אלקטרוניקה פיזיקלית 044124

סמסטר חורף 2020-2021

מועד א' - זום

הנחיות

1. משך הבחינה ־ שלוש שעות.

2. בבחינה 3 שאלות. בידקו כי ברשותכם 5 עמודים כולל עמוד זה.

3. מותר השימוש בכל חומר פתוח (בפרט ניתן לכתוב את הבחינה על גבי טאבלט או להשתמש בטאבלט/שני מסכים).

4. בכל מקרה יש להעלות את הבחינה (הסרוקה) למטלה המוגדרת באתר המודל של הקורס.

5. כיתבו בכתב יד ברור.

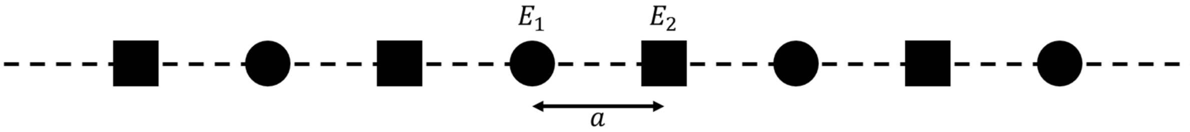
6. תשובות לא מנומקות לא תתקבלנה.

7. אנא ודאו שרשמתם את מספר תעודת הזהות על מחברת הבחינה (לצורך העניין הדפים בהם השתמשתם).

8. סך הניקוד במבחן הוא 110 נקודות (10 נק׳ בונוס בשאלה 3).

<u>שאלה מספר 1 (30 נקודות):</u>

נתונה שרשרת מחזורית אינסופית של אטומים משני סוגים (עיגול/ריבוע) שהמרחק בינהם הינו a כלשהוא. כל אטום מכיל רמת אנרגיה אחת בלבד (ניתן להניח ש- $E_1, E_2 > 0$). נתון כי אנרגיית הצימוד בין שני סוגים שונים של אטומים הינה $E_{12} = E_{21} > 0$ כלשהיא.



א. **(5 נק') -** כזכור, במקרה של סריג עם בסיס מסדר 2, נקבל מטריצה 2 על 2, שאברי האלכסון הראשי שלה הינם האנרגיות העצמיות ואברי האלכסון המשני הינם קבועי הצימוד. כתבו כיצד תיראה המטריצה הנ"ל כתלות בפרמטרים הנתונים.
הדרכה: השתמשו בשיטה שראינו בתרגול 12. אין צורך לחשב את אברי המטריצה!

ב. **(10 נק') -** חשבו את איברי המטריצה שכתבתם בסעיף הקודם. מצאו ביטוי אנליטי למבנה הפסים המתקבל. כמה פסים מצאתם? מהו רוחבו של אזור ברילואן? נמקו תשובתכם!
הדרכה: השתמשו בשיטה שראינו בתרגול 12.

שימו לב: באופן כללי מתקיים $|x| = \sqrt{x^2}$

עבור הסעיף הבא נתון ש- $E_2 = 2E_1, E_1 = E_{12}$.

ג. **(10 נק') -** השתמשו בביטוי מסעיף א' ושרטטו את מבנה הפסים המתקבל בתוך אזור ברילואן הראשון. על גבי הגרף סמנו את ערכי האנרגיות השונות עבור מרכז וקצות אזור ברילואן. מהו עובי כל פס? מהו פער האנרגיה של החומר (אם הוא קיים)? נמקו תשובתכם!

עבור הסעיפים הבאים נתון ש- $E_2 = E_1$, כלומר שהאטום הריבועי זהה בכל מובן לאטום העגול.

כמו כן נתון ש- $E_1 = E_{12}$.

ד. **(7 נק') -** השתמשו בביטוי מסעיף א' ושרטטו את מבנה הפסים המתקבל בתוך אזור ברילואן הראשון. על גבי הגרף סמנו את ערכי האנרגיות השונות עבור מרכז וקצות אזור ברילואן. מהו עובי כל פס? מהו פער האנרגיה של החומר (אם הוא קיים)? נמקו תשובתכם!

ה. **(8 נק') -** עבור מבנה הפסים מהסעיף הקודם, קבלו ביטוי למהירות החבורה בתוך אזור ברילואן הראשון. לאיזה ערך שווה מהירות זו בקצה האזור? כיצד הדבר מסתדר עם מה שלמדנו בקורס?

שאלה מספר 2 (30 נקודות):

נתונים אלקטרונים בעלי ספין $3/2$ (כלומר ש- $s=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$) אשר נמצאים במוצק דו-מימדי. עוד נתון שהאלקטרונים מצייתים ליחס נפיצה (דיספרסיה) פרבולי. צפיפות האלקטרונים הכוללת במוצק הינה n ומסתו של כל אלקטרון היא m כלשהיא.

על מנת לפתור את הסעיפים הבאים, ניעזר בקשר הבא:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{a(x-b)}+1}dx=\frac{1}{a}\ln(1+e^{a\cdot b})$$

א. **(10 נק')** - חשבו את ערכו של הפוטנציאל הכימי של האלקטרונים כתלות בטמפרטורה.

ב. **(5 נק')** - מצאו את אנרגיית פרמי של האלקטרונים.

רמז: כיצד אנרגיית פרמי קשורה לפוטנציאל הכימי?

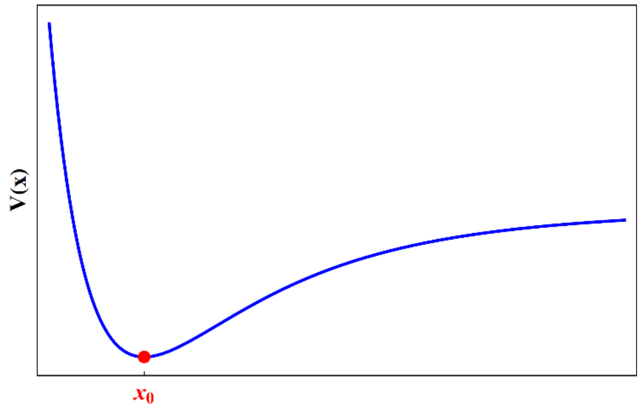
ג. **(5 נק')** - מה קורה לפוטנציאל הכימי בגבול של טמפרטורות נמוכות? מהו התנאי לגבול זה? תנו הסבר לתוצאה.
רמז: השתמשו בביטוי שקיבלתם בסעיף הקודם לאנרגיית פרמי בתוך הביטוי לפוטנציאל הכימי.

ד. **(10 נק')** - מה קורה לפוטנציאל הכימי בגבול של טמפרטורות גבוהות? מה התנאי לגבול זה? כיצד מתנהגים האלקטרונים בגבול זה? נמקו!

שאלה מספר 3 (40 נקודות):

נתונה שרשרת אטומים **חד-ממדית** כך שכל אטום נמצא בפוטנציאל $V(x)$ כפי שמצויר באיור. נקודת המינימום של הפוטנציאל מסומנת ב-x_0 בנוסף נניח ש-$V(x_0)=0$. ידועים מספר פרמטרים של הפוטנציאל:

$$V(x_0)=0, \qquad \frac{d^2V(x_0)}{dx^2}\equiv\kappa, \qquad \frac{d^3V(x_0)}{dx^3}=-\kappa_3,\ \ \kappa,\kappa_3>0$$



מרחק בין האטומים

בשאלה נקבל ביטוי עבור מקדם התפשטות התרמי של שרשרת האטומים (מוצק בחד ממד) המוגדר כ-$\alpha\equiv\frac{1}{x_0}\frac{d\langle x_{atom}\rangle}{dT}$.

הדרכה כללית: עבור כל הסעיפים בהם תתבקשו לחשב מיקום הממוצע הניחו גבולות האינטגרציה $-\infty$ עד ∞

א. **(8 נק') -** הסבירו את המשמעות של מקדם התפשטות התרמי בהתבסס על ההגדרה שלו. מהן היחידות של המקדם הנ"ל?

ב. **(8 נק') -** כעת נניח שהאטומים יכולים להחליף חום בינהם ועם הסביבה (אמבט חום חיצוני). כתבו את הביטוי **הכללי** לפונקציית החלוקה עבור אטום בודד בשרשרת וכן כתבו ביטוי עבור המיקום הממוצע של האטום הנ"ל.(אין צורך בחישוב)

ג. **(8 נק') -** כתבו את קירוב טיילור לפוטנציאל $V(x)$ עד **לסדר שלישי** מסביב לנקודת המינימום x_0. הסבירו את המשמעות של כל אחד ממקדמי הפולינום וכתבו את היחידות שלהם. מהו הגודל של האיבר מהסדר ראשון? נמקו!

ד. **(8 נק') -** בסעיף זה בלבד, קחו את הקירוב עד לסדר שני וחשבו מהו **המיקום הממוצע** של האטום **ומקדם התפשטות התרמי**. הסבירו למה קירוב לסדר שני אינו מספיק בשביל לקבל את התפשטות התרמית של האטומים.

ה. **(8 נק׳) -** כעת ניקח את הקירוב של הפוטנציאל עד לסדר שלישי בטור טיילור. בשביל להקל על החישובים נשתמש בקירוב הבא:

$$e^{f(x)} \approx e^{f(x_0)+\frac{df(x_0)}{dx}(x-x_0)+\frac{d^2f(x_0)}{2!dx^2}(x-x_0)^2} \times \left(1+\frac{d^3f(x_0)}{3!\,dx^3}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = 3\sqrt{\pi}/4$$

היעזרו בקירוב ובאינטגרל הנתון וחשבו את **המיקום הממוצע** של האטום ואת **מקדם ההתפשטות התרמי.**

ו. **(10 נק׳) - סעיף בונוס:** הסבירו את הקירוב בו השתמשנו בסעיף ה׳. כתבו מהו תנאי עבור טמפרטורה כך שהקירוב יהיה תקף, הביטו את התשובה בעזרת k_b, κ, κ_3 **בלבד**. **<u>רמז</u>**: השתמשו במשפט החלוקה השווה בשביל להעריך את גודל של $(x-x_0)$.

טבלת נוסחאות שימושיות:

גדלים פיזיקליים שימושיים:

$$m_e = 9.1\cdot 10^{-31}[kg]$$
$$k_B = 1.38\cdot 10^{-23}[J/K]$$
$$h = 6.626\cdot 10^{-34}[J\cdot s]$$

זהויות וקטוריות שימושיות:

$$a\cdot b \triangleq |a||b|\cos(\theta_{ab}) = \sum_i a_i b_i$$
$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$

זהויות אלגבריות/טריגונומטריות שימושיות:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-a) = \cos(a)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-a) = \sin(a)$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\cos(a) = \frac{1}{2}[e^{ia}+e^{-ia}]$$
$$\sin(a) = \frac{1}{2i}[e^{ia}-e^{-ia}]$$
$$\cosh(a) = \frac{1}{2}[e^{a}+e^{-a}]$$
$$\sinh(a) = \frac{1}{2}[e^{a}-e^{-a}]$$
$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a)$$
$$\sin^2(a) = \frac{1}{2}[1-\cos(2a)]$$
$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}[1+\cos(2a)]$$
$$\sin(\pi-a) = \sin(a)$$
$$\cos(\pi-a) = -\cos(a)$$

חישובי דטרמיננטות 2 על 2 ו-3 על 3:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

אינטגרלים שימושיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n-1!$$

$\boldsymbol{n}$	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	3
$\boldsymbol{\Gamma(n)}$	$\sqrt{\pi}$	1	$\sqrt{\pi}/2$	1	$3\sqrt{\pi}/4$	2

$$I(n) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}} \quad \alpha > 0 \; and \; n \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \begin{cases} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\alpha^{-\frac{n+1}{2}} & n \in Even \\ 0 & n \in Odd \end{cases}$$

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{I(n)}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$