## Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Численное решение задачи Коши для ОДУ методом**

**Рунге-Кутты 3-го порядка**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Необходимо исследовать решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге-Кутты 3-го порядка. Исследование будет проводиться на примере следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

Начальные условия:

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода.

# Описание метода

Пусть дана задача Коши:

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением функции y в ряд Тейлора:

Заменим вторую производную в этом разложении выражением:

Где:

Причем  подбирается из условия достижения наибольшей точности записанного выражения. Для дальнейших выкладок произведем замену величины разложением в ряд Тейлора:

Для исходного уравнения (1) построим вычислительную схему, подставив (2):

Путем несложных математических преобразований, приведем (3) к следующему виду:

Где:

При этом, — параметр. При получаем схему Эйлера, при получаем метод Рунге-Кутты 2-го порядка. Подставив получаем следующую систему:

Вычисления будут производится непосредственно по формулам (4).

# Предварительный анализ задачи

Для численного решения задачи Коши требуется существование Задачи Коши:

1. Функция должна быть непрерывна в области определения;
2. Функция должна удовлетворять условию Липшица по аргументу y:

Исследуемая функция удовлетворяет обоим условиям.

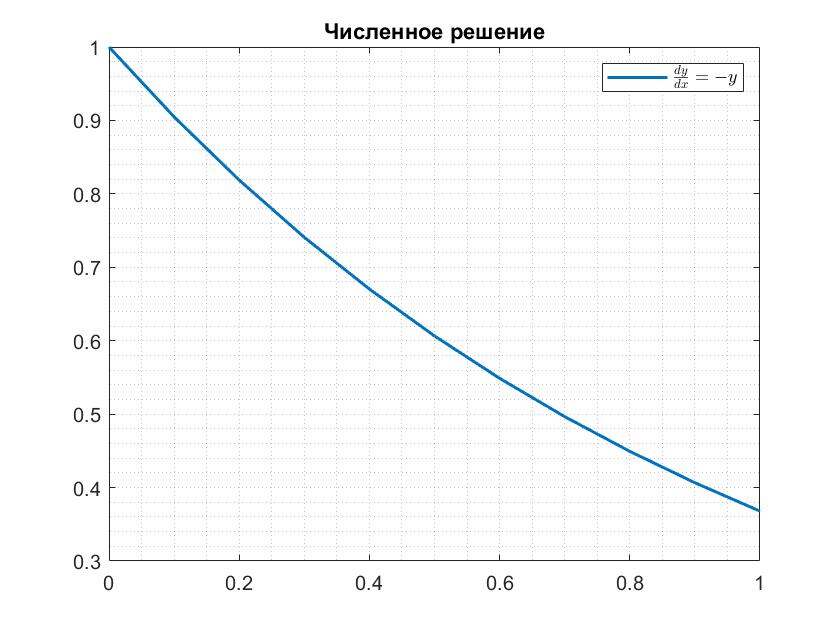
# Тестовый пример

Решим методом Рунге-Кутты 3-го порядка уравнение .

Точное решение данного уравнения: .

По формулам (4):

Ниже представлен график численного решения:



По полученной итерационной формуле при шаге h = 0.1,

Как видно, полученный результат примерно соответствует точному решению .

Ниже представлена таблица значений и поточечной погрешности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | Err |
| 0 | 1 | 0 |
| 0.1 | 0.904833333 | 4.0847E-06 |
| 0.2 | 0.818723361 | 7.39197E-06 |
| 0.3 | 0.740808188 | 1.00328E-05 |
| 0.4 | 0.670307942 | 1.2104E-05 |
| 0.5 | 0.60651697 | 1.36902E-05 |
| 0.6 | 0.548796771 | 1.48648E-05 |
| 0.7 | 0.496569612 | 1.56919E-05 |
| 0.8 | 0.449312737 | 1.6227E-05 |
| 0.9 | 0.406553142 | 1.65181E-05 |
| 1 | 0.367862834 | 1.66068E-05 |

# Модульная структура программы

# Функция [x, y] = runge\_kuta(f, a, b, n, y\_2)

# Данная функция осуществляет численное решение задачи Коши. На вход передается функция f, отрезок [a, b], количество точек (по которым рассчитывается шаг), а также начальное значение.

# Подготовка контрольных тестов

Исследование численного решения задачи Коши будет проводиться для следующего уравнения с указанными начальными условиями и заданным отрезком:

Начальные условия:

Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.004; 4].

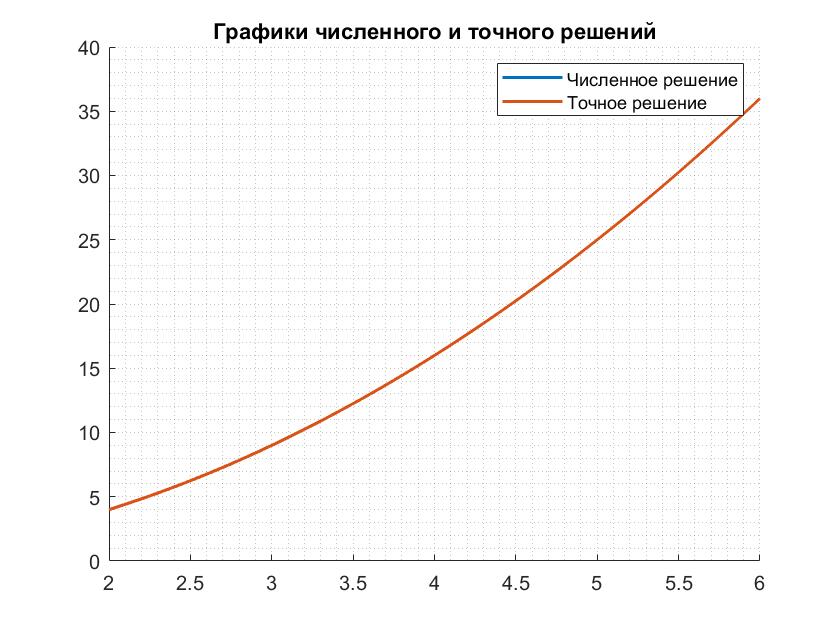
Погрешность будет определяться следующим образом:

Где — значение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты, а — точное, — индекс узла.

Точное значение вычисляется через точное решение уравнения:

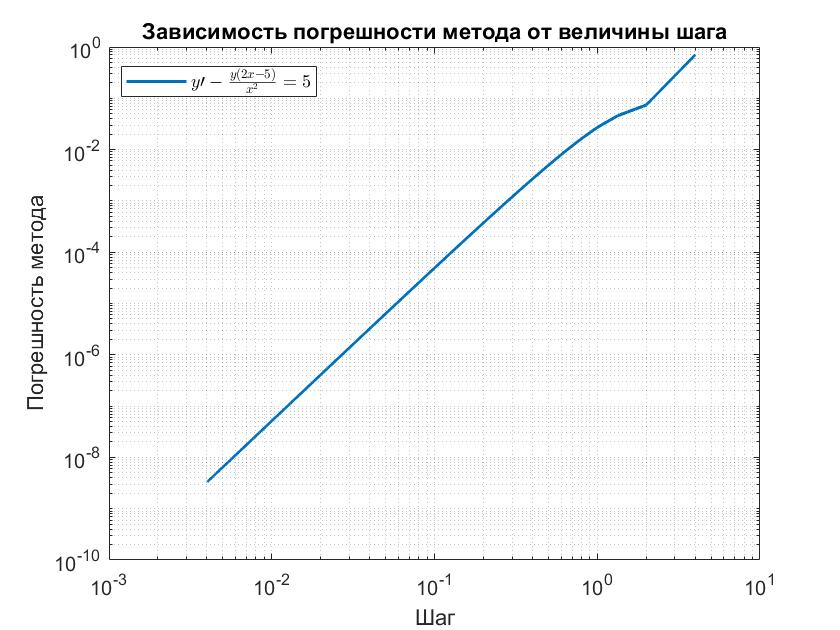
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики точного и численного решения ДУ:



Как видно, графики совпадают.

Ниже представлены графики зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.004; 4].



Исходя из графика, можно сделать вывод, что при увеличении шага погрешность почти возрастает. Зависимость погрешности от шага степенная. При этом, погрешность всегда на несколько порядков меньше шага метода.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка дает удовлетворительные результаты в рассмотренных случаях.

При возрастании шага метода погрешность растет по степенной. При этом, единичному шагу соответствует ошибка примерно , что является приемлемым результатом для оценки.