Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Приближение табличных функций  
методом наименьших квадратов**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Необходимо исследовать решение задачи интерполяции с помощью метода наименьших квадратов. Исследование будет проводиться на примере следующих двух функций на указанных отрезках:

,

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности интерполирования от количества узлов интерполяции (или степени интерполяционного полинома). Также в исследовании будет произведен анализ влияния типа сетки (равномерной или чебышевской) на качество интерполирования.

# Описание метода

Пусть на сетке имеется некоторая заданная сеточная функция :

Тогда интерполяционный полином степени k, построенный методом наименьших квадратов для сеточной функции на сетке будет иметь следующий вид:

Нахождение коэффициентов полинома осуществляется через СЛАУ следующего вида:

Вычисления значений интерполяционного полинома будут производиться непосредственно по формуле (1) в связи с отсутствием более удобного ее вида для вычислений.

Равномерная сетка на отрезке определяется следующим образом:

где .

Чебышевская сетка на отрезке определяется следующим образом:

В данной задаче интерполирование производится для сеточной функции, полученной по значениям непрерывной функции в точках интерполяции, поэтому:

# Предварительный анализ задачи

Для построения интерполяционного полинома помощью МНК необходимо выполнение следующих двух условий:

1. Отсутствие в сетке повторяющихся узлов интерполирования.

Данное условие выполняется автоматически при использовании равномерной или чебышевской сетки .

1. Степень интерполяционного полинома должна быть на единицу меньше количества узлов интерполирования.

Данное условие выполняется за счет выбора степени интерполяционного полинома на единицу меньшей количества узлов интерполирования.

# Тестовый пример

Рассмотрим построение интерполяционного полинома для трех узлов интерполирования для функции .

Возьмем равномерную сетку и значения функции на ней:

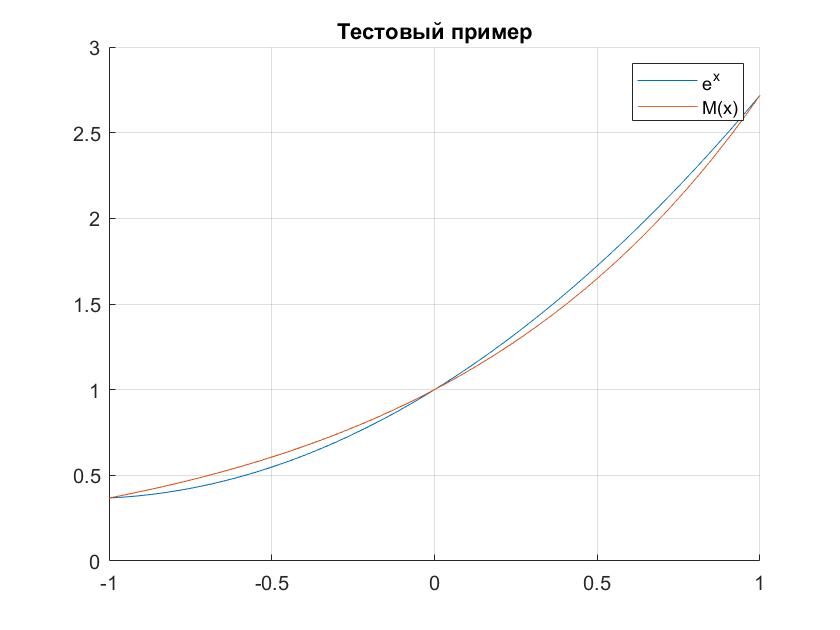
Построим СЛАУ для отыскания коэффициентов:

Решив СЛАУ, получаем:

Построим интерполяционный полином по формуле:

Таким образом, получаем следующий вид интерполяционного полинома:

Ниже представлен график функции и полученного интерполяционного полинома.



По графику можно сделать вывод, что интерполяционный полином второй степени достаточно хорошо приближает функцию на отрезке интерполяции.

# Модульная структура программы

1. Функция y0 = mnk(x, y, x0):

Осуществляет построение интерполяционного полинома методом наименьших квадратов для сеточной функции {x, y}. Возвращает значения полинома в точках x0.

1. Функция eps = get\_err\_cont(f, dd, n, type\_s):

Функция возвращает ошибку для функции f на отрезке dd с количеством узлов n и типом сетки type\_s.

1. Функция X = get\_cheby\_points(d, n):

Осуществляет построение Чебышевской сетки на отрезке d с количеством точки n.

# Подготовка контрольных тестов

Исследование метода интерполяции методом наименьших квадратов будет проводиться для двух функций на указанных отрезках:

,

Для качественного исследования (путем визуального сравнения) поведения интерполяционного полинома при увеличении количества узлов интерполяции будут использоваться невысокие степени полиномов от 1 до 9.

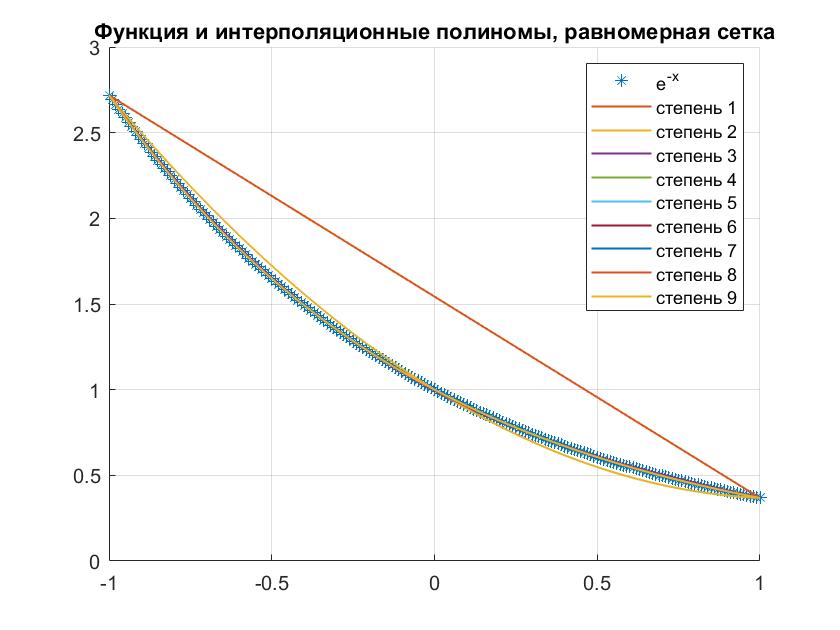
Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности интерполирования от количества узлов интерполяции для степеней полинома от 2 до 100.

Погрешность интерполирования будет определяться следующим образом:

Где – мелкая равномерная метка с шагом .

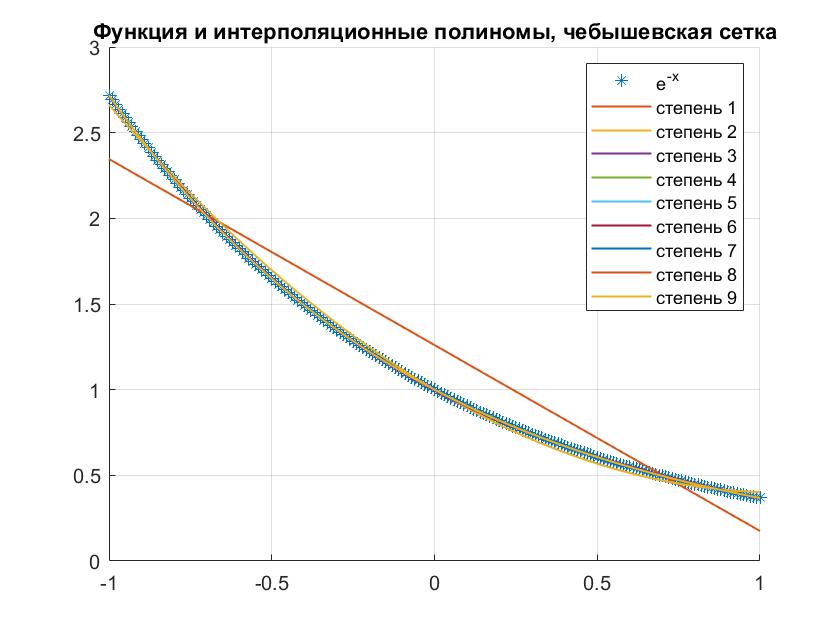
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики первой функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для равномерной сетки.



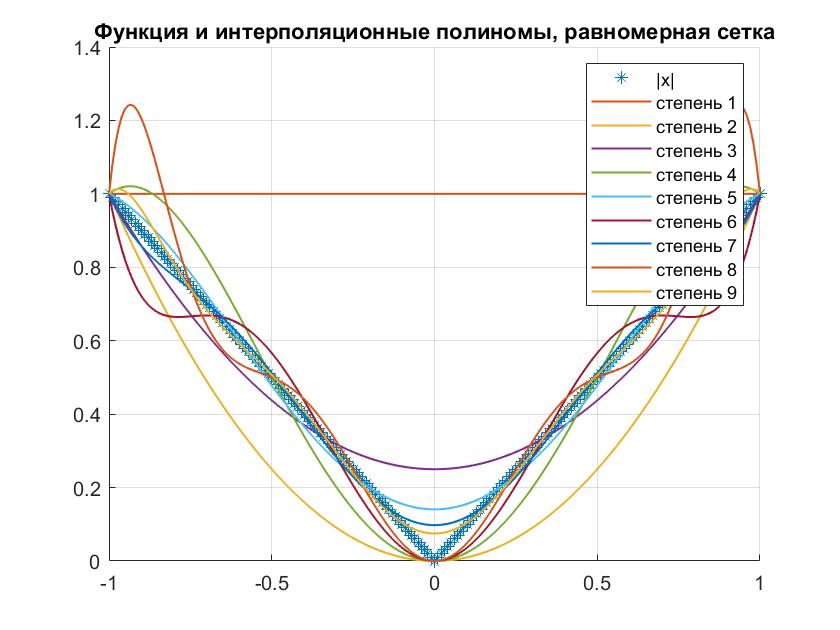
Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы, начиная со степени 5, хорошо приближают функцию на равномерной сетке.

Ниже представлены графики первой функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для чебышевской сетки.



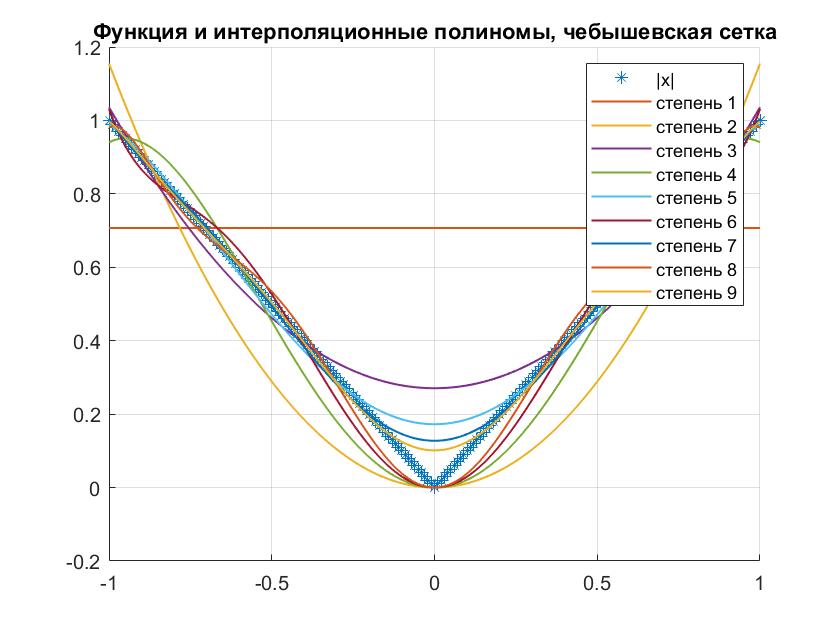
Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы построенные по методу наименьших квадратов, начиная со степени 4, хорошо приближают функцию на чебышевской сетке.

Ниже представлены графики второй функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для равномерной сетки.

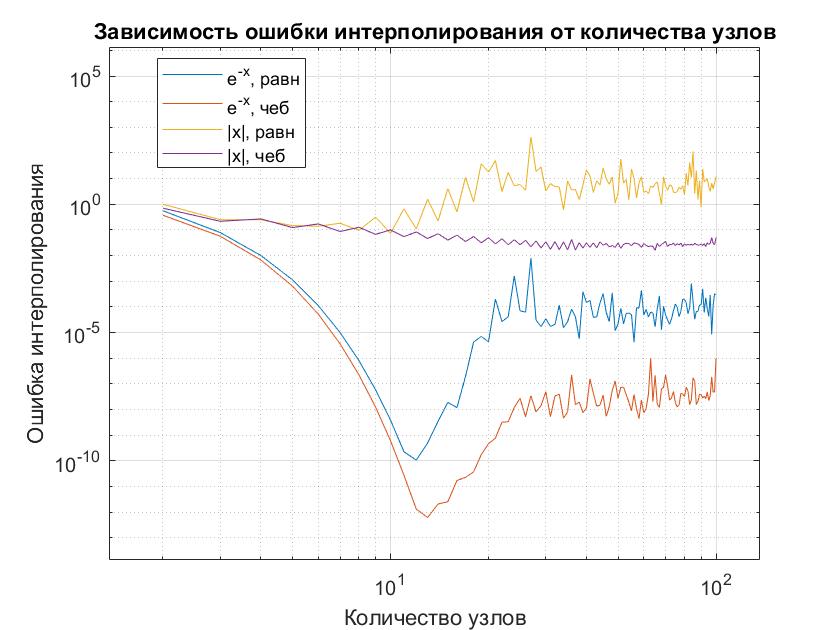


Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы не могут хорошо приблизить функцию на равномерной сетке даже при увеличении их степени, наоборот, наблюдается ухудшение интерполирования при увеличении количества узлов интерполяции.

Ниже представлены графики второй функции и интерполяционных полиномов степени от 1 до 9 для чебышевской сетки.



Исходя из графиков, можно сделать вывод, что интерполяционные полиномы не могут хорошо приблизить функцию на чебышевской сетке даже при увеличении их степени, качество интерполирования не улучшается при увеличении количества узлов интерполяции.



Выше представлены графики погрешности интерполирования в зависимости от количества узлов интерполирования для различных функций и различных типов сеток.

Исходя из графика, погрешности можно сделать вывод, что погрешности ведут себя различно для различных функций и различных типов сеток.

Для первой функции наблюдается значительное уменьшение погрешности до степени полинома примерно 10. При дальнейшем увеличении степени полинома ошибка начинает возрастать для обеих сеток, после чего стабилизируется на для равномерной сетки и на для чебышевской.

Для второй функции при равномерной сетке погрешность почти сразу начинает возрастать. При чебышевской сетке наблюдается очень медленное уменьшение погрешности интерполирования с увеличением числа узлов интерполяции, так что погрешность при степени полинома 100 находится на уровне 10-1.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Интерполирование с помощью интерполяционных полиномов, построенных по методу наименьших квадратов, дает хорошие результаты не для всех функций.

Для хорошо интерполируемых функций типа для удовлетворительной интерполяции достаточно небольшого числа узлов интерполяции, а погрешность быстро уменьшается при их увеличении. Однако после некоторого количества узлов погрешность начинает возрастать, что характерно для обеих сеток.

Для плохо интерполируемых функций типа интерполяция на равномерной сетке приводит к увеличению погрешности при увеличении числа узлов. При интерполяции на чебышевской сетке число погрешность очень медленно уменьшается при увеличении числа узлов.