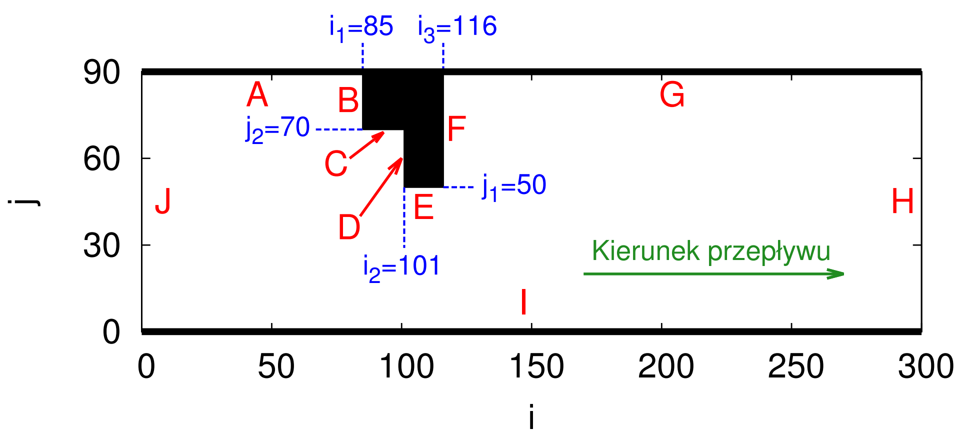
Przepływ stacjonarny cieczy lepkiej nieściśliwej *

14 kwietnia 2015

Lepka nieściśliwa ciecz płynie przez rurę. Do rury wstawiamy przeszkodę (patrz rys. 1). Znajdziemy linie strumienia cieczy (styczne do prędkości w każdym punkcie cieczy) dla danego gradientu ciśnienia podanego na rurze.



Rysunek 1: Przekrój przez rurę z przeszkodą

Rozkład prędkości $u(x,y), v(x,y)$ (gdzie u to prędkość cieczy w kierunku x, a v - w kierunku y) i ciśnienia p dla cieczy o lepkości μ i stałej gęstości ρ (przyjmiemy $\mu = 1, \rho = 1$) spełniają tzw. stacjonarne równania Naviera-Stokesa. Będziemy rozwiązywać te równania w formie wyrażonej przez funkcję strumienia $\psi(x,y)$ oraz wirowość $\zeta(x,y)$. Funkcja strumienia pozwala wyliczyć pole prędkości:

$$u(x,y) = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y},\ v(x,y) = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}. \tag{1}$$

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2014/2015. Bartłomiej Szafran (bszafran@agh.edu.pl), Krzysztof Kolasiński (kolasinski@fis.agh.edu.pl), Elżbieta Wach (Elzbieta.Wach@fis.agh.edu.pl), Dariusz Żebrowski (Dariusz.Zebrowski@fis.agh.edu.pl)

Wirowość $\zeta(x,y)$ jest zdefiniowana jako rotacja pola prędkości, czyli $\zeta(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$. Przepływ opisują dwa równania

$$\nabla^2\psi(x,y) = \zeta(x,y) \tag{2}$$

oraz

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\zeta(x,y) = \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}. \tag{3}$$

Równania (2), (3) rozwiążemy przy pomocy przepisu relaksacyjnego. W każdym kroku będziemy poprawiać rozwiązania na $\zeta(i,j)$ i $\psi(i,j)$:

$$\begin{aligned}\zeta(i,j) \quad := \quad & \frac{\zeta(i+1,j)+\zeta(i-1,j)+\zeta(i,j-1)+\zeta(i,j+1)}{4} \\ & -\frac{1}{16}\left\{[\psi(i,j+1)-\psi(i,j-1)]\,[\zeta(i+1,j)-\zeta(i-1,j)]\right. \\ & \quad \left. -\,[\psi(i+1,j)-\psi(i-1,j)]\,[\zeta(i,j+1)-\zeta(i,j-1)]\right\}\end{aligned} \tag{4}$$

oraz

$$\psi(i,j) := \frac{\psi(i+1,j)+\psi(i-1,j)+\psi(i,j-1)+\psi(i,j+1)-\zeta(i,j)dx^2}{4} \tag{5}$$

($dx = dy$ jest krokiem siatki, przyjmiemy $dx = 0.01$).

Rozwiązania będziemy poszukiwać na siatce $[0,300]\times[0,90]$ punktów (301 punktów w kierunku x, 91 punktów w kierunku y). Punkt siatki (i,j) odpowiada współrzędnym $(x,y) = (i\cdot dx, j\cdot dy)$].

Zadanie 1: Przepływ w rurze bez zastawki (przepływ Poiseuille).

Bez zastawki brzegiem jest cały prostokąt przedstawiony na rysunku, a równania posiadają rozwiązania analityczne. Ze względu na symetrię prędkość pionowa znika wszędzie: $v(x,y) = 0$, a prędkość pozioma zależy tylko od y i dana jest wzorem analitycznym

$$u_0(y) = \frac{Q}{2\mu}(y-y_{min})(y-y_{max}), \tag{6}$$

gdzie Q jest gradientem ciśnienia $Q = \frac{\partial P}{\partial x}$, y_{min} i y_{max} to położenie dolnego i górnego końca rury (tutaj: $y_{min} = 0,\ y_{max} = 0.9$, co odpowiada indeksom $j = 0$ dla dolnego y_{min} oraz $j = 90$ dla górnego y_{max}). Dla takiego rozkładu prędkości funkcja strumienia i wirowość dane są odpowiednio przez

$$\zeta_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}(2y - y_{min} - y_{max}). \tag{7}$$

oraz

$$\psi_0(x,y) = \frac{Q}{2\mu}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y_{min}+y_{max}) + y_{min}y_{max}y\right) \tag{8}$$

Na wszystkich brzegach pudła (góra, dół, lewy i prawy bok) stosujemy warunki brzegowe, korzystając z powyższych wzorów analitycznych: (7) i (8). Przyjmujemy $Q = -1$. Wewnątrz pudła startujemy od $\psi(x,y) = 0$ oraz $\zeta(x,y) = 0$.

Przeiterować równania (4) i (5) aż wartości funkcji strumienia i wirowości w punkcie o współrzędnych ($x = 145 \cdot dx, y = 45 \cdot dy$) z iteracji na iterację zaczną się zmieniać o mniej niż $tol = 10^{-7}$ (uwaga: aby sprawdzać ten warunek, należy odczekać np. 100 iteracji, ponieważ w początkowych iteracjach wartości się prawie nie zmieniają). Po uzyskaniu zbieżności: narysować funkcję strumienia oraz wirowości na przekrojach $i = 50$ oraz $i = 250$. Porównać z rozwiązaniem analitycznym (7), (8) (**25 pkt**). Wyliczyć i narysować $u(y)$ dla $i = 50$, dyskretyzując równanie $u(x,y) = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y}$ przy pomocy ilorazu różnicowego. Obliczoną prędkość u porównać z rozwiązaniem analitycznym (6) (**25 pkt**).

Zadanie 2: Przepływ w rurze z zastawką.

Wstawiamy przegrodę zgodnie z rysunkiem 1. Górny i dolny brzeg są liniami strumienia cieczy (brzeg jest dla niej nieprzepuszczalny - nie ma składowej prędkości normalnej do brzegu).

Na cały dolny brzeg przyjmujemy wartość $\psi_0(x, y = y_{min})$. Na górnym brzegu i obrysie zastawki analogicznie: $\psi_0(x, y = y_{max})$.

Warunki na wirowość na górnym i dolnym brzegu wynikają ze znikania obydwu składowych prędkości oraz pochodnej stycznej składowej prędkości normalnej do brzegu. W przeciwieństwie do warunków na ψ, warunki na ζ nie są ustalone raz na zawsze. Zależą od ψ, należy je więc wyliczyć od nowa na początku każdej iteracji. Zgodnie z tym: na górnym brzegu oprócz zastawki - tzn. na odcinkach A, G - przyjmujemy:

$$\zeta(i,j) = \frac{2(\psi(i,j-1) - \psi(i,j))}{dx^2}, \tag{9}$$

natomiast na dolnym (odcinek I):

$$\zeta(i,j) = \frac{2(\psi(i,j+1) - \psi(i,j))}{dx^2}. \tag{10}$$

Na przeszkodzie − pionowe linie B, D i F − odpowiednio:

$$\zeta(i,j) = \frac{2(\psi(i-1,j) - \psi(i,j))}{dx^2} \text{ (odcinki } B,\ D\text{)}, \tag{11}$$

$$\zeta(i,j) = \frac{2(\psi(i+1,j) - \psi(i,j))}{dx^2} \text{ (odcinek } F\text{)}. \tag{12}$$

Na poziomych brzegach przeszkody (odcinki C, E):

$$\zeta(i,j) = \frac{2(\psi(i,j-1) - \psi(i,j))}{dx^2}. \tag{13}$$

Na narożnikach przegrody (styk B/C, D/E, E/F rozsądnie jest przyjąć średnią arytmetyczną warunków brzegowych danych dla odpowiednich odcinków, np. w punkcie łączącym odcinki B/C przyjmujemy średnią z wartości obliczonej dla tego punktu z punktu widzenia odcinka B i odcinka C. Start dla pierwszej iteracji oraz warunki lewego i prawego brzegu wstawiamy z rozwiązań analitycznych przepływu Poiseuille: (7), (8).

Zadania do wykonania: Rozwiązać równania (2) i (3) zgodnie z dyskretyzacją (4), (5) dla trzech przypadków gradientu ciśnienia: $Q = -1, -150$ oraz -400. Narysować linie strumienia $\psi = const$ (**25 pkt**) oraz rozkład prędkości poziomej $u(x, y)$ i pionowej $v(x, y)$ dla wszystkich Q (**25 pkt**).

Uwaga: obliczeń według schematu relaksacyjnego dokonujemy tylko wewnątrz siatki obliczeniowej, pomijając brzegi prostokąta siatki, brzegi obu przeszkód, jak również ich wnętrza.