



۱- مقدمه

شبکه‌ها زیرساختی را تدارک می‌بینند که در آن عملکرد اقتصاد و جوامع و سایر ملزومات بدان وابستگی پیدا می‌کند. شبکه‌هایی که ستون فقرات فیزیکی عصر نوین را تشکیل می‌دهند شامل شبکه‌های حمل و نقل هستند که جریان وسایط نقلیه را از مبدأ به مقصد انتقال می‌دهند؛ شبکه‌های ساخت‌وساز و لجستیک هستند که تبدیلات مواد خام را امکان‌پذیر ساخته‌اند و آن‌ها را به صورت محصولات نهایی تحویل می‌دهند؛ شبکه‌های برق و انرژی هستند که سوخت‌های مورد نیاز را انتقال می‌دهند و شبکه اینترنت جهانی است که امکان دستیابی و ارتباط همگانی را تدارک می‌بیند و کار و هدایت ده‌ها هزار شغل و فعالیت اجتماعی، سیاسی، اقتصادی و ... از طریق آن میسر می‌شود. شبکه‌های پیچیده نیز با این قبیل شبکه‌های فیزیکی درآمیخته‌اند که از آن جمله می‌توان به زنجیره‌های تهیه مواد غذایی، شبکه‌های اقتصادی، شبکه‌های اجتماعی، شبکه‌های دانش و نیز شبکه‌های تحت توسعه مانند شبکه‌های هوشمند یا smart grid اشاره کرد.

۲- تاریخچه شبکه‌های پیچیده

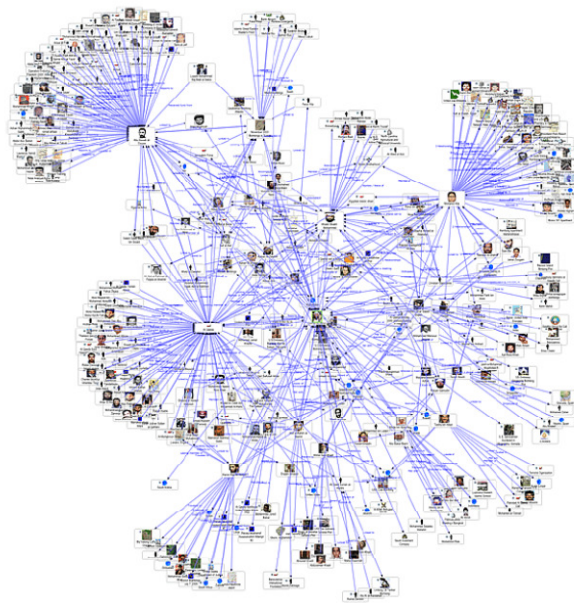
در اواخر قرن نوزدهم، فیزیکدانان برای فهم بهتر قوانین حاکم بر گازها، خصوصیات قابل اندازه‌گیری آن‌ها را به حرکت تصادفی میلیاردها مولکول و اتم کاهش دادند و بدین وسیله تئوری گازها را بنیان نهادند. در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ میلادی، نظریه پدیده‌های بحرانی، موجی نو در دنیای فیزیک بوجود آورد. این تئوری به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازد که در زمانی خاص از تغییر تدریجی خود، تحولی شدید از خود بروز می‌دادند. در دهه ۸۰، نظریه آشفتگی^۱ پا به عرصه وجود گذاشت که در آن رفتارهای پیچیده و غیرقابل پیش‌بینی سیستم‌هایی مورد بررسی قرار می‌گرفت که منشأ آن‌ها برهم‌کنش غیرخطی چند عنصر بود. در دهه ۹۰، علم فیزیک شاهد ظهور موضوعی جدید به نام فراکتال‌ها بود. فراکتال‌ها به کمی‌سازی هندسی الگوهای می‌پردازند که در سیستم‌های خودسازمانده وجود می‌آیند. پدیده‌های فوق را می‌توان به نوعی از نیاکان شبکه‌های پیچیده به‌شمار آورد، موضوعی که دانشمندان فیزیک را از سال ۲۰۰۰ به بعد به خود مشغول کرده است. شاید این سؤال پیش آید که با وجود چنین سابقه‌ای در بررسی سیستم‌های پیچیده دیگر چه نیازی به دانشی جدید در این زمینه وجود دارد؟ در ادامه به بیان دو نکته بسیار مهم که در شبکه‌های پیچیده فعلی وجود دارد می‌پردازیم.

- بیشتر شبکه‌های پیچیده امروزی، شبکه‌های انسانی، متابولیک و ... از عناصری تشکیل شده‌اند که با وجود اینکه با یکدیگر ارتباط دارند، خود عناصر از یکدیگر متفاوت هستند. در صورتی که به عنوان مثال در تئوری گازها تمامی مولکول‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شوند.
- ارتباط عناصر سازنده شبکه‌ها در موضوعات قبلی به صورت تصادفی صورت می‌پذیرفته است. به عنوان مثال مولکول‌های تشکیل دهنده یک گاز به طور تصادفی با یکدیگر برخورد می‌کنند و لذا مدل‌سازی آن بر مبنای فرآیندهای اتفاقی، امری مطابق واقع است. اما در شبکه‌های پیچیده بیشتر ارتباطات توسط اجزای شبکه انتخاب می‌شوند به طوری که اتصالات بین اجزا دیگر تصادفی نیست.

۲-۱. ویژگی‌های شبکه‌های پیچیده

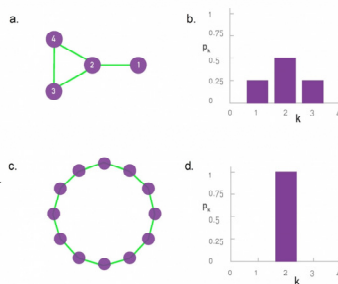
گراف‌های تصادفی به خوبی توسط ریاضی‌دانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و نتایج تقریبی و دقیقی نیز در مورد آن‌ها بدست آمده است. جالب توجه‌ترین ویژگی‌های شبکه‌های دنیای واقعی که در سال‌های اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده، مربوط به مواردی است که شبکه‌ها شباهتی به گراف‌های تصادفی ندارند. در این بخش برخی از ویژگی‌هایی که در انواع مختلف شبکه‌های دنیای واقعی مشترک است را معرفی می‌کنیم. باید توجه داشت که در برخی از متون، برخی از این ویژگی‌ها ممکن است در قالب معیارهای شبکه نیز طبقه‌بندی شده باشند. همچنین برخی از این ویژگی‌ها نام مشترکی با مدل‌های ارائه شده برای شبکه‌های پیچیده دارند که باید به آن‌ها توجه داشت.

^۱ Chaos Theory



۲-۲. توزیع درجه گره‌ها^۲

درجه یک گره در شبکه، بیانگر تعداد لبه‌هایی است که به آن متصل هستند. کمیت $P(k)$ نسبت گره‌های از شبکه تعریف می‌شود که درجه k دارند. به طور معادل، $P(k)$ بیانگر این احتمال است که یک گره که به صورت تصادفی انتخاب شده دارای درجه k باشد. یک طرح از $P(k)$ برای هر شبکه مفروض را می‌توان به کمک ساختن نمودار درجات گره‌ها تشکیل داد. دو نمودار زیر، توزیع درجه گره‌ها را در شبکه‌های نمایش داده است.



۳- مدل‌های شبکه‌های پیچیده

شبکه‌های پیچیده با هدف ساخت مدل‌هایی ایجاد میشوند که خواص شبکه‌های واقعی را بازتاب دهند. شبکه‌های واقعی البته به سادگی یک شبکه منظم بلورین یا معماری شبکه تار عنکبوتی نیستند و معمولاً دارای پیچیدگی نسبتاً بالایی هستند. از دید مدلسازی، یک شبکه شئی ساده است که تنها محل قرارگیری لینکها بین گره‌ها اهمیت دارد و این خود پیچیدگی یک سیستم واقعی را تعیین میکند.

۳-۱. مدل شبکه تصادفی

یک شبکه تصادفی شامل n گره است طوری‌که هر زوج گره با احتمالی برابر p بهم اتصال یافته باشند. الگوریتم ساخت شبکه تصادفی از قرار زیر است:

- ۱) با n گره مجزا کار را شروع میکنیم
- ۲) یک زوج گره را انتخاب میکنیم و یک مقدار تصادفی بین صفر و یک تولید میکنیم. اگر این مقدار از p بیشتر باشد، جفت گره انتخاب شده را با یک لینک بهم متصل میکنیم؛ در غیر اینصورت آنها را به حال خود رها می‌سازیم

^۲ Degree Distribution

۳) گام ۲ برای $n(n-1)/2$ جفت گره تکرار میکنیم و توجه داریم که گراف ساده است یعنی فاقد طوقه و لینکهای چندگانه است معمولاً توجه داشته باشید که دو تعریف برای شبکههای تصادفی وجود دارد یکی مدل $G(n, m)$ است که در آن n گره توسط m یال بهم متصل میشوند و مدل دوم $G(n, p)$ است که در آن هر جفت گره با احتمال p به یکدیگر متصل میشوند. مدل اول را مدل شبکههای تصادفی مدل اردوش-رنی^۳ (ER) میگویند. این دو دانشمند نظریه احتمال را با نظریه گراف ترکیب کرده و نظریه گرافهای تصادفی را به عنوان شاخه جدیدی از علم شبکه مطرح ساختند. به مدل دوم نیز مدل ژیلبرت گفته میشود. هر دو الگوریتم، شبکههایی تصادفی تولید می کنند که معمولاً هیچ گرایش ساختاری ویژه ای ندارند و تنها محدودیت در آنها این است که بین دو گره، داشتن لبه های چندگانه و طوقه قابل قبول نیست. در بسته نرم افزاری NetworkX میتوان با گزینش مناسب برای پارامترهای p و n گراف مدل تصادفی را تولید کرد.

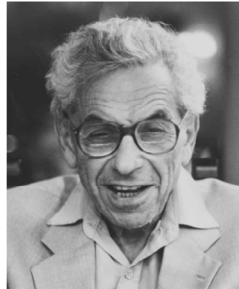


Image 3.2a
Paul Erdős (1913-1996)



Image 3.2b
Alfréd Rényi (1921-1970)

۴- انجام شبیه سازی

مقدمه ای که در بالا ذکر شد تنها با هدف علاقه مند ساختن شما به موضوع شبکه های پیچیده و اجتماعی صورت پذیرفت، کتابها و مطالب زیادی وجود دارند که در صورت تمایل میتوانید با این موضوعات بیشتر و ژرفتر آشنا گردید. اما هدف از انجام این پروژه شبیه سازی آن است که با مسأله استحکام در شبکه های پیچیده و اجتماعی بیشتر آشنا شویم. بدین منظور خواسته های زیر را همراه با مفروضات داده شده در برنامه شبیه ساز خود مورد استفاده قرار دهید.

خواسته ۱ (مدل تحلیلی): نشان دهید احتمال اینکه در یک شبکه تصادفی ما دقیقاً m لینک داشته باشیم برابر است با

$$P = \binom{n(n-1)/2}{m} p^m (1-p)^{n(n-1)/2-m}$$

که مشاهده میکنید همان توزیع دوجمله ای است. راهنمایی از مساله تعداد راه های انتخاب K شی از $(n-1)$ شی نامتمايز استفاده کنید که در درس ریاضی گسسته آموخته اید. در واقع نکته جالب این است که این مساله را میتوان به مانند مساله ظرف و گلوله (Balls and Bins) نگاه کرد که m گلوله (بال) را میخواهیم بین n ظرف توزیع کنیم و در این مورد نحوه توزیع به شکل یکنواختی صورت میگیرد. همچنین متوسط تعداد یالها را از توزیع دوجمله ای به شکل تحلیلی به دست آورده و با متوسط تعداد یالها از ساخت تعدادی شبکه تصادفی مقایسه کنید و نشان دهید که قانون اعداد بزرگ در اینجا صادق است. همچنین متوسط درجه و واریانس درجه را محاسبه و با مقادیر حاصل از شبیه سازی مقایسه کنید.

خواسته ۲: محاسبه توزیع درجه

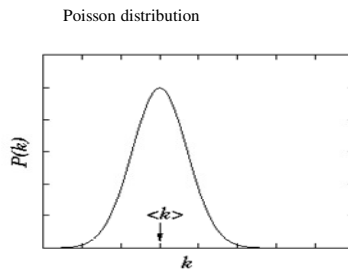
توزیع درجه $p(k)$ یکی از ویژگیهای مهم در شبکه ها است و نقش محوری را در تبیین شبکه های پیچیده ایفا میکند. برابر است با احتمال آنکه در یک شبکه گره ای را که به طور تصادفی انتخاب میکنیم دارای درجه k باشد. برای شبکه ای با n گره درجه توزیع از رابطه $p(k) = n_k/n$ به دست می آید که در آن n_k تعداد گره هایی با درجه معین k است. نشان دهید که در حالت حدی و بهره گیری از قانون اعداد بزرگ توزیع درجه گرافهای تصادفی پواسن و در حالت پیوسته از توزیع نرمال تبعیت خواهد کرد. در توزیع پواسن گره های زیادی وجود ندارند که درجه آنها از میانگین بیشتر باشد و ما انتظار هاب ها یا گره هایی با اتصالات بالا بسیار زیاد و درجات بسیار بزرگ را نمیبینیم یعنی در این مدل گره ها درجه بسیار بالایی ندارند. آیا میتوان این موضوع را به شکل ریاضی تعبیر کنید؟ راهنمایی: میدانیم توزیع دو جمله ای در حالت حدی به توزیع پواسن زیر تبدیل میشود

³ Erdos-Renyi

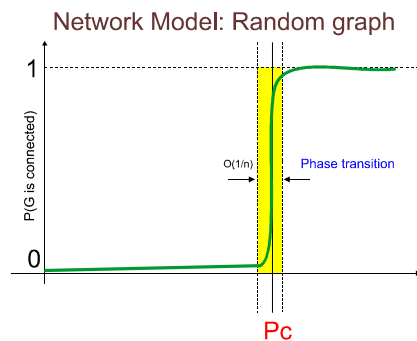
$$p(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

که در آن $\langle k \rangle$ نماد متوسط درجه است. از تقریب استرلینگ برای محاسبه $k!$ استفاده کرده و نشان دهید که برای k های بزرگ عبارت‌ها به سرعت کاهش مییابند و شانس مشاهده گره‌های هاب با مرتبه نمایی کم میشود.

با دادن مقادیر مختلف به پارامتر p از کوچک به بزرگ نمودار توزیع درجه را ترسیم کنید و پدیده چولگی را در توزیع درجه گره‌های گراف‌های تصادفی بررسی کنید.



❶ خواسته ۳ (تکامل یک شبکه تصادفی): این موضوع به بیان فرآیندهای پویا در شکل‌گیری ارتباطات فرآیندهای پویا در شبکه‌ها میپردازد. یعنی میخواهیم بررسی کنیم که وقتی با n گره مجزا شروع میکنیم و سپس تدریجاً لینکها را به شکل تصادفی بین گره‌ها ایجاد میکنیم اندازه بزرگترین خوشه در درون شبکه چگونه خواهد بود.



در شکل بالا احتمال همبندی در مدل ER برحسب انتخاب احتمال p نشان داده شده است. در نرم افزار NetworkX یک تابع برای بررسی همبندی وجود دارد و به معنای آن است که بین دو گره دلخواه در شبکه، مسیری وجود داشته باشد؛ که در غیر اینصورت به شبکه ناهمبند گفته میشود. همانطور که در شکل بالا میبینیم ما با پدیده بحرانی (critical phenomenon) مواجه هستیم یعنی در یک احتمال مشخص مانند P_c به طور ناگهانی با تغییر فاز در احتمال همبندی مواجه خواهیم بود. این تغییر فاز را در شبکه ساخته شده بررسی کنید و نشان دهید که با $P_c \sim \log(n)/n$ متناسب است.

خواسته ۴: دقت بفرمایید که در مدل کلاسیک ER ما احتمال یکنواخت و مستقلی را به تمامی گره‌ها برای تصاحب یالها اختصاص میدهیم. یعنی با فرض $0 \leq m \leq n$ در گراف $G(n, m)$ ، مساله به تعداد راه‌های توزیع m گلوله (یال) بین n ظرف (گره) را با احتمال مستقل و یکسان $p = 1 / \binom{n}{m}$ تبدیل خواهد شد. اکنون یک سوال جالب این است که اگر ما بر روی مساله توزیع گلوله‌ها بین ظرفها قید بگذاریم و برای مثال فرض کنیم که از توزیع یکنواختی پیروی نکند و برخی ظروف بتوانند تعداد گلوله‌های بیشتری را نسبت به سایر ظرفها داشته باشند چه اتفاقی خواهد افتاد و شبکه حاصل چگونه شکلی خواهد داشت و نسبت به شبکه تصادفی کلاسیک چه تفاوتی دارد؟ این موضوع در شبکه‌های واقعی رخ میدهد که به آن مدل fitness گفته میشود یعنی برخی گره‌ها در طی زمان جذابیت خود را از دست میدهند و برخی جذابیت و طرفداران بیشتری به دست می آورند (مانند کهنه شدن فناوری در گوشی موبایل یا کامپیوتر). در فیزیک نیز این امر تعبیر جالبی دارد یعنی فیتنس مولفه‌ها با با وارون دما در ارتباط است و هر قدر دما بیشتر باشد فیتنس کمتری دارد و بالعکس. معمولاً یک ارتباط لگاریتمی بین انرژی و دما وجود دارد و نکته این است که گره‌هایی با دمای بیشتر تمایل به از دست دادن لبه‌های چسبیده به خود را دارند اما گره‌های سردتر یا با دمای کمتر اینگونه نیستند. بدین ترتیب، هر قدر دمای ظرفی بیشتر (گلوله بیشتر یا یال بیشتر یا درجه بیشتر) ممکن است تمایل به دادن گلوله به ظرف سردتر داشته باشد و اینکار آن قدر انجام میشود تا سیستم از نظر دمایی به تعادل برسد و از یک مقداری

بیشتر نگردد. در ابتدای کار هر گره (ظرف) تمایل به گرفتن لبه ها (گلوله) و لبه های بیشتری دارد یعنی انرژی آن و گرمای گره بیشتر میشود. پس فیتنس با گرما و حرارت تناسب معکوس دارد. هنگامیکه دما بالا باشد، توزیع درجه شبکه به شکل پواسن خواهد بود و این همان مدل شبکه ER است. لیکن، هر قدر دمای گره ها بالاتر میرود (تعداد گلوله های بیشتر در طرف)، گره ها از یک زمانی به بعد (تغییر فاز بحرانی) تمایل بیشتری به از دست دادن لبه ها پیدا میکنند و تعبیر و تفسیر این موضوع در شبکه میتواند به معنای تنظیم نرخ ارسال گره یا نرخ تعداد پیامها یا توزیع پیامها یا توزیع یال ها در شبکه باشد. اگر تعداد پیامهای تولیدی در شبکه (یا تعداد یال ها) را ثابت فرض کنیم، برای حصول دستیابی به یک تعادل، گره ها میتوانند بر سر تولید پیامها (یال ها) با یکدیگر به رقابت بپردازند کنند و از آنجاکه تعداد کل یالها ثابت است در پروژه ما، گره ها برای اخذ یال های بیشتر تا یکجایی (نقطه بحرانی) با یکدیگر به رقابت میپردازند. بدین ترتیب توانایی اختیار کردن یال ها در رقابت بین گره ها را میتوان به شکل متفاوتی نگاه کرد که به آن مدل فیتنس گفته میشود. بدین ترتیب برخلاف مدل ER میتوان با فرض عدم یکنواختی توزیع یالها بین گره ها، بررسی کنیم که در درازمدت چه اتفاقی برای شبکه خواهد افتاد؟

قضیه: تعداد راههایی که می توان m شی نامتمایز را بین n ظرف مختلف توزیع کرد طوری که هیچ ظرفی کمتر از p شی و بیشتر از $p + q - 1$ شی نداشته باشد، ضرب x^{m-pn} در بسط چند جمله ای $(1 + x + x^2 + \dots + x^{q-1})^n = (1 - x^q)^n (1 - x)^{-n}$ و عبارتست از

$$\sum_{l=0}^n (-1)^n \binom{n}{l} \binom{m-np-lq+n-1}{n-1}$$

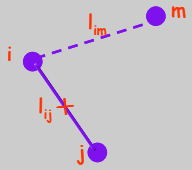
این قضیه را با دانشی که از ریاضیات گسسته آموخته اید ثابت کنید؛ سپس با تغییر مقادیر مختلف پارامترهای p و q ببینید که شبکه ساخته شده دارای چه خواصی است؛ یعنی توزیع درجه آن از چه توزیع آماری و احتمالاتی تبعیت میکند و نیز متوسط درجه و واریانس درجه آن به چه شکل است.

برای مثال یک مدل پیشنهادی الگوریتم ساخت شبکه میتواند به صورت زیر باشد:

(۱) n گره را با m لبه به شکل تصادفی وصل کنید (مدل ER)؛ سپس به هر گره پارامتر فیتنس β را نسبت دهید. پارامتر فیتنس در اینجا میتواند به معنای توانایی یک موجود (گره) در به دست آوردن غذا (یال) باشد. مقدار پارامتر فیتنس از یک تابع توزیع احتمال $\Phi(\beta)$ قابل حصول است.

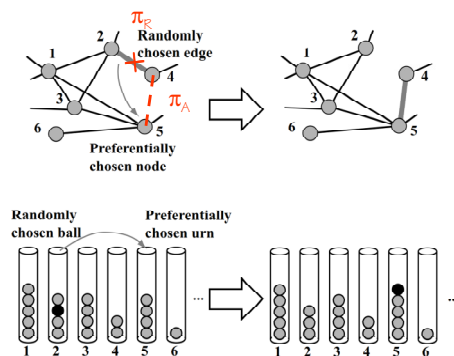
(۲) یالی مانند i_j را تصادفاً انتخاب کنید.

(۳) لبه i_j را با لبه i_m تعویض (swap) کنید طوری که گره m با احتمال Π_m که متناسب با $\beta_m (k_m + 1)$ است، انتخاب شود که در آن β_m پارامتر فیتنس گره m و k_m درجه گره m است



(۴) گام های (۲) و (۳) را تا رسیدن به وضعیت تعادل شبکه تکرار کنید (حدوداً n^2 گام)

این مدل به نام سیمبندی در شبکه هم شناخته میشود که به معنای قطع یک ارتباط بین دو گره و ایجاد ارتباط بین گره های جدید صورت میگیرد؛ برای مثال در شبکه دوستی که بین آدم ها اتفاق می افتد یا فارغ التحصیل شدن از دبیرستان و آمدن شما به دانشگاه که منجر به قطع ارتباطاتی از قبل و ایجاد دوستیها و ارتباطات جدید در دانشگاه میشود.



در شکل فوق با یک احتمالی اتصال بین دو گره ۲ و ۴ قطع (π_R) و بین ۴ و ۵ یالی با احتمال π_n ایجاد میگردد که در مدل ظرف-گلوله معادل انتخاب ظرف ۲ با یک احتمال و برداشتن گلوله از این ظرف و جایگذاری گلوله در ظرف ۵ است که به دلیل فیتنس ترجیحاً انتخاب شده است.

تذکر مهم ۱: در هر کدام از خواسته‌ها لازم است که برای افزایش دقت شبیه‌سازی، تعداد دفعات اجرای شبیه‌ساز را به عنوان یک پارامتر ورودی در نظر بگیرید و نشان دهید که با افزایش تعداد دفعات شبیه‌سازی (قانون اعداد بزرگ) به دقت نتایج افزوده میگردد.

تذکر مهم ۲: خواسته‌های بالا جزو خواسته‌های ضروری این پروژه است؛ لیکن شما دانشجویان عزیز و محترم میتوانید به بخشهای مختلف پروژه به سلیقه خود افزونه‌هایی را بیفزایند که نمره مثبت به آنها تعلق خواهد گرفت. برای مثال، ایجاد فرم GUI برای وارد کردن مناسب داده‌ها و پارامترهای مساله، نمایش بصری هر شبکه، امکان تعریف یک گراف دلخواه توسط کاربر و امثال آن.

تذکر مهم ۳: تعداد نفرات اعضای هر پروژه حداکثر دو نفر است، زبان برنامه نویسی پایتون و نرم افزار مورد استفاده NetworkX است؛ همچنین مهلت ارسال و بارگذاری در courseware تمدید نخواهد شد؛ ضمن اینکه در موعد مشخص در انتهای ترم، از تک تک اعضای پروژه پرسش خواهد شد. بدین ترتیب، لازم است که شما دانشجویان عزیز و محترم نسبت به چگونگی انجام پروژه خویش دانش و آگاهی لازم را داشته باشید.

پرویز باشید