

## RÓWNANIA RUCHU

Na tych laboratoriach skupimy się na scałkowaniu równania ruchu:

$$M\ddot{x} = F - Sx$$

Gdzie  $x$  to odkształcenie,  $M$  to macierz masowa, zaś  $S$  to macierz sztywności.

Na początek przez  $y$  oznaczmy prędkość odkształcenia, czyli  $y = \dot{x}$ . Teraz mamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} M\dot{y} &= F - Sx \\ \dot{x} &= y \end{cases}$$

Zastępując pochodną po lewej stronie przez różnicę skończoną mamy:

$$\begin{cases} M \frac{y_{n+1} - y_n}{dt} &= F - Sx \\ \frac{x_{n+1} - x_n}{dt} &= y \end{cases}$$

Po prawej stronie równania możemy użyć  $x$  i  $y$  z nowej ( $n+1$ ), bądź starej ( $n$ ) iteracji. W zależności co użyjemy otrzymamy mniej lub bardziej uwikłane równanie, a schemat będzie jawny (explicit) bądź niejawny (implicit).

Uwaga: by porównać różne schematy, każdy schemat napisz w nowej funkcji, która powinna brać następujące argumenty: `void Dynamics(int n, double * x, double * y, double T, double dt);`, gdzie  $x$  i  $y$  to początkowe wartości  $x$  i  $y$ ,  $T$  to całkowity czas całkowania, a  $dt$  to krok czasowy.

### Schemat prawie jawny (almost explicit)

Na początek wstawmy po prawej stronie wartości ze starej iteracji. Otrzymamy:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - Sx_n) \\ x_{n+1} &= x_n + dt y_n \end{cases}$$

#### Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez macierz masową. W pliku `MesLib.h` jest ona zdefiniowana w analogiczny sposób jak macierz sztywności: przez macierz  $M$  i stałą  $Mm$ . UWAGA: W mnożeniu przez macierz masową, należy także zamrozić wybrane stopnie swobody.

#### Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu: - Oblicz  $b = My + dt(F - Sx)$  - Oblicz  $x = x + dt y$  - Rozwiąż układ:  $My = b$  - Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

#### Zadanie

Przeanalizuj dla jakich  $dt$  układ jest stabilny, a dla jakich nie.

#### Zadanie

Jak wygląda wzór na całkowitą energię układu (energia potencjalna sprężystości + praca sił + energia kinetyczna)? Zróżniczuj ją po  $t$  i pokaż, że jest stała

#### Zadanie

Wydrukuj w konsoli jak zmienia się całkowita energia układu w czasie.

### Schemat pół niejawny (semi-implicit)

Prostą modyfikacją jest użycie po prawej stronie  $x$  ze starej iteracji i  $y$  z nowej, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - Sx_n) \\ x_{n+1} &= x_n + dt y_{n+1} \end{cases}$$

#### Zadanie

Zmodyfikuj kod rozwiązując układ na  $y$  przed modyfikacją  $x$ -a.

**Zadanie**

Przeanalizuj dla jakich  $dt$  układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

**Schemat niejawny (fully-implicit)**

Możemy także po prawej stronie wziąć obie wartości z nowej iteracji, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - Sx_{n+1}) \\ x_{n+1} &= x_n + dt y_{n+1} \end{cases}$$

Wstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt y_{n+1}))$$

Przekształcając:

$$(M + dt^2 S)y_{n+1} = My_n + dt(F - Sx_n)$$

**Zadanie**

Napisz funkcję mnożącą przez  $M + dt^2 S$

**Zadanie**

Zmodyfikuj kod, by realizował schemat w pełni niejawny, zamieniając macierz  $M$  na  $M + dt^2 S$  w obliczeniu  $y$ -ka

**Zadanie**

Przeanalizuj dla jakich  $dt$  układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

**W pół kroku (midpoint)**

Ostatnia z omówionych metod bierze po prawej stronie średnią z wartości w nowej i starej iteracji:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - S \frac{x_{n+1} + x_n}{2}) \\ x_{n+1} &= x_n + dt \frac{y_{n+1} + y_n}{2} \end{cases}$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego mamy:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S \frac{x_n + dt \frac{y_{n+1} + y_n}{2} + x_n}{2})$$

Przekształcając:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt \frac{y_{n+1} + y_n}{4}))$$

Ostatecznie:

$$(M + \frac{dt^2}{4} S)y_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt \frac{y_n}{4}))$$

**Zadanie**

Napisz funkcję mnożącą przez  $M + \frac{dt^2}{4} S$

**Zadanie**

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu: - Oblicz  $x = x + \frac{dt}{4} y$  - Oblicz  $b = My + dt(F - Sx)$  - Oblicz  $x = x + \frac{dt}{4} y$  - Rozwiąż układ:  $(M + \frac{dt^2}{4} S)y = b$  - Oblicz  $x = x + \frac{dt}{2} y$  - Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

**Zadanie**

Przeanalizuj dla jakich  $dt$  układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

**Zadanie**

Udowodnij, że metoda pół kroku zachowuje energię układu.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Podpowiedź: tak jak  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$  to  $x_{n+1}^T M x_{n+1} - x_n^T M x_n = (x_{n+1} - x_n)^T M (x_{n+1} + x_n)$