Задание 7. Работа с символьными выражениями

7.1 Работа с матрицами.

Создать символьную матрицу А размера 3х3 из чисел.

```
A = sym(rand(3))
```

A =

$$\begin{pmatrix} \frac{7338378580900475}{9007199254740992} & \frac{8226958330713791}{9007199254740992} & \frac{627122237356493}{2251799813685248} \\ \frac{8158648460577917}{9007199254740992} & \frac{1423946432832521}{2251799813685248} & \frac{153933462881711}{281474976710656} \\ \frac{1143795557080799}{9007199254740992} & \frac{109820732902227}{1125899906842624} & \frac{8624454854533211}{9007199254740992} \end{pmatrix}$$

Транспонировать и присвоить ей имя $B = \mathrm{A}'$.

```
B = A'
```

B =

$$\begin{pmatrix} \frac{7338378580900475}{9007199254740992} & \frac{8158648460577917}{9007199254740992} & \frac{1143795557080799}{9007199254740992} \\ \frac{8226958330713791}{9007199254740992} & \frac{1423946432832521}{2251799813685248} & \frac{109820732902227}{1125899906842624} \\ \frac{627122237356493}{2251799813685248} & \frac{153933462881711}{281474976710656} & \frac{8624454854533211}{9007199254740992} \end{pmatrix}$$

Построить обратные матрицы для матриц А и В.

```
X = inv(B)
```

X =

$$\begin{pmatrix} -\frac{40348059772802898533835734056013923226585818 7264}{20216511234103451038703936767456901579464551 7117} & \frac{5830333611965085045222 61}{2021651123410345103870 39} \\ \frac{61923736428862050372498427297790434942586244 3008}{20216511234103451038703936767456901579464551 7117} & -\frac{544217827598284398213 88}{202165112341034510387 03} \\ -\frac{54958826242264982970673194969131498892909608 96}{47015142404891746601637062249899771115033841 19} & \frac{328490993234054184978 76}{470151424048917466016 37} \end{pmatrix}$$

```
Y = inv(A)
```

Y =

$$\left(\begin{matrix} -\frac{403480597728028985338357340560139232265858187264}{202165112341034510387039367674569015794645517117} & \frac{619237364288620503724984}{20216511234103451038703 9} \\ \frac{583033361196508504522261058263194763497085861888}{202165112341034510387039367674569015794645517117} & -\frac{5442178275982843982138 8}{2021651123410345103870 3} \\ -\frac{588256232660359148434931054588129716506669875 2}{202165112341034510387039367674569015794645517117} & -\frac{26685714569931928255529}{2021651123410345103870 3} \end{matrix} \right.$$

Вычислить их определители.

```
a = det(A)
```

a =

$$-\frac{202165112341034510387039367674569015794645517117}{730750818665451459101842416358141509827966271488}$$

```
b = det(B)
```

b =

$$-\frac{202165112341034510387039367674569015794645517117}{730750818665451459101842416358141509827966271488}$$

```
x = det(X)
```

x =

$$-\frac{730750818665451459101842416358141509827966271488}{202165112341034510387039367674569015794645517117}$$

```
y = det(Y)
```

y =

$$-\frac{730750818665451459101842416358141509827966271488}{202165112341034510387039367674569015794645517117}$$

Найти символьные характеристические полиномы (charpoly(A)).

```
pa = charpoly(A)
```

pa =

$$\left(\begin{matrix} 1 & -\frac{10829309583381885}{4503599627370496} & \frac{39946316155951132655596966249121}{40564819207303340847894502572032} & \frac{202165112341034510 38}{730750818665451459 10} \end{matrix} \right.$$

```
pb = charpoly(B)
```

pb =

$$\left(\begin{matrix} 1 & -\frac{10829309583381885}{4503599627370496} & \frac{39946316155951132655596966249121}{40564819207303340847894502572032} & \frac{202165112341034510 38}{730750818665451459 10} \end{matrix} \right.$$

Определить корни характеристических полиномов (roots).

```
rpa = double(roots(pa))
```

```
rpa =
   1.7527 - 0.0000i
  -0.1879 + 0.0000i
   0.8399 + 0.0000i
```

```
rpb = double(roots(pb))
```

```
rpb =
   1.7527 - 0.0000i
  -0.1879 + 0.0000i
   0.8399 + 0.0000i
```

Найти собственные числа и собственные векторы обеих матриц (eig).

```
ea = double(eig(A))
```

```
ea =
   1.7527 - 0.0000i
  -0.1879 + 0.0000i
   0.8399 + 0.0000i
```

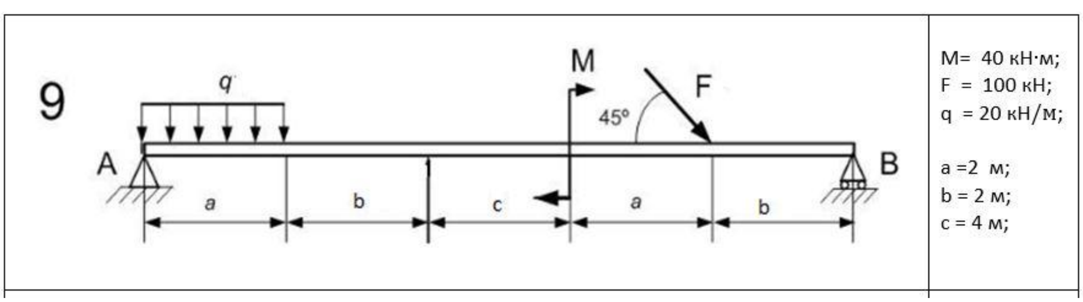
```
eb = double(eig(B))
```

```
eb =
   1.7527 - 0.0000i
  -0.1879 + 0.0000i
   0.8399 + 0.0000i
```

7.2 Решение системы линейных уравнений

Решить систему линейных уравнений из задания 2, объявляя переменные x1,x2,x3,x4 и матрицы A, B символьными объектами. Найти решение с помощью двух символьных функций : **`linsolve`** и **`solve`**

Получить ответ задачи в десятичном виде с четырьмя значащими цифрами, применяя оператор арифметики переменной точности **`vpa(X,4).`**



Система уравнений равновесия балки:

$$\begin{cases} X_A + F * cos(45) = 0; \\ Y_A + Y_B - F * sin(45) - Q = 0, Q = q * a; \\ -Q * \frac{a}{2} - M - F * sin(45) * (2 * a + b + c) + Y_B * (2a + 2b + c) = 0 \end{cases}$$

Перенесем все неизвестные в правую часть:

$$\begin{cases} X_A = -F * cos(45); \\ Y_A + Y_B = q * a + F * sin(45); \\ Y_B * (2a + 2b + c) = q * \frac{a^2}{2} + M + F * sin(45) * (2a + b + c) \end{cases}$$

Приведем систему к матричному виду $A * X = B$ и решим ее:

```
syms a b c M F q A B;
A = [1 0 0; 0 1 1; 0 0 (2*a + 2*b + c)];
B = [-F * cosd(45); q*a + F*sind(45); q * a^2 * 0.5 + M + F*sind(45)*(2*a + b + c)];
X = linsolve(A, B);
a = 2;
b = 2;
c = 4;
M = 40;
F = 100;
q = 20;
xa = vpa(subs(X(1)));
ya = vpa(subs(X(2)));
yb = vpa(subs(X(3)));
Xa = X(1);
Ya = X(2);
Yb = X(3);
fprintf('Xa = %d, Ya = %d, Yb = %d\n', xa, ya, yb);
```

```
Xa = -71, Ya = 45, Yb = 66
```

Для проверки решения напишем сумму моментов относительно точки B и сумму сил:

$$\begin{cases} M_B = -Y_A * (2a + 2b + c) + F * sin(45) * b + q * a * (2b + c + 1.5a) - M; \\ \sum F = Y_B + Y_A - q * a - F * sin(45) \end{cases}$$

```
MB = -Ya*(2*a + 2*b + c) + F*sind(45)*b + q*a*(2*b + c + 1.5*a) - M;
EF = Yb + Ya - q*a - F*sind(45);
subs(MB)
```

ans = 0

```
subs(EF)
```

ans = 0

Так как сумма моментов относительно точки B и сумма сил равны нулю, решение верное.

7.3 Графики.

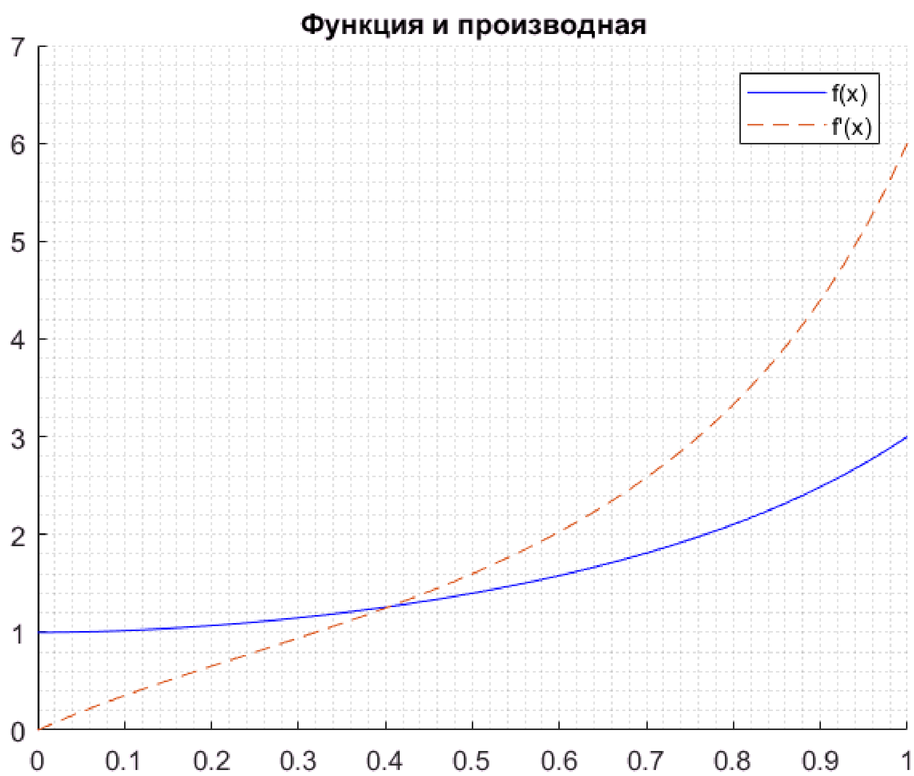
Для построения графиков символьных функций, начиная с версии R2016a , в MATLAB применяют команду fplot (раньше была ezplot).

$$f(x) = (1 - x + x^2)/(1 + x - x^2), [0; 1]$$

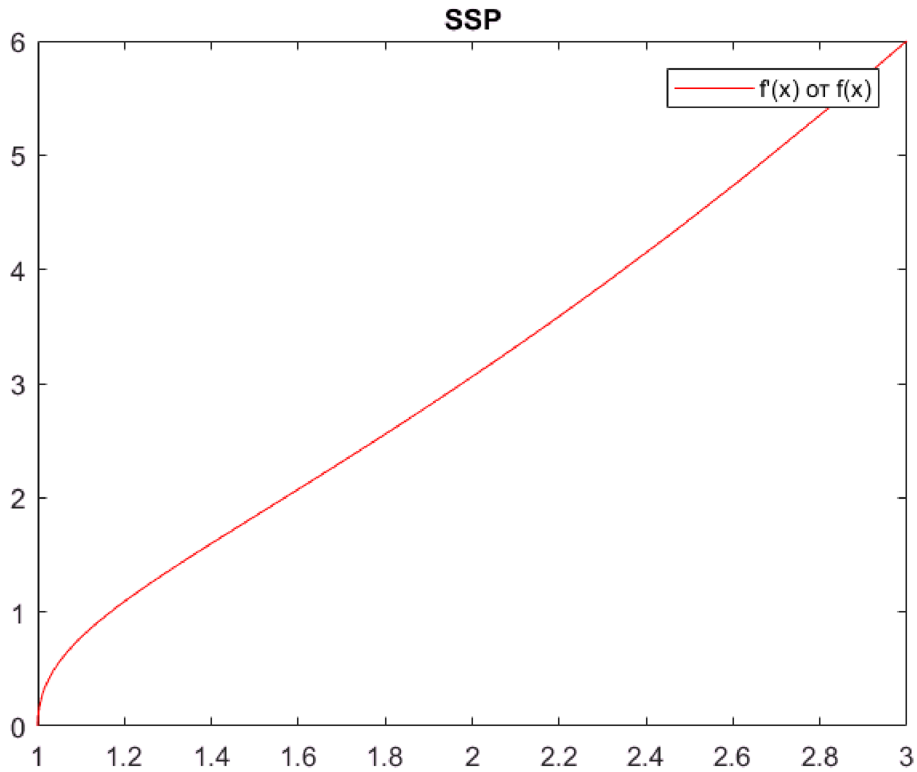
<u>А.</u> Найти производную функции из табл.7.1 и построить для сравнения два графика:

1. график функции *f(x)* и ее производной в одних и тех же осях,
2. график зависимости между *f(x)* и $f'(x)$, где значения функции откладываются по оси абсцисс, а производной – по оси ординат. Такой график называют «графиком в пространстве состояний» (SSP – state-space plot); x выступает в роли параметра.

```
syms x;
f = (1 + x + x^2)/(1 + x - x^2);
figure('Name', 'Функция и производная', 'NumberTitle', 'off');
grid minor;
hold on;
fplot(f, [0 1], 'Color', 'blue');
fplot(diff(f), [0 1], '--');
axis([0 1 0 7]);
legend('f(x)', "f'(x)");
title('Функция и производная');
```




```
figure('Name', 'SSP', 'NumberTitle', 'off');
fplot(f, diff(f), [0 1],'Color', 'red');
legend("f'(x) от f(x)");
title('SSP');
```



В. Построить в интервале [-10,10] графики двух пространственных кривых, заданных параметрически:

1. $$\begin{cases} x(t) = cos(0.1t) * sin(10t) \\ y(t) = 2 * cos(10t) \\ z(t) = 3t \end{cases}$$ синей пунктирной линией,

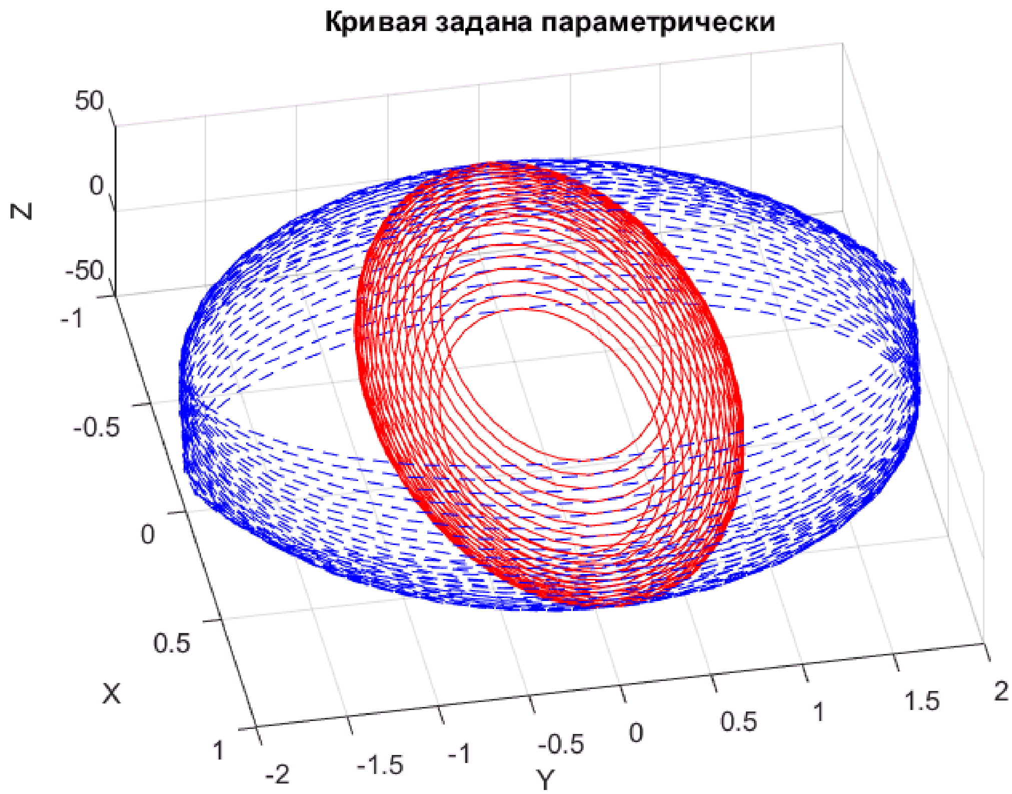
2. $$\begin{cases} x(t) = cos(0.1 * t) * sin(10t) \\ y(t) = cos(0.1t) * cos(10t) \\ z(t) = 3t \end{cases}$$ красной сплошной линией.

```
% --Вариант 1--
fx = @(t) cos(0.1.*t) .* sin(10.*t);
fy = @(t) 2 .* cos(10.*t);
fz = @(t) 3.*t;
figure;
hold on;
grid on;
fplot3(fx, fy, fz, [-10 10], '--', 'Color', 'blue');

% --Вариант 2--
fx = @(t) cos(0.1.*t) .* sin(10.*t);
fy = @(t) cos(0.1.*t) .* cos(10.*t);
fz = @(t) 3.*t;
fplot3(fx, fy, fz, [-10 10], 'Color', 'red');

title('Кривая задана параметрически');
xlabel('X');
```

```
ylabel('Y');
zlabel('Z');
view(79, 69);
```



7.4. Найти корни нелинейного уравнения

Задать переменную x и функцию f(x) символьными. Для функции f(x) из таблицы, найти корни нелинейного уравнения f(x)=0.

$$f(x) = 4(1 + x^{1/2}) * ln(x) - 1$$

Преобразовать результат в десятичные числа, используя vpa(X,3) . Решить неравенство f(x)>0. В обоих случаях использовать символьный решатель solve. Построить график fplot для символьной функции f(x) и график area(z,f) для такой же функции f(z) от численной (double) переменной z=-5:0.01:5 , чтобы наглядно убедиться в верном решении равенства и неравенства. *Желательно, чтобы символьные и численные переменные обозначались по-разному.*

```
syms x;
ff = @(z) 4*(1 + z.^0.5) .* log(z) - 1;
f = 4*(1 + x^0.5) * log(x) - 1;
fx = f == 0;
fy = f >= 0;
a = solve(fx, x)
```

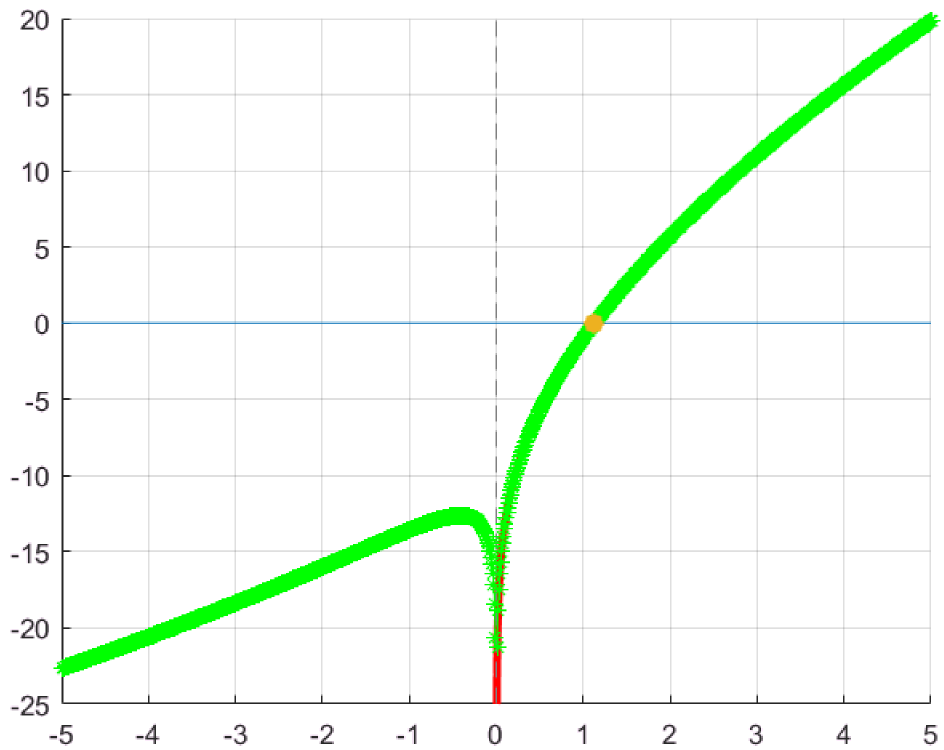
```
Warning: Cannot solve symbolically. Returning a numeric approximation instead.
a = 1.1288656117994576711265658228538
```

```
a = vpa(a, 3);
figure;
```

```
hold on;
grid on;
fplot(f, [-5 5], 'Color', 'red', 'LineWidth', 3);
%--Построение численной функции--
z = -5:0.01:5;
plot(z, ff(z), '-*', 'Color', 'green');
```

```
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored
```

```
line([-5 5], [0 0]);
plot(a, 0, '*', 'LineWidth', 5);
```




```
% --MATLAB решать неравенство отказывается--
a = solve(fy, x, 'Real', true, 'IgnoreAnalyticConstraints', true);
```

```
Warning: Unable to find explicit solution. For options, see help.
```

7.5 Для символьной функции f(x) из предыдущего п.7.4 (табл.7.2) вычислить неопределенный интеграл, а также определенный интеграл на интервале [1 2].

```
IN = int(f)
```

IN =

$$4\,x\,\left(\log(x)-1\right)-x+\frac{8\,x^{3/2}\,\left(\log(x)-\frac{2}{3}\right)}{3}$$

```
I0 = int(f, [1 2])
```

I0 =

$$\log(256) + \frac{16\sqrt{2}\left(\log(2) - \frac{2}{3}\right)}{3} - \frac{29}{9}$$

7.6. Построить графики кусочно-линейной и кусочно-нелинейной функций с помощью команды piecewise.

А. Значения параметра *a* задать самостоятельно:

$$y(x) = \begin{cases} k(x+a), x < -a \\ 0, -a \le x \le a \\ k(x-a), a < x \end{cases}$$

Ввод значения предусмотреть с клавиатуры:

```
prompt = 'Enter the value of the variable';
```

```
x = input(prompt)
```

Желательно выводить изображение основного графика и его соответствующей его части на одном рисунке с помощью команды ***subplot***. В случае, когда переменная не попадает в заданный диапазон, выводить предупреждение:

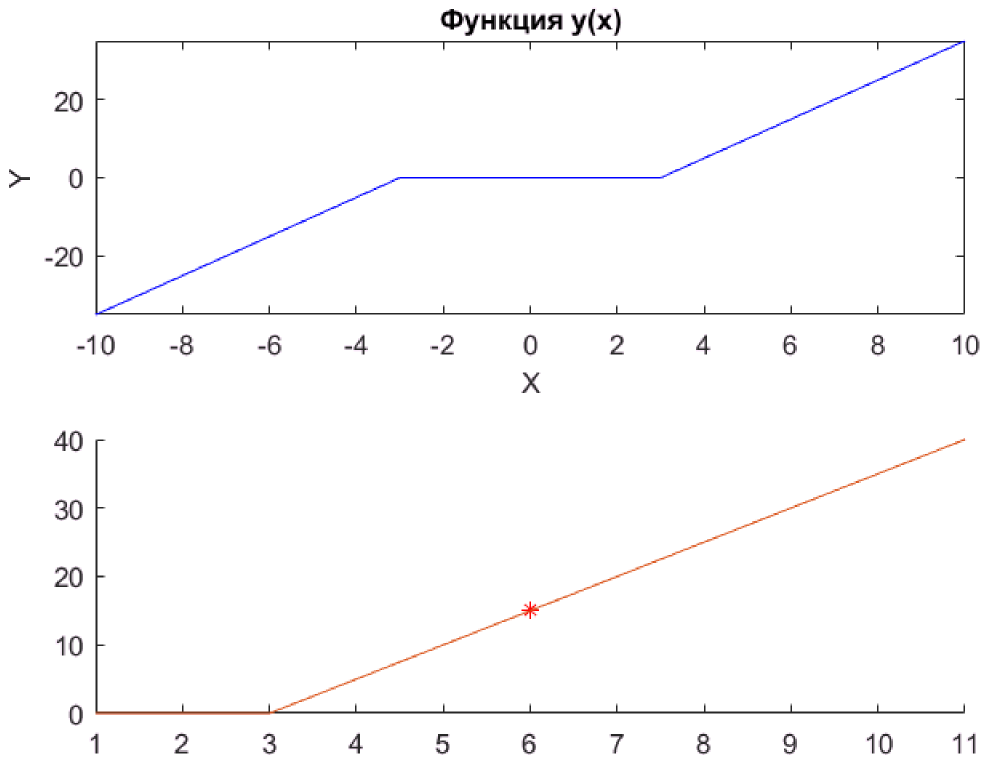
```
disp(' Warning: the value is out of range ')
```

```
syms y(x);
k = 5;
a = 3;
xx = input('Введсите x: ');
y(x) = piecewise(x < -a, k*(x + a), -a <= x <= a, 0, a < x, k*(x - a))
```

y(x) =

$$\begin{cases} 5x + 15 & \text{if } x < -3 \\ 0 & \text{if } x \in [-3, 3] \\ 5x - 15 & \text{if } 3 < x \end{cases}$$

```
figure;
subplot(2, 1, 1);
fplot(y(x), [-10 10], 'Color', 'blue');
title('Функция y(x)');
xlabel('X');
ylabel('Y');
subplot(2, 1, 2);
hold on;
l = vpa(subs(y(xx)), 3);
plot(xx, l, '*', 'Color', 'red');
fplot(y(x), [xx-5 xx+5]);
```




```
fprintf("Значение функции f в точке %f %f \n", xx, l);
```

```
Значение функции f в точке 6.000000 15.000000
```

B. Построить ***график кусочно-НЕлинейной функции,*** заданной выражением

$$x(t) = \begin{cases} exp(t), -3 < t \le 0; \\ cos(t - \frac{\pi}{2}), 0 < t \le \pi; \\ exp(t - \pi), \pi < t < 4.24. \end{cases}$$

Предусмотреть ввод значения с клавиатуры

```
prompt = 'Enter the value of the variable';
```

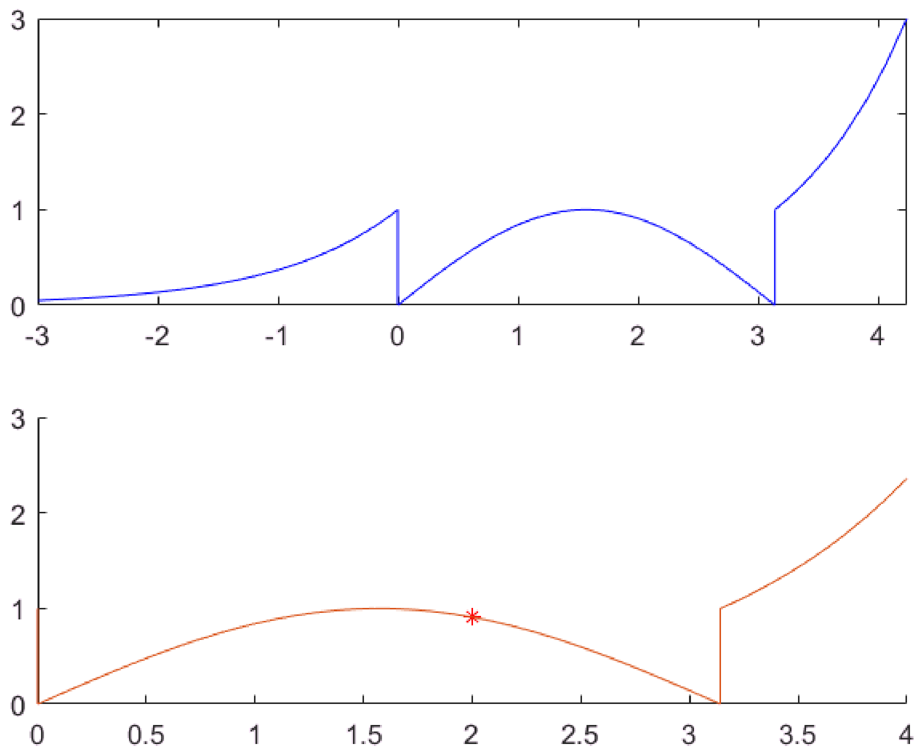
```
t = input(prompt)
```

Желательно выводить рядом на одном рисунке основной график и изображение той части графика, в диапазон которой попадает t. Использовать команду **`subplot`**.

```
syms x(t);
x(t) = piecewise(-3 < t <= 0, exp(t), 0 < t <= pi, cos(t - pi/2), pi < t < 4.24, exp(t - pi));
tt = input('Введите значение переменной с клавиатуры: ');
if(tt < -3 || tt > 4.24)
    disp('Ошибка! Переменная лежит вне области построения функции!');
else
    figure;
    subplot(2, 1, 1);
```

```
    fplot(x(t), [-3 4.24], 'Color', 'blue');
    subplot(2, 1, 2);
    hold on;
    l = vpa(subs(x(tt)), 3);
    plot(tt, l, '*', 'Color', 'red');
    fplot(x(t), [tt-2 tt+2]);
    fprintf("Значение функции f в точке %f %f \n", tt, l);
end
```

```
Значение функции f в точке 2.000000 0.909297
```



C. Запрограммировать и вывести периодическую функцию, имитирующую изменение температуры в термостате при срабатывании специального термореле (темно-зеленая линия на рис. 7.1). Построить аналогичный график на интервале [0 20].

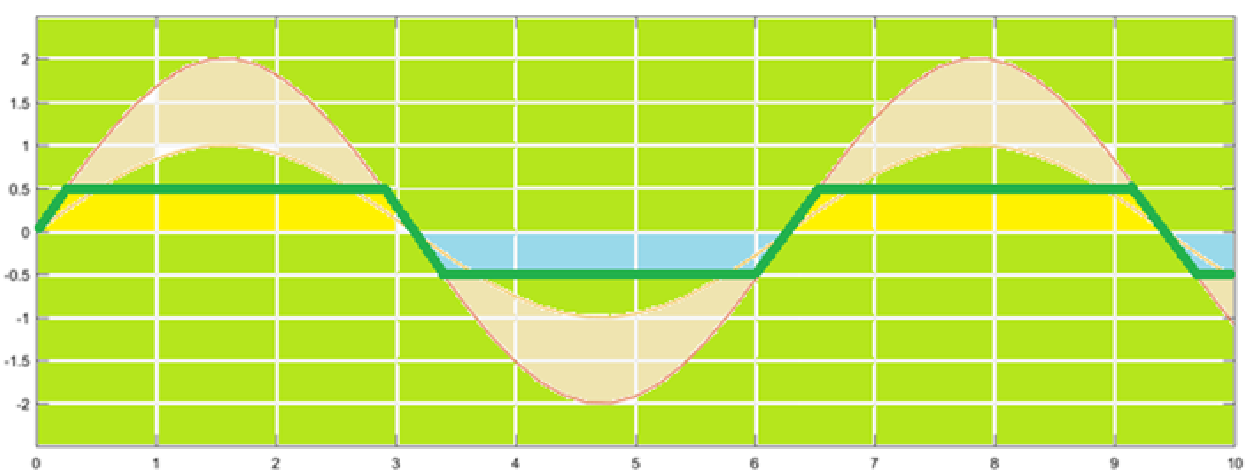
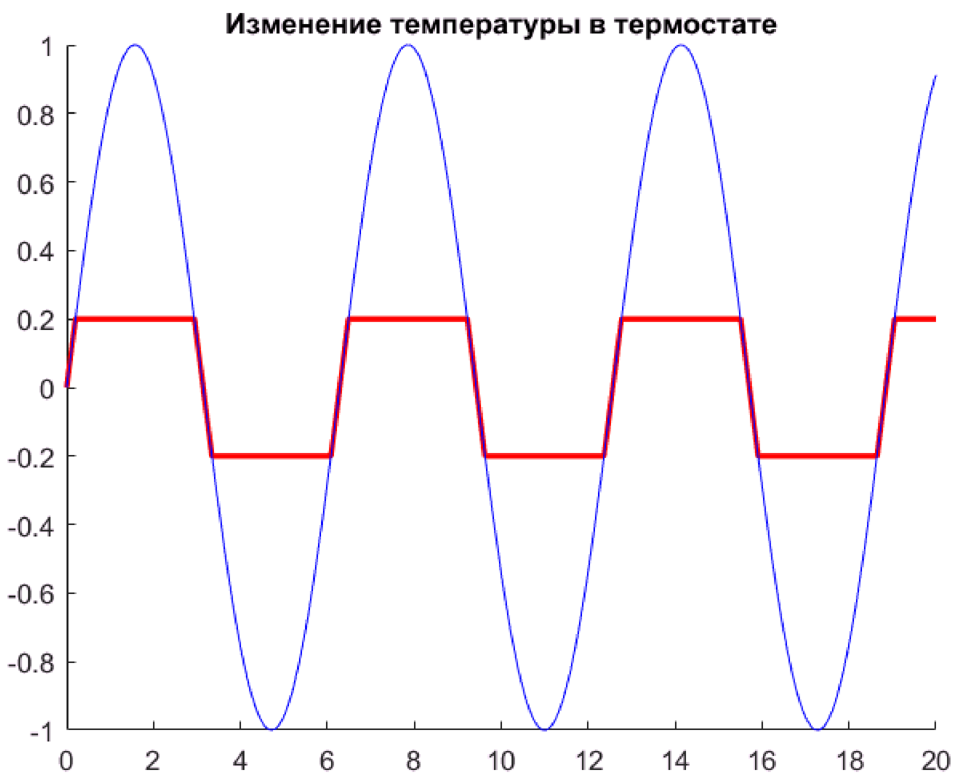


Рис.7.1. Изменение температуры в термостате при срабатывании специального термореле

```
syms y(x);
y(x) = piecewise(sin(x) >= 0.2, 0.2, sin(x) <= -0.2, -0.2, cos(x) < 0, sin(x), cos(x) >= 0, si
figure;
hold on;
fplot(y(x), [0 20], 'Color', 'red', 'LineWidth', 2);
fplot(sin(x), [0 20], 'Color', 'blue');
title('Изменение температуры в термостате');
```

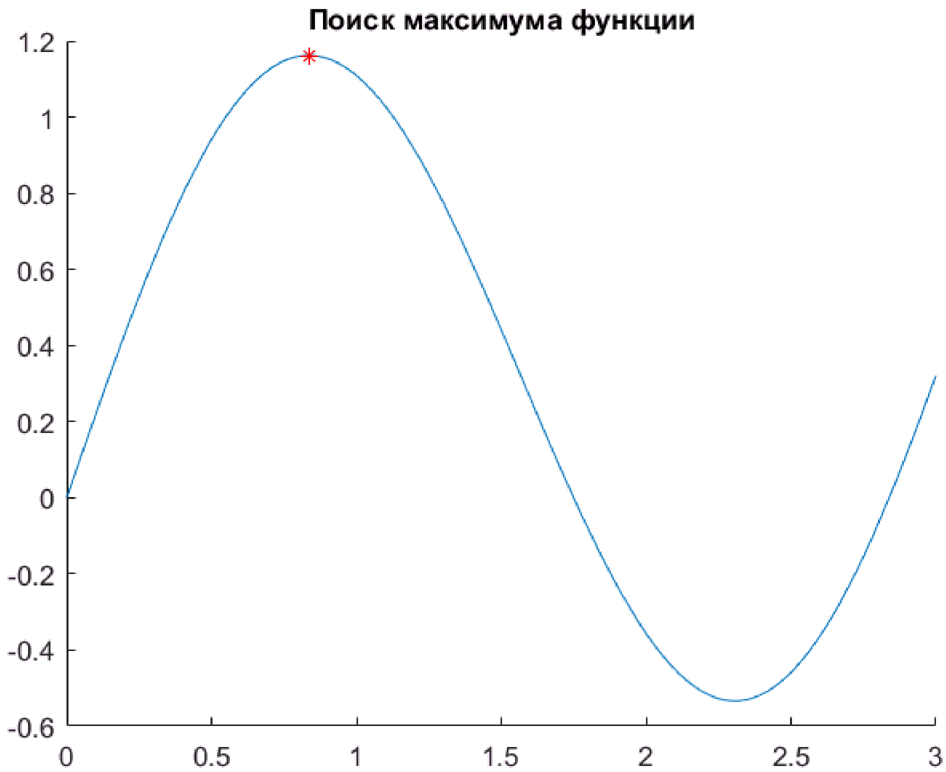


7.7. Найти минимум или максимум функции (табл.7.3), полагая ее символьной.

Использовать для поиска minimum условие равенства нулю первой символьной производной функции и проверку положительного знака у её второй символьной производной.

$$0.2 * x + sin(2x) \rightarrow max, [0; 3], \Delta = 0.02$$

```
syms f(x);
f(x) = 0.2*x + sin(2*x);
sol = solve(diff(f(x)) == 0, x);
figure;
hold on;
fplot(f(x), [0 3]);
ddf(x) = diff(f(x), 2);
if(ddf(sol(1)) < 0)
    fplot(vpa(sol(1), 3), f(sol(1)), '*', 'Color', 'red');
else
    fplot(vpa(sol(2), 3), f(sol(2)), '*', 'Color', 'red');
end;
title('Поиск максимума функции');
```



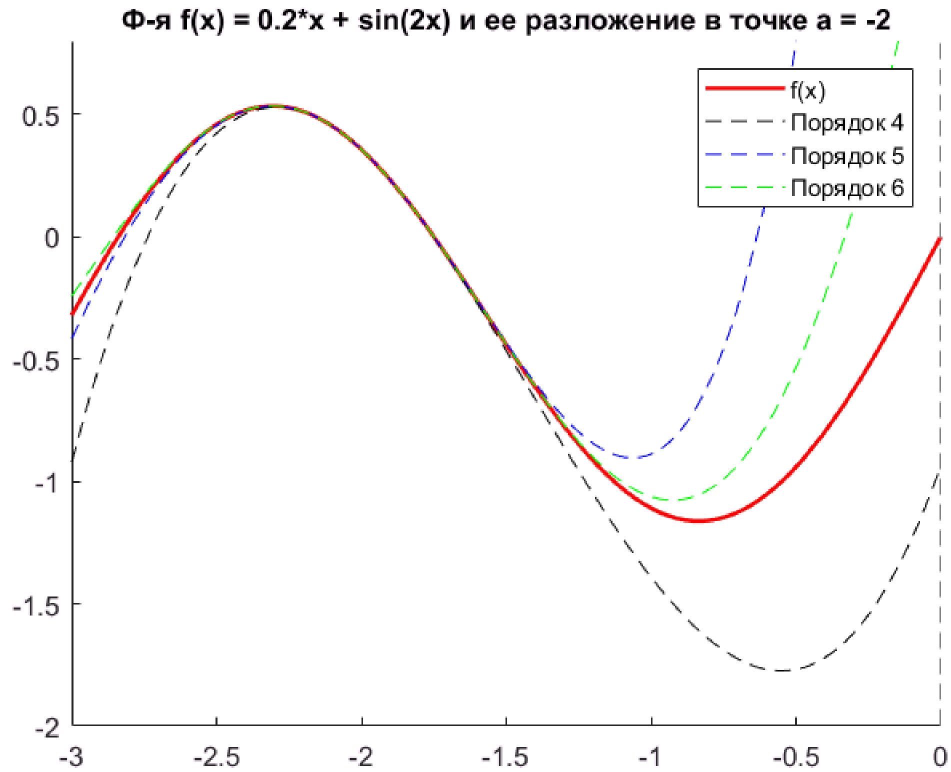
7.8. Разложить функцию из предыдущего п.7.7 (табл.7.3) в ряд Тейлора на концах заданного интервала.

Задать во входных аргументах функции taylor разный порядок усечения ряда 'Oder' : 4,5, (6 по умолчанию). Построить, используя fplot, два графика для двух разных точек разложения. На каждом показать функцию красной сплошной линией толщины 1.5, а 3 ее разложения – прерывистыми линиями (черной, синей, зеленой). Каждый график озаглавить «Функция *f(x)*=… и ее разложения в ряд Тейлора в точке *a* =… » .

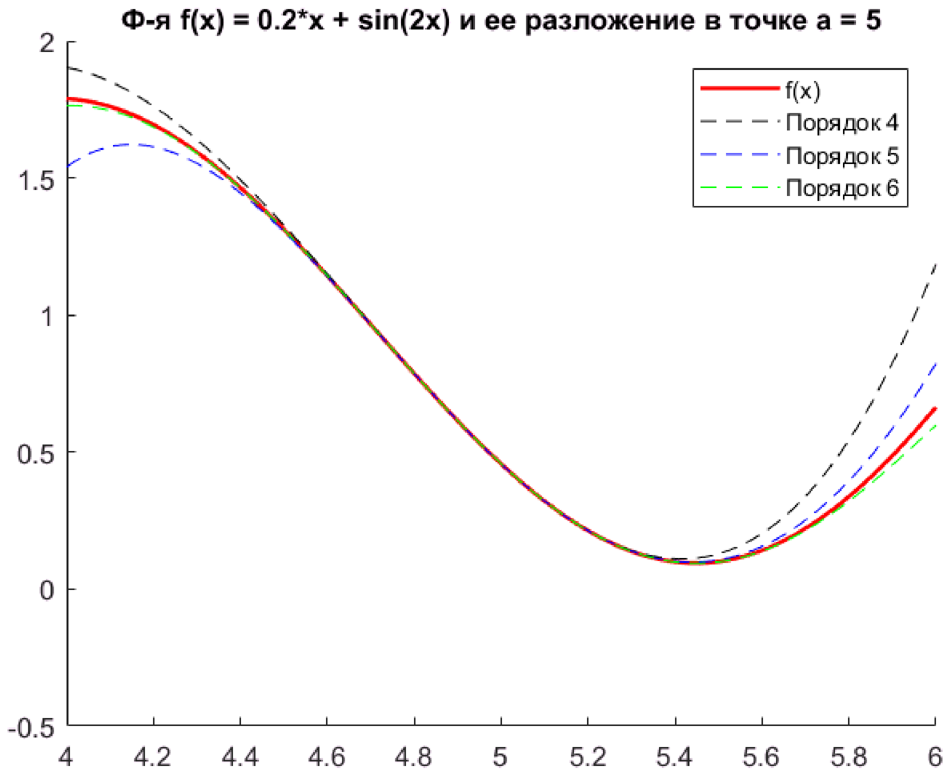
Проверить полученный вид разложения, открыв графический интерфейс Taylor Series Calculator с помощью команды

```
taylortool('<f(x)>')
```

```
syms f(x);
f(x) = 0.2*x + sin(2*x);
figure;
hold on;
fplot(f(x), [-10 10], 'Color', 'red', 'LineWidth', 1.5);
fplot(taylor(f(x), x, -2, 'Order', 4), [-10 10], '--', 'Color', 'black');
fplot(taylor(f(x), x, -2, 'Order', 5), [-10 10], '--', 'Color', 'blue');
fplot(taylor(f(x), x, -2, 'Order', 6), [-10 10], '--', 'Color', 'green');
title('Ф-я f(x) = 0.2*x + sin(2x) и ее разложение в точке a = -2');
axis([-3 0 -2 0.8]);
legend('f(x)', 'Порядок 4', 'Порядок 5', 'Порядок 6');
```




```
figure;
hold on;
fplot(f(x), [-10 10], 'Color', 'red', 'LineWidth', 1.5);
fplot(taylor(f(x), x, 5, 'Order', 4), [-10 10], '--', 'Color', 'black');
fplot(taylor(f(x), x, 5, 'Order', 5), [-10 10], '--', 'Color', 'blue');
fplot(taylor(f(x), x, 5, 'Order', 6), [-10 10], '--', 'Color', 'green');
title('Ф-я f(x) = 0.2*x + sin(2x) и ее разложение в точке a = 5');
axis([4 6 -0.5 2]);
legend('f(x)', 'Порядок 4', 'Порядок 5', 'Порядок 6');
```



7.9 Определить, при каких значениях k будет положительным детерминант символьной матрицы?

M = [1 k 3; 2 4 2*k; 4 -2 k]

```
syms k;
M = [1 k 3; 2 4 2*k; 4 -2 k];
Z = sym(M);
f = det(M)
```

f = $6k^2 + 8k - 60$

```
sol = solve(f == 0, k)
```

sol =

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{94}}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{94}}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

```
figure;
hold on;
grid on;
fplot(f);
line([-5 5], [0 0], 'Color', 'red');
plot(vpa(sol(1)), 0, '*', 'Color', 'red');
plot(vpa(sol(2)), 0, '*', 'Color', 'red');
```

```
title('Определитель матрицы');
```