## Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Отчет по лабораторной работе  
по численным методам на тему

**Численное решение краевой задачи для ОДУ с помощью метода конечных разностей**

Выполнил студент гр. 3630103/80001 Кондратенко Ф. И.

Преподаватель: Фролов А.С.

Санкт-Петербург

2020

# Постановка задачи

Необходимо исследовать решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с помощью метода конечных разностей. Исследование будет проводиться на примере следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

Краевые условия:

Исследование будет состоять в анализе зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода.

# Описание метода

Решение краевой задачи состоит в решении дискретизованного уравнения.

Введем на отрезке [a, b] сетку с шагом :

Определим на этой сетке сеточные функции , отвечающие функциональным коэффициентам дифференциального уравнения:

Значения производных аппроксимируем конечноразностными отношениями по симметричным формулам второго порядка для .

Подставим эти соотношения в исходное выражение, отбросим слагаемое и преобразуем выражение. Получим:

Еще два уравнения получим, если аппроксимируем конечными разностями краевые условия:

Получилась система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Численное решение нашего исходного уравнения в точках сетки получается за счет решения указанной системы.

Построение СЛАУ будет происходить непосредственно по формуле (1).

Так как СЛАУ имеет трехдиагональную матрицу, решение будет искаться с помощью метода прогонки.

# Предварительный анализ задачи

Для численного решения краевой задачи требуется существование краевой задачи, а именно существование двух задач Коши:

1. Функция должна быть непрерывна в области определения;
2. Функция должна удовлетворять условию Липшица по аргументу y:

Исследуемая функция удовлетворяет обоим условиям.

# Тестовый пример

Рассмотрим уравнение с краевыми условиями .

Аналитическое решение:

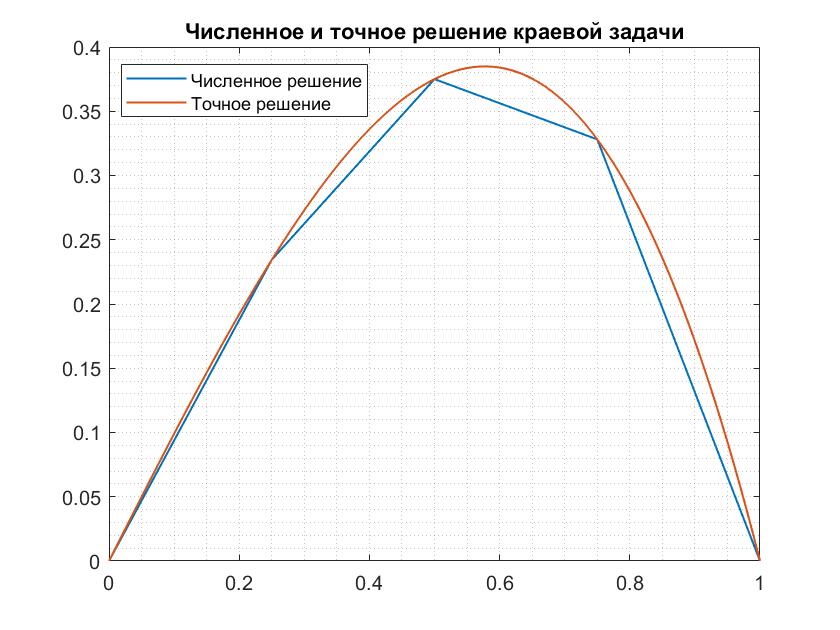
Решение будем искать на сетке:

Шаг сетки

Запишем получившуюся СЛАУ:

Решив СЛАУ, получаем:

Ниже представлен график точного и численного решения:



Как видно из графика, численное решение в узлах совпадает с аналитическим.

# Модульная структура программы

# Функция [x, y] = kr\_method(p, q, f, d, n, y\_0, y\_n)

# Данная функция осуществляет численное решение краевой задачи. На вход передается функции p, q, f из уравнения (0), отрезок d, количество точек n, параметры краевой задачи y\_0 и y\_n.

1. Функция X = progon(d1, d2, d3, b)

Данная функция решает систему с трехдиагональной матрицей с диагоналями d1, d2, d3 и столбцом значений f методом прогонки.

# Подготовка контрольных тестов

Исследование численного решения краевой задачи будет проводиться для следующего уравнения с указанными начальными условиями и заданным отрезком:

Краевая задача:

Для количественного исследования будет проведен анализ зависимости погрешности решения краевой задачи от шага метода в диапазоне [; 1].

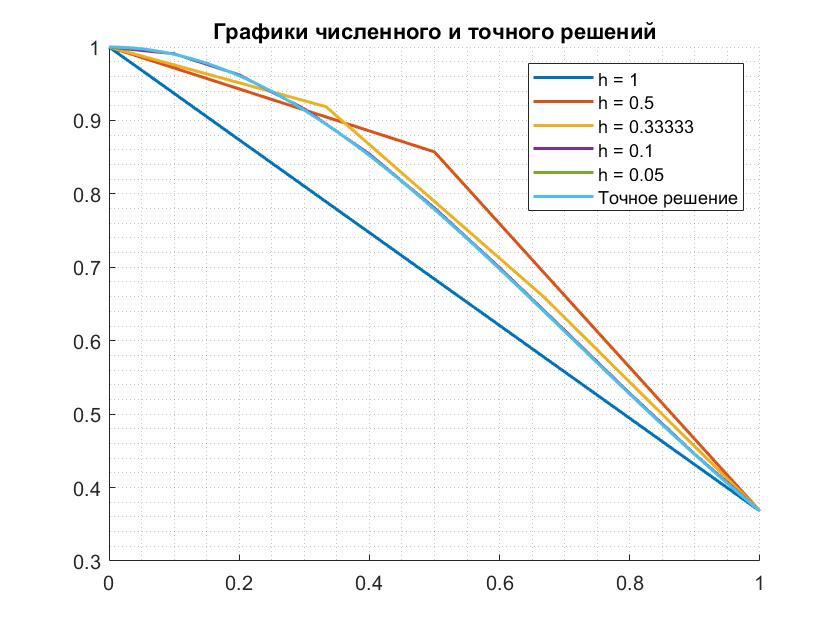
Погрешность будет определяться следующим образом:

Где — значение, полученное с помощью метода конечных разностей, а — точное, — индекс узла. В качестве узлов берется разбиение отрезка с шагом метода h.

Точное значение вычисляется через точное решение уравнения:

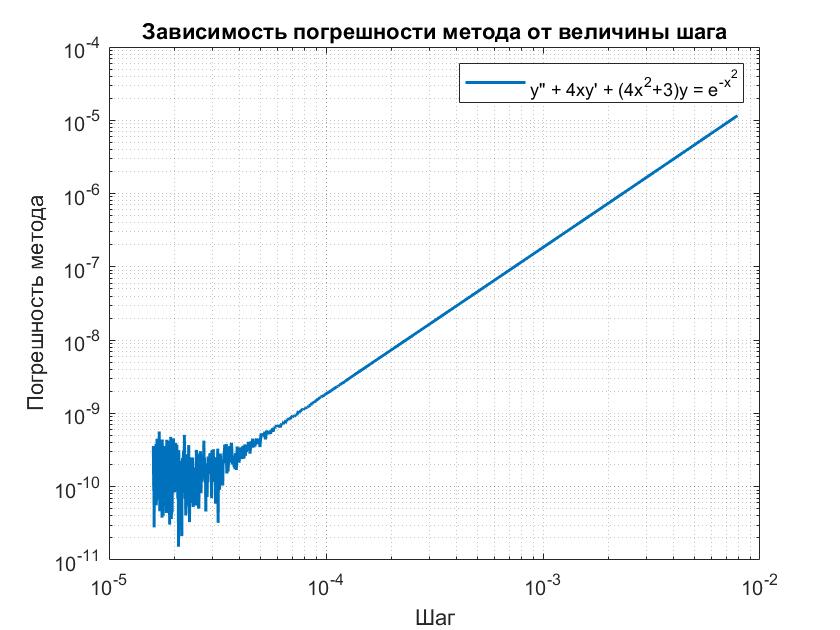
# Численный анализ метода

Ниже представлены графики точного и численного решения ДУ для 10 узлов:



Как видно, при уменьшении шага графики численного решения приближаются к графику точного решения.

Ниже представлены графики зависимости погрешности решения задачи Коши от шага метода в диапазоне [; 1].



Исходя из графика, можно сделать вывод, что при увеличении шага погрешность возрастает. Зависимость погрешности от шага степенная. При приближении шага к погрешность начинает возрастать. Вероятно, это связано с ошибками округления.

При изменении шага на 1 порядок погрешность изменяется на 2 порядка. Исходя из этого, показатель степенной зависимости равен двум.

# Выводы

По результатам исследования можно сделать следующие выводы. Метод конечных разностей дает хорошие результаты в рассмотренных случаях.

При возрастании шага метода погрешность растет по степенной функции. При этом, несмотря на вычислительную простоту, погрешность рассмотренного метода крайне невелика.