

Контрольная работа “Старт” - 60 минут

Правила: - На решение отведено 60 минут - Требуются развёрнутые решения с доказательствами - Ответ без обоснования = 0 баллов - Чертежи для геометрии обязательны

Задача 1. Модуль и неравенство треугольника

Тема: Absolute value and its properties. Triangle inequality (1) Источник: адаптировано из Polish Mathematical Olympiad*

На числовой прямой расположены точки A , B и C с координатами a , b и c соответственно.

а) Докажите, что расстояние от A до C не превосходит суммы расстояний от A до B и от B до C :

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

б) Используя пункт (а), докажите, что для любых действительных чисел x и y :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

в) Найдите все целые числа n , для которых выполняется:

$$|n - 3| + |n + 5| = 10$$

Задача 2. Булочки математиков

Тема: Permutations (1) Источник: Singapore Math Olympiad 2022, Junior*

В магазине продаются булочки двух видов: с кремом и с джемом. Внешне они неотличимы. Четыре математика заказали (не обязательно в этом порядке): - три булочки с кремом - две с кремом и одну с джемом - одну с кремом и две с джемом - три булочки с джемом

Каждый знал, что заказали остальные. К сожалению, продавец перепутал заказы и каждому дал чужой заказ!

Математики начали есть, не зная об ошибке, пока продавец не прибежал сообщить о путанице.

Математик А сказал: “Я съел две булочки, обе с кремом. Значит, если мой заказ неправильный, я теперь знаю, какая у меня третья булочка.”

Математик В сказал: “Я съел только одну булочку, с кремом. Исходя из слов А и зная его заказ, теперь я знаю, какие у меня остальные две.”

Математик С сказал: “Я ещё не начинал есть, но я точно получил три булочки с джемом.”

Докажите, какой заказ сделал математик D и что он получил вместо него.

Задача 3. Разрезание на равные площади

Тема: Area of a rectangle, right triangle, disc, composite figures (1) Источник: адаптировано из Wallace-Bolyai-Gerwein theorem problems*

Прямоугольник $ABCD$ имеет стороны $AB = 6$ и $BC = 4$.

а) Точка P находится внутри прямоугольника. Из неё проведены отрезки ко всем четырём вершинам, разбивая прямоугольник на 4 треугольника. Докажите, что сумма площадей двух противолежащих треугольников (треугольник APB и треугольник CPD) равна сумме площадей двух других (треугольник BPC и треугольник DPA).

б) прямоугольник разрезали на два треугольника диагональю AC . Докажите, что любой из этих треугольников можно разрезать на части и переложить их так, чтобы получился квадрат. Опишите, как это сделать.

Задача 4. Шахматный турнир

Тема: Quartiles, Average, Median (0) Источник: адаптировано из Singapore Math Olympiad 2019*

В шахматном турнире по круговой системе участвовали n учеников 7-го класса и m учеников 8-го класса. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. За победу даётся 3 очка, за ничью - 1 очко, за поражение - 0 очков.

- a)** Если всего было сыграно 45 партий, найдите все возможные значения n и m .
 - b)** Пусть $n = 4$ и $m = 6$. Итоговые очки всех 10 участников записали в порядке возрастания. Известно, что медиана равна 12, а межквартильный размах $IQR = 8$. Если каждому участнику добавить 2 бонусных очка, как изменятся медиана и IQR ? Докажите ваш ответ.
 - c)** Докажите, что общее количество очков всех участников нечётно тогда и только тогда, когда было сыграно чётное число ничьих.
-

Критерии оценивания

Задача	Максимум баллов
Задача 1	15 баллов
Задача 2	15 баллов
Задача 3	15 баллов
Задача 4	15 баллов
Итого	60 баллов

Время: 60 минут

Удачи!