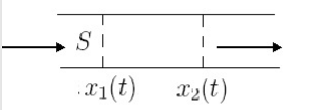
有限差分法

案例 3：一维激波管问题

舒适 魏华祎 易年余 岳孝强

1. 一维激波管问题
   - 背景问题与数学建模
   - 一维声波方程的若干理论
   - 有限差分方法
   - 算法设计与数值实验
   - 理论分析

设流体在一直长细管内流动，细管的截面积为 S.



将 x 轴的正向取为水平方向向右，设密度函数 ρ、速度函数 u 和压力函数 p 仅与时间变量 t 和空间变量 x 有关，即

$$\rho = \rho(x,t),\ \ u = u(x,t), p = p(x,t)$$

采用微元法进行分析.

考虑时间微元 $I := [t, t+\Delta t]$; 对任意给定的时间 $\zeta \in I$, 考虑微元

$$\Omega(\zeta) := [x_1(\zeta), x_2(\zeta)] \times S$$

下面利用质量、动量和能量守恒定律, 建立数学模型.

重要恒等式

对任意一阶连续可微函数 $f(x,t)$, 有恒等式

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f dx\right) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (fu)}{\partial x}] dx \qquad (1)$$

□

质量守恒方程

质量守恒定律：控制体 I 中质团的质量不变，即

$$\frac{d}{dt}\left(S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho dx\right)=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho dx\right)=0$$

$\Rightarrow$ (利用 (1))

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}]dx=0$$

由 $x_1(t), x_2(t)$ 的任意性，可得质量守恒方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

动量守恒(运动)方程

动量守恒定律：合力做的冲量=动量的变化

质团的界面 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 处的压力差产生的冲量为

$$\Delta t\cdot S(p(x_1(t),t)-p(x_2(t),t))=-\Delta t\cdot S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

质团的动量 $S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho u dx$ 的变化为

$$S(\int_{x_1(t+\Delta t)}^{x_2(t+\Delta t)}\rho u dx-\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho u dx)$$

所以由动量守恒定律可知

$$-\Delta t\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\frac{\partial p}{\partial x}dx=\int_{x_1(t+\Delta t)}^{x_2(t+\Delta t)}\rho u dx-\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho u dx$$

令 $\Delta t \to 0$, 则有

$$-\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \frac{d(\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho u dx)}{dt}$$

利用 (1) (其中 $f := \rho u$), 则可得

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x}] dx = 0$$

由 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的任意性, 可得动量守恒方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

能量方程

能量守恒定律：外力所作的功＝能量的变化率

压力 $p(x_1(t),t)$ 和 $p(x_2(t),t)$ 对质团所作的功为

$$p(x_1(t),t)\cdot S\cdot u(x_1(t),t)-p(x_2(t),t)\cdot S\cdot u(x_2(t),t)=-S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\frac{\partial(pu)}{\partial x}dx$$

注意单位质量流体所含的能量

$$E=e+\frac{1}{2}u^2$$

其中，e 为内能，$\frac{1}{2}u^2$ 为动能. 所以质团总能量为

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}S\rho Edx=S\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho Edx$$

由能量守恒定律, 有

$$-\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(pu)}{\partial x}dx = \frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho E dx$$

利用 (1), 有

$\Rightarrow$

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho E + p))}{\partial x})dx = 0.$$

$\Rightarrow$ 能量守恒方程

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u(\rho E + p))}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

联立(2), (3) 和 (4), 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(u(\rho E+p))}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
$$

为了求解出 ρ, u, p, E 四个未知量, 还需要加入状态方程. 特别对理想气体其状态方程为

$$p=(\gamma-1)\rho e$$

. 其中 $\gamma>1$ 表绝热指数 (比热比).

若还是完全理想气体均熵(或等熵)流，则由热力学关系式，有

$$de + pdv = 0$$

利用上式和状态方程，可得

$$\frac{dp}{p} = -\gamma\frac{dv}{v} \Leftrightarrow p = cv^{-\gamma} = c\rho^{\gamma}$$

其中 c 为一正常数.

由此，并联立连续性和运动方程，则流体方程可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \\ p = c\rho^\gamma \end{cases}$$

经简单推导知：上述前两式等价于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{d\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

令声速 $c = \sqrt{p'(\rho)}$, 则上式可改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}c^2\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

进一步，假设：

a）管内流体是均匀气体且是静止的，即

$$u(x,0) = 0,\ \rho(x,0) = \rho_0,\ c(x,0) = c_0$$

均为常数；

b) 气体做微小扰动；

则通过作扰动分析，可导出如下一维声波方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{{c_0}^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_0^2}{\rho_0} \\ \rho_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \tag{7}$$

关于一维声波方程的初边值问题提法，以及相应适定性理论，后面将做专题讨论.

特征与 Riemann 不变量

考虑一维声波方程 (6).

由于 A 的两个特征值

$$\lambda_1 = -c_0, \quad \lambda_2 = c_0$$

所以 (6) 是 (狭义) 双曲方程组.

λ_1 和 λ_2 所对应的左特征行向量分别为

$$\alpha_1 = (\rho_0, -c_0), \quad \alpha_2 = (\rho_0, c_0)$$

将 $\alpha_i, i = 1, 2$ 作用于方程 (6) 两端, 得

$$\alpha_i \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_i A \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha_i \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \alpha_i \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow$

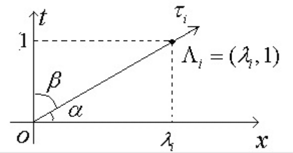
$$\alpha_i \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0 \tag{8}$$

令特征方向:

$$\Lambda_i := (\lambda_i, 1), \quad i = 1, 2$$

则单位特征方向

$$\tau_i := \frac{\Lambda_i}{|\Lambda_i|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2 + 1}}(\lambda_i, 1) := (\cos\alpha, \cos\beta)$$



注意

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \tau_i} &= \cos\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial U}{\partial t} \\
&= (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})(\cos\alpha, \cos\beta)^T \\
&= (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t})\frac{(\Lambda_i)^T}{|\Lambda_i|} \\
&= \frac{1}{|\Lambda_i|}(\lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t})
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} = |\Lambda_i| \frac{\partial U}{\partial \tau_i}
$$

由此，并结合 (8)，可得

$$\alpha_i \frac{\partial U}{\partial \tau_i} = 0, \;\; i = 1, 2$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial r_i}{\partial \tau_i} = 0, \;\; i = 1, 2 \tag{9}$$

其中

$$r_1 = \alpha_1 U = \rho_0 u - c_0 \rho, \;\; r_2 = \alpha_2 U = \rho_0 u + c_0 \rho \tag{10}$$

由 (9) 可知:

1. 当 (x,t) 落在斜率为

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\lambda_1}=-\frac{1}{c_0}$$

的某条特征线时 r_1 为常数.

2. 当 (x,t) 落在斜率为

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{c_0}$$

的某条特征线时 r_2 为常数.

称由 (10) 定义的 r_1, r_2 为一维声波方程 (6) 的 Riemann 不变量.

利用上述 Riemann 不变量

$$r_1(x_0,t_0)=\rho_0 u-c_0\rho,\ \ r_2(x_0,t_0)=\rho_0 u+c_0\rho$$

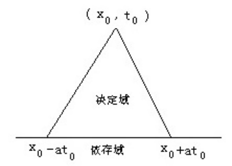
可得过 (x_0,t_0) 的两条特征线

$$\frac{t-t_0}{x-x_0}=\mp\frac{1}{c_0}\ \Rightarrow\ t=\mp\frac{1}{c_0}(x-x_0)+t_0$$

令

$$a:=c_0$$

则有

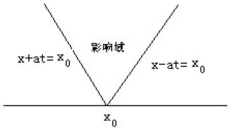


(a)

依存域: u 在点 (x_0, t_0) 处的值仅依赖于初值函数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ 在该 (局部) 区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 的值, 与区间外的初值无关, 故称 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 为点 (x_0, t_0) 的依存域. (见上图(a))

说明了双曲型方程的重要特征：解的局部依赖性；利用该特性知：$t = t_n$ 时间层上的某个空间点 x_j 的数值解只与 $t = t_{n-1}$ 上的 x_j 的小邻域上的值有关，并且时间步长越小，该小邻域就越小.

决定域: 区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 上的初值不仅确定 $u(x_0, t_0)$, 而且确定了 u 在以 $(x_0 - at_0, 0)$, $(x_0 + at_0, 0)$, (x_0, t_0) 为顶点的三角形域内的值, 故称此三角形域为区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 的决定域. (见上图(a))



(b)

影响域: 对于 x 轴上任一点 $(x_0, 0)$, 依存域包含 $(x_0, 0)$ 的一切点 (x, t) 的集合是以 $(x_0, 0)$ 为顶点, 过该点的特征 $x - at = x_0$ 和 $x + at = x_0 (t > 0)$ 为边的角形域, 称之为 $(x_0, 0)$ 的影响域. (见上图(b))

可见: 初值函数在 $(x_0, 0)$ 处的值, 随着时间 t 的增大, 在 t 时间层的影响区间越来越大.

初边值问题的适定性

考虑一维声波方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + A\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in G \\ U(x,0) = U_0(x) = (0,\rho_0)^T, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ U(0,t) = ?, \ \ U(1,t) = ? \end{cases} \tag{11}$$

其中, A 由 (7) 定义, 求解域 $G = (0,1) \times (0,T)$.

问: 在什么样的边界条件下, 初边值问题(11) 是适定的.

下面利用特征与 Riemann 不变量理论回答之.

初边值问题的适定性

注意 对于任一点 $P(x,t)$，有

1. 在过该点且斜率为

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\lambda_1}=-\frac{1}{c_0}$$

的特征线 1 上，$r_1=\rho_0 u-c_0\rho$ 为常数.

2. 在过该点且斜率为

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{c_0}$$

的特征线 2 上，$r_2=\rho_0 u+c_0\rho$ 为常数.

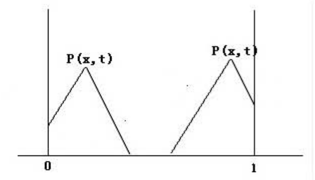
初边值问题的适定性

由于当点 $P(x,t)$ 充分靠近左边界时，过该点的特征线 2 穿过左边界，所以为了使得问题适定，需要在左边界上加上限制条件

$$r_2 = \rho_0 u + c_0 \rho = \text{已知值}$$

同理，为了使得问题适定，需要在右边界上加上限制条件

$$r_1 = \rho_0 u - c_0 \rho = \text{已知值}$$



初边值问题的适定性

综上可知：一维声波方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in G \\ U(x,0) = U_0(x) = (0,\rho_0)^T \\ r_2(0,t) = \text{已知值} \\ r_1(1,t) = \text{已知值} \end{cases} \tag{12}$$

满足适定性.

附加页 1

问题: 考虑波动方程初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ \ t > 0 \tag{13}$$

$$u(x,0) = \phi_0(x), u_t(x,0) = \phi_1(x), -\infty < x < \infty \tag{14}$$

其中 $a > 0$ 是常数. 试利用特征与 Riemann 不变量理论, 推导 D'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi_0(x-at) + \phi_0(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \phi_1(\xi) d\xi \tag{15}$$

附加页 2

1) 若令 $U=(v,w)^T$, 其中

$$v=\frac{\partial u}{\partial t},\quad w=a\frac{\partial u}{\partial x}$$

则波动方程写为如下一阶偏微分方程组

$$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$$

则波动方程 (13) 可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}-A\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{16}$$

附加页 3

2) A 的两个特征值为 $\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = a$, 其相应的左特征行向量分别为

$$\alpha_1 = (1, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1)$$

3) 两个 Riemann 不变量 $r_1 = v - w, \quad r_2 = v + w$ 满足

1. 当 (x, t) 落在斜率为 $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a}$ 的特征线时, $r_1 = v - w$ 为常数.
2. 当 (x, t) 落在斜率为 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$ 的特征线时, $r_2 = v + w$ 为常数.

附加页 4

由此知

$$r_1(x,t) = r_1(x+at,0),\ \ r_2(x,t) = r_2(x-at,0)$$

$\Leftrightarrow$ (利用 (14))

$$(\partial_t u + a\partial_x u)(x,t) = (\partial_t u + a\partial_x u)(x+at,0) = \phi_1(x+at) + a\phi_0'(x+at)$$

and

$$(\partial_t u - a\partial_x u)(x,t) = (\partial_t u - a\partial_x u)(x-at,0) = \phi_1(x-at) - a\phi_0'(x-at)$$

$\Rightarrow$ (将上述两式相加)

附加页 5

$$2\partial_t u(x,t) = [\phi_1(x+at) + \phi_1(x-at)] + a[\phi_0'(x+at) - \phi_0'(x-at)]$$

$\Rightarrow$ (上式两边在 $[0,t]$ 上积分, 注意 $u(x,0)=\phi_0(x)$)

$$\begin{aligned} 2u(x,t) - 2\phi_0(x) &= \int_0^t [\phi_1(x+a\tau) + \phi_1(x-a\tau)]d\tau \\ &\quad + a\int_0^t [\phi_0'(x+a\tau) - \phi_0'(x-a\tau)]d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

注意

附加页 6

$$\int_0^t \phi_1(x+a\tau)d\tau = \frac{1}{a}\int_x^{x+at} \phi_1(\xi)d\xi$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^t \phi_1(x-a\tau)d\tau &= -\frac{1}{a}\int_x^{x-at} \phi_1(\phi_1(\xi)d\xi)d\phi_1(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x} \phi_1(\phi_1(\xi)d\xi)d\phi_1(\xi)d\xi\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^t [\phi_1(x+a\tau)+\phi_1(x-a\tau)]d\tau = \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} \phi_1(\xi)d\xi \tag{18}$$

又注意

附加页 7

$$a\int_0^t \phi_0'(x+a\tau)d\tau = \int_x^{x+at}\phi_0'(\xi)d\xi = \phi_0(x+at)-\phi_0(x)$$

and

$$-a\int_0^t \phi_0'(x-a\tau)d\tau = \int_x^{x-at}\phi_0'(\xi)d\xi = \phi_0(x-at)-\phi_0(x)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a\int_0^t [\phi_0'(x+a\tau)-\phi_0'(x-a\tau)]d\tau &= [\phi_0(x+at)+\phi_0(x-at)] \\ &\quad -2\phi_0(x) \qquad (19) \end{aligned}$$

将 (18) 和 (19) 代入 (17) 即证得 D'Alembert 公式 (15) 成立.

向量型声波方程到标量型方程的转化

由 (9) 知: 向量型一维声波方程 (6) 的两个 Riemann 不变量满足

$$\frac{\partial r_i}{\partial \tau_i} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2 + 1}}(\lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial x} + \frac{\partial r_i}{\partial t}) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0$$

其中$\lambda_{1,2} = \mp c_0$ 为常量.

由此可知: 向量型一维声波方程初边值问题(12), 可化为如下两个独立的标量型双曲方程

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial t} - c_0 \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0 \\ r_1(x,0) = \rho_0 u(x,0) - c_0 \rho(x,0) = -c_0 \rho_0 \\ r_1(1,t) = \text{已知值} \end{cases} \tag{20}$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial r_2}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \\ r_2(x,0) = \rho_0 u(x,0) + c_0 \rho(x,0) = c_0 \rho_0 \\ r_2(0,t) = \text{已知值} \end{cases} \tag{21}$$

结论: 向量型一维声波方程的求解问题, 可本质性地转换为如下标量型一阶双曲型方程的求解.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ (x,t) \in G \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = \phi_0(t), \text{ 如果 } a > 0; \ u(1,t) = \phi_1(t), \text{ 如果 } a < 0 \end{cases} \tag{22}$$

其中, 求解域 $G := \{(x,t) : 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$, u_0, ϕ_0, ϕ_1 为已知函数,

常量 $a \leftrightarrow$ 特征值 λ_i; 方向 $(a,1) \leftrightarrow$ 特征方向 $(\lambda_i, 1)$

函数 $u \leftrightarrow$ Riemann 不变量 r_i, 其在平行于特征方向 $(a,1)$ 的特征线上为常量.

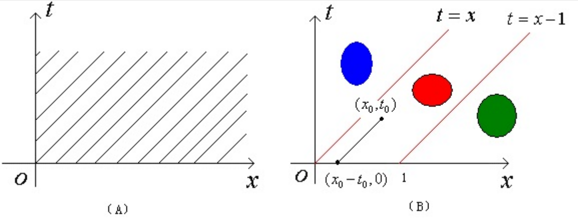
例 1: 试证明混合问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x,0) = |x-1|, \quad u(0,t) = 1 \end{cases} \tag{23}$$

的真解为: 对 $\forall t > 0$, 有

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \\ 1-(x-t), & t < x \leqslant t+1, \\ (x-t)-1, & x > t+1 \end{cases} \tag{24}$$

证明. 注意: 特性方向为 $(1,1)$, 下图 (A) 给出了平行于特征方向的特征线族. 分别记 $t=x$ 和 $t=x-1$ 为直线 1 和 直线 2, 下图 (B) 给出了由这两条直线划分的三个子区域.



利用 u 在特征线上为常量, 则对 $\forall t_0>0$, 有

$$u(x_0,t_0)=\begin{cases} u(0,t_0)=1, & x_0\leqslant t_0,\\ u(x_0-t_0,0)=1-(x_0-t_0), & t_0<x_0\leqslant t_0+1,\\ u(x_0-t_0,0)=(x_0-t_0)-1, & x_0>t_0+1,\end{cases}$$

习题 试求下列混合问题的解 (右边界条件)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \text{-}\ \infty < x < 0, \ \ t > 0 \\ u(x,0) = |x+1| \ \ u(0,t) = 1 \end{cases}$$

直接差分化方法

下面讨论求解一阶双曲型方程 (22) 的有限差分格式.

对求解域 $G = (0,1) \times (0, T]$ 作均匀网格剖分.

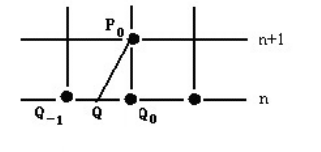
节点:

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \cdots, N$$

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \cdots, M$$

其中空间和时间步长: $h = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$.

讨论 u 在网格节点 $P_0 := (x_j, t_{n+1})$ 处的计算公式. 由下图

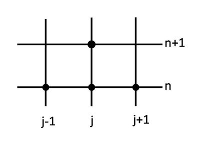


有

$$u(P_0) = u(Q)$$

注意 $|QQ_0| = rh$, 其中网比 $r = a\frac{\tau}{h}$.

利用第 n 个时间层上, 关于两个不同模板点的线性插值公式, 可得如下三种显式公式:



$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-r)u_j^n \tag{25}$$

$$u_j^{n+1} = (1+r)u_j^n - ru_{j+1}^n \tag{26}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{r}{2}(u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) \tag{27}$$

差分格式 (25) 与特征走向有关, 按照气体力学的含义 (a 表示气流速度), 称之为迎风格式.

公式 (25), (26) 和 (27) 分别等价于

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0 \quad \text{如果 } a>0\text{, 为迎风格式} \tag{28}$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0 \quad \text{如果 } a<0\text{, 为迎风格式} \tag{29}$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0 \tag{30}$$

截断误差分别为

$$O(\tau+h),\ O(\tau+h),\ O(\tau+h^2)$$

用同样的思想可构造变系数方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

的差分格式. 此时 a 可能变号, 因此相应的迎风格式为

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0, & a_j\geqslant 0 \\ \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0, & a_j<0 \end{cases} \tag{31}$$

其中 $a_j=a(x_j)$.

积分守恒差分格式

考察拟线性守恒型 (或散度型) 微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{32}$$

设 G 是 x, t 平面任一有界域, 利用 Green 公式, 有(其中 $\Gamma = \partial G$)

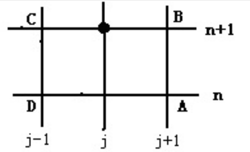
$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x}\right) dxdt = \int_\Gamma (f(u), u) \cdot \vec{n} ds = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_\Gamma (f(u), u) \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{33}$$

(1) Lax 格式 (显格式)

设网格如下图所示



取 G 为以 $A(j+1,n)$, $B(j+1,n+1)$, $C(j-1,n+1)$ 和 $D(j-1,n)$ 为顶点的矩形, $\Gamma = \overset{\frown}{ABCDA}$ 为其边界.

则由 (33), 有

$$(\int_{DA}+\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD})(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=0 \tag{34}$$

注意在直线 DA 上 $\vec{n}=(0,-1)$, 所以

$$\int_{DA}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{DA}(f(u),u)\cdot(0,-1)ds=-\int_{DA}uds$$

类似的可得

$$\int_{AB}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{AB}(f(u),u)\cdot(1,0)ds=\int_{AB}f(u)ds$$
$$\int_{BC}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{BC}(f(u),u)\cdot(0,1)ds=\int_{BC}uds$$
$$\int_{CD}(f(u),u)\cdot\vec{n}ds=\int_{CD}(f(u),u)\cdot(-1,0)ds=-\int_{CD}f(u)ds$$

这样由 (34) 可得

$$-\int_{DA} u ds + \int_{AB} f(u) ds + \int_{BC} u ds - \int_{CD} f(u) ds = 0 \tag{35}$$

对 (35) 的左端各个积分项分别采用如下数值积分公式:

$$\int_{DA} u ds \approx \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \cdot 2h, \quad \int_{BC} u ds \approx u_j^{n+1} \cdot 2h$$
$$\int_{AB} f(u) ds \approx f(u_{j+1}^n) \cdot \tau, \quad \int_{CD} f(u) ds \approx f(u_{j-1}^n) \cdot \tau$$

将上述近似式代入 (35), 则可得 Lax (Lax-Friedrichs) 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h} = 0$$

它可改写为 (其中 $f_j^n = f(x_j, u_j^n)$, $r = \frac{\tau}{h}$)

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{r}{2}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) \tag{36}$$

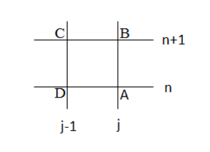
可以证明 Lax-Friedrichs 格式截断误差的阶为

$$O(\tau + h^2)$$

特别当 $f(u) = au$ 时, 可得到一阶双曲型方程 (22) 的 Lax 格式.

(2) Box 格式 (隐格式)

取 G 为以$A(j,n)$, $B(j,n+1)$, $C(j-1,n+1)$ 和 $D(j-1,n)$ 为顶点的矩形, 记 $\Gamma=\widehat{ABCDA}$ 为其边界.



则由 (33), 及类似于Lax 格式的推导 (各项积分均用梯形公式进行近似), 可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\tau}+\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{h}+\frac{f_j^{n+1}-f_{j-1}^{n+1}}{h}=0 \tag{37}$$

其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$.

黏性差分格式

黏性差分格式的构造分两步.

1. 通过引入含二阶空间偏导数的小参数项 (称为黏性项), 使双曲型方程成为一带小参数的抛物方程.
2. 利用中心差商代替导数, 选取小参数 (粘性系数), 建立相应的差分格式.

下面对于线性模型问题 (22), 给出该格式的构造过程.

考虑线性双曲型方程 (22)，引入黏性项使它成为如下带小参数的抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \varepsilon>0$$

特取 $\varepsilon=\frac{h}{2}|a(x)|$，并利用中心差商近似关于空间变量的偏导数，则可得格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\frac{h}{2}|a_j|\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}$$

或

$$\begin{cases}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=\frac{h}{2}a_j\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}, & a\geqslant 0\\ \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=-\frac{h}{2}a_j\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}, & a<0\end{cases}$$

容易验证它的等价迎风格式为

$$\begin{cases}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0, & a\geqslant 0\\ \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0, & a<0\end{cases}$$

类似地，可考虑拟线性守恒型微分方程 (32).

1) 引入黏性项，使它成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \varepsilon>0,$$

利用中心差商近似关于空间变量的偏导数，则可得到 Lax 格式.

2) 引入黏性项，使它成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial x}(f'(u)\frac{\partial f}{\partial x}) \tag{38}$$

利用中心差商近似关于空间变量的偏导数，则在点 (x_j,t_n) 处有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(f'(u)\frac{\partial f}{\partial x}) &\approx \frac{\left(f'(u)\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{n}-\left(f'(u)\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{j-1/2}^{n}}{h}\\
&\approx h^{-1}\frac{f'(u_{j+1/2}^n)\left(f_{j+1}^n-f_j^n\right)}{h}-\frac{f'(u_{j-1/2}^n)\left(f_j^n-f_{j-1}^n\right)}{h}\\
&\approx h^{-2}\left[a_{j+1/2}^n\left(f_{j+1}^n-f_j^n\right)-a_{j-1/2}^n\left(f_j^n-f_{j-1}^n\right)\right]
\end{aligned}$$

其中

$$a_{l+1/2}^n = f'(\frac{u_{l+1}^n + u_l^n}{2}).$$

这样就得到Lax-wendroff 格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h} = \frac{\tau}{2h^2}\left[a_{j+1/2}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-1/2}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right]$$

$\Leftrightarrow$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\frac{\tau}{h}\left(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\left[a_{j+1/2}^n\left(f_{j+1}^n - f_j^n\right) - a_{j-1/2}^n\left(f_j^n - f_{j-1}^n\right)\right]$$

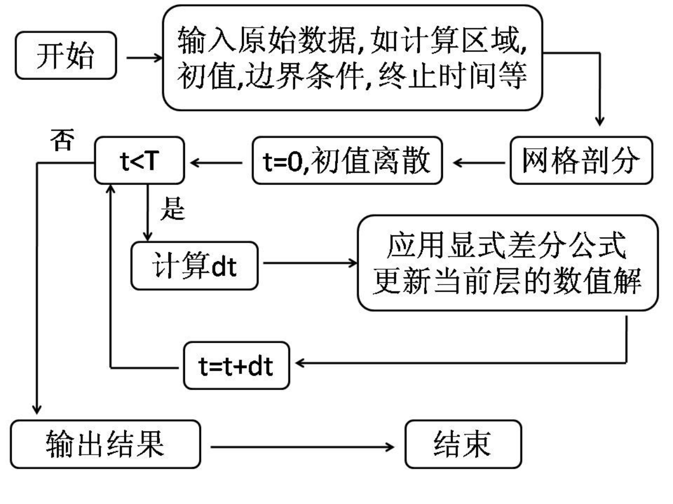
可以证明: 该格式的截断误差为

$$O(\tau^2 + h^2)$$

考虑如下混合问题差分离散的算法实现，

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \phi(t) \end{cases}$$

显式算法流程


开始
输入原始数据,如计算区域,初值,边界条件,终止时间等
网格剖分
t=0,初值离散
t<T
否
是
计算dt
应用显式差分公式更新当前层的数值解
t=t+dt
输出结果
结束

算例：利用有限差分法去求解混合问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ 0<x<2, \quad t>0 \\ u(x,0)=|x-1|, \quad u(0,t)=1 \end{cases}$$

其真解为(见前面的例 1)

$$u(x,t)=\begin{cases} 1, & x\leqslant t,\ t\geqslant 0 \\ 1-x+t, & t<x\leqslant t+1,\ t\geqslant 0 \\ x-t-1, & x>t+1,\ t\geqslant 0 \end{cases}$$

该模型的 Matlab 代码实现如下：

```
function pde = model_data()
% MODEL_DATA 模型数据

TI = 0;
TF = 1;
SI = 0;
SF = 2;
pde = struct('u_exact',@u_exact,'u_initial',@u_initial,...
    'u_left',@u_left,'time_grid',@time_grid,'space_grid',
    @space_grid,'a',1);

    function [T,tau] = time_grid(NT)
        T = linspace(TI,TF,NT+1);
        tau = (TF - TI)/NT;
    end
    function [X,h] = space_grid(NS)
        X = linspace(SI,SF,NS+1)';
        h = (SF - SI)/NS;
    end
    function U = u_exact(X,T)
      [x,t] = meshgrid(X,T);
      U = zeros(size(x));
      case1 = (x <= t);
      case2 = (x > t+1);
      case3 = ~case1 & ~case2;
```

```
        U(case1) = 1;
        U(case3) = 1-x(case3)+t(case3);
        U(case2) = x(case2) - t(case2) -1;
        U = U';
    end
    function u = u_initial(x)
        u = abs(x-1);
    end

    function u = u_left(t)
        u = ones(size(t));
    end

end
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现

```
function [X,T,U] = advection_fd1d(NS,NT,pde,method)
%% WAVE_EQUATION_FD1D 利用有限差分方法计算一维双曲方程
%
%   输入参数:
%       NS 整型, 空间剖分段数.
%       NT 整型, 时间剖分段数.
%       pde 结构体, 待求解的微分方程模型的已知数据,
%                   如边界、初始、系数和右端项等条件.
%       method 字符串, 代表求解所用格式
%           'explicity' 或 'e' 或 'E' : 显式迎风格式
%           'inv explicity或' 'inve' 或 'invE': 反显式迎风格式
%           'implicity' 或 'i' 或 'I' : 隐式迎风格式
%           'inv implicity' 或 'invi' 或 'invI', 反隐式迎风格式
%           'explicity center' 或 'ec' 或 'EC' : 显式中心格式
%           'implicity center' 或 'ic' 或 'IC': 隐式中心格式
%           'explicity lax' 或 'el' 或 'EL': 显式 Lax 格式
%           'explicity laxw' 或 'elw' 或 'ELW': 显式 Lax windroff 格
    式
%           'leap frog' 或 'lf' 或 'LF' : 跳蛙格式
%   输出参数:
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 II

```
%          X 长度为 NS+1 的列向量，空间网格剖分
%          T 长度为 NT+1 的行向量，时间网格剖分
%          U (NS+1)*(NT+1) 矩阵，U(:,i) 表示第 i 个时间层网格部分上的数值解
%
%    作者：魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

[X,h] = pde.space_grid(NS);
[T,tau] = pde.time_grid(NT);
N = length(X);M = length(T);


U = zeros(N,M);
% 初值条件
U(:,1) = pde.u_initial(X);
a = pde.a;
r = a*tau/h;
% 边值条件
if a >= 0 % 左边值条件
   U(1,:) = pde.u_left(T);
else
   U(end,:) = pde.u_right(T); %右边值条件
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 III

```
end



%%
switch(method)
    case {'explicity','e','E'}
        explicity();
    case {'inv␣explicity','inve','invE'}
        inv_explicity();
    case {'explicity␣lax','el','EL'}
        explicity_lax();
    case {'explicity␣laxw','elw','ELW'}
        explicity_laxw();
    case {'implicity','i','I'}
        implicity();
    case {'inv␣implicity','invi','invI'}
        inv_implicity();
    case {'explicity␣center', 'ec','EC'}
        explicity_center();
    case {'implicity␣center', 'ic','IC'}
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 IV

```
        implicity_center();
    case {'leap␣frog','lf','LF'}
        leap_frog();
    otherwise
        disp(['Sorry,␣I␣do␣not␣know␣your␣', method]);
end

    function explicity()
        for i = 2:M
            if a > 0
                U(2:end,i) = U(2:end,i-1) - r*(U(2:end,i-1) - U(1:
    end-1,i-1));
            else
                U(1:end-1,i) = U(1:end-1,i-1) - r*(U(2:end,i-1) -
    U(1:end-1,i-1));
            end
        end
    end

    function inv_explicity()
        for i = 2:M
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 V

```
        if a > 0
            U(2:end-1,i) = U(2:end-1,i-1) - r*(U(3:end,i-1)-U
(2:end-1,i-1));
            U(end,i) = 2*U(end-1,i)-U(end-2,i);
        else
            U(2:end-1,i) = U(2:end-1,i-1) - r*(U(2:end-1,i-1)
- U(1:end-2,i-1));
            U(1,i) = 2*U(2,i) - U(3,i);
        end
    end
end

function explicity_lax()
    for i = 2:M
        U(2:end-1,i) = (U(1:end-2,i) + U(3:end,i-1))/2 - r*(U
(3:end,i-1)-U(1:end-2,i-1))/2;
        if a > 0
            U(end,i) = 2*U(end-1,i)-U(end-2,i);
        else
            U(1,i) = 2*U(2,i) - U(3,i);
        end
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 VI

```
        end
    end

    function explicity_laxw()
        for i = 2:M
            U(2:end-1,i) = (U(1:end-2,i) + U(3:end,i-1))/2 - r*(U
    (3:end,i-1)-U(1:end-2,i-1))/2;
            if a > 0
                U(end,i) = 2*U(end-1,i)-U(end-2,i);
            else
                U(1,i) = 2*U(2,i) - U(3,i);
            end
        end
    end

    function implicity()
        if a > 0
            d = (1+r)*ones(N-1,1);
            c = -r*ones(N-2,1);
            A = diag(d) + diag(c,-1);
            for i = 2:M
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 VII

```
                F = zeros(N-1,1);
                F(1) = r*U(1,i);
                U(2:end,i) = A\(U(2:end,i-1)+F);
            end
        else
            d = (1-r)*ones(N-1,1);
            c = r*ones(N-2,1);
            A = diag(d) + diag(c,1);
            for i = 2:M
                F = zeros(N-1,1);
                F(end) = -r*U(end,i);
                U(1:end-1,i) = A\(U(1:end-1,i-1)+F);
            end
        end
    end
    function explicity_center()
        for i = 2:M
            U(2:end-1,i) = U(2:end-1,i-1) - r*(U(3:end,i-1)-U(1:
    end-2,i-1))/2;
            if a > 0
                U(end,i) = 2*U(end-1,i)-U(end-2,i);
```

显隐迎风格式的 Matlab 实现 VIII

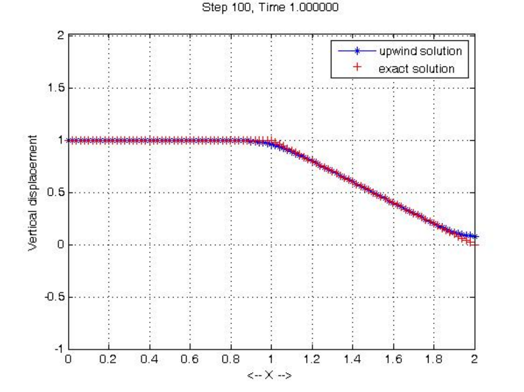
```
            else
                U(1,i) = 2*U(2,i) - U(3,i);
            end
        end
    end
    function implicity_center()

    end
    function leap_frog()

    end


end
```

主测试脚本

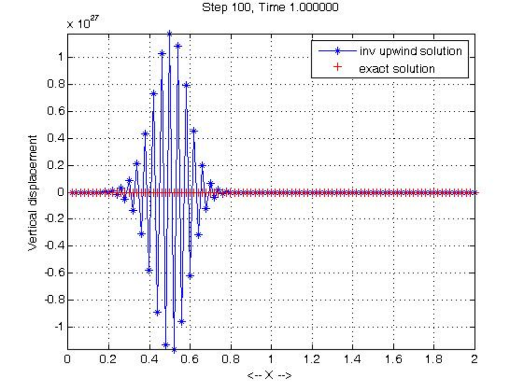
```
%% 一维双曲方程有限差分方法主测试脚本 main_test.m
%   依次测试:
%           显格式
%           隐格式
%   并可视化数值计算结果。
%
% 作者: 魏华祎 <weihuayi@xtu.edu.cn>

pde = model_data(); %模型数据结构体

% 迎风显格式
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'explicity');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,U,UE);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解

% 反迎风显格式
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'inv␣explicity');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,U,UE);% 以随时间变化方式显示数值解
```

主测试脚本 II

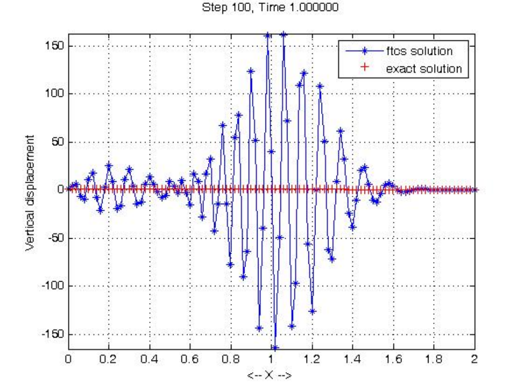
```
% 显式中心格式
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'explicity␣center');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,U,UE);% 以随时间变化方式显示数值解

% 显式格式lax
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'explicity␣lax');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,U,UE);% 以随时间变化方式显示数值解

% 隐格式
[X,T,U] = advection_fd1d(100,200,pde,'implicity');
UE = pde.u_exact(X,T);
showvarysolution(X,T,U,UE);% 以随时间变化方式显示数值解
showsolution(X,T,U); % 以二元函数方式显示数值解
```



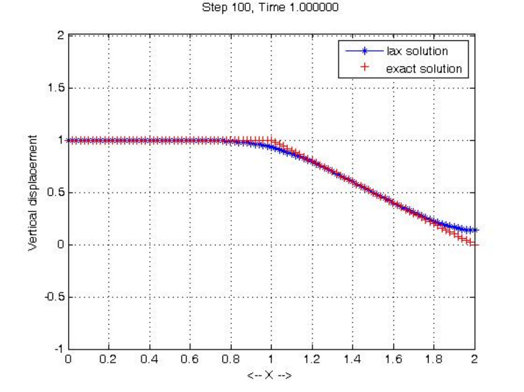
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$



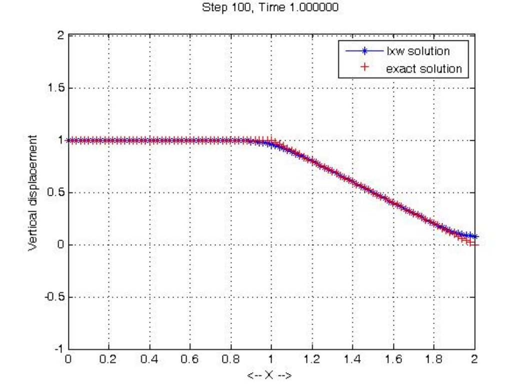
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$



$$\frac{u_j^{n+1}-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0$$



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2}a\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

稳定性分析

Fourier 分析: 将 $u_{j+m}^{n+q} = v_{n+q} e^{i\alpha(x_j+mh)}$ 代入 (见 (25))

$$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1-r) u_j^n$$

可得

$$v_{n+1} e^{i\alpha x_j} = \left(r e^{i\alpha(x_j-h)} + (1-r) e^{i\alpha x_j}\right) v_n$$

$\Rightarrow$

$$v_{n+1} = \left(r e^{-i\alpha h} + (1-r)\right) v_n$$

由此求得该格式的增长因子, 再由 Von Neumann 条件可知: 差分格式 (25) 稳定的充要条件是

$$\left| r e^{-i\alpha h} + (1-r) \right| \leqslant 1 \iff \left| r e^{-i\alpha h} + (1-r) \right|^2 \leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left|r(\cos\alpha h-1)+1-ir\sin\alpha h\right|^2\leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$[r(\cos\alpha h-1)+1]^2+r^2\sin^2\alpha h\leqslant 1$$

$\Leftrightarrow$

$$r^2(\cos\alpha h-1)^2+2r(\cos\alpha h-1)+r^2\sin^2 ah\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$2r^2-2r^2\cos\alpha h+2r(\cos\alpha h-1)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(r^2-r)(1-\cos\alpha h)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow$

$$r^2\leqslant r \;\Leftrightarrow\; a^2\frac{\tau^2}{h^2}\leqslant a\frac{\tau}{h}$$

$\Leftrightarrow$

$$a\geqslant 0,\quad |r|=a\frac{\tau}{h}\leqslant 1 \tag{39}$$

类似分析可知:

格式 (26) 稳定的充要条件是:

$$a \leqslant 0, \quad |r| = -a\frac{\tau}{h} \leqslant 1 \tag{40}$$

格式 (27) 对一切 $r \neq 0$ 均不稳定.

由此可得如下结论: 当 $a \geq 0$ 时只有 (25) 可用, 当 $a \leq 0$ 时只有 (26) 可用.

习题 1 导出格式 (26) 和格式 (27) 的稳定条件.

类似的，由 Fourier 分析可知：

Lax-Friedrichs 格式稳定性条件是：

$$|a|\frac{\tau}{h} \leqslant 1$$

Box 格式是无条件稳定的

Lax-wendroff 格式稳定性条件为

$$|a|\frac{\tau}{h} \leqslant 1.$$