## Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Численное решение краевой задачи для ОДУ с помощью метода конечных разностей**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Краевая задача для ОДУ 2-го порядка:

L — линейный дифференциальный оператор с краевыми начальными условиями:

Решение y(x) должно принадлежать к классу функций и удовлетворять дифференциальному уравнению и краевым условиям. Решение ищется в виде табличной функции.

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности решения краевой задачи от шага метода.

# Описание метода

Задается сетка , где — шаг сетки. Зафиксируем и рассмотрим уравнение:

Значения производных аппроксимируем конечноразностными отношениями по симметричным формулам второго порядка для .

Подставим эти соотношения в исходное выражение, отбросим слагаемое и преобразуем выражение. Получим:

Еще два уравнения получим, если аппроксимируем конечными разностями краевые условия:

Получилась система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Решение системы является численным решением нашего исходного уравнения в точках сетки.

Построение СЛАУ будет происходить непосредственно по формуле (1).

# Предварительный анализ задачи

Для численного решения краевой задачи требуется существование краевой задачи, а именно существование двух задач Коши:

1. Функция должна быть непрерывна в области определения;
2. Функция должна удовлетворять условию Липшица по аргументу y:

Исследуемая функция удовлетворяет обоим условиям.

# Тестовый пример

Рассмотрим уравнение с краевым условием .

Аналитическое решение:

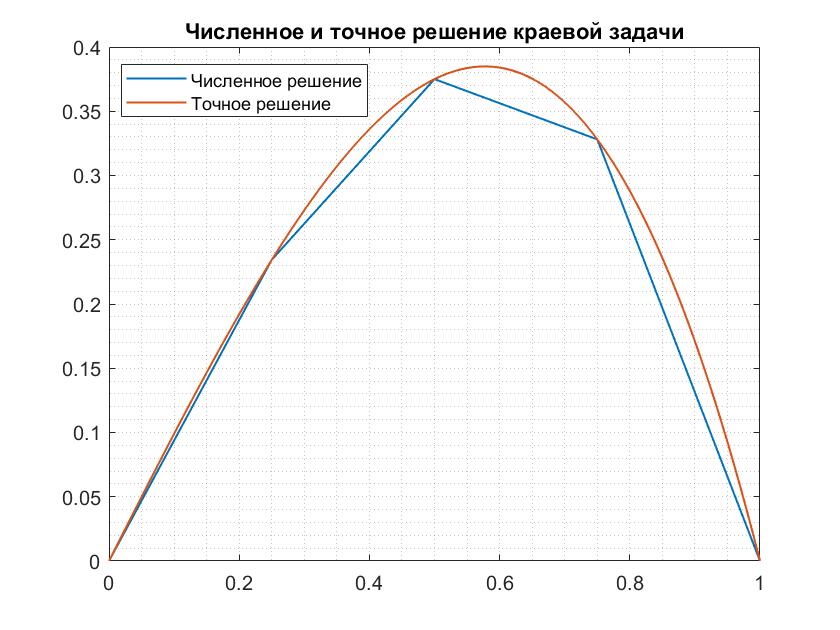
Решение будем искать на сетке:

Шаг сетки

Запишем получившуюся СЛАУ:

Решив СЛАУ, получаем:

Ниже представлен график точного и численного решения:



Как видно из графика, численное решение в узлах совпадает с аналитическим.

# Модульная структура программы

# Функция [x, y] = kr\_method(p, q, f, d, n, y\_0, y\_n)

# Данная функция осуществляет численное решение краевой задачи. На вход передается функции p, q, f из уравнения (0), отрезок d, количество точек n, параметры краевой задачи y\_0 и y\_n.

# Подготовка контрольных тестов

Исследование численного решения краевой задачи будет проводиться для следующего уравнения с указанными начальными условиями и заданным отрезком:

Краевая задача:

Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности решения краевой задачи от шага метода в диапазоне [0.001; 1].

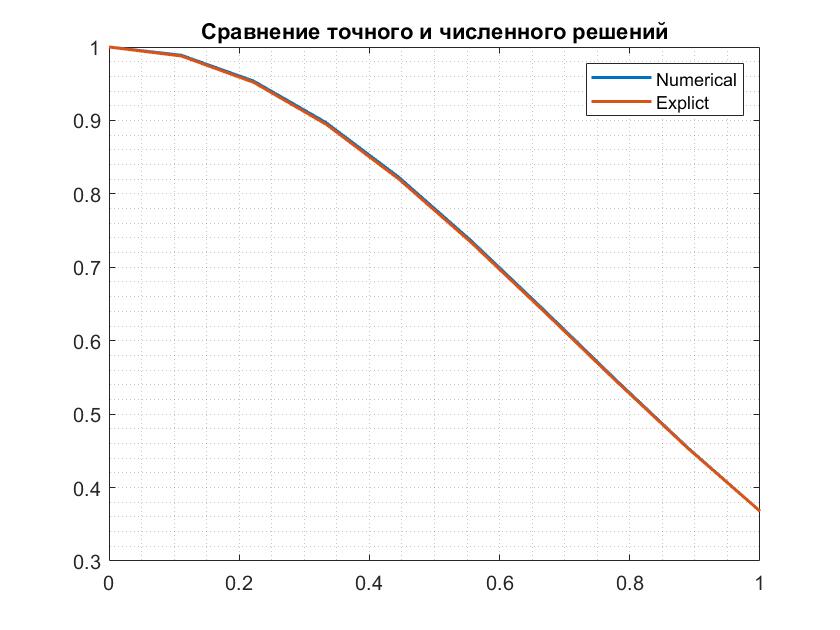
Погрешность будет определяться следующим образом:

Где — значение, полученное с помощью метода конечных разностей, а — точное, — индекс узла.

Точное значение вычисляется через точное решение уравнения:

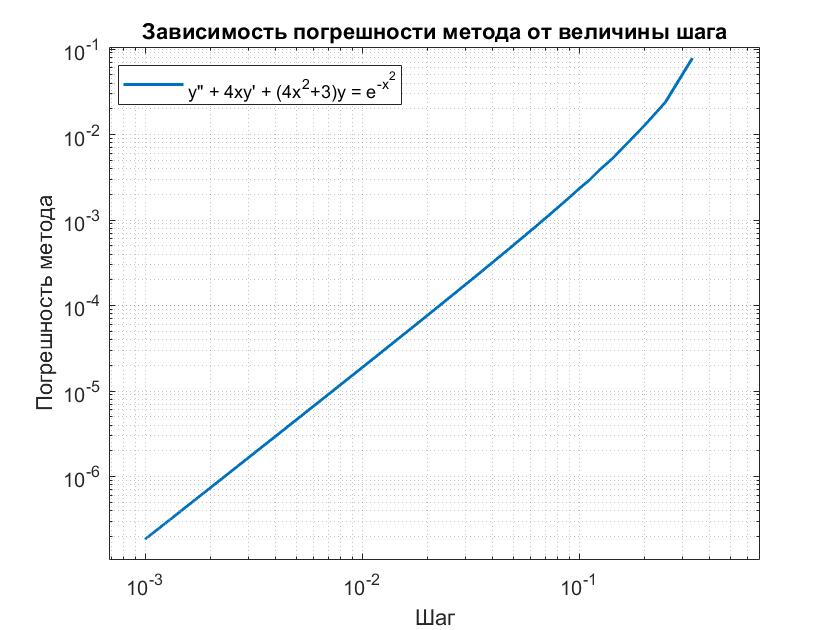
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики точного и численного решения ДУ для 10 узлов:



Как видно, графики примерно совпадают.

Ниже представлены графики зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [0.001; 1].



Исходя из графика, можно сделать вывод, что при увеличении шага погрешность возрастает. Зависимость погрешности от шага степенная. При этом, погрешность всегда примерно на три порядка меньше шага метода.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Метод конечных разностей дает хорошие результаты в рассмотренных случаях.

При возрастании шага метода погрешность растет по степенной функции. При этом, несмотря на вычислительную простоту, погрешность рассмотренного метода крайне невелика.