Задание № 5.2

Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений второго и более высокого порядка. Дифференциальное уравнение с параметрами *a, b, c, d*.

1. Решить символьно с помощью `dsolve` дифференциальное уравнения второго порядка

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида

$a * x'' + b * x' + c * x = 0$ **(1)**

при заданных начальных условиях

$x_0 = 1, x'_0 = 0$ **(2)**

и произвольных параметрах ***a***, ***b***, ***c*** .

Решение уравнений начинать с символьного метода, используя решатель dsolve, а если он не даст явных результатов, переходить к численному методу, применяя решатель ode23.

Поскольку уравнение (1) имеет явное решение в аналитическом виде и численный метод для него не потребуется, то в данном задании нужно не только получить формальное решение, но и выполнить небольшое исследование, чтобы разобраться, как на вид решения (его график) влияют начальные условия и величины a, b, c.

- *Предлагается при задании начальных значений рассмотреть 3 случая:*

$$\begin{cases} x'_0 \neq 0, x_0 = 0; \\ x'_0 = 0, x_0 \neq 0; \\ x'_0 = 0, x_0 = 0. \end{cases}$$

- *При задании параметров выбрать a:*

$$a \leq 100;$$

- *b рассмотреть в двух вариантах*:

$$\begin{cases} b = 0; \\ b \neq 0, b \leq 30. \end{cases}$$

- *c рассмотреть также в двух вариантах:*

$$\begin{cases} c < 10; \\ c > 1000. \end{cases}$$

Построить, применяя функцию *fplot*, а также используя команду *subplot* , сравнительные графики решения *x(t) для разных значений параметров (*по два на каждом рисунке), указать величины параметров в заголовках и в подписях под графиками. На основании построенных графиков сделать вывод о влиянии начальных условий на частоту и период колебаний.

```
for i = 1:12
    syms x(t) a b c d
    eqn = a * diff(x,t,2) + b * diff(x,t) + c*x==0;
    Dx = diff(x,t);
    %--Задание начальных условий--
    if i <= 4
        cond = [x(0) == 0, Dx(0) == 2];
        cc = "; cond: x0 = 0, Dx0 = 2";
    elseif i > 4 && i <= 8
        cond = [x(0) == 5, Dx(0) == 0];
        cc = "; cond: x0 = 5, Dx0 = 0";
    else
        cond = [x(0) == 0, Dx(0) == 0];
        cc = "; cond: x0 = 0, Dx0 = 0";
    end

    %--Задание коэффициентов--
    if i == 1 || i == 5 || i == 9
        figure;
        subplot(2, 1, 1);
        a = 50;
        b = 0;
        c = 4;
    elseif i == 2 || i == 6 || i == 10
        subplot(2, 1, 2);
        a = 30;
        b = 0;
        c = 1200;
    elseif i == 3 || i == 7 || i == 11
        figure;
        subplot(2, 1, 1);
        a = 99;
        b = 25;
        c = 6;
    elseif i == 4 || i == 8 || i == 12
        subplot(2, 1, 2);
        a = 66;
        b = 14;
        c = 2500;
    end
    x(t) = dsolve(eqn,cond);
    X = subs(x)
    T = subs(4 * pi * a / sqrt(abs(b^2 - 4*a*c)));
    t = 5 * double(T);         %Вывод 5-ти волн
    tspan = [0 t];
    fplot(X, tspan);
    hold on;
    grid on;
    z = "Параметры: a = " + num2str(a) +...
    ", b = " + num2str(b) + ", c = " + num2str(c) + cc;
    title(z);
    legend('show', 'Location', 'Best')
end
```

X(t) =

$$\frac{\sqrt{800}\, e^{-\frac{\sqrt{800}\, t\, \mathrm{i}}{100}}\, \mathrm{i}}{8} - \frac{\sqrt{800}\, e^{\frac{\sqrt{800}\, t\, \mathrm{i}}{100}}\, \mathrm{i}}{8}$$

X(t) =

$$\frac{\sqrt{144000}\ e^{-\frac{\sqrt{144000}\,t\,\mathrm{i}}{60}}\ \mathrm{i}}{2400} - \frac{\sqrt{144000}\ e^{\frac{\sqrt{144000}\,t\,\mathrm{i}}{60}}\ \mathrm{i}}{2400}$$

X(t) =

$$-\frac{198\ \sqrt{1751}\ e^{\frac{t\,(-25+\sqrt{1751}\,\mathrm{i})}{198}}\ \mathrm{i}}{1751} + \frac{198\ \sqrt{1751}\ e^{-\frac{t\,(25+\sqrt{1751}\,\mathrm{i})}{198}}\ \mathrm{i}}{1751}$$

X(t) =

$$-\frac{33\ \sqrt{659804}\ e^{\frac{t\,(-14+\sqrt{659804}\,\mathrm{i})}{132}}\ \mathrm{i}}{164951} + \frac{33\ \sqrt{659804}\ e^{-\frac{t\,(14+\sqrt{659804}\,\mathrm{i})}{132}}\ \mathrm{i}}{164951}$$

X(t) =

$$\frac{5\,e^{-\frac{\sqrt{800}\,t\,\mathrm{i}}{100}}}{2} + \frac{5\,e^{\frac{\sqrt{800}\,t\,\mathrm{i}}{100}}}{2}$$

X(t) =

$$\frac{5\,e^{-\frac{\sqrt{144000}\,t\,\mathrm{i}}{60}}}{2} + \frac{5\,e^{\frac{\sqrt{144000}\,t\,\mathrm{i}}{60}}}{2}$$

X(t) =

$$-\frac{5\ \sqrt{1751}\ e^{\frac{t\,(-25+\sqrt{1751}\,\mathrm{i})}{198}}\ \left(25+\sqrt{1751}\ \mathrm{i}\right)\mathrm{i}}{3502} - \frac{5\ \sqrt{1751}\ e^{-\frac{t\,(25+\sqrt{1751}\,\mathrm{i})}{198}}\ \left(-25+\sqrt{1751}\ \mathrm{i}\right)\mathrm{i}}{3502}$$

X(t) =

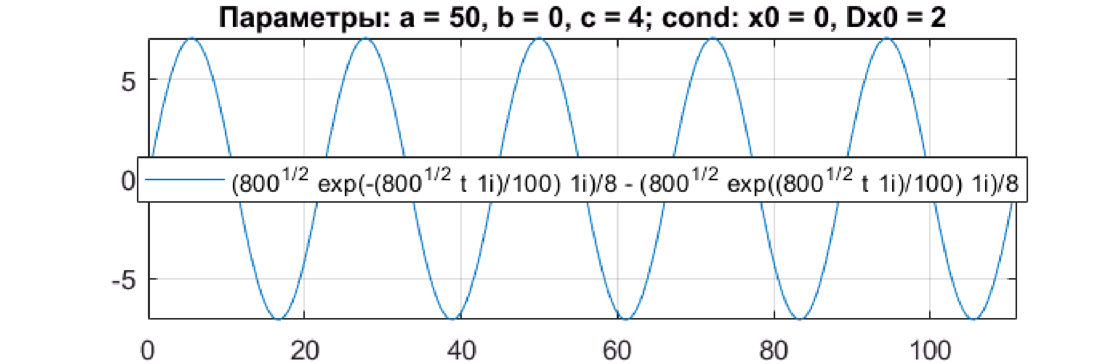
$$-\frac{5\ \sqrt{659804}\ e^{\frac{t\,(-14+\sqrt{659804}\,\mathrm{i})}{132}}\ \left(14+\sqrt{659804}\ \mathrm{i}\right)\mathrm{i}}{1319608} - \frac{5\ \sqrt{659804}\ e^{-\frac{t\,(14+\sqrt{659804}\,\mathrm{i})}{132}}\ \left(-14+\sqrt{659804}\ \mathrm{i}\right)}{1319608}$$

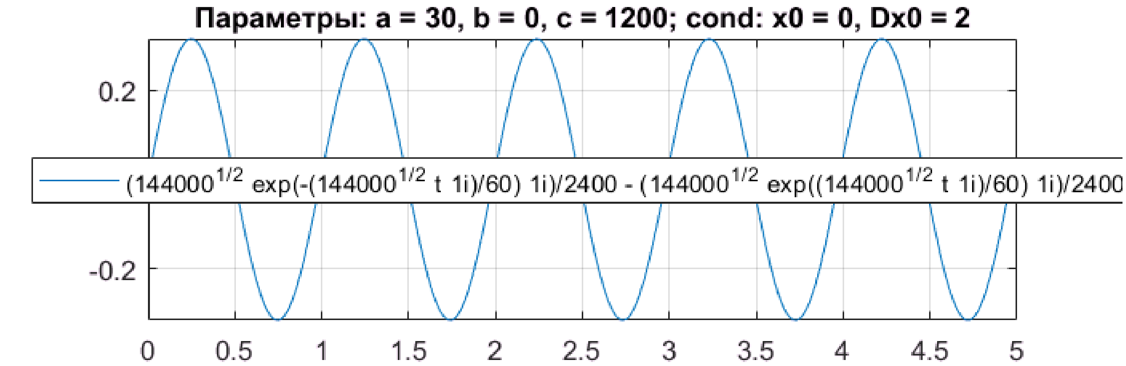
X(t) = 0

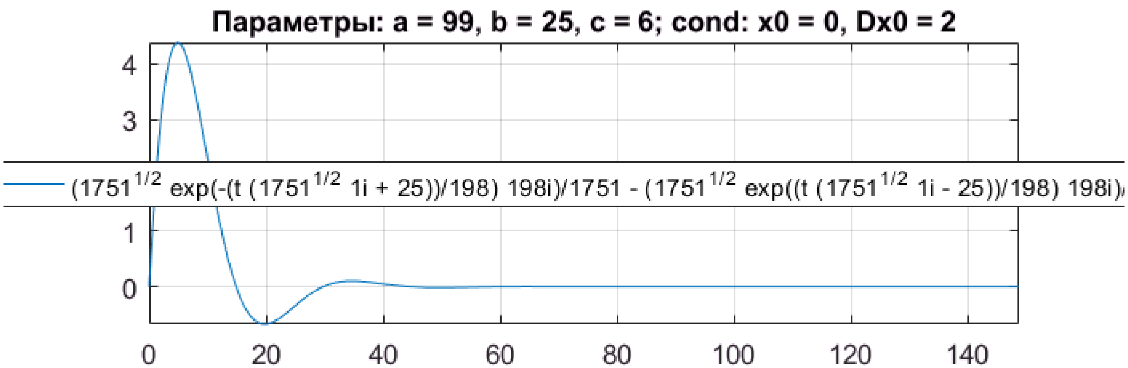
X(t) = 0

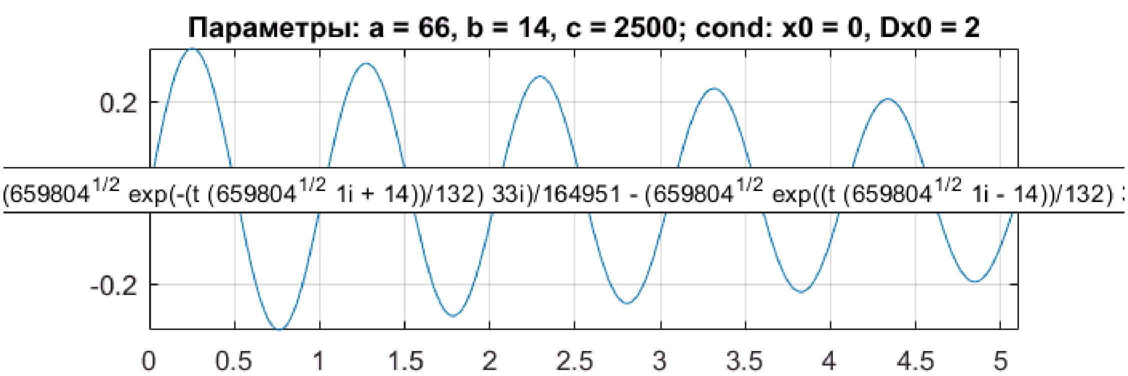
X(t) = 0

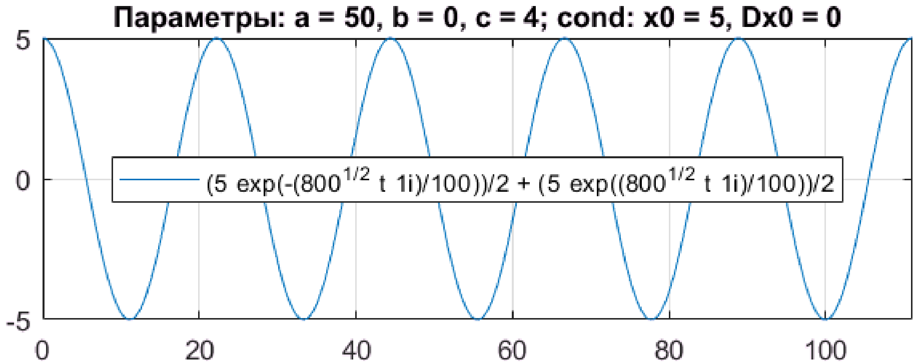
X(t) = 0

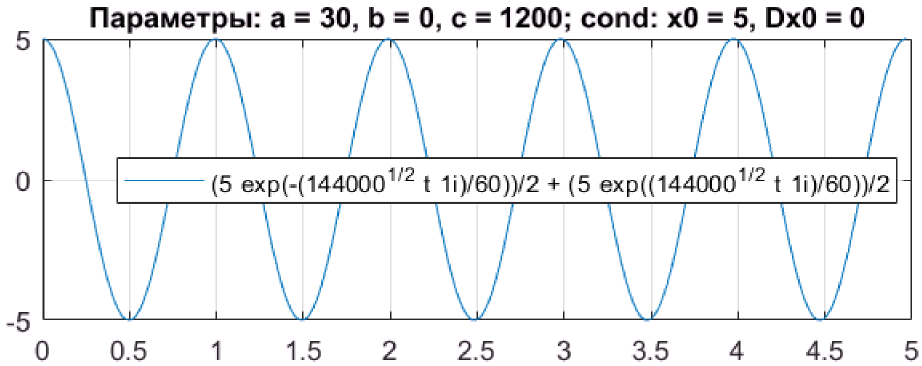

Параметры: a = 50, b = 0, c = 4; cond: x0 = 0, Dx0 = 2
(800^1/2 exp(-(800^1/2 t 1i)/100) 1i)/8 - (800^1/2 exp((800^1/2 t 1i)/100) 1i)/8
5
0
-5
0
20
40
60
80
100

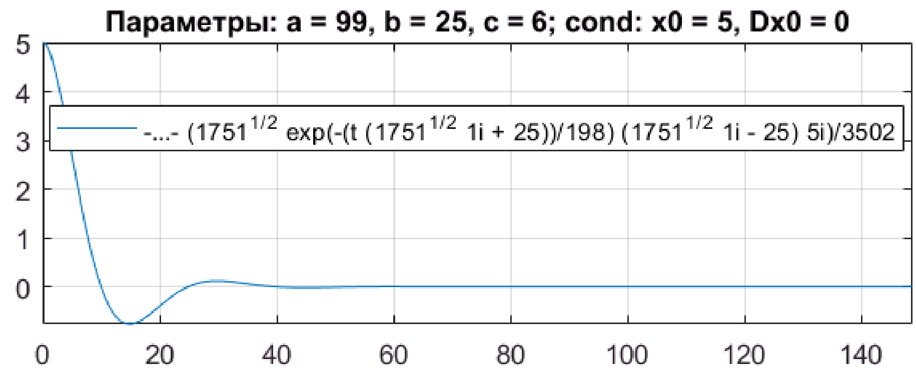

Параметры: a = 30, b = 0, c = 1200; cond: x0 = 0, Dx0 = 2
(144000^1/2 exp(-(144000^1/2 t 1i)/60) 1i)/2400 - (144000^1/2 exp((144000^1/2 t 1i)/60) 1i)/2400
0.2
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

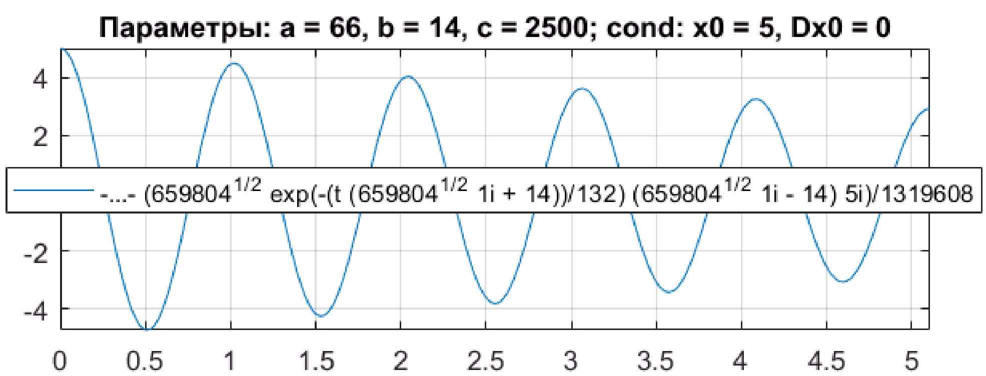

Параметры: a = 99, b = 25, c = 6; cond: x0 = 0, Dx0 = 2
(1751^1/2 exp(-(t (1751^1/2 1i + 25))/198) 198i)/1751 - (1751^1/2 exp((t (1751^1/2 1i - 25))/198) 198i)
4
3
1
0
0
20
40
60
80
100
120
140

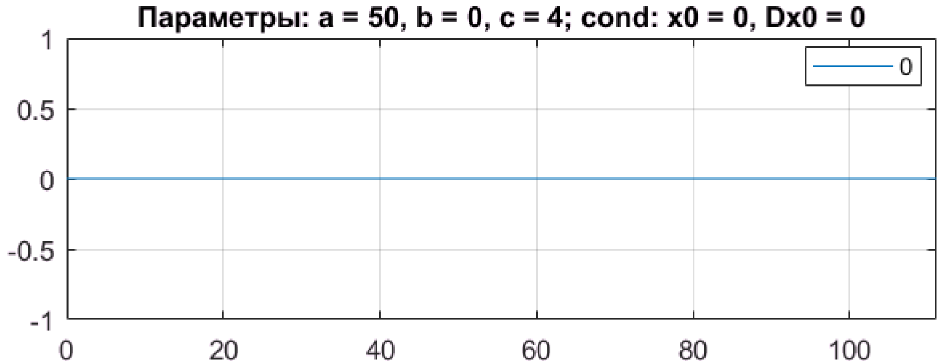

Параметры: a = 66, b = 14, c = 2500; cond: x0 = 0, Dx0 = 2
(659804^1/2 exp(-(t (659804^1/2 1i + 14))/132) 33i)/164951 - (659804^1/2 exp((t (659804^1/2 1i - 14))/132)
0.2
-0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

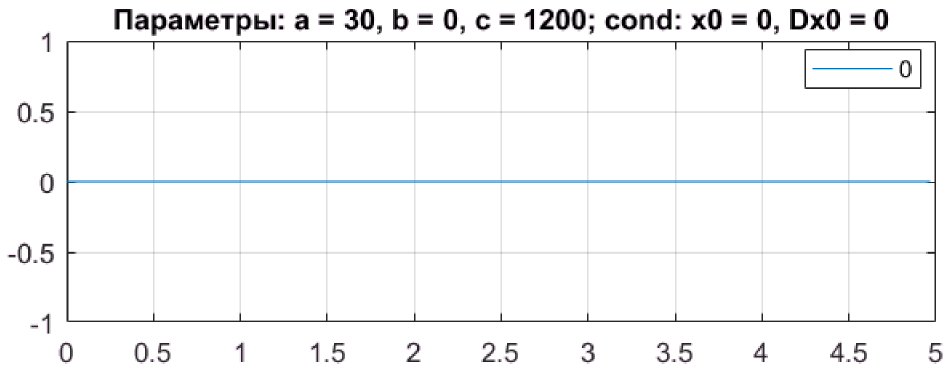

Параметры: a = 50, b = 0, c = 4; cond: x0 = 5, Dx0 = 0
(5 exp(-(800^1/2 t 1i)/100))/2 + (5 exp((800^1/2 t 1i)/100))/2

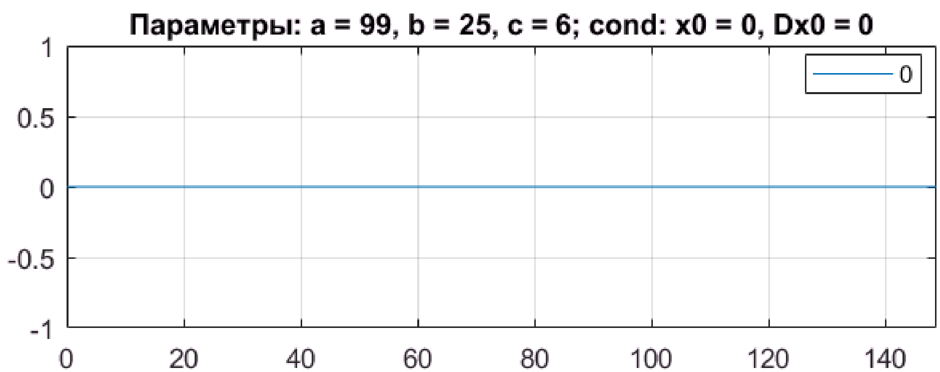

Параметры: a = 30, b = 0, c = 1200; cond: x0 = 5, Dx0 = 0
(5 exp(-(144000^1/2 t 1i)/60))/2 + (5 exp((144000^1/2 t 1i)/60))/2

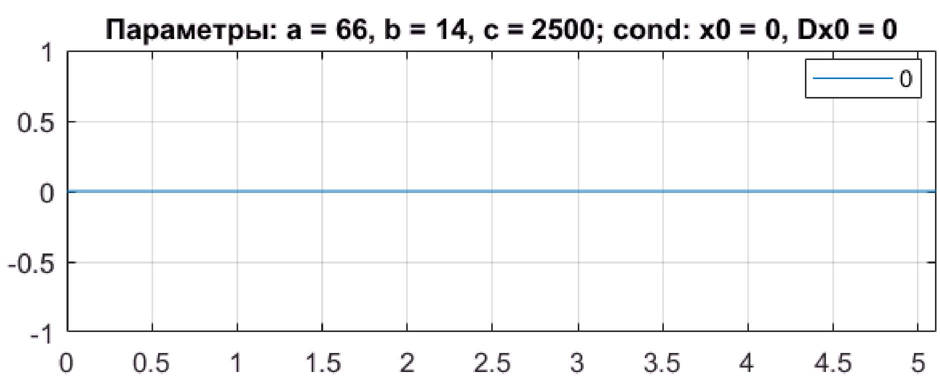

Параметры: a = 99, b = 25, c = 6; cond: x0 = 5, Dx0 = 0
-...- (1751^1/2 exp(-(t (1751^1/2 1i + 25))/198) (1751^1/2 1i - 25) 5i)/3502


Параметры: a = 66, b = 14, c = 2500; cond: x0 = 5, Dx0 = 0
-...- (659804^1/2 exp(-(t (659804^1/2 1i + 14))/132) (659804^1/2 1i - 14) 5i)/1319608









2. Решить символьно с помощью `dsolve` и численно с помощью дифференциальное уравнение четвертого порядка.

Рассмотреть **не**линейное **не**однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка следующего вида

$$y^{(\mathrm{IV})} + a * y^{(\mathrm{III})} + b * y * y^{(\mathrm{II})} + c * y^2 + d = 0$$

при заданном векторе начальных условий

$$y_0 = \begin{bmatrix}1 \, 0 \, 0 \, 0\end{bmatrix}$$

Решать данную задачу символьно с помощью **`dsolve`** и численно, используя решатель **`ode23`**. Значения параметрам a, b, c, d задать самостоятельно.

Построить *график* полученных решений. Используя блок ***`legend`***, расшифровать линии для функции y(x) и трех ее производных, вставить заголовок ***`title`*** гафика с названием «Решение диф. ур-я 4-го порядка. Функция и ее производные»

Вывести таблицу для 10 значений независимой переменной x, равномерно распределенных на интервале [0 2] (функция ***`linsolve`***) и соответствующих значений функции y(x), полученных с помощью команды ***`deval`***.

```
%--Символьный метод--
clear;
syms y(t) a b c d;
eqn = diff(y, 4) + a * diff(y, 3) + b * y * diff(y, 2) + c * y.^2 + d == 0;
a = 16;
b = 245;
c = 4;
d = 60;
sol = dsolve(eqn);
```

```
Warning: Explicit solution could not be found.
```

```
%Т.к. символьное решение не может быть найдено,
%переходим к численным методам
[V] =  odeToVectorField(diff(y, 4) + a.*diff(y, 3) + b.*y.*diff(y, 2) + c.*y.^2 + d == 0);
M = matlabFunction(V,'vars', {'t','Y'});
tspan = [0 2];
y0 = [1 0 0 0];
sol =  ode45(M, tspan, y0);
t = linspace(0,2);
figure;
grid on;
hold on;
fplot(@(t) deval(sol, t, 1), [0, 2]);
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly
vectorize your function to return an output with the same size and shape as the input
arguments.
```

```
fplot(@(t) deval(sol, t, 2), [0, 2], '--');
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly
vectorize your function to return an output with the same size and shape as the input
arguments.
```

```
fplot(@(t) deval(sol, t, 3), [0, 2]);
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly
vectorize your function to return an output with the same size and shape as the input
arguments.
```

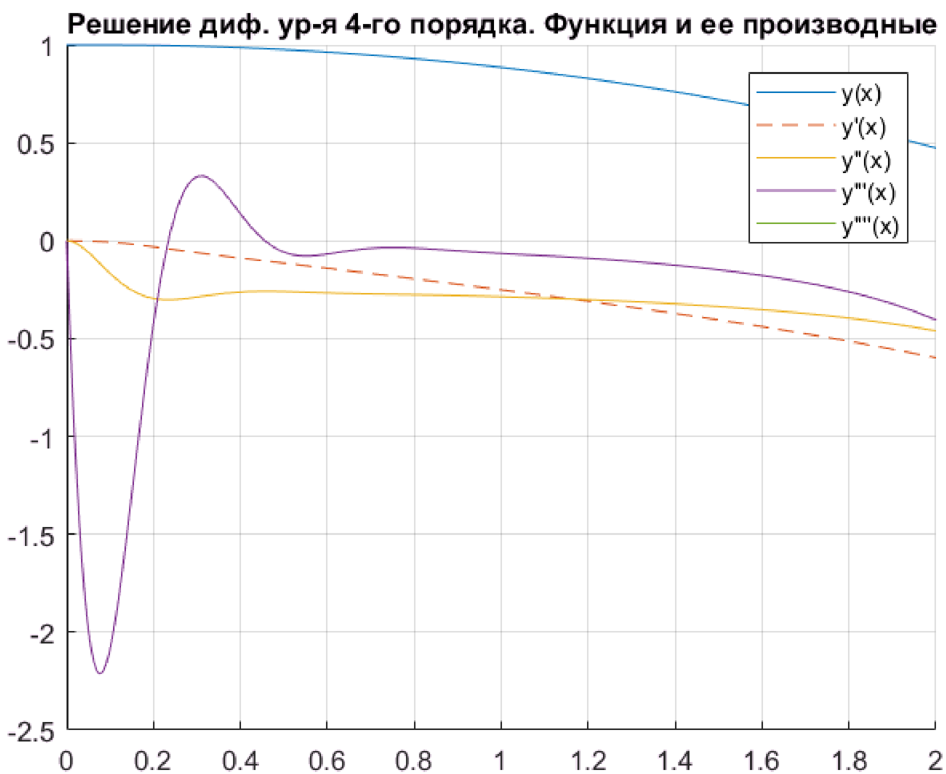
```
fplot(@(t) deval(sol, t, 4), [0, 2]);
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly
vectorize your function to return an output with the same size and shape as the input
arguments.
```

```
fplot(@(t) deval(sol, t, 5), [0, 2]);
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly
vectorize your function to return an output with the same size and shape as the input
arguments.
```

```
title('Решение диф. ур-я 4-го порядка. Функция и ее производные');
legend('y(x)', "y'(x)", "y''(x)", "y'''(x)", "y''''(x)");
```




```
T = table;
t = linspace(0, 2, 10);
T.X = t';
T.Y = deval(sol, t, 1)';
T.dY = deval(sol, t, 2)';
T
```

T = *10×3 table*

X	Y	dY
0	1	0

0.22222	0.99725	-0.037908
0.44444	0.98173	-0.099864
0.66667	0.95308	-0.15845
0.88889	0.91112	-0.21953
1.1111	0.85533	-0.2831
1.3333	0.78501	-0.35055
1.5556	0.69912	-0.42358
1.7778	0.59615	-0.50483
2	0.47382	-0.59869