## Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Численное решение задачи Коши для ОДУ с помощью схемы «предиктор-корректор» порядков 2-3 для метода Адамса**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Необходимо исследовать решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью схемы «предиктор-корректор» порядков 2-3 для метода Адамса. Исследование будет проводиться на примере следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

Начальные условия:

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода.

# Описание метода

Рассмотрим семейство методов Адамса-Башфорта, или экстраполяционных методов:

Общая схема:

Где . При этом, — многочлен, полученный по второй интерполяционной формуле Ньютона (интерполирование назад).

Где .

Порядок метода определяется параметром k.

Соответственно, после интегрирования получается следующая конечно-разностная формула, определяющая семейство экстраполяционных методов Адамса-Башфорта:

В этой формуле — конечная разность.

Общая формула вычисления конечной разности:

Соответственно,

Именно это и определяет необходимость применения второй интерполяционной формулы Ньютона — интерполирование происходит назад, так как для разности порядка m нужен элемент с индексом k+m.

Помимо этого, есть семейство интерполяционных методов, или методов Адамса-Моултона. Для этого необходимо выполнить замену в интеграле . Соответственно, получим:

Отсюда следует конечноразностная формула семейства методов Адама-Моултона:

Предиктор-корректорная схема подразумевает совместное использование явных и неявных методов одного или смежных порядков. Сначала значение решения задачи Коши в точке прогнозируется явным методом, затем уточняется неявным.

Составим пару «предиктор-корректор» для порядка предиктора 2 и порядка корректора 3. Для этого подставим параметр k = 2 и 3 соответственно, а также раскроем конечные разности:

Так как предиктору и корректору требуется два предыдущих значения, вычислим их с помощью метода Рунге-Кутты.

Вычисления производятся непосредственно по формулам 2 и 3.

# Предварительный анализ задачи

Для численного решения задачи Коши требуется существование Задачи Коши:

1. Функция должна быть непрерывна в области определения;
2. Функция должна удовлетворять условию Липшица по аргументу y:

Исследуемая функция удовлетворяет обоим условиям.

# Тестовый пример

Решим предиктор-корректорным методом Адамса 3-го порядка уравнение

.

Точное решение данного уравнения: .

Примем шаг метода за 0.5. За начальную точку выберем . Так как метод является трехшаговым, выберем для инициализации точку . Соответственно, .

Вычислим по формуле (2):

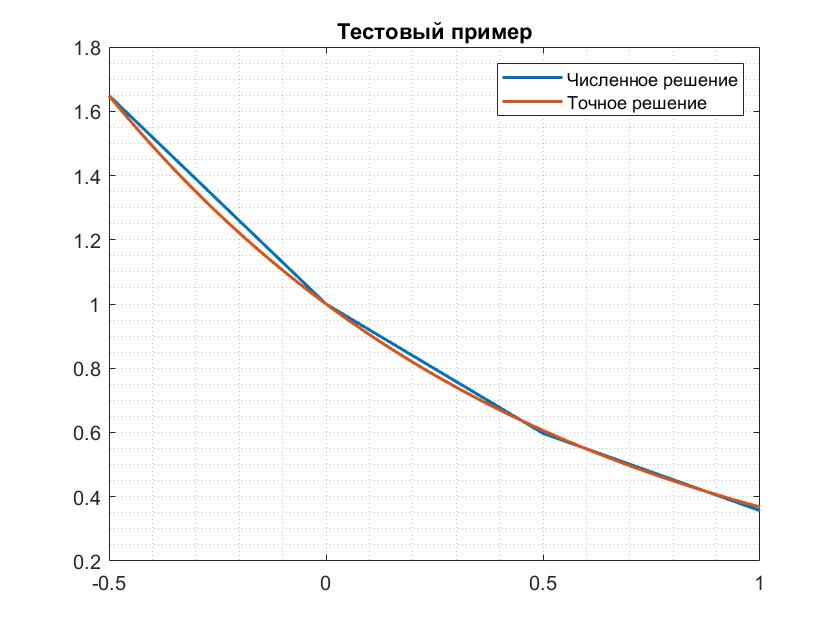
Уточним значение по формуле (3):

Следовательно, . Повторим вычисления для следующего шага:

Вычислим по формуле (2):

Уточним значение по формуле (3):

Ниже представлен график численного решения:



Как видно, полученный результат стремится к точному решению .

Ниже представлена таблица значений и поточечной погрешности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X | Y | Err |
| -0.5 | 1.649 | 0.000278729 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0.5 | 0.5974063 | 0.00912441 |
| 1 | 0.3567393 | 0.011140183 |

# Модульная структура программы

# Функция [x, y] = runge\_kuta(f, a, b, n, y\_2)

# Данная функция осуществляет численное решение задачи Коши. На вход передается функция f, отрезок [a, b], количество точек (по которым рассчитывается шаг), а также начальное значение.

# Функция [x, y] = adams(f, a, b, n, y\_0, y\_1)

# Данная функция осуществляет численное решение задачи Коши. На вход передается функция f, отрезок [a, b], количество точек (по которым рассчитывается шаг), а также два начальных значения (так как корректор трехшаговый).

# Подготовка контрольных тестов

Исследование численного решения задачи Коши будет проводиться для следующего уравнения с указанными начальными условиями и заданным отрезком:

Начальные условия:

Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.004; 4].

Погрешность будет определяться следующим образом:

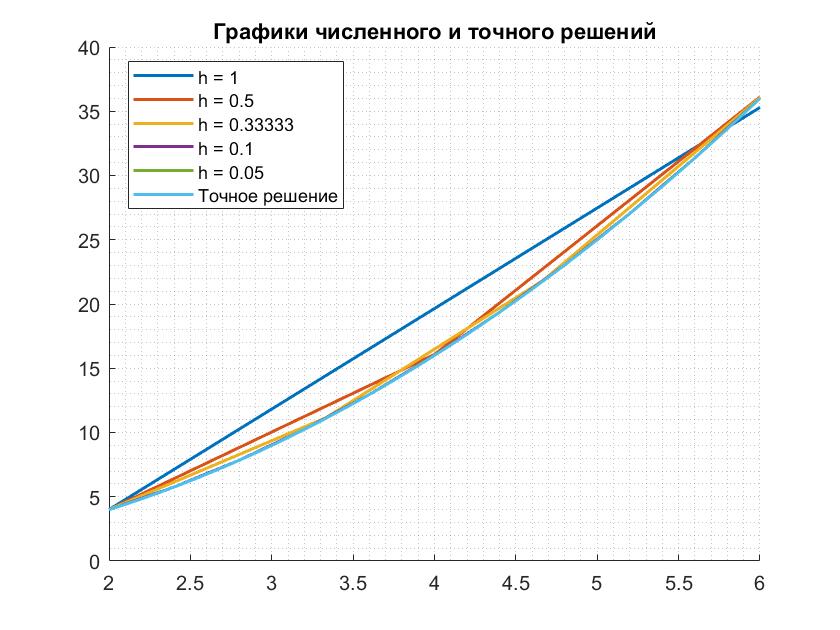
Где — значение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты, а — точное, — индекс узла. В качестве узлов берется разбиение отрезка с шагом метода h.

Точное значение вычисляется через точное решение уравнения:

Помимо этого, будет проведен сравнительный анализ метода с методом Рунге-Кутты 3-го порядка из предыдущей лабораторной работы.

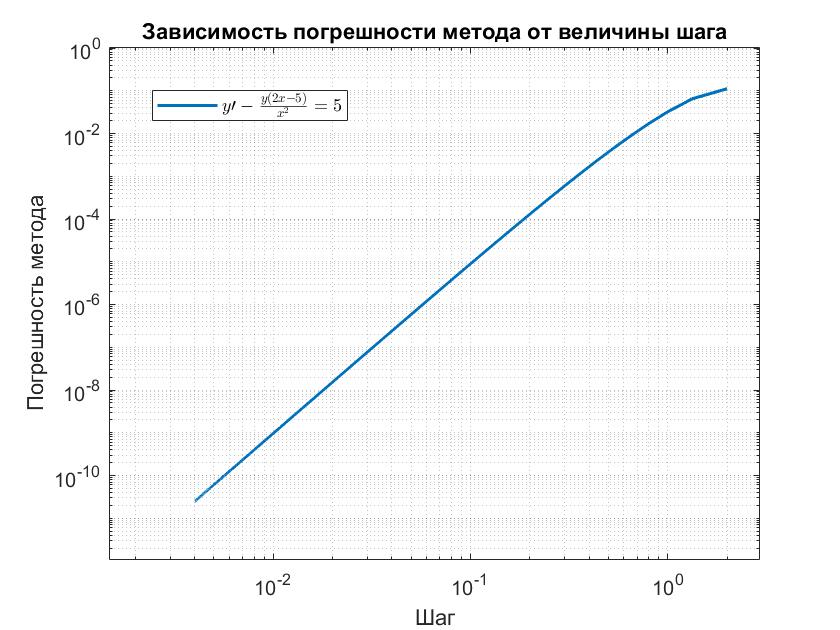
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики точного и численного решения ДУ для шага h = [1, 0.5, 0.33, 0.1, 0.05]:



Как видно, при уменьшении шага графики численного решения приближаются к графику точного решения.

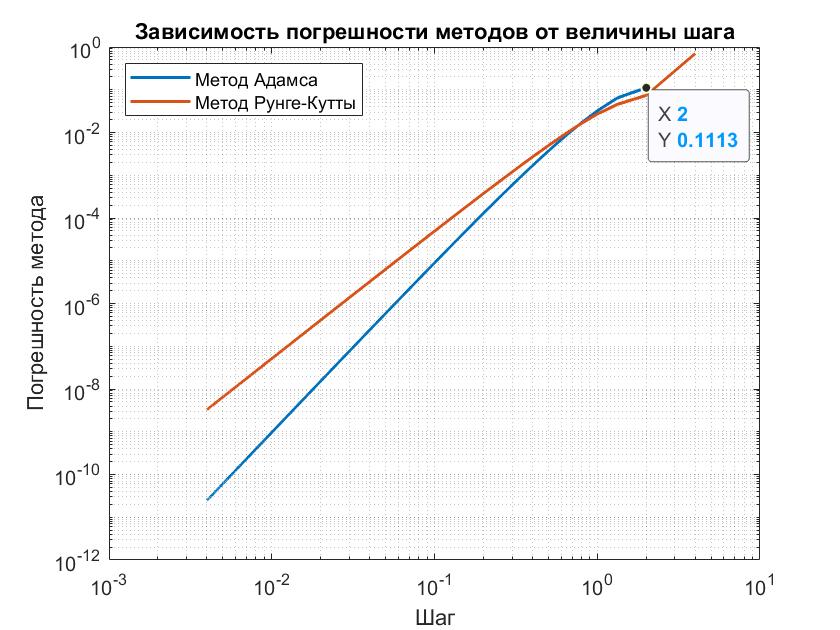
Ниже представлены графики зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.004; 2].



Исходя из графика, можно сделать вывод, что при увеличении шага погрешность возрастает. Зависимость погрешности от шага степенная.

При изменении шага на 2 порядка погрешность изменяется на 8 порядков. Исходя из этого, показатель степенной зависимости равен четырем. При этом, показатель выше, чем у метода Рунге-Кутты.

Ниже представлено сравнение зависимости погрешности методов Адамса и метода Рунге-Кутты:



Исходя из графика, можно сделать вывод, что при пороговом значении шага примерно равным 1, схема «предиктор-корректор» для метода Адамса дает погрешность на несколько порядков меньше, чем метод Рунге-Кутты 3-го порядка. Стоит заметить, что при уменьшении шага погрешность метода Адамса быстрее стремится к нулю. При увеличении шага больше порогового значения метод Рунге-Кутты 3-го порядка дает меньшую погрешность.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Схема «предиктор-корректор» метода Адамса порядка 2-3 дает хорошие результаты для рассмотренных случаев.

При возрастании шага метода погрешность растет по степенной функции. При этом, несмотря на вычислительную простоту, погрешность рассмотренного метода меньше, чем погрешность метода Рунге-Кутты при значении шага меньше 1.