Całkowanie numeryczne

Pliki do wykorzystania w poniższym ćwiczeniu można pobrać za pomocą poniższych linków:

- Plik nagłówkowy kwad.h
- Plik źródłowy kwad.cpp

1. Wstęp

Całkowanie numeryczne jest jednym z podstawowych algorytmów używanych w obliczeniach inżynierskich. Całkowanie numeryczne zawsze dotyczy obliczania całki oznaczonej (jedno bądź wielowymiarowej). Nigdy natomiast nie dotyczy obliczania całki nieoznaczonej. Wynikiem jego działania jest wartość całki, a w żadnym razie wzór funkcji pierwotnej.

2. Algorytmy całkujące

Wśród podstawowych algorytmów, jakimi będziemy się zajmować są:

- metoda trapezów,
- metoda Simpsona oraz
- kwadratury Gaussa-Legendre'a.

Ćwiczenia

1. Napisz program, który metodą trapezów obliczy całkę oznaczoną:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

   Algorytm całkowania metodą trapezów jest zaimplementowany. Znajdziesz go w funkcji `trapez` w pliku *kwad.cpp*. Nagłówek funkcji `trapez` ma następującą postać:

```
double trapez(double a, double b, double (*fun)(double x), int n)
```

Argumenty `a`, `b` i `n` to odpowiednio dolna i górna granica całkowania oraz liczba punktów, które dzielą przedział całkowania. Trzeci argument to wskaźnik do funkcji. Dzięki niemu procedura `trapez` jest w stanie obliczyć całkę z dowolnej funkcji. Nazwa funkcji, która jest jednocześnie jej adresem, informuje gdzie można znaleźć instrukcje obliczające wartości funkcji podcałkowej. Poprawne wywołanie to np. `trapez(a, b, sin, n);` lub `trapez(1, 5, sqrt, 100);`. Możesz też użyć tej procedury do obliczenia całki z funkcji, którą wcześniej zadeklarowałeś i zdefiniowałeś, np. `trapez(a, b, MojaFunkcja, 50);`, gdzie definicja funkcji `MojaFunkcja` ma postać:

```
double MojaFunkcja(double x) {
  return x * x + sin(x);
}
```

Zwróć uwagę, że funkcja **musi** mieć jeden argument typu `double` i **musi** zwracać wartość typu `double`.
Aby zrealizować zadanie z punktu 1, wykonaj następujące czynności:

- Napisz funkcję, która oblicza wartości $f(x)$ oraz funkcję, która oblicza całkę w sposób analityczny (całkę oblicz na papierze). Umieść ich prototypy przed funkcją główną oraz załącz plik nagłówkowy *kwad.h* z funkcjami całkującymi.
- Za pomocą klawiatury podaj wartości `a`, `b` oraz `n`.
- Oblicz wartość całki numerycznej `cn` oraz wartość całki analitycznej `ca` przez wywołanie odpowiednich funkcji.
- Oblicz błąd $|cn - ca|$.
- Zapisz do pliku krok całkowania oraz wartość całki obliczonej analitycznie oraz numerycznie.

2. Przetestuj ten program dla dwóch funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

   oraz

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

   dla $a = 1$, $b = 5$ oraz $a = 0.1$ i $b = 5$.

3. Rozszerz program tak, aby zapisywał do pliku kolejne wiersze odpowiadające wartościom $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^m$. Liczbę `m` wczytaj z klawiatury.

4. Wynik przedstaw graficznie, korzystając z arkusza kalkulacyjnego.
5. Rozszerz program tak, aby dodatkowo używał metody Simpsona. Jest ona zaimplementowana w funkcji o nagłówku `double simpson(double a, double b, double(*fun)(double x), int n)`.
6. Otrzymane wyniki przedstaw graficznie.

Wskazówki odnośnie wskaźników do funkcji

Przeanalizuj poniższy kod ilustrujący użycie wskaźników do funkcji. Jakie wartości przyjmują zmienne `y1` i `y2`?

```
// funkcja: y = 2 * x
double fun1(double x) {
  return 2 * x;
}

// funkcja: y = -x
double fun2(double x) {
  return -x;
}

// funkcja zwaraca y^2
double kwadrat(double xx, double (*pf)(double)) {
  return pf(xx) * pf(xx);
}

void main() {
  double y1 = kwadrat(2., fun1);
  double y2 = kwadrat(2., fun2);
}
```

3. Dla dociekliwych

Metody trapezów i Simpsona to dość elementarne procedury. W programach obliczeniowych, które wymagają wykonywania wielokrotnych całkowań (często wiele milionów razy - o takich metodach, np. metodzie elementów skończonych stosowanej chociażby w wytrzymałości konstrukcji - będziesz się uczyć na wyższych latach) trzeba używać procedur bardziej wydajnych obliczeniowo. Jedną klasę takich metod, które osiągają dużą dokładność przy niewielkiej liczbie punktów, w których obliczana jest funkcja podcałkowa (o tych punktach mówimy węzły kwadratury) stanowią kwadratury Gaussa.

Kwadratura Gaussa-Legendre'a jest w zdefiniowana dla następującej całki oznaczonej (zawsze w przedziale $x = [-1, 1]$).

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Taką całkę w sposób przybliżony oblicza się zgodnie z następującym wzorem:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Wielkości w_i to kolejne wagi kwadratury, x_i to węzły kwadratury, a n oznacza liczbę węzłów, w których będzie obliczana wartość funkcji podcałkowej.
Aby obliczyć całkę tą kwadraturą, trzeba znać położenia węzłów i wartości wag. Wielkości te można obliczyć lub skorzystać z tablic zawierających obliczone wartości w_i i n_i dla różnych wartości n (przykładowo, można je znaleźć w Internecie[1]). Położenia węzłów i wartości wag dla $n = 5$ są podane w poniższej tabeli:

x_i	w_i
-0.9061798459386639927976269	0.2369268850561890875142640
-0.5384693101056830910363144	0.4786286704993664680412915
0.0	0.5688888888888888888888889
0.5384693101056830910363144	0.4786286704993664680412915
0.9061798459386639927976269	0.2369268850561890875142640

Ćwiczenie

- Zaimplementuj w dowolny sposób metodę całkowania za pomocą kwadratury Gaussa. Zwróć uwagę, że kwadratura ta jest zdefiniowana dla całki w przedziale $[-1, 1]$. Musisz najpierw przekształcić wzór tak aby można było obliczyć całkę w przedziale $[a, b]$ (skorzystaj z zamiany zmiennych).

[1] Wystarczy do przeglądarki wpisać hasło „Legendre Gauss nodes and weights". Można je także znaleźć choćby pod adresem

- Porównaj otrzymaną wartość z poprzednimi metodami. Ilu podziałów w metodzie trapezów lub Simpsona musisz użyć, aby osiągnąć dokładność całkowania osiąganą przez kwadraturę Gaussa opartą na pięciu węzłach?