

## Контрольная работа “Старт” - 60 минут

**Правила:** - На решение отведено 60 минут - Требуются развёрнутые решения с доказательствами - Ответ без обоснования = 0 баллов - Чертежи для геометрии обязательны

---

### Задача 1. Модуль и неравенство треугольника

**Тема:** Absolute value and its properties. Triangle inequality (1) Источник: адаптировано из Polish Mathematical Olympiad\*

На числовой прямой расположены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  с координатами  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно.

а) Докажите, что расстояние от  $A$  до  $C$  не превосходит суммы расстояний от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до  $C$ :

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

б) Используя пункт (а), докажите, что для любых действительных чисел  $x$  и  $y$ :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

в) Найдите все целые числа  $n$ , для которых выполняется:

$$|n - 3| + |n + 5| = 10$$

---

### Задача 2. Булочки математиков

**Тема:** Permutations (1) Источник: Singapore Math Olympiad 2022, Junior\*

В магазине продаются булочки двух видов: с кремом и с джемом. Внешне они неотличимы. Четыре математика заказали (не обязательно в этом порядке): - три булочки с кремом - две с кремом и одну с джемом - одну с кремом и две с джемом - три булочки с джемом

Каждый знал, что заказали остальные. К сожалению, продавец перепутал заказы и каждому дал чужой заказ!

Математики начали есть, не зная об ошибке, пока продавец не прибежал сообщить о путанице.

Математик А сказал: “Я съел две булочки, обе с кремом. Значит, если мой заказ неправильный, я теперь знаю, какая у меня третья булочка.”

Математик В сказал: “Я съел только одну булочку, с кремом. Исходя из слов А и зная его заказ, теперь я знаю, какие у меня остальные две.”

Математик С сказал: “Я ещё не начинал есть, но я точно получил три булочки с джемом.”

Докажите, какой заказ сделал математик **Д** и что он получил вместо него.

---

### Задача 3. Разрезание на равные площади

**Тема:** Area of a rectangle, right triangle, disc, composite figures (1) Источник: адаптировано из Wallace-Bolyai-Gerwein theorem problems\*

Прямоугольник  $ABCD$  имеет стороны  $AB = 6$  и  $BC = 4$ .

а) Точка  $P$  находится внутри прямоугольника. Из неё проведены отрезки ко всем четырём вершинам, разбивая прямоугольник на 4 треугольника. Докажите, что сумма площадей двух противоположных треугольников (треугольник  $APB$  и треугольник  $CPD$ ) равна сумме площадей двух других (треугольник  $BPC$  и треугольник  $DPA$ ).

б) прямоугольник разрезали на два треугольника диагональю  $AC$ . Докажите, что любой из этих треугольников можно разрезать на части и переложить их так, чтобы получился квадрат. Опишите, как это сделать.

---

## Задача 4. Шахматный турнир

**Тема:** Quartiles, Average, Median (0) Источник: адаптировано из Singapore Math Olympiad 2019\*

В шахматном турнире по круговой системе участвовали  $n$  учеников 7-го класса и  $m$  учеников 8-го класса. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. За победу даётся 3 очка, за ничью - 1 очко, за поражение - 0 очков.

**а)** Если всего было сыграно 45 партий, найдите все возможные значения  $n$  и  $m$ .

**б)** Пусть  $n = 4$  и  $m = 6$ . Итоговые очки всех 10 участников записали в порядке возрастания. Известно, что медиана равна 12, а межквартильный размах  $IQR = 8$ . Если каждому участнику добавить 2 бонусных очка, как изменятся медиана и  $IQR$ ? Докажите ваш ответ.

**в)** Докажите, что общее количество очков всех участников нечётно тогда и только тогда, когда было сыграно чётное число ничьих.

---

## Критерии оценивания

Задача	Максимум баллов
Задача 1	15 баллов
Задача 2	15 баллов
Задача 3	15 баллов
Задача 4	15 баллов
<b>Итого</b>	<b>60 баллов</b>

**Время:** 60 минут

*Удачи!*