第 23 讲　紧算子的谱论

教学目的：掌握紧算子谱的特征。

讲解要点：

1　紧算子谱的特征。

2　紧算子构成的算子方程与共轭算子构成的算子方程解的关系。Freidholm 择一定理。

紧算子是一大类有界线性算子，线性代数和积分方程中遇到的很多算子都是紧算子．本节我们叙述关于紧算子谱的 Riesz-Schauder 理论．为此，我们做一些必要的准备．

设 X 是 Banach 空间，$C(X)$ 是 X 中的紧算子的全体．

引理 1　设 X 是 Banach 空间，$N \subset X$ 是有限维子空间，则 N 是可余的，即存在闭子空间 M 使得 $X = M \oplus N$．

证明　N 是闭的，设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 N 的一组基，对于每个 $x \in N$,

$$x = a_1(x)e_1 + \cdots + a_n(x)e_n,$$

此表达式是唯一的．容易验证，$a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 是 N 上的线性泛函并且每个 $a_1(x)$ 是连续的．实际上，$a_i(x) = 0$ 当且仅当

$$x = a_1(x)e_1 + \cdots + a_{i-1}(x)e_{i-1} + a_{i+1}(x)e_{i+1} + \cdots + a_n(x)e_n,$$

故 $N(a_i) = span\{e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n\}$ 为 $n-1$ 维闭子空间．

a_i 在 N 上定义，根据 Hahn-Banach 定理，a_i 可延拓到整个空间 X 上．记延拓后的泛函为 $a_1^*, \cdots, a_n^*$，设 $M = \bigcap_{i=1}^{n} N(a_i^*), M$ 是闭线性子空间．我们证明 $X = M \oplus N$.

若 $x \in M \cap N$, 则一方面对于每个 $i, x \in N(a_i), a_i(x) = 0$, 又 $x \in N$, 故

$$x = a_1(x)e_1 + \cdots + a_n(x)e_n = 0,$$

即 $M \cap N = \{0\}$. 另一方面，$\forall\ x \in X$, 记 $x^{'} = a_1^*(x)e_1 + \cdots a_n^*(x)e_n$, 则 $x^{'} \in N$ 并且

$$a_i^*(x - x^{'}) = a_i^*(x) - a_i^*(x^{'}) = a_i^*(x) - a_i^*(x) = 0\text{，}\ i = 1, \cdots n.$$

于是 $y' = x - x^{'} \in M, x$ 有分解 $x = x^{'} + y^{'}$. 所以 $X = M \oplus N$.

引理 2 设 X 是 Banach 空间，$A \in C(X)$, $\lambda \in C, \lambda \neq 0$, 则 $N(\lambda I - A)$ 是有限维的，$R(\lambda I - A)$ 是 X 的闭线性子空间.

证明 1° 考虑 $N = N(\lambda I - A), \lambda I - A$ 是有界线性算子，故 N 是闭线性子空间. $\forall\ x \in N, Ax = \lambda x$, 即 $A(N) = \lambda N = N$. A 是紧算子，设 $\{x_n\}$ 是单位球中的任一序列，则 $\{\frac{x_n}{\lambda}\}$ 是有界序列，$A(\frac{x_n}{\lambda}) = x_n$.于是 $\{x_n\}$ 中有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 这说明 N 的闭单位球是紧的，从而 N 是有限维的.

2° 由引理 1，存在闭线性子空间 $M, X = M \oplus N$，我们证明 $M = R(\lambda I - A)$.

定义算子 $B: M \to X, Bx = \lambda x - Ax$. 由于 $X = M \oplus N$，在 N 上，$\lambda I - A = 0$，故 $R(B) = R(\lambda I - A)$. B 是一一的，实际上若 $Bx_1 = Bx_2, x_1, x_2 \in M$, 则

$$(\lambda I - A)x_1 = (\lambda I - A)x_2\text{，或 }(\lambda I - A)(x_1 - x_2) = 0\text{，}$$

故一方面 $x_1 - x_2 \in M$, 另一方面 $x_1 - x_2 \in N(\lambda I - A) = N$，所以 $x_1 - x_2 = 0, x_1 = x_2$.

现在我们证明存在 $a > 0, \| Bx \| \geq a \| x \|, \forall x \in M$. 否则，存在 $x_n \in M$,
$\| Bx_n \| < n^{-1} \| x_n \|$，不失一般性设 $\| x_n \| = 1$，则 $\| Bx_n \| < n^{-1}$. A 是紧的，故有子列 $x_{n_k}, Ax_{n_k} \to x_0 \in X$. 但 $Ax_{n_k} = \lambda x_{n_k} - Bx_{n_k}$，由 $Bx_{n_k} \to 0$ 知

$\lambda x_{n_k} \to x_0 (n_k \to \infty)$. 于是一方面由 B 的连续性，$Bx_0 = \lim\limits_{n_k \to \infty} \lambda B x_{n_k} = 0$. 另一方面，$\| x_0 \| = \lim\limits_{n_k \to \infty} \| \lambda x_{n_k} \| = |\lambda| \neq 0$, 矛盾说明 a 是存在的.

若 y_n 是 $R(B)$ 中的 Cauchy 序列，不妨设 $y_n = Bx_n, x_n \in M$, 则

$$\| y_m - y_n \| = \| B(x_m - x_n) \| \geq a \| x_m - x_n \|,$$

$\{x_n\}$ 是 M 中的 Cauchy 序列，M 闭，故存在 $x_0 \in M, x_n \to x_0$. 令 $y_0 = Bx_0$，则 $y_0 \in R(B), Bx_n \to Bx_0 = y_0$. $R(B)$ 是闭的，所以 $R(\lambda I - A)$ 是闭的.

引理 3　设 X 为 Banach 空间，$A \in \mathcal{B}(X)$, 则对应于 A 的不同特征值的特征向量彼此线性无关.

证明　设 $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ 是 A 的互不相同的特征值，$x_1, \cdots, x_n$ 是相应的特征向量，$x_i \neq 0, Ax_i = \lambda_i x_i \ (i = 1, \cdots n)$. 若 $x_1, \cdots, x_n$ 线性相关，不失一般性设 $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$，则一方面

$$(\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{n-1} I - A) x_n = (\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{n-1} x_n - A x_n)$$

$$= (\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{n-2} I - A) x_n (\lambda_{n-1} - \lambda_n)$$
$$= \cdots\cdots$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_n) \cdots (\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_n \neq 0$$

另一方面，它们是可交换的，从而

$$(\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{n-1} I - A) x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\lambda_1 I - A) \cdots (\lambda_{n-1} I - A) x_i = 0,$$

矛盾. 由于任意有限多个这样的特征向量都线性无关，故结论成立.

定理 1　设 X 是 Banach 空间，$A \in C(X)$, 则

（1）　A 的非零谱点都是特征值.

（2）　$\sigma(A)$ 是可数集，0 是 $\sigma(A)$ 惟一可能的聚点.

(3)　若 $\dim X = \infty$, 则 $0 \in \sigma(A)$.

(4)　对应于每个非零特征值的特征向量空间是有限维的.

证明　1°　我们证明当 $\lambda\neq 0$ 时，若 $\lambda I-A$ 是一一映射，则 $\lambda I-A$

是到上的．由逆算子定理 $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{B}(X)$，于是 $\lambda\in\rho(A)$，便得到（1）．

令 $T=\lambda I-A$，对于任意正整数 n,

$$
\begin{aligned}
T^n &= (\lambda I-A)^n \\
&= \lambda^n I - C_n^1\lambda^{n-1}A+\cdots+(-1)^n C_n^n A^n \\
&= \lambda^n I - B
\end{aligned}
$$

其中 B 是 A 与一个有界线性算子的乘积．由第三章§3知，B 是紧算子，

根据引理 2，$R(T^n)=R(\lambda^n I-B)$ 是 X 的闭线性子空间，显然 $R(T^{n+1})\subset R(T^n)(n=1,2,\cdots)$. 如果 $\forall n, R(T^{n+1})$ 都是 $R(T^n)$ 的真子空间，由 Riesz 引理，存在 $y_n\in R(T^n)$, 使得

$$\| y_n\|=1,\ \rho(y_n,R(T^{n+1}))\geq\frac{1}{2}.$$

注意 $T(R(T^n))\subset R(T^{n+1})$, 所以 $Ty_n=\lambda y_n-Ay_n\in R(T^{n+1})$. 记

$$
\begin{aligned}
&\lambda y_n - Ay_n = T^{n+1}x_0, \\
&Ty_m=\lambda y_m - Ay_m = T^{m+1}x_0', \quad x_0, x_0'\in X.
\end{aligned}
$$

若 $m>n$，则

$$
\begin{aligned}
&y_m\in R(T^m)\subset R(T^{n+1}),\ T^{m+1}x_0'\in R(T^{m+1})\subset R(T^{n+1}), \\
&T^{n+1}x_0\in R(T^{n+1}).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\| Ay_n - Ay_m\| &= \|(\lambda y_n-\lambda y_m)-(T^{n+1}x_0-T^{m+1}x_0')\| \\
&= |\lambda|\| y_n-(y_m+T^{n+1}\frac{x_0}{\lambda}-T^{m+1}\frac{x_0'}{\lambda})\| \\
&\geq |\lambda|\rho(y_n,R(T^{n+1})) \quad \geq\frac{|\lambda|}{2}>0.
\end{aligned}
$$

这与 A 的紧性矛盾，于是存在 $n_0, R(T^{n_0+1}) = R(T^{n_0})$.

由于 T 是一一的，$\forall y \in R(T^{n_0-1}), Ty \in R(T^{n_0}) = R(T^{n_0+1})$. 不妨设 $Ty = T^{n_0+1}x \quad = T(T^{n_0}x), x \in X$, 则 $y = T^{n_0}x \in R(T^{n_0})$, 从而 $R(T^{n_0-1}) \subset R(T^{n_0})$, $R(T^{n_0-1}) = R(T^{n_0})$. 继续这一过程最后得到 $R(T) = X$. T 是到上的.

2° 我们证明，对于任意的 $t > 0$,

$$\{\lambda : \lambda \in \sigma(A), |\lambda| > t\}$$

是有限集. 若不然，由 1° 知，存在互不相同的一列 $\lambda_n \in \sigma(A), |\lambda| > t$，$\lambda_n$ 是 A 的特征值. 不妨设 x_n 是相应的特征向量，$x_n \neq 0, Ax_n = \lambda_n x_n \ (n = 1, 2, \cdots)$. 由引理 3，$\{x_n\}$ 是线性无关集，记 $M_n = span\{x_1, \cdots x_n\}$，则 $\dim M_n = n$. M_n 是闭子空间并且 $M_{n-1} \subset M_n, M_{n-1} \neq M_n$. 由 Riesz 引理，存在

$$y_n \in M_n, \| y_n \| = 1, \rho(y_n, M_{n-1}) \geq 2^{-1} \ (n = 2, 3, \cdots).$$

不妨设 $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} x_i$，则

$$\lambda_n y_n - Ay_n = \alpha_{nn}(\lambda_n I - A)x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}(\lambda_n I - A)x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}(\lambda_n - \lambda_i)x_i \in M_{n-1}.$$

为简便起见，记 $\lambda_n y_n - Ay_n = z_{n-1}$. 类似地，记

$$\lambda_m y_m - Ay_m = z_{m-1}, z_{m-1} \in M_{m-1}.$$

若 $m > n$，则 $z_{n-1} \in M_{n-1} \subset M_{m-1}, y_n \in M_n \subset M_{m-1}$，

$$\| Ay_m - Ay_n \| = \| (\lambda_m y_m - \lambda_n y_n) - (z_{m-1} - z_{n-1}) \|$$

$$= |\lambda_m| \| y_m - (\frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n + \frac{z_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{z_{n-1}}{\lambda_m}) \|$$

$$\geq |\lambda_m| \rho(y_m, M_{m-1}) \geq \frac{|t|}{2} > 0.$$

与 A 的紧性矛盾. 故 $\{\lambda : \lambda \in \sigma(A), |\lambda| > t\}$ 为有限集，$t > 0$ 是任意的，

故$\sigma(A)$是可数集，0 是$\sigma(A)$惟一可能的聚点.

3° 若$0\in\rho(A)$，则$0\lambda-A=-A$是正则算子. A^{-1}有界，A紧，故$I=AA^{-1}$是紧算子，这说明X的闭单位球是紧的，从而X是有限维空间，与所设条件矛盾.

4° 若$\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq 0,\lambda$对应的特征向量空间为$N(\lambda I-A)$，由引理 2 即得之.

证毕.

由定理 1 可知， 对于紧算子A来说，任何$\lambda\neq 0$，要么$\lambda\in\rho(A)$，要么$\lambda\in\sigma_p(A)$. 这通常被称为紧算子的 Fredholm 择一定理. 相应于算子方程$(\lambda I-A)x=y$来讲，这相当于要么此方程对任何$y\in X$有惟一解，要么相应的齐次方程$(\lambda I-A)x=0$有非 0 解. 这和线性方程组的情况是一致的，和积分方程中的很多情况也是吻合的.

思考题 若$\dim X=\infty$, 则$T\in C(X)$时，T不是正则的. 反过来$T^{-1}\in B(X)$时，$T\overline{\in} C(X)$.

定义 设X为线性赋范空间，X^*是X的共轭空间.

（1）若$x\in X,x^*\in X^*,x^*(x)=0$，称$x^*$与$x$正交，记为$x\perp x^*$.

（2）设$M\subset X,N\subset X^*$，若$\forall x\in M,x^*\in N,x\perp x^*$，则称$M$与$N$正交，记为$M\perp N.$

特别地，$\{x\}\perp N$时，记为 $x\perp N.$

定理 2 设X是 Banach 空间，$A\in C(X),\lambda\neq 0,A^*$是$A$的共轭算子.

（1） 若$y\in X$，则方程$(\lambda I-A)x=y$可解的充要条件是$y\perp N(\lambda I^*-A^*)$.

（2） 若$y^*\in X^*$，则方程$(\lambda I^*-A^*)x^*=y^*$可解的充要条件是

$y^* \perp N(\lambda I - A)$.

其中 $N(\lambda I^* - A^*)$ 是 A^* 的相应于 λ 的特征向量空间， $N(\lambda I - A)$ 是 A 的相应于 λ 的特征向量空间.

证明 1° 若 $(\lambda I - A)x = y$ 有解 $x, x^* \in N(\lambda I^* - A^*)$，则

$$x^*(y) = (x^*, (\lambda I - A)x) = ((\lambda I - A)^* x^*, x)$$
$$= ((\lambda I^* - A^*)x^*, x) = 0.$$

故 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$.

反之，若 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$, 我们证明 $y \in R(\lambda I - A)$. 若不然，$y \notin R(\lambda I - A)$，

由引理 2，$R(\lambda I - A)$ 是闭线性子空间，根据 Hahan-Banach 定理， 存在 $x^* \in X, x^*(y) \neq 0,$ 但在 $R(\lambda I - A)$ 上 $x^* = 0$. 由此，一方面 $\forall x \in X,$

$y' = (\lambda I - A)x \in R(\lambda I - A)$,

$((\lambda I^* - A)^* x^*, x) = (x^*, (\lambda I - A)x) = x^*(y') = 0.$

这说明 $(\lambda I^* - A)^* x^* = 0, x^* \in N(\lambda I^* - A^*)$. 另一方面由 $x^*(y) \neq 0$ 知道 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$ 不成立，从而出现矛盾， 故 $y \in R(\lambda I - A)$，所以存在 $x \in X$，使得 $y = (\lambda I - A)x$.

2° 若对于 $y^* \in X^*$，方程 $(\lambda I^* - A^*)x^* = y^*$ 有解 x^*，则 $\forall x \in N(\lambda I - A)$， $y^*(x) = ((\lambda I^* - A^*)x^*, x) = (x^*, (\lambda I - A)x) = 0$，故 $y^* \perp N(\lambda I - A)$.

反之，若 $y^* \perp N(\lambda I - A)$，对于任意的 $y \in R(\lambda I - A)$，不妨设 $y = (\lambda I - A)x,$ 令 $y_0^*(y) = y^*(x)$，我们将验证 y_0^* 是 $R(\lambda I - A)$ 上的连续线性泛函. 首先 y_0^* 有确定的意义. 实际上，若另有 $y = (\lambda I - A)x'$, 则 $(\lambda I - A)(x - x') = 0, x - x' \in N(\lambda I - A)$ ， 但 $y^* \perp N(\lambda I - A)$ ， 所以 $y^*(x - x^*) = 0, y^*(x) = y^*(x^*)$，这说明 $y_0^*(y)$ 由 y 惟一确定.

y_0^* 在 $R(\lambda I - A)$ 上是线性的，现在证明 y_0^* 连续. 设 $y_n \in R(\lambda I - A)$，不妨设 $y_n = (\lambda I - A)x_n \to 0$，根据引理 2 中 $R(\lambda I - A)$ 为闭子空间的证

明，存在 $a>0, \|(\lambda I-A)x\|\geq a\|x\|$. 即 $\|y_n\|=\|(\lambda I-A)x_n\|\geq a\|x\|$. 于是 $\{x_n\}$ 为有界序列，A 紧，不妨设 $Ax_{n_k}\to x_0$. 对 $y_{n_k}=(\lambda I-A)x_{n_k}$ 两端取极限得到，$\lambda x_{n_k}\to x_0$，由 $\lambda I-A$ 的连续性又得到

$$(\lambda I-A)x_0=\lim_{n_k\to\infty}\lambda(\lambda I-A)x_{n_k}=\lim_{n_k\to\infty}\lambda y_{n_k}=0,$$

于是 $x_0\in N(\lambda I-A)$，所以 $y^*(x_0)=0,$

$$y_0^*(y_{n_k})=y_0^*(\lambda I-A)x_{n_k}=y^*(x_{n_k})\to\frac{1}{\lambda}y^*(x_0)=0,$$

这说明对于任一序列 $y_n\to 0$，都可以选出子序列 $\{y_{n_k}\}, y_0^*(y_{n_k})\to 0,$ 故必有 $y_0^*(y_n)\to 0, y_0^*$ 连续.

根据 Hahn-Banach 定理，存在 $x^*\in X^*$, 在 $R(\lambda I-A)$ 上 $x^*(y)=y_0^*(y)$. 现在对于任何 $x\in X$,

$$\begin{aligned}((\lambda I^*-A^*)x^*,x)&=(x^*,(\lambda I-A)x)=(x_0^*,(\lambda I-A)x)\\&=y_0^*(y)=y^*(x).\end{aligned}$$

故 $y^*=(\lambda I^*-A^*)x^*, x^*$ 是方程的解.

定理 3　设 X 是 Banach 空间，$A\in C(X), \lambda\neq 0, A^*$ 是 A 的共轭算子. 则

（1）　$\sigma(A)=\sigma(A^*)$.

（2）　设 $\lambda,\mu\in\sigma(A), x$ 是 A 的相应于 λ 的特征向量，x^* 是 A^* 的相应于 μ 的特征向量，$\lambda\neq\mu$, 则 $x\perp x^*$，从而 $N(\lambda I-A)\perp N(\mu I^*-A^*)$.

（3）若 $\lambda\in\sigma(A), \lambda\neq 0$，则 $\dim N(\lambda I-A)=\dim N(\lambda I^*-A^*)$.

证明　1°　注意到 A^* 也是紧算子，故当 $\lambda\neq 0$ 时，λ 不是 A^* 的特征值，λ 一定是正则点. 若 $\dim X<\infty$，相应于 A^* 的矩阵是相应于 A 的矩阵的转置，根据线性代数的知识，二者有相同的特征值，结论成立.

若 $\dim X=\infty$，由定理 1(3)，$0\in\sigma(A)$，同时 $\dim X^*=\infty$，于是 $0\in\sigma(A^*)$. 现在设 $\lambda\neq 0$，我们只须证明 $\lambda\in\rho(A)$ 当且仅当

$\lambda \in \rho(A^*)$.

若 $\lambda \in \rho(A)$，由本章§1定理4(1)，$(\lambda I - A)x = y$ 对于任何 $y \in X$ 有解，从定理 2 知，$y \perp N(\lambda I^* - A^*)$. 由 y 的任意性知，$N(\lambda I^* - A^*) = \{0\}$，即 $\lambda I - A^*$ 是一一映射，根据定理 1 证明中的 1°，$\lambda I^* - A^*$ 是到上的，从而 $\lambda \in \rho(A^*)$.

反之，若 $\lambda \in \rho(A^*)$，则 $(\lambda I^* - A^*)x^* = y^*$ 对于任意的 y^* 有解，于是由定理 2，$y^* \perp N(\lambda I - A)$，所以，$N(\lambda I - A) = \{0\}$，$\lambda I - A$ 是一一的. 根据定理 1 证明中的 1°，$\lambda I - A$ 到上，故 $\lambda \in \rho(A)$，总之 $\rho(A) = \rho(A^*)$. 所以 $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

2° 任取 $x \in N(\lambda I - A), x^* \in N(\mu I^* - A^*)$，则 $Ax = \lambda x, A^* x^* = \mu x^*$，于是

$$\begin{aligned}\lambda x^*(x) &= (x^*, \lambda x) = (x^*, Ax) \\ &= (A^* x^*, x) = (\mu x^*, x) = \mu x^*(x).\end{aligned}$$

或 $(\lambda - \mu)x^*(x) = 0$. 由 $\lambda \neq \mu$，故

$$x^*(x) = 0,\ N(\lambda I - A) \perp N(\mu I^* - A^*).$$

3° 设 $\dim N(\lambda I - A) = n, \dim N(\lambda I^* - A^*) = n^*$. 根据定理1(4)，二者都是有限的.

首先证明 $n^* \leq n$. 若 $n^* = 0$，不等式自然成立. 若 $n = 0$，即 $N(\lambda I - A) = \{0\}$，于是 $\lambda I - A$ 是一一的，由定理 1 证明的 1°，$\lambda I - A$ 还是到上的，即 $\lambda \in \rho(A)$. 由上面的 1°，$\lambda \in \rho(A^*)$，故 $N(\lambda I^* - A^*) = \{0\}$，$n^* = 0$，所说等号成立.

现在考虑 n, n^* 均为非零的情况，设 $x_1, \cdots x_n$ 是 $N(\lambda I - A)$ 的一组基，$y_1^*, \cdots y_n^*$ 是 $N(\lambda I^* - A^*)$ 的一组基，由本节引理 1 的证明不难知道，存在 $x_1^*, \cdots x_n^*$ 使得

$$x_j^*(x_i) = \begin{cases} 1, i = j. \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

又容易用归纳的方法证明，存在 $y_1^*, \cdots y_n^*$，使得

$$y_j^*(y_i)=\begin{cases}1, i=j.\\0, i\neq j.\end{cases}$$

定义　$F:X\to X$,

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^*(x)y_i\,,\qquad \forall x\in X.$$

显然 F 是有界线性算子并且是有限秩算子，从而 F 是紧的．算子 $B=A+F$ 是紧的．我们证明 $\lambda I-B$ 是一一映射．

实际上，若 $(\lambda I-B)x=0$，则

$$(\lambda I-A)x=F(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^*(x)y_i\qquad ,$$

(5-2-1)

$$(y_j^*,(\lambda I-A)x)=(y_j^*,\sum_{i=1}^{n}x_i^*(x)y_i)=x_j^*(x).$$

但 $y_j^*\in N(\lambda I^*-A^*)$，故

$$(y_j^*,(\lambda I-A)x)=((\lambda I^*-A^*)y_j^*,x)=0.\ (j=1,\cdots n),$$

从而 $x_j^*(x)=0$，代入（5－2－1）知道 $(\lambda I-A)x=0, x\in N(\lambda I-A)$．由于 $x_1,\cdots x_n$ 是的一组基，不妨设 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，由 $\alpha_j=x_j^*(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)$ $=x_j^*(x)=0(j=1,\cdots,n)$ 知 $x=0$, $\lambda I-B$ 是一一的．由引理 2 的证明 1°，$\lambda I-B$ 是到上的．

若 $n<n^*$，取 $x\in X$，使 $(\lambda I-B)x=y_{n+1}$ 则

$$\begin{aligned}1\ &=y_{n+1}^*(y_{n+1})=(y_{n+1}^*,(\lambda I-B)x)\\&=(y_{n+1}^*,(\lambda I-A)x)-(y_{n+1}^*,F(x))\\&=((\lambda I^*-A^*)y_{n+1}^*,x)-(y_{n+1}^*,\sum_{i=1}^{n}x^*(x)y_i)\ \ =0,\end{aligned}$$

因为 $y_{n+1}^*\in N(\lambda I^*-A^*)$．矛盾说明 $n^*\le n$.

现在，由 $X \subset X^{**}$，并且当 $(\lambda I - A)x = 0$ 时，对于任意的 $x^* \in X^*$,

$$0 = (x^*, (\lambda I - A)x) = ((\lambda I^* - A^*)x^*, x)$$
$$= ((\lambda I^* - A^*)x^*, x^{**}) = (x^*, (\lambda I^{**} - A^{**})x^{**}),$$

即 $(\lambda I^{**} - A^{**})x^{**} = 0$，故 $N(\lambda I - A) \subset N(\lambda I^{**} - A^{**})$.

记 $n^{**} = \dim N(\lambda I^{**} - A^{**})$，于是 $n \le n^{**}$.. 但类似于上面的证明知 $n^{**} \le n^*$.，由此 $n \le n^*$. 总之 $n = n^*$.

例1 考虑空间 l^2 上的线性算子 $A: l^2 \to l^2$，

$$Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots),\ \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$$

首先，

$$\| Ax \| = (\sum_{n=1}^{\infty} | \frac{x_n}{n} |^2)^{\frac{1}{2}} \le (\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2)^{\frac{1}{2}} = \| x \|,$$

T 是有界线性算子. 设

$$A_n : l^2 \to l^2,\ A_n x = (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, 0, \cdots),$$

则 $\| A_n \| \le 1, A_n$ 是有限秩算子从而是紧的. 由

$$\| A_n - A \| = \sup_{\|x\| \le 1} \| (A_n - A)x \| = \sup_{\|x\| \le 1} (\sum_{i=n+1}^{\infty} | \frac{x_i}{i} |^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \sup_{\|x\| \le 1} \frac{1}{n+1} (\sum_{i=n+1}^{\infty} | x_i |^2)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{n+1} \to 0.$$

A 也是紧算子.

若 $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n} 0, \cdots)$，则 $Ae_n = \frac{1}{n} e_n$. 由定义，$\frac{1}{n}$ 是 A 的特征值，e_n 是相应的特征向量. $\forall x \in l^2$，$Ax = 0$ 仅当 $x = 0$，于是 A 是一一映射，0 不是特征值. 注意到 A 不是到上的，例如 $y_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots) \in l^2$. 若 $Ax_0 = y_0$，则应有 $x_0 = (1, 1, \cdots), x_0 \notin l^2$，因此 0 是谱点. 我们证明：

$\sigma_p(A)=\{\frac{1}{n}:n\geq 1\}$，从而 $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup(0)$.

实际上，若 $\lambda\neq 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$，则要使 $(\lambda I-A)x=0$，即

$$(\lambda I-A)x=\lambda(x_1,x_2,\cdots)-(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots)$$

$$=((\lambda-1)x_1,(\lambda-\frac{1}{2})x_2,\cdots)=0$$

必须 $x_1=x_2=\cdots=0$，即 $x=0$. 故 $\lambda I-A$ 是一一的，由引理 2 证明中的 1°，$\lambda I-A$ 是到上的，从而 $\lambda\in\rho(A)$.

最后，对于 $\lambda_n=\frac{1}{n}$，考虑 $(\lambda_n I-A)x=0$ 的 $x,\lambda_n x=Ax$，即

$$(\frac{x_1}{n},\frac{x_2}{n},\cdots)=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots).$$

若 $i\neq n$，要使 $\frac{x_i}{n}=\frac{x_i}{i}$，必须 $x_i=0$，故满足上面式子的 x 具有形式 $(0,\cdots,0,x_n,0,\cdots)$ 或 $x=x_n e_n$. 于是

$$N(\lambda_n I-A)=span\{e_n\},\quad \dim N(\lambda_n I-A)=1,\ n\geq 1.$$