План урока — Подготовка к контрольной

Как использовать этот документ

Для каждой темы: 1. **Ключевая идея** — главное, что ученик должен понять 2. **Пошаговое решение** — как решать эту конкретную задачу 3. **Шаблон мышления** — как подходить к ЛЮБОЙ задаче этой темы 4. **Типичные ошибки** — на что обратить внимание

Задача 1: Модуль и неравенство треугольника

Ключевая идея

Модуль — это расстояние на числовой прямой.

- $|a|$ = расстояние от точки a до нуля
- $|a-b|$ = расстояние между точками a и b

Неравенство треугольника: *"Прямой путь всегда короче (или равен) пути через промежуточную точку"*

Пошаговое решение

Часть a): Доказать $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$

Ге□□метрический смысл: Расстояние от A до C ≤ (расстояние от A до B) + (расстояние от B до C)

Шаг 1. Рассмотрим три случая расположения точек на прямой: - B между A и C: тогда $|a-c| = |a-b| + |b-c|$ (равенство!) - B левее обеих или правее обеих: путь через B длиннее

Шаг 2. Алгебраически: $a-c = (a-b) + (b-c)$

Шаг 3. Применяем свойство модуля:

$$|a-c| = |(a-b) + (b-c)| \leq |a-b| + |b-c|$$

Часть b): Доказать $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Шаг 1. Из пункта (a) с $a = x$, $b = 0$, $c = y$:

$$|x-y| \leq |x-0| + |0-y| = |x| + |y|$$

Шаг 2. Теперь хитрость — применим (a) с $a = |x|$, $b = |y|$, $c = 0$:

$$||x| - |y|| \leq ||x| - 0| + |0 - |y|| = |x| + |y|$$

Это не то… Нужен другой подход.

Правильный способ:

Шаг 1. Из неравенства треугольника:

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

Шаг 2. Перенесём:

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

Шаг 3. Аналогично (меняя x и y):

$$|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$$

Шаг 4. Объединяем — получаем $||x| - |y|| \leq |x-y|$ □

Часть с): Решить $|n-3|+|n+5|=10$ для целых n

Шаг 1. Геометрический смысл: сумма расстояний от n до точек 3 и -5 равна 10.

Шаг 2. Расстояние между 3 и -5 равно $|3-(-5)|=8$.

Шаг 3. Если n между -5 и 3: сумма расстояний = 8 (константа!) Значит, при $-5 \leq n \leq 3$ левая часть = 8 ≠ 10.

Шаг 4. Если n < -5: $|n-3|+|n+5|=(3-n)+(-5-n)=-2n-2$ Решаем: $-2n-2=10 \rightarrow n=-6$ □

Шаг 5. Если n > 3: $|n-3|+|n+5|=(n-3)+(n+5)=2n+2$ Решаем: $2n+2=10 \rightarrow n=4$ □

Ответ: $n \in \{-6, 4\}$

Шаблон мышления для ЛЮБОЙ задачи на модуль

```
1.                 !
2.       "           " (                  = 0)
3.                    (      !)
4.
5.
6.       ,
```

Типичные ошибки

□ Забывают, что $|a-b|=|b-a|$ □ Путают $|a|+|b|$ и $|a+b|$ — это РАЗНЫЕ вещи! □ Не рисуют числовую прямую (а это ключ к пониманию!)

Задача 2: Булочки математиков (логика + перебор)

Ключевая идея

Это задача на логический вывод. Нужно: 1. Использовать ВСЕ условия 2. Исключать невозможные варианты 3. Делать выводы из высказываний

Пошаговое решение

Дано: - Заказы: 3К, 2К+1Д, 1К+2Д, 3Д (К=крем, Д=джем) - Каждый получил ЧУЖОЙ заказ

Анализ слов математика A:

A съел 2 булочки с кремом. После этого он может определить третью. - Если бы A получил 3К — он не мог бы ничего определить (все три с кремом) - Если A получил 2К+1Д — съев 2К, остаётся 1Д. Он знает! - Если A получил 1К+2Д — невозможно съесть 2К - Если A получи□□ 3Д — невозможно съесть 2К

Вывод 1: A получил 2К+1Д

Анализ слов математика B:

B съел 1К. Зная заказ A и что A получил 2К+1Д, B может определить свои 2 оставшиеся.

B знает, что заказ A был НЕ "2К+1Д" (потому что A получил чужое).

Если заказ A был 3К: - A заказал 3К, получил 2К+1Д - B съел 1К и теперь знает остальное - Это возможно только если B получил 3К (тогда все 3 с кремом — знает что осталось 2К)

Вывод 2: A заказал 3К, B получил 3К

Но B тоже получил чужое! Значит, B заказал не 3К.

Анализ слов математика C:

С не ел, но уверен, что получил 3Д. - Это возможно только если С знает это из логики - С видит: А получил 2К+1Д, В получил 3К - Осталось раздать: 1К+2Д и 3Д - С и D получили эти два заказа - С уверен что у него 3Д → значит он может это вывести

Если С заказал 3Д, то он не мог □□олучить 3Д (все получили чужое). Но С говорит что получил 3Д! Значит, С заказал НЕ 3Д.

Вывод 3: С заказал что-то другое, но получил 3Д

Финальная таблица:

Математик	Заказал	Получил
A	3К	2К+1Д
B	1К+2Д	3К
C	2К+1Д	3Д
D	3Д	1К+2Д

Ответ: D заказал три булочки с джемом (3Д), но получил одну с кремом и две с джемом (1К+2Д).

Шаблон мышления для логических задач

1.
2.
3.
4.
5.
6. ,

Типичные ошибки

□ Пропускают условие "каждый получил ЧУЖОЙ заказ" □ Не используют информацию о том, что математики знают заказы друг друга □□ Не проверяют итоговый ответ на все условия

Задача 3: Площади треугольников в прямоугольнике

Ключевая идея

Площадь треугольника = ½ × основание × высота

Для точки внутри прямоугольника: используй координаты!

Пошаговое решение

Часть а): Доказать равенство сумм площадей

Шаг 1. Введём координаты: $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (6, 4)$, $D = (0, 4)$

Шаг 2. Пусть $P = (x, y)$

Шаг 3. Вычислим площади: - $S_{APB} = \frac{1}{2} \times AB \times y = \frac{1}{2} \times 6 \times y = 3y$ - $S_{CPD} = \frac{1}{2} \times CD \times (4-y) = \frac{1}{2} \times 6 \times (4-y) = 3(4-y)$ - $S_{BPC} = \frac{1}{2} \times BC \times (6-x) = \frac{1}{2} \times 4 \times (6-x) = 2(6-x)$ - $S_{DPA} = \frac{1}{2} \times DA \times x = \frac{1}{2} \times 4 \times x = 2x$

Шаг 4. Проверяем:

$$S_{APB} + S_{CPD} = 3y + 3(4-y) = 12$$
$$S_{BPC} + S_{DPA} = 2(6-x) + 2x = 12$$

Вывод: Обе суммы равны 12 = половина площади прямоугольника □

Часть b): Как разрезать треугольник и сложить в квадрат

Шаг 1. Диагональ делит прямоугольник 6×4 на два треугольника площадью 12 каждый.

Шаг 2. Нам нужен квадрат площадью 12 → сторона $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$

Шаг 3. Конкретный алгоритм для прямоугольного треугольника:

```
    C
    |\
    | \
  4 |  \  ←
    |   \
    |____\
    A  6  B
```

Способ (через параллелограмм): 1. Найди середины катетов — точки M (на AC) и N (на AB) 2. Проведи среднюю линию MN — она параллельна гипотенузе 3. Отрежь верхний маленький треугольник (CMN) 4. Переверни его и приложи к основанию → получишь параллелограмм 5. Разрежь параллелограмм вертикально, переложи → прямоугольник 6. Прямоугольник разрежь по диагонали, сдвинь → квадрат

Главная идея: Два многоугольника с РАВНЫМИ ПЛОЩАДЯМИ всегда можно разрезать и переложить друг в друга (теорема Bolyai-Gerwein)!

Шаблон мышления для задач на площади

```
1.
2.              (x, y)
3.
4.
5.    "     ":                         ,
```

Задача 4: Шахматный турнир и статистика

Ключевая идея

Круговая система: каждый играет с каждым → число партий = $\binom{n+m}{2} = \frac{(n+m)(n+m-1)}{2}$

Медиана — середина отсортированного ряда **IQR** — разброс “средних 50%” данных

Пошаговое решение

Часть a): Найти n и m, если 45 партий

Шаг 1. Пусть всего $k = n + m$ участников.

Шаг 2. Число партий: $\frac{k(k-1)}{2} = 45$

Шаг 3. Решаем: $k(k-1) = 90 = 10 \times 9$

Шаг 4. Значит, $k = 10$.

Шаг 5. Возможные разбиения на 7-й и 8-й классы: - $(n, m) = (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)$

Ответ: Все пары (n, m) где $n + m = 10$ и $n, m \geq 1$.

Часть b): Как изменятся медиана и IQR при добавлении 2 очков?

Медиана: - Было: медиана = 12 - Станет: медиана = 12 + 2 = 14

IQR: - $Q_1' = Q_1 + 2$ - $Q_3' = Q_3 + 2$ - $IQR' = Q_3' - Q_1' = (Q_3 + 2) - (Q_1 + 2) = Q_3 - Q_1 = IQR$

Вывод: Медиана увеличится на 2, IQR не изменится.

Доказательство: Добавление константы сдвигает ВСЕ значения одинаково. Разность между любыми двумя значениями не меняется.

Часть c): Доказать связь чётности очков и числа ничьих

Шаг 1. В каждой партии разыгрывается: - 3 очка (если есть победитель) - 2 очка (если ничья)

Шаг 2. Пусть было w партий с победителем и d ничьих. Всего партий: $w + d = 45$.

Шаг 3. Общее количество очков: $3w + 2d$

Шаг 4. Подставим $w = 45 - d$:

$$3(45 - d) + 2d = 135 - 3d + 2d = 135 - d$$

Шаг 5. Анализ чётности: - 135 — нечётное число - $135 - d$ нечётно □ d чётно

Вывод: Общее количество очков нечётно тогда и только тогда, когда число ничьих чётно □

Проверка на примере: - 0 ничьих (чётно): $135 - 0 = 135$ — нечётно □ - 1 ничья (нечётно): $135 - 1 = 134$ — чётно □ - 2 ничьих (чётно): $135 - 2 = 133$ — нечётно □

Шаблон мышления для задач на статистику

```
1.    ,              (    ,      , IQR)
2.           (+      , ×      ):
   -     :                ,
   -      :           ,
3.          :
4.
```

БОНУС: Задача для сильной темы (3□)

Тема: Congruent triangles (Равенство треугольников)

Задача

Источник: адаптировано из IMO Geometry problems

В треугольнике ABC угол $C = 90°$. Из вершины C проведена высота CD на гипотенузу AB.

a) Докажите, что $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$

b) Используя подобие, докажите, что $CD^2 = AD \cdot DB$

Решение

Часть a):

Шаг 1. В $\triangle ACD$: - $\angle ACD + \angle CAD = 90°$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника) - $\angle CAD = \angle A$ - Значит, $\angle ACD = 90° - \angle A = \angle B$

Шаг 2. Сравниваем $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$: - $\angle A$ — общий - $\angle ADC = 90° = \angle ACB$ - По признаку AA: $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ □

Шаг 3. Аналогично для $\triangle CBD$ и $\triangle ABC$: - $\angle B$ — общий - $\angle BDC = 90° = \angle BCA$ - П□□ признаку AA: $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ □

Часть b):

Шаг 1. Из $\triangle ACD \sim \triangle CBD$:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$$

Шаг 2. Крест-накрест:

$$CD^2 = AD \cdot BD$$

$\square$

Шаблон для задач на подобие треугольников

```
1.           :
   -
   -
   -
   -   ,         90°   180°
2.          (AA, SAS, SSS)
3.
4.
```

Итоговые рекомендации для ученика

1. **Всегда начинай с чертежа** — даже для алгебры (числовая прямая!)
2. **Записывай все известные факты** — часто решение “видно” когда всё выписано
3. **Проверяй ответ** — подставь числа, проверь граничные случаи
4. **Если застрял — упрости задачу** — реши для конкретных чисел, потом обобщи
5. **Ищи геометрический смысл** — модуль = расстояние, сумма = путь