**Задание 6. Решение задач линейного программирования**

**<u>Требуется:</u>**

Решить 7 задач по линейному программированию с помощью процедуры **`linprog`.**

$$[x,\ fval] = linprog(f,\ A, b,\ Aeq, beq, lb, ub)$$

В задачах 2 – 4 (с двумя неизвестными) дополнительно использовать графический способ решения.

В целочисленных задачах 5 – 7 использовать команду **`intlinprog`**,

$$[x,\ fval] = intlinprog(f, intcon,\ A, b,\ Aeq, beq, lb, ub)$$

указывая вектор с индексами целочисленных переменных

$$\text{intcon} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$$

При составлении отчетов в Word для текстовых задач 2 - 7 требуется предварительно представить их в виде уравнений и неравенств, используя редактор формул, т.е. в таком же виде, какой имеет первая задача.

**ЗАДАЧА 1.**

$$\begin{cases} f(x) = 3 * x_1 + x_2 + 2 * x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 > 1 \\ 2 * x_1 + x_2 - x_3 > -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 0 \le x_3 \le 1 \end{cases}$$

```
C= [3 1 2];
D = [1 1 1; 2 1 -1];
B = [1 -1];
Aeq = [1 -1 1];
beq = [0];
lb = zeros(3,1);
ub = [1 1 1];
f = C;
A = -D;
b = -B;
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

```
Optimal solution found.
x =
         0
    0.5000
    0.5000
```

```
fval = 1.5000
```

**ЗАДАЧА 2.** Фирма изготавливает два вида красок для внутренних (В) и наружных (Н) работ. Для этих производств используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и их максимальные суточные запасы указаны в таблице.

| Исходный продукт | Расход исходных продуктов на 1 т краски | | Суточный запас, т |
|---|---|---|---|
| | Краска Н | Краска В | |
| Пигмент, т | 1 | 2 | 6 |
| Олифа, т | 2 | 1 | 8 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных (внутренних) работ никогда не превышает 2 в сутки. Цена продажи 1т краски для наружных работ составляет 3000 ден. ед., для внутренних – 2000 ден.ед. Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации был <u>максимальным</u>?

$$\begin{cases} f(x) = x_1 * 3000 + x_2 * 2000 \rightarrow max \\ x_1 + x_2 * 2 \leq 6 \\ x_1 * 2 + x_2 \leq 8 \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \end{cases}$$

```
% --Аналитическое решение--
f = [3000 2000];
A = [1 2;
    2 1];
b = [6; 8];
Aeq = [0 0];
beq = 0;
lb = [0; 0];
ub = [2; 150];
[x, fval] = linprog(-f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

```
Optimal solution found.
x =
     2
     2
fval = -10000
```

```
% --Графическое решение--
x1 = 0:0.1:20;
x21 = (6 - x1)./2;
x22 = 8 - 2.*x1;
figure('Name', 'Графическое решение', 'NumberTitle', 'off');
title('Графическое решение');
grid on;
hold on;
% --Построение диний ограничений--
plot(x1, x21, 'Color', 'blue');
plot(x1, x22, 'Color', 'magenta');
xlim([0 8]);
ylim([0 8]);
```

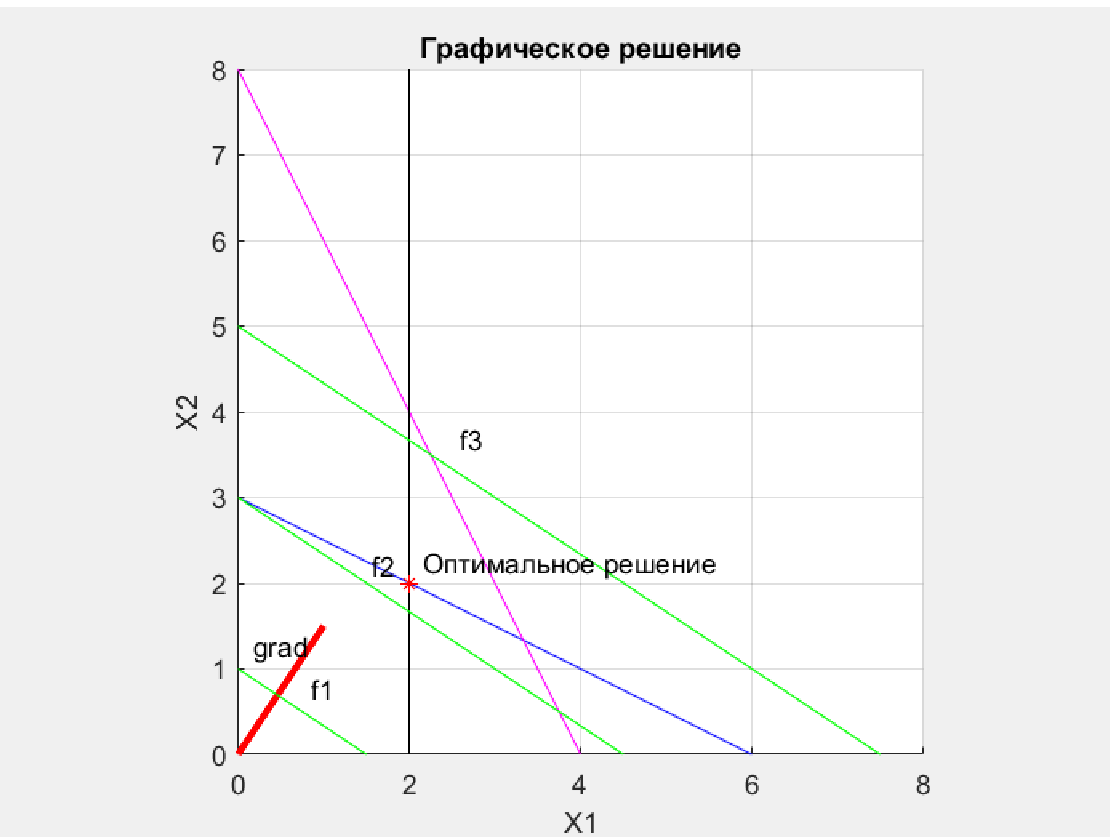
```
xlabel('X1');
ylabel('X2');
```

Коэффициенты в векторе градиента будут равны коэффициентам при $x_1$ и $x_2$ соответственно, так как: $\frac{\mathrm{df}}{dx_1} = 3000, \frac{\mathrm{df}}{dx_2} = 2000$.

```
% --Построение вектора градиента--
fun = @(x) 3000/2000 .* x;
fplot(fun, [0 1], 'LineWidth', 2.5, 'Color', 'red');
gtext('grad');

% --Линия ограничения X1--
line([2; 2], [0; 14], 'Color', 'black');

f = {'f1','f2','f3'};
Val = [1 3 5];
for i = 1:3;
    C1 = Val(i);
fplot(@(X1) C1 - 2000/3000*X1, 'g');
gtext(f{i});
end;
axis equal;
axis([0 8 0 8]);
plot(2, 2, '*', 'Color', 'red');
gtext('Оптимальное решение');
```




**ЗАДАЧА 3.** Кондитерская фабрика при производстве двух видов карамели – «Снежинка» и «Яблочная» - использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое

пюре. Запасы сырья составляют соответственно 800 т, 600 т и 120 т. Выручка от реализации 1 т «Снежинки» составляет 108 ед.ден., а «Яблочной» - 140 ед.ден. На выпуск 1 т «Снежинки» расходуется 0.8 т сахара, 0.2 т патоки и 10 кг фруктового пюре, а на выпуск 1 т «Яблочной» - соответственно по 0.5 т, 0.4 т и 0.1 т этих видов сырья.

Необходимо найти план производства карамели, позволяющий получить наибольшую выручку.

| Сырье для изготовления карамели | Производимые виды карамели | | Ограничения на расход сырья |
|---|---|---|---|
| | «Снежинка» | «Яблочная» | |
| | Затраты сырья на производство (1 т.) | | |
| Сахарный песок (т) | 0.8 | 0.5 | 800 |
| Патока (т) | 0.2 | 0.4 | 600 |
| Фруктовое пюре (т) | 0.01 | 0.1 | 120 |
| Прибыль от продажи ( ₽) | 108 ₽ за 1 т | 140 ₽ за 1 т | |

$$\begin{cases} x_1 * 108 + x_2 * 140 \to max \\ 0.8 * x_1 + 0.5 * x_2 \le 800 \\ 0.2 * x_1 + 0.4 * x_2 \le 600 \\ 0.01 * x_1 + 0.1 * x_2 \le 120 \\ 0 \le x_1 \\ 0 \le x_2 \end{cases}$$

```
% --Аналитический способ--
f = [108 140];
A = [0.8 0.5;
    0.2 0.4;
    0.01 0.1];
b = [800; 600; 120];
Aeq = [0 0];
beq = 0;
lb = [0; 0];
[x, fval] = linprog(-f, A, b, Aeq, beq, lb)
```

```
Optimal solution found.
x =
   1.0e+03
    0.2667
    1.1733
```

- 

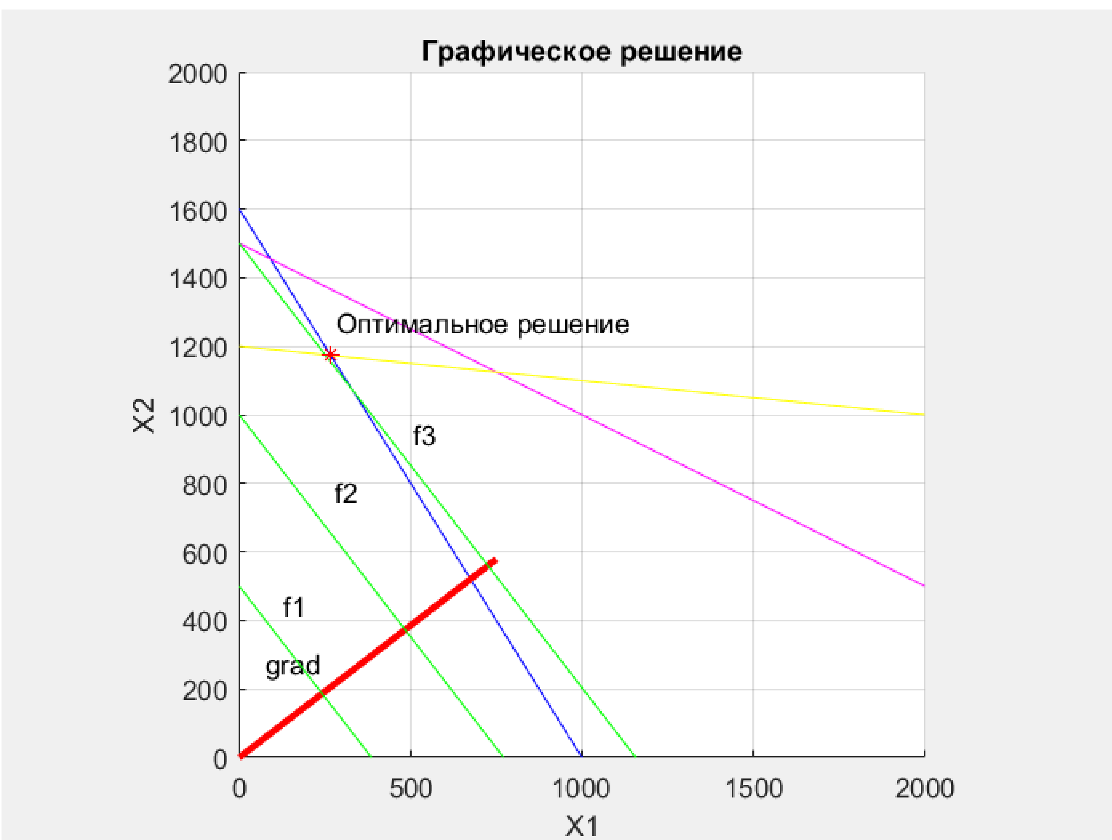
```
fval = -1.9307e+05
```

```
% --Графический способ--
x1 = 0:0.1:5000;
```

```
x21 = (800 - 0.8*x1)./0.5;
x22 = (600 - 0.2.*x1)./0.4;
x23 = (120 - 0.01.*x1)./0.1;
figure('Name', 'Графическое решение', 'NumberTitle', 'off');
title('Графическое решение');
grid on;
hold on;
% --Построение диний ограничений--
plot(x1, x21, 'Color', 'blue');
plot(x1, x22, 'Color', 'magenta');
plot(x1, x23, 'Color', 'yellow');
xlim([0 2000]);
ylim([0 2000]);
xlabel('X1');
ylabel('X2');

% --Построение вектора градиента--
fun = @(x) 108/140 .* x;
fplot(fun, [0 750], 'LineWidth', 2.5, 'Color', 'red');
gtext('grad');

f = {'f1','f2','f3'};
Val = [500 1000 1500];
for i = 1:3;
    C1 = Val(i);
fplot(@(X1) C1 - 140/108*X1, 'g');
gtext(f{i});
end;
axis equal;
axis([0 2000 0 2000]);
plot(266.6667, 1173.33, '*', 'Color', 'red');
gtext('Оптимальное решение');
```



**ЗАДАЧА 4.** Организации, занимающейся перевозкой и продажей продукции, необходимо перевезти партию товара. При этом можно арендовать для перевозки по железной дороге 5- и 7-тонные контейнеры. Пятитонных контейнеров имеется в наличии не более 18 штук, и семитонных – не более 18 штук. На перевозку всей продукции по смете выделено не более 60 тыс руб, причем цена за аренду пятитонного контейнера составляет 2 тыс. руб, семитонного – 3 тыс. руб. Определить, сколько и каких контейнеров следует арендовать, чтобы общий объем грузоперевозок был максимальным.

$$\begin{cases} 5 * x_1 + 7 * x_2 \to max \\ 2 * x_1 + 3 * x_2 \leq 60 \\ 0 \leq x_1 \leq 18 \\ 0 \leq x_2 \leq 18 \end{cases}$$

```
% --Аналитический способ--
f = [5 7];
A = [2 3];
b = [60];
Aeq = [0 0];
beq = 0;
lb = [0; 0];
ub = [18; 18];
[x, fval] = linprog(-f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)
```

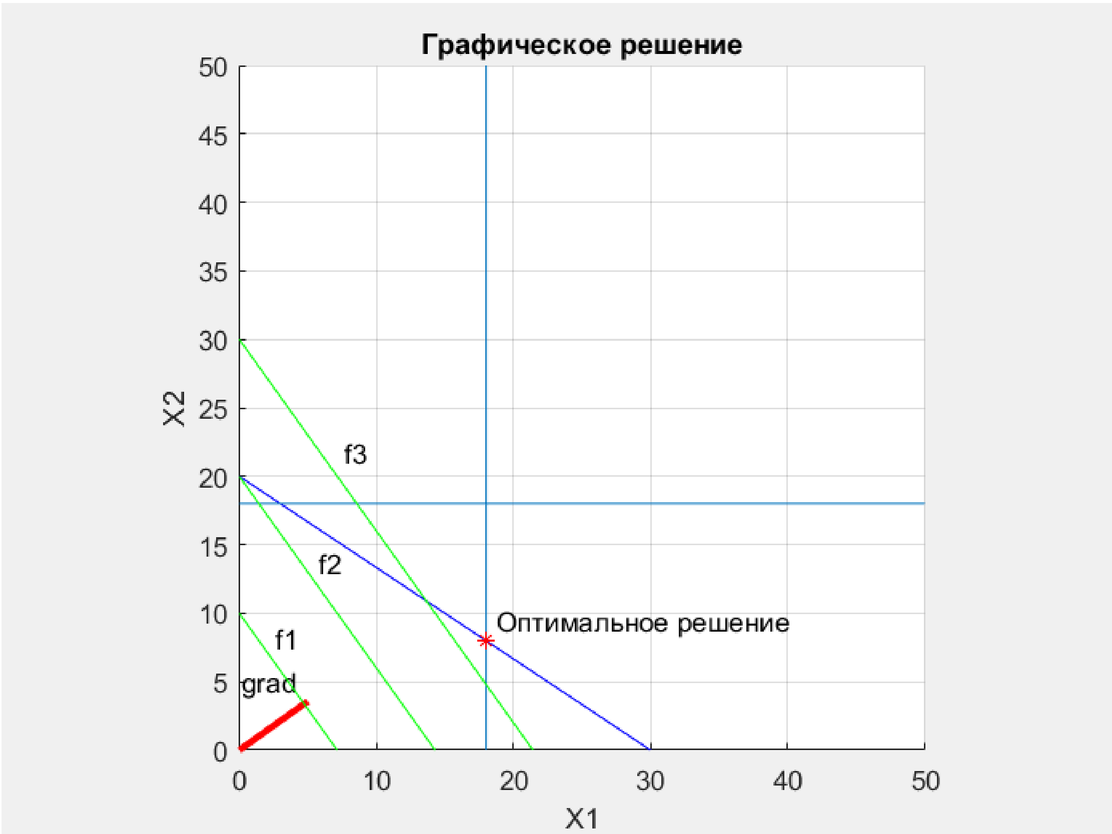
```
Optimal solution found.
x =
    18
     8
fval = -146
```

```
% --Графический способ--
x1 = 0:0.1:50;
x21 = (60 - 2*x1)./3;
figure('Name', 'Графическое решение', 'NumberTitle', 'off');
title('Графическое решение');
grid on;
hold on;
% --Построение диний ограничений--
plot(x1, x21, 'Color', 'blue');
line([18 18], [0 100]);
line([0 100], [18 18]);
xlim([0 50]);
ylim([0 50]);
xlabel('X1');
ylabel('X2');

% --Построение вектора градиента--
fun = @(x) 5/7 .* x;
fplot(fun, [0 5], 'LineWidth', 2.5, 'Color', 'red');
gtext('grad');

f = {'f1','f2','f3'};
Val = [10 20 30];
for i = 1:3;
    C1 = Val(i);
fplot(@(X1) C1 - 7/5*X1, 'g');
```

```
gtext(f{i});
end;
axis equal;
axis([0 50 0 50]);
plot(18, 8, '*', 'Color', 'red');
gtext('Оптимальное решение');
```




***Задачи на целочисленное программирование***

**ЗАДАЧА 5**. При изготовлении изделий А, Б, В и С фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. Указанные изделия производят с помощью токарных и фрезерных станков. Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута <u>максимальная прибыль</u>. Необходимые данные приведены в таблице.

| Вид ресурса | Объем расхода на одно изделие | | | | Ограничение по объемам ресурсов |
|---|---|---|---|---|---|
| | А | Б | В | С | |
| Сталь, кг | 10 | 20 | 15 | 18 | 250 |
| Цветные металлы, кг | 0 | 5 | 8 | 7 | 40 |
| Токарные станки, станко-час | 15 | 18 | 12 | 20 | 100 |
| Фрезерные станки, станко-час | 8 | 12 | 11 | 10 | 80 |
| Прибыль, ден. ед. | 4 | 2 | 4 | 3 | |

$$\begin{cases} 4 * x_1 + 2 * x_2 + 4 * x_3 + 3 * x_4 \to max \\ 5 * x_2 + 8 * x_3 + 7 * x_4 \le 40 \\ 15 * x_1 + 18 * x_2 + 12 * x_3 + 20 * x_4 \le 100 \\ 8 * x_1 + 12 * x_2 + 11 * x_3 + 10 * x_4 \le 80 \end{cases}$$

```
f = [4 2 4 3];
A = [0 5 8 7;
    15 18 12 20;
    8 12 11 10];
b = [40; 100; 80];
Aeq = [0 0 0 0];
beq = 0;
intcon = [1 2 3 4];
lb = [0; 0; 0; 0];
[x, fval] = intlinprog(-f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb)
```

```
LP:                Optimal objective value is -30.666667.

Cut Generation:    Applied 1 Gomory cut.
                   Lower bound is -28.000000.
                   Relative gap is 0.00%.


Optimal solution found.

Intlinprog stopped at the root node because the objective value is within a gap tolerance of the optimal
value, options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the default value).
x =
    2.0000
         0
    5.0000
         0
fval = -28
```

**ЗАДАЧА 6.** Фирма "Компьютер-сервис" поставляет компьютеры «под ключ» четырех базовых комплектаций: «домашний», «игровой», «офисный» и «экстрим». Известны средние затраты времени на сборку, проверку и подключение компьютеров. Каждый компьютер приносит определенный уровень прибыли, но спрос ограничен. Кроме того, в плановом периоде ограничен ресурс человеко-часов, отведенных на выполнение каждой производственной операции. Определить, сколько компьютеров каждого типа необходимо произвести в плановом периоде, имея целью максимизировать прибыль.

| Компьютер | Прибыль за модель У.е. | Максимальный спрос на товар | Требуется часов на подключение | Требуется часов на сборку | Требуется часов на проверку |
|---|---|---|---|---|---|
| Домашний | 33 | 87 | 0,9 | 1,2 | 1,3 |
| Игровой | 39 | 67 | 1,1 | 1,5 | 1,5 |
| Офисный | 36 | 110 | 0,7 | 0,9 | 0,9 |
| Экстрим | 43 | 45 | 1,3 | 1,1 | 1,2 |
| Доступно человеко-часов на каждую операцию | | | 70 | 55 | 35 |

$$\begin{cases} 33 * x_1 + 39 * x_2 + 36 * x_3 + 43 * x_4 \to max \\ 0.9 * x_1 + 1.1 * x_2 + 0.7 * x_3 + 1.3 * x_4 \le 70 \\ 1.2 * x_1 + 1.5 * x_2 + 0.9 * x_3 + 1.1 * x_4 \le 55 \\ 1.3 * x_1 + 1.5 * x_2 + 0.9 * x_3 + 1.2 * x_4 \le 35 \\ 0 \le x_1 \le 87 \\ 0 \le x_2 \le 67 \\ 0 \le x_3 \le 110 \\ 0 \le x_4 \le 45 \end{cases}$$

```
f = [33 39 36 43];
A = [0.9 1.1 0.7 1.3;
    1.2 1.5 0.9 1.1;
    1.3 1.5 0.9 1.2];
b = [70; 55; 35];
Aeq = [0 0 0 0];
beq = 0;
lb = [0; 0; 0; 0];
ub = [87; 67; 110; 45];
intcon = [1 2 3 4];
[x, fval] = intlinprog(-f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb)
```

```
LP:                Optimal objective value is -1396.666667.

Cut Generation:    Applied 2 Gomory cuts.
                   Lower bound is -1382.000000.
                   Relative gap is 0.00%.


Optimal solution found.

Intlinprog stopped at the root node because the objective value is within a gap tolerance of the optimal
value, options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the default value).
x =
         0
         0
   36.0000
    2.0000
•
fval = -1382
```

**ЗАДАЧА 7**. На участке производства зубчатых колес имеются два станка — зубофрезерный и зубодолбежный. Требуется изготовить три вида зубчатых колес в следующих количествах: первого вида — 80 шт, второго и третьего — 110 и 140 штук соответственно. Каждое зубчатое колесо может быть изготовлено на любом из станков. Для выпуска одного колеса первого вида на зубофрезерном станке требуется затратить 20 мин, а на зубодолбежном — 34 мин. Для выпуска одного колеса второго вида на зубофрезерном станке требуется затратить 12 мин, а на зубодолбежном — 14 мин. Для выпуска одного колеса третьего вида требуется затратить 10 и 8 мин соответственно. Ресурс работы зубофрезерного станка без смены инструмента (фрезы) позволяет выпустить всего 180 колес, а ресурс работы зубодолбежного станка без смены инструмента (долбяка) позволяет выпустить всего 150 зубчатых колес. Определить оптимальную загрузку станков, обеспечивающую минимальное общее время их работы без смены инструмента.

$$
\begin{cases}
20*x_1 + 12*x_2 + 10*x_3 + 34*x_{12} + 14*x_{22} + 8*x_{32} \rightarrow min \\
x_1 + x_2 + x_3 \le 180; \\
x_{12} + x_{22} + x_{33} \le 150 \\
x_1 + x_{21} = 80 \\
x_2 + x_{21} = 110 \\
x_3 + x_{31} = 140 \\
0 \le x_1 \\
0 \le x_2 \\
0 \le x_3 \\
0 \le x_{12} \\
0 \le x_{22} \\
0 \le x_{32}
\end{cases}
$$

```
f = [20 12 10 34 14 8];
A = [1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1];
b = [180; 150];
Aeq = [1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1];
beq = [80; 110; 140];
lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0];
intcon = [1 2 3 4 5 6];
[x, fval] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb)
```

```
LP:                 Optimal objective value is 4060.000000.


Optimal solution found.

Intlinprog stopped at the root node because the objective value is within a gap tolerance of the optimal
value, options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon variables are
integer within tolerance, options.IntegerTolerance = 1e-05 (the default value).
x =
    80
   100
     0
     0
    10
   140
```

- 

```
fval = 4060
```