Całkowanie numeryczne układów równań różniczkowych zwyczajnych

Pliki do wykorzystania w poniższym ćwiczeniu można pobrać za pomocą poniższych linków:

- Plik nagłówkowy rk4.h
- Plik źródłowy rk4.cpp

Wstęp

Celem ćwiczenia jest zastosowanie metody **Eulera** oraz metody **Rugego-Kutty 4 rzędu** do numerycznego rozwiązania równań ruchu dynamiki Newtona. Jako przykład takiego zagadnienia posłuży nam wahadło matematyczne.

Równania ruchu

Ruch wahadła matematycznego najwygodniej jest opisać w układzie współrzędnych biegunowych związanych z jego punktem zaczepienia. Otrzymamy wtedy równanie różniczkowe wraz z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha) \\ \alpha(t_0) = \alpha_0 \\ \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \omega_0 \end{cases}$$

gdzie:

- α - kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi,
- g - przyśpieszenie ziemskie,
- l - długość wahadła,
- m - masa kulki zaczepionej na końcu wahadła,
- α_0 - początkowe wychylenie wahadła,
- ω_0 - początkowa prędkość wahadła.

Równanie to możemy sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu za pomocą podstawienia:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

Układ równań ma teraz postać:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha) \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega \\ \alpha(t_0) = \alpha_0 \\ \omega(t_0) = \omega_0 \end{cases} \tag{*}$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych metodą Eulera

Mamy układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = F_1(\alpha, \omega, t) \\ \frac{d\alpha}{dt} = F_2(\alpha, \omega, t) \end{cases}$$

Szukanymi funkcjami są $\omega = \omega(t)$ oraz $\alpha = \alpha(t)$. Układ ten można rozwiązać metodą Eulera. Jedna iteracja całkowania z krokiem h będzie miała postać:

$$\begin{cases} \omega(t_{i+1}) = \omega(t_i) + h \cdot F_1(\alpha(t_i), \omega(t_i), t_i) \\ \alpha(t_{i+1}) = \alpha(t_i) + h \cdot F_2(\alpha(t_i), \omega(t_i), t_i) \end{cases} \tag{1}$$

Ćwiczenia

Dla wahadła opisanego układem równań (*):

1. Napisz funkcję o nagłówku:

```
void rhs_fun(double t, double *X, double *F);
```

która oblicza wartości prawych stron równań różniczkowych. Argumenty funkcji to:

- `t` - zmienna niezależna (czas),
- `X` - tablica zmiennych zależnych (α i ω),
- `F` - tablica do której zapisane zostaną obliczone prawe strony równań różniczkowych.

2. Napisz funkcję:

```
void veuler(double t, double *X, double h, int n,
            void (* fun)(double, double *,double *), double *X1);
```

która wykonuje jeden krok całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu metodą Eulera. Argumenty funkcji to:

- `t` - zmienna niezależna,
- `X` - tablica wartości zmiennych zależnych w kroku `t`,
- `h` - krok całkowania,
- `n` - rozmiar tablicy,
- `fun` - wskaźnik do funkcji obliczającej prawe strony równań,
- `X1` - tablica do której zapisane zostaną wartości zmiennych zależnych w kroku `t + h`.

2. Napisz program, który używając metody Eulera wyznacza zależności kąta wychylenia wahadła α oraz prędkości kątowej ω od czasu dla $t \in [0, \ldots 10]$.

3. Narysuj wykres trajektorii układu w przestrzeni fazowej $(\alpha - \omega)$.

4. Powtórz obliczenia korzystając z metody Rungego-Kutty 4 rzędu, która jest zaimplementowana w bibliotece `rk4.cpp`. Odpowiednia funkcja nazywa się `vrk4` a jej nagłówek jest analogiczny do nagłówka funkcji `veuler`.

5. Wyznacz zależność energii całkowitej wahadła od czasu $E(t)$. Energia całkowita wahadła wyraża się wzorem:

$$E = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos(\alpha))$$

   Uwaga: Przy braku dyssypacji, energia mechaniczna powinna być stała.

6. Powtórz obliczenia dla różnych kroków czasowych.