Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Приближение табличных функций  
интерполяционным полиномом Лагранжа**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Необходимо исследовать решение задачи интерполяции с помощью интерполяционного полинома в форме Лагранжа. Исследование будет проводиться на примере следующих двух функций на указанных отрезках:

,

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности интерполирования от количества узлов интерполяции (или степени интерполяционного полинома). Также в исследовании будет произведен анализ влияния типа сетки (равномерной или чебышевской) на качество интерполирования.

# Описание метода

Пусть на сетке имеется некоторая заданная сеточная функция :

Тогда интерполяционный полином степени *n* в форме Лагранжа для сеточной функции на сетке будет иметь следующий вид:

Вычисления значений интерполяционного полинома Лагранжа будут производиться непосредственно по указанной формуле в связи с отсутствием более удобного ее вида для вычислений.

Равномерная сетка на отрезке определяется следующим образом:

где .

Чебышевская сетка на отрезке определяется следующим образом:

В данной задаче интерполирование производится для сеточной функции, полученной по значениям непрерывной функции в точках интерполяции, поэтому:

# Предварительный анализ задачи

Для построения интерполяционного полинома в форме Лагранжа необходимо выполнение следующих двух условий:

1. Отсутствие в сетке повторяющихся узлов интерполирования.

Данное условие выполняется автоматически при использовании равномерной или чебышевской сетки .

1. Степень интерполяционного полинома должна быть на единицу меньше количества узлов интерполирования.

Данное условие выполняется за счет выбора степени интерполяционного полинома на единицу меньшей количества узлов интерполирования.

# Тестовый пример

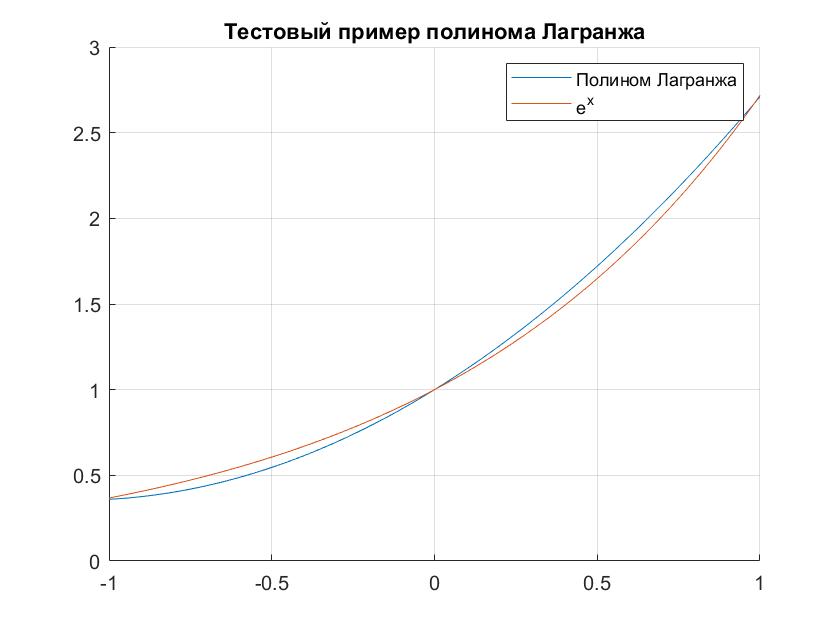
Рассмотрим построение интерполяционного полинома в форме Лагранжа для трех узлов интерполирования для функции .

Возьмем равномерную сетку и значения функции на ней:

Найдем вид интерполяционного полинома Лагранжа по формуле:

Таким образом, получаем следующий вид интерполяционного полинома Лагранжа:

Ниже представлен график функции и полученного интерполяционного полинома.



По графику можно сделать вывод, что интерполяционный полином третьей степени достаточно хорошо приближает функцию на отрезке интерполяции.

# Модульная структура программы

1. Функция y0 = lagr(x, y, x0):

Осуществляет построение полинома Лагранжа для сеточной функции. x — массив с координатами узлов, y — значение точки в узлах интерполяции, x0 — точки, для которых будет построено значение интерполяционного полинома. Возвращает значения полинома в точках x0.

1. Функция eps = get\_err\_cont(f, dd, n, type\_s):

Функция возвращает ошибку для функции f на отрезке dd с количеством узлов n и типом сетки type\_s.

f — function handle, dd — отрезок, на котором происходит построение полинома, n — количество узлов, type\_s — “rvn”/”cheby” — тип сетки. eps — значение ошибки.

1. Функция X = get\_cheby\_points(d, n):

Осуществляет построение Чебышевской сетки на отрезке d с количеством точки n. Возвращает узлы на отрезке d.

# Подготовка контрольных тестов

Исследование метода интерполяции полиномом в форме Лагранжа будет проводиться для двух функций на указанных отрезках:

,

Для качественного исследования (путем визуального сравнения) поведения интерполяционного полинома при увеличении количества узлов интерполяции будут использоваться невысокие степени полиномов от 1 до 9.

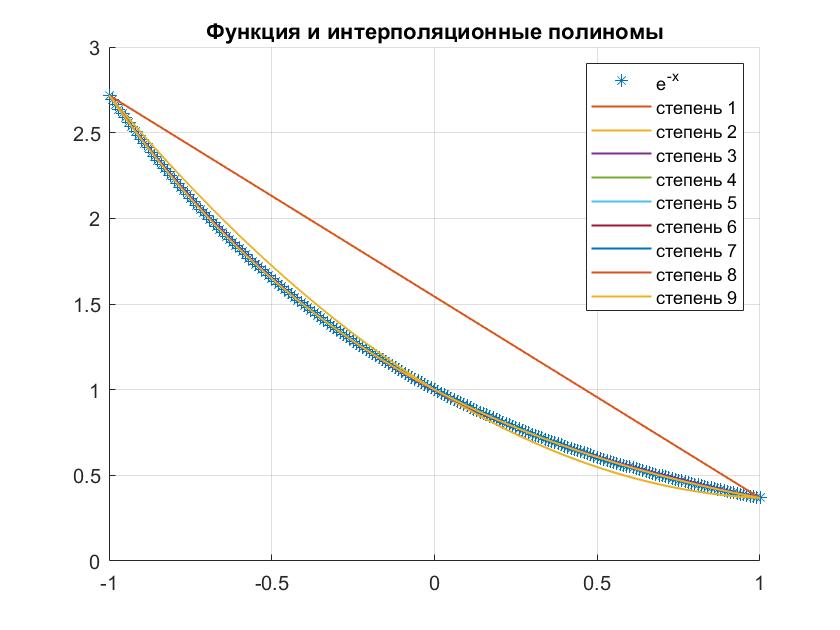
Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности интерполирования от количества узлов интерполяции для степеней полинома от 2 до 100.

Погрешность интерполирования будет определяться следующим образом:

Где – мелкая равномерная метка с шагом .

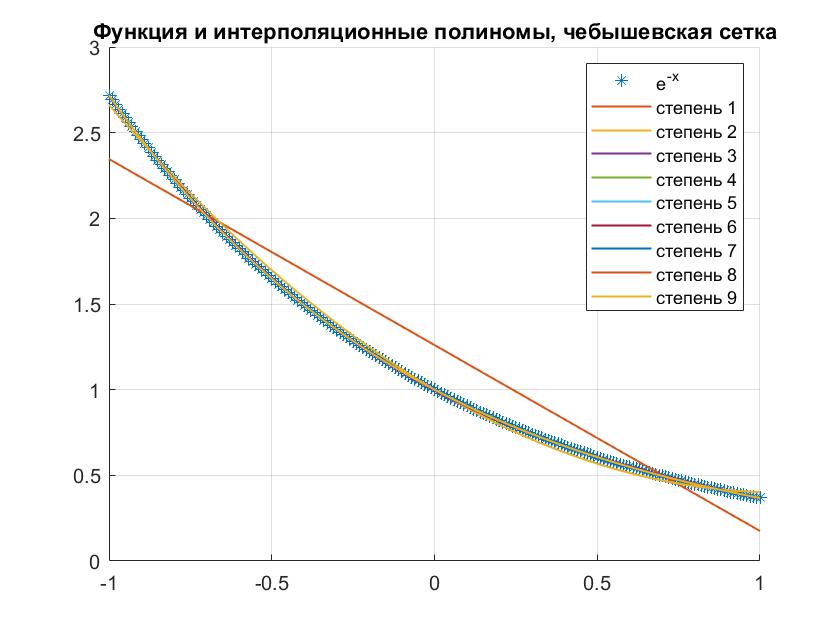
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики первой функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для равномерной сетки.



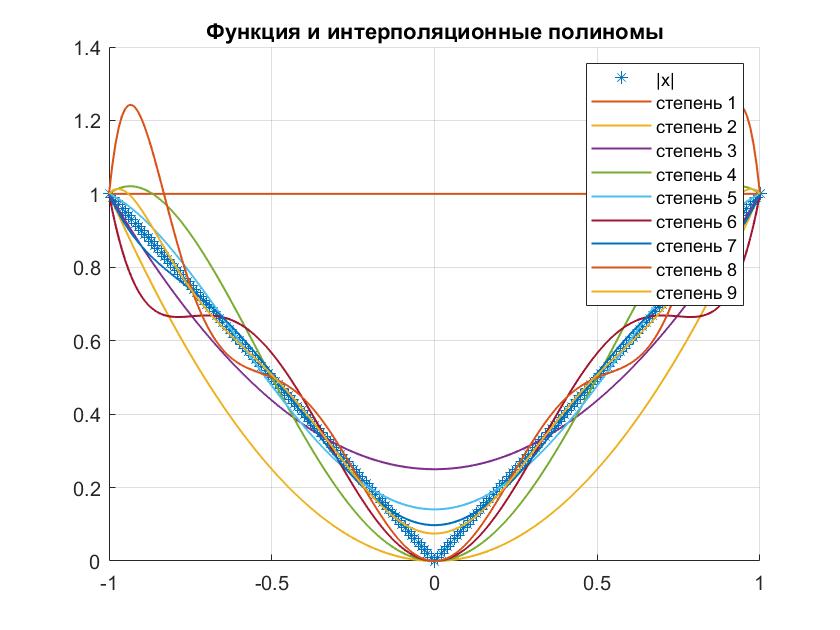
Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы Лагранжа, начиная со степени 5, качественно хорошо приближают функцию на равномерной сетке.

Ниже представлены графики первой функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для чебышевской сетки.



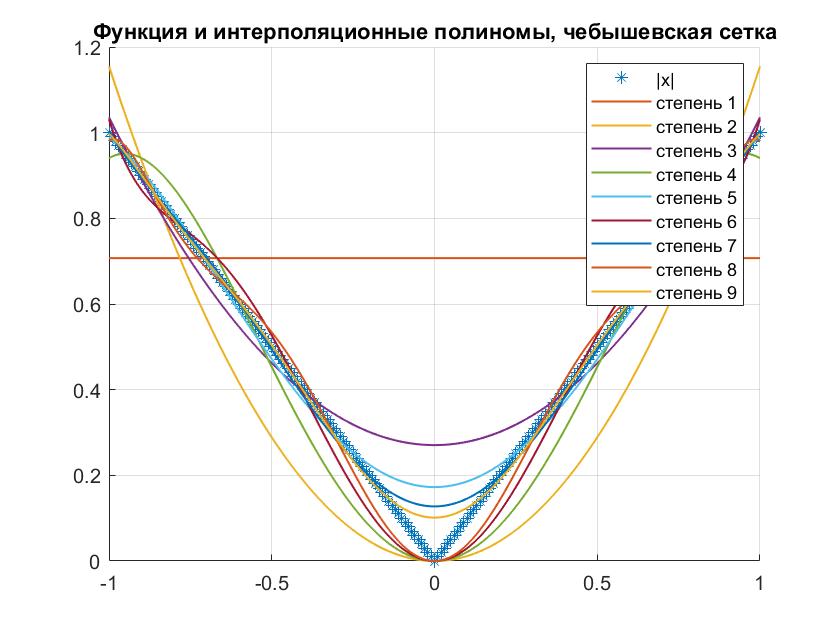
Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы Лагранжа, начиная со степени 4, качественно хорошо приближают функцию на чебышевской сетке.

Ниже представлены графики второй функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для равномерной сетки.

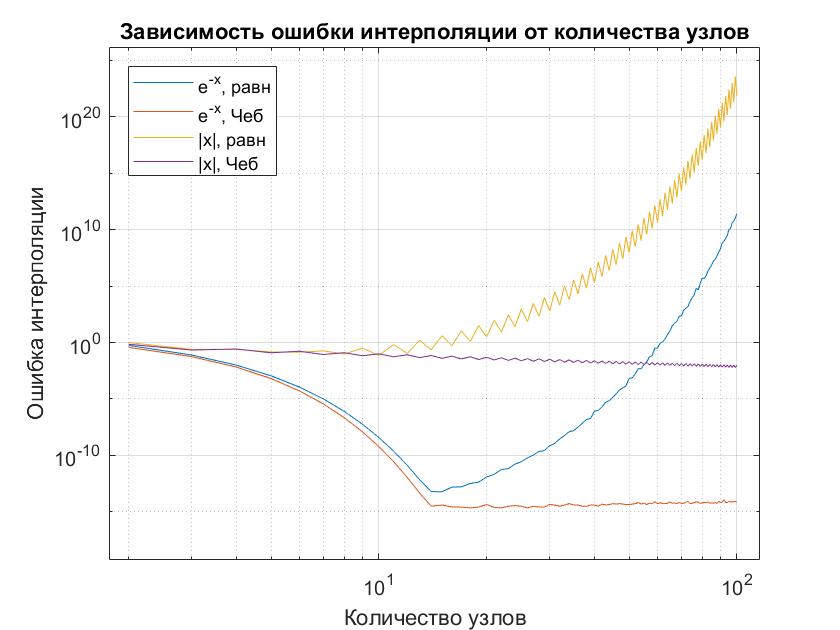


Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы Лагранжа не могут хорошо приблизить функцию на равномерной сетке даже при увеличении их степени, наоборот, наблюдается ухудшение интерполирования при увеличении количества узлов интерполяции.

Ниже представлены графики второй функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для чебышевской сетки.



Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы Лагранжа не могут хорошо приблизить функцию на чебышевской сетке даже при увеличении их степени, качество интерполирования не улучшается при увеличении количества узлов интерполяции.



Выше представлены графики погрешности интерполирования в зависимости от количества узлов интерполирования для различных функций и различных типов сеток.

Исходя из графика, погрешности можно сделать вывод, что погрешности ведут себя различно для различных функций и различных типов сеток.

Для первой функции наблюдается значительное уменьшение погрешности до степени полинома примерно 18. При дальнейшем увеличении степени полинома ошибка начинает возрастать для равномерной сетки и продолжает быть на уровне машинной точности для чебышевской сетки.

Для второй функции при равномерной сетке погрешность почти сразу начинает возрастать. При чебышевской сетке наблюдается очень медленное уменьшение погрешности интерполирования с увеличением числа узлов интерполяции, так что погрешность при степени полинома 100 находится на уровне 10-2.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Интерполирование с помощью интерполяционных полиномов в форме Лагранжа дает хорошие результаты не для всех функций.

Для хорошо интерполируемых функций типа для удовлетворительной интерполяции достаточно небольшого числа узлов интерполяции, а погрешность быстро уменьшается при их увеличении. Однако после некоторого количества узлов погрешность либо перестает уменьшаться из-за ошибок округления, что характерно для чебышевской сетки, либо начинает возрастать, что характерно для равномерной сетки.

Для плохо интерполируемых функций типа интерполяция на равномерной сетке приводит к увеличению погрешности при увеличении числа узлов. При интерполяции на чебышевской сетке число погрешность очень медленно уменьшается при увеличении числа узлов.