УДК 517.956.4

Сходимость решения системы уравнений переноса-диффузии к решению системы уравнений переноса

© **Фуджита-Яшима Хисао**
PhD,
ученое звание профессор,
преподаватиль-исследователь
Высшая нормальная школа
Алжир, 25000 Константина, Али Менжели, унивепситетский кампус 3
hisaofujitayashima@yahoo.com, hisaofujitayashima@qq.com

© **Айт-Махиоут Латифа**
PhD с научной аккредитацией,
ученое звание “maître de conférence A”,
преподаватиль-исследователь
Высшая нормальная школа
Алжир, 16050 Алжир, Старая Куба, B.P. 92
latifaaitmahiout@gmail.com

Рассмотрим следующие системы уравнений (1) и (2)

$$\partial_t u_i^{[\kappa]} + \sum_{j=1}^{d} v_{i,j}\partial_{x_j} u_i^{[\kappa]} = \kappa\mathcal{A}_i u_i^{[\kappa]} + f_i(u^{[\kappa]}) \qquad \text{в } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad j = 1, \cdots, m, \tag{1}$$

$$\partial_t u_i^{[0]} + \sum_{j=1}^{d} v_{i,j}\partial_{x_j} u_i^{[0]} = f_i(u^{[0]}) \qquad \text{в } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{2}$$

где $u^{[\kappa]} = (u_1^{[\kappa]}, \cdots, u_m^{[\kappa]})$ (соотв. $u^{[0]} = (u_1^{[0]}, \cdots, u_m^{[0]})$) — искомая векторная функция для системы (1) (соотв. (2)), $v_{i,j}$ ($i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, d$) — гладкие заданные функции от t и x, f_i ($i = 1, \cdots, m$) — заданные функции от (t, x, u) со значениями в $\mathbb{R}^m$, гладкие и ограниченные по (t, x) а глобально липшицевы по $u \in \mathbb{R}^m$, κ — положительный коэффициент и $\mathcal{A}_i$ — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами.

Целью настоящей работы является доказательство сходимости решения $u^{[\kappa]}$ системы (1) к решению $u^{[0]}$ системы (2) при $\kappa \to 0$.

Для этого построим с помощью ядра диффузии с постоянными коэффициентами и оператора переноса приближенные решения $u^{[\kappa,n]}(t, x)$ для системы уравнений (1). Точнее, определим сначала шаги $\delta_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \cdots$, и соответствующую шагу δ_n дискретизацию по времени

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \cdots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \cdots, \qquad t_k^{[n]} = k\delta_n.$$

Для каждого $n = 1, 2, \cdots$ рассмотрим ядро параболического уравнения

$$\Theta_{\kappa,i,n}(x) = \frac{1}{(4\pi\kappa\delta_n)^{\frac{d}{2}}(\det A_i)^{\frac{1}{2}}} \exp\Big(-\frac{1}{4\kappa\delta_n}\sum_{j,j'=1}^{d} \omega_{i,jj'} x_j x_{j'}\Big), \tag{3}$$

где A_i — матрица коэффициентов эллиптического оперетора $\mathcal{A}_i$, а $\omega_{i,jj'}$ — элементы обратной матрицы A_i^{-1}.

Пусть $u_0(x) = (u_{0,1}(x), \cdots, u_{0,m}(x))$ — заданная начальная векторная функция. Определим приближенные решения $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ соотношениями

$$u_i^{[\kappa,n]}(t_0^{[n]}, x) = u_{0,i}(x), \tag{4}$$

$$u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_{\kappa,i,n}(y) u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n v_i(t_k^{[n]}, x) - y)dy +$$
$$+ \delta_n f_i(t_{k-1}^{[n]}, x, u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)), \qquad k = 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

$$u_i^{[\kappa,n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u_i^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u_i^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) \qquad \text{при} \ \ t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}. \tag{6}$$

Аналогично работам [1, 2] можно доказать сходимость приближенных решений $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ к векторной функции $u^{[\kappa]}(t,x)$, удовлетворяющей системе (1) и начальному условию $u^{[\kappa]}(0,x) = u_0(x)$.

Если определим аналогичным образом приближенные решения $u^{[0,n]}(t,x)$ для системы (2), справнение приближенных решений $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ и приближенных решений $u^{[0,n]}(t,x)$ позволяет оцеить в частности

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u^{[\kappa,n]}(t,x) - u^{[0,n]}(t,x)|, \qquad \sum_{j=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_j} u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) - \partial_{x_j} u^{[0,n]}(t_k^{[n]}, x)|.$$

Путем предельного перехода для $n \to \infty$, можно оценить разность $u^{[\kappa]}(t,x) - u^{[0]}(t,x)$ или $\partial_{x_j} u^{[\kappa]}(t,x) - \partial_{x_j} u^{[0]}(t,x)$. Таким образом ролучим результаты: каково бы ни было $\tau > 0$, имеем

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} |u^{[\kappa]}(t,x) - u^{[0]}(t,x)| \leq K_{0,\tau}\kappa, \tag{7}$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} \Big| \frac{\partial}{\partial t} u^{[\kappa]}(t,x) - \frac{\partial}{\partial t} u^{[0]}(t,x) \Big| \leq K_{1,\tau}\kappa, \tag{8}$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d,\, i\in\{1,\cdots,d\}} \Big| \frac{\partial}{\partial x_i} u^{[\kappa]}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x_i} u^{[0]}(t,x) \Big| \leq K_{2,\tau}\kappa, \tag{9}$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d,\, i,j\in\{1,\cdots,d\}} \Big| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u^{[\kappa]}(t,x) \Big| \leq K_{3,\tau}, \tag{10}$$

где $K_{0,\tau}$, $K_{1,\tau}$, $K_{2,\tau}$, $K_{3,\tau}$ — независимые от κ постоянные.

Ключевые слова: Система уравнений переноса-диффузии, приближение ядром дмффузии, стремяющийся к нулю коеффициент диффузии, сходимость к решению уравнений переноса, оценки сходимости.

Список литературы

1. Taleb, L., Selvaduray, S., Fujita Yashima, H.: Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, vol. **8** (2020), 53-73.

2. Smaali, H., Fujita Yashima, H.: Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, vol. **9** (2021), 89-108.

,