## xСанкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Численное решение задачи Коши для ОДУ методом**

**Рунге-Кутты 3-го порядка**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Необходимо исследовать решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге-Кутты 3-го порядка. Исследование будет проводиться на примере следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

Начальные условия:

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода.

# Описание метода

Пусть дана задача Коши:

Идея построения явных методов Рунге-Кутты p-го порядка заключается в приближении к значениям по формуле вида:

Где — некоторая функция, приближающая отрезок ряда Тейлора до p-го порядка и не содержащая частных производных функции .

Для построения методов Рунге-Кутты порядка, выше первого, функцию берут многопараметрической и подбирают ее параметры сравнением выражения (2) с многочленом Тейлора для соответствующей желаемому порядку степени.

Рассмотри случай . Возьмем функцию вида:

Подставим в формулу (2):

Разложим по формуле Тейлора, ограничиваясь линейными членами:

Аналогично, разложим по формуле Тейлора.

Подставим полученное выражение в (2\*).

После этого, выполняем сравнение полученного выражения с тейлоровским разложением функции до порядка 3. Подбираем коэффициенты так, чтобы выражение соответствовало требуемой точности.

Получаем следующую систему уравнений:

Вычисления будут производится непосредственно по формулам (3).

# Предварительный анализ задачи

Для численного решения задачи Коши требуется существование Задачи Коши:

1. Функция должна быть непрерывна в области определения;
2. Функция должна удовлетворять условию Липшица по аргументу y:

Исследуемая функция удовлетворяет обоим условиям.

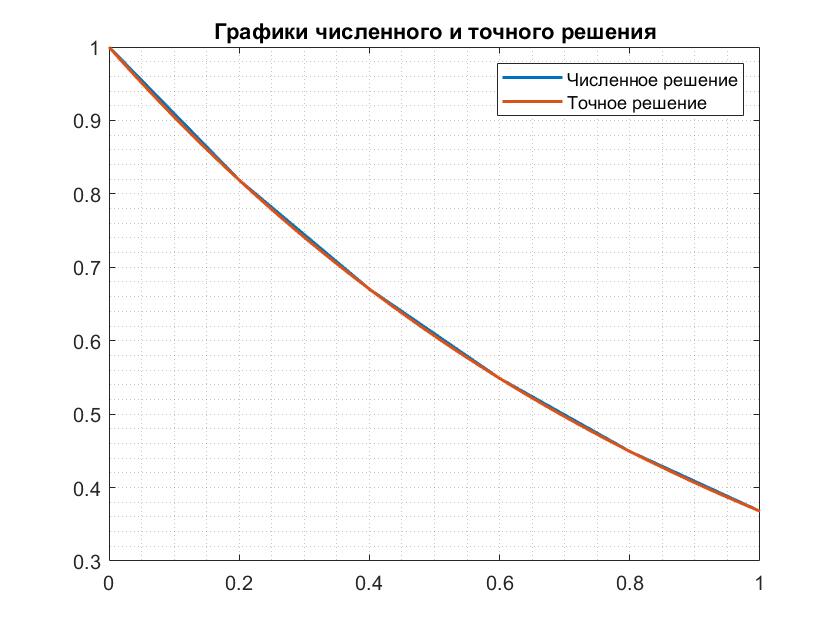
# Тестовый пример

Решим методом Рунге-Кутты 3-го порядка уравнение .

Точное решение данного уравнения: .

По формулам (4):

Ниже представлен график численного и точного решения:



По полученной итерационной формуле при шаге h = 0.1,

Как видно, полученный результат примерно соответствует точному решению .

Ниже представлена таблица значений и поточечной погрешности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | Err |
| 0 | 1 | 0 |
| 0.1 | 0.904833333 | 4.0847E-06 |
| 0.2 | 0.818723361 | 7.39197E-06 |
| 0.3 | 0.740808188 | 1.00328E-05 |
| 0.4 | 0.670307942 | 1.2104E-05 |
| 0.5 | 0.60651697 | 1.36902E-05 |
| 0.6 | 0.548796771 | 1.48648E-05 |
| 0.7 | 0.496569612 | 1.56919E-05 |
| 0.8 | 0.449312737 | 1.6227E-05 |
| 0.9 | 0.406553142 | 1.65181E-05 |
| 1 | 0.367862834 | 1.66068E-05 |

# Модульная структура программы

# Функция [x, y] = runge\_kuta(f, a, b, n, y\_2)

# Данная функция осуществляет численное решение задачи Коши. На вход передается функция f, отрезок [a, b], количество точек (по которым рассчитывается шаг), а также начальное значение.

# Подготовка контрольных тестов

Исследование численного решения задачи Коши будет проводиться для следующего уравнения с указанными начальными условиями и заданным отрезком:

Начальные условия:

Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.004; 4].

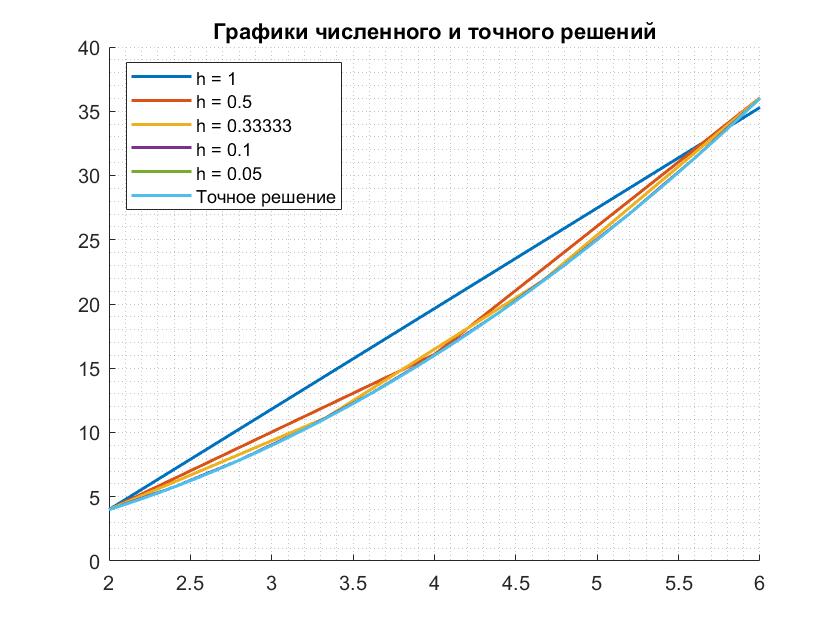
Погрешность будет определяться следующим образом:

Где — значение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты в узле, а — точное значение в узле, — индекс узла. В качестве узлов берется разбиение отрезка с шагом метода h.

Точное значение вычисляется через точное решение уравнения:

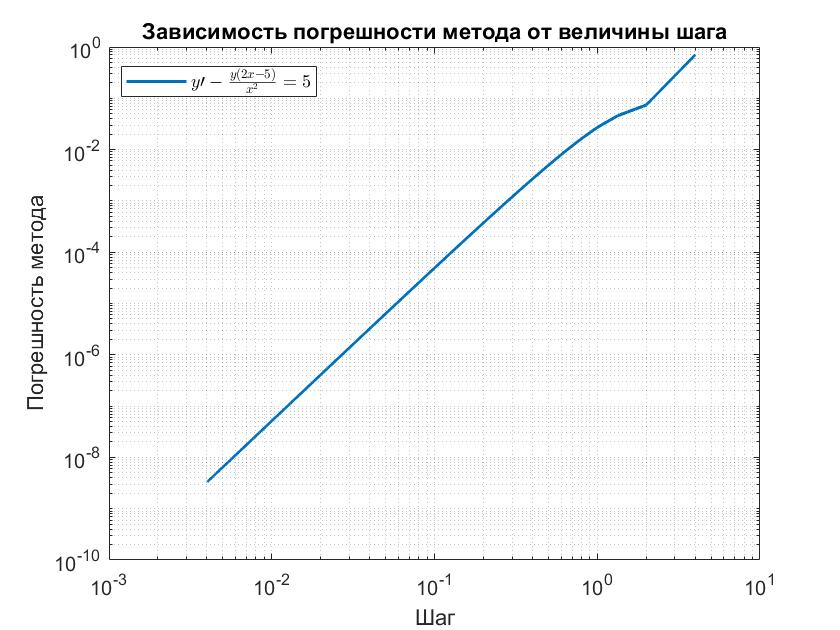
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики точного и численного решения ДУ для шага h = [1, 0.5, 0.33, 0.1, 0.05]:



Как видно, при уменьшении шага графики численного решения приближаются к графику точного решения.

Ниже представлены графики зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.004; 4].



Исходя из графика, можно сделать вывод, что при увеличении шага погрешность возрастает. Зависимость погрешности от шага степенная.

При изменении шага на 2 порядка погрешность изменяется на 6 порядков. Исходя из этого, показатель степенной зависимости равен трем, что согласуется с теорией.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка дает удовлетворительные результаты в рассмотренных случаях.

При возрастании шага метода погрешность растет по степенной зависимости. При этом, единичному шагу соответствует ошибка примерно , что является приемлемым результатом для оценки.