}\frac{x}{e^x-1}dx$$

בגבול טמפרטורות נמוכות נקבל שגבול העליון שואף לאינסוף כך שאינטגרל מקבל ערך מספרי כשלהו.

קיבול חום נתון ע״י נגזרת של האנרגיה הממוצעת לפי טמפרטורה

$$\mathrm{C} = \frac{d\langle E\rangle}{dT}\sim k_BT$$

בגבול הטמפרטורות הגבוהות נקבל שלפי משפט החלוקה השווה

$$C = N\frac{d}{dT}\left(2\times\frac{1}{2}k_BT\right) = Nk_b$$

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

Atomic Weight Conversion	$1amu = 1.661 \times 10^{-27} kg$
Plank's Constant	$h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot sec$
Reduced Plank's Constant	$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot sec$
Avogadro Constant	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Gas Constant	$R = 8.314\ J\ K^{-1} mol^{-1}$
Boltzmann's Constant	$k_b = 1.381 \times 10^{-23} J/K$
Electron Mass	$m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$
Electron Charge	$q = 1.602 \times 10^{-19}$
Bohr Radius	$a_0 = 5.292 \times 10^{-11} m$
Speed of Light	$c = 2.997 \times 10^{8} m/sec$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

Trigonometric Identities
$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b$
$\sin^2 a = 1/2(1 - \cos(2a))$
$\cos^2 a = 1/2(1 + \cos(2a))$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos(\pi - a) - \cos(a)$
$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$
$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$
$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(a) = 1/2\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$
$\sin(a) = 1/(2i)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$
$\cosh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} + e^{-a})$
$\sinh(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

<u>אינטגרליים שימושיים:</u>

Gaussian Distribution
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ μתוחלת

σסטיית תקן

Gaussian Integral $\alpha > 0$

$$\int_{a}^{b} e^{-\alpha(x+b)^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

Gamma Function

$$\Gamma(n) \equiv \int_{0}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n-1!$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

3	5/2	2	3/2	1	1/2	$\boldsymbol{n}$
2	$3\sqrt{\pi}/4$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$\sqrt{\pi}$	$\boldsymbol{\Gamma(n)}$

More Gaussian Integrals $\alpha > 0, n \geq 0$

$$I(n) \equiv \int_{0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} 2I(n) & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

5	4	3	2	1	0	$\boldsymbol{n}$
$\frac{1}{\alpha^3}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\boldsymbol{I(n)}$