求解不适定问题

DotFeng

2018 年 11 月 15 日

目录

1 求解不适定问题的正则化方法

因为偏微分方程的大部分反问题都可以归结为求解第一类算子方程,而第一类算子方程被证明是不适定的.正则化方法就是对不适定方程建立一个稳定的近似解的方法.本节介绍了求解不适定问题的一系列正则化方法,这些方法是求解反问题的基础.

1.1 预备知识

1.1.1 不适定问题

首先引入不适定问题的定义.

定义 1.1 *设$K : U \subset X \to Y$,其中X, Y是赋范空间.方程$Kx = y$叫做适定的,是指K是双射,且$K^{-1} : Y \to U$是连续的,否则,就叫做不适定的.*

由以上的定义可知,适定需同时满足下列三个条件:

- 若对任一个$y \in Y$,至少存在一个$x \in U$,使得$Kx = y$,称为解的存在性(Existence);
- 设$y_1, y_2 \in Y$,若对$x_1, x_2 \in U$分别是$Kx = y$对应于$y_1 \neq y_2$的解,则必有$x_1 \neq x_2$,称为解的唯一性(Uniqueness);
- 解z相对于空间偶(U, Y)而言是稳定的，称为解的稳定性(Stability),即对于任给的$\epsilon > 0$,存在$\delta(\epsilon) > 0$,只要

$$\rho_U(x_1, x_2) \leq \delta(\epsilon), x_1, x_2 \in U \tag{1.1}$$

就有

$$\rho_Y(y_1, y_2) < \epsilon, Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2 \tag{1.2}$$

反之,如果上述三个条件中至少有一个不能满足，就称其为不适定的(ill-posed),由以上定义可知，不适定方程有三种类型：

- K不是满射,即存在$y \in Y$,对任意$x \in U$有$Kx \neq y$;
- K不是单射,即存在$u, v \in U$,且$u \neq v$使得$Ku = Kv$;
- K^{-1}不连续,即方程$Kx = y$的解不连续依赖于数值f.

在实际问题中,方程右端的数据项一般通过测量获得,精确的数据y并不知道,只知道被误差扰动后的测量数据y^δ,及其误差水平$\delta > 0$,即

$$\|y - y^\delta\| \le \delta, y^\delta \in Y. \tag{1.3}$$

我们的目标是求解扰动后的方程

$$Kx^\delta = y^\delta. \tag{1.4}$$

通常该方程是不可解的，因为测量数据y^δ很可能不在K的值域$K(X)$中.于是我们希望找到一个近似解$x^\delta \in X$,一方面它能足够接近精确解x,另一方面它能连续的依赖于数据y^δ.

1.1.2 正交投影

本节主要叙述关于正交投影的三个定理. 首先定义一些记号:X, Y为Hilbert空间,$L(X, Y)$表示从X到Y的线性有界算子空间.定义$L(X) := L(X, X)$. 对于$T \in L(X, Y)$,零空间与像空间分别记作$N(T) := \{\varphi \in X : T\varphi = 0\}$和$R(T) := T(X)$

定理 1.1 *令U为X的一个凸的线性闭子空间.那么对于每一个$\varphi \in X$,存在唯一的一个向量$\psi \in U$,满足*

$$\|\psi - \varphi\| = \inf_{u \in U} \|u - \varphi\|. \tag{1.5}$$

ψ称为φ的最佳逼近.ψ是U中唯一满足此性质的向量,并且

$$\langle \varphi - \psi, u \rangle = 0 \text{ 对于所有的} u \in U \tag{1.6}$$

定理 1.2 *令$U \neq \{0\}$是X的闭线性子空间,令$P : X \to U$表示到U的正交投影,其将一个向量$\varphi \in X$映射到其在U上的最佳逼近. 则P是一个线性算子,且$\|P\| = 1$ 满足*

$$P^2 = P \text{ 以及 } P^\star = P. \tag{1.7}$$

$I - P$表示到闭子空间$U^\perp$上的正交投影. 其中$U^\perp := \{v \in X : \langle v, u \rangle = 0$, 对于任意的$u \in U\}$

证明：因为$P\varphi = \varphi$对于任意的$\varphi \in U$,得$P^2 = P$,及$\|P\| \ge 1$. 在(1.6)中,令$u = P\varphi$,得$\|\varphi\|^2 = \|P\varphi\|^2 + \|(I - P)\varphi\|^2$.因此$\|P\| \le 1$. 又因为

$$\langle P\varphi, \psi \rangle = \langle P\varphi, P\psi + (I - P)\psi \rangle = \langle P\varphi, P\psi \rangle \tag{1.8}$$

又$\langle\varphi, P\psi\rangle = \langle P\varphi, P\psi\rangle$,得算子$P$是自共轭的. 又由内积的线性性与连续性,易得$U^\perp$是$X$的闭线性子空间. 且由(1.6)可得,$(I-P)\varphi \in U^\perp$,其中$\varphi \in X$. 更进一步的,$\langle \varphi-(I-P)\varphi, V\rangle = \langle P\varphi, v\rangle = 0$,对所有的$v \in U^\perp$.则根据定理(1.2)可知,$(I-P)\varphi$是$\varphi$在$U^\perp$中的最佳逼近元.

定理 1.3 *如果$T \in L(X,Y)$,那么有*

$$N(T) = R(T^\star)^\perp \quad \text{以及} \quad \overline{R(T)} = N(T^\star)^\perp \tag{1.9}$$

证明：如果$\varphi \in N(T)$,则对所有的$\psi \in Y$ 有$\langle\varphi, T^\star\psi\rangle = \langle T\varphi, \psi\rangle = 0$ 则$\varphi \in R(T^\star)^\perp$.因此,$N(T) \subset R(T^\star)^\perp$ 如果$\varphi \in R(T^\star)^\perp$,则对所有的$\psi \in Y$ 那么,$0 = \langle\varphi, T^\star\psi\rangle = \langle T\varphi, \psi\rangle$ 因此$T\varphi = 0$,即$\varphi \in N(T)$,则$R(T^\star)^\perp \subset N(T)$

1.1.3 Moore-Penrose 广义逆

考虑算子方程

$$T\varphi = g \tag{1.10}$$

其中算子$T \in L(X,Y)$.此时既不假设算子T是单射，也不假设$g \in R(T)$.在这种假设下，我们先来定义，何为算子方程(1.10)的解.这就引出了算子T的逆的概念.

定义 1.2 *φ称为方程(1.10)的最小二乘解，如果满足*

$$\|T\varphi - g\| = inf\{\|T\psi - g\| : \psi \in X\}. \tag{1.11}$$

$\varphi \in X$被称为方程(1.10)的最佳近似解，如果φ是方程(1.10)的最小二乘解，且满足

$$\|\varphi\| = inf\{\|\psi\| : \psi\text{是方程(1.10)的最佳近似解}\}. \tag{1.12}$$

定理 1.4 *用$Q : Y \to \overline{R(T)}$表示投影到$\overline{R(T)}$上面的正交投影.则下列条件是等价的：*

$$\varphi\text{是}T\varphi = g\text{的最小二乘解}. \tag{1.13}$$

$$T\varphi = Qg \tag{1.14}$$

$$T^*T\varphi = T^*g \tag{1.15}$$

证明:因为$\langle T\varphi - Qg, (I-Q)g\rangle = 0$,根据定理(1.2)有

$$\|T\varphi - g\|^2 = \|T\varphi - Qg\|^2 + \|Qg - g\|^2. \tag{1.16}$$

这表明,由(1.14)可以推出(1.13). 反之亦然,如果φ_0是一个最小二乘解,则φ_0是函数$\varphi \mapsto \|T\varphi - Qg\|$.的最小值. 又根据$Q$的定义,$\inf_{\varphi\in X}\|T\varphi - Qg\| = 0, \varphi$必定满足(1.14).

又根据定理(1.2)、(1.3),我们有$N(T^\star) = R(T)^\perp = R(I-Q)$, 由此可推得等式$T^\star(I-Q)$成立.因此由(1.14)可得(1.15)成立. 反之,如果(1.15)成立,则有$T\varphi - g \in N(T^\star) = R(T)^\perp$. 因此$0 = Q(T\varphi - g) = T\varphi - Qg$.

方程(1.15)称为方程(1.10)的正规方程.注意到一个方程的最小二乘解并不一定存在,因为(1.11)中的下确界并不一定可以取到.由定理1.4可得,方程(1.10)的最小二乘解存在，当且仅当$g \in R(T) + R(T)^\perp$

注：如果φ_0是一个最小二乘解，则其并不唯一,若$N(T)$中除去零元素还有其他元素. 此时最小二乘解可写成集合$\{\varphi_0 + u : u \in N(T)\}$

定义 1.3 *算子T的$Moore-Penrose$广义逆$T^\dagger$定义在$D(T^\dagger) := R(T) + R(T)^\perp$上,其将$g \in D(T^\dagger)$映到算子方程(1.10)的最佳近似解.*

显然,$T^\dagger = T^{-1}$,如果$R(T)^\perp = 0$,以及$N(T) = 0$. 值得注意的是,并不是对于所有的$g \in Y$,$T^\dagger g$有定义,假若$R(T)$不是闭集.

令$\widetilde{T} : N(T)^\perp \to R(T), \widetilde{T}\varphi := T\varphi$, 表示将$T$限制在$N(T)^\perp$上. 因为$N(T)^\perp = N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$ 以及$R(\widetilde{T}) = R(T)$, 则有算子$\widetilde{T}$是可逆的. 则Moore-Penrose 逆可被写成

$$T^\dagger g = \widetilde{T}^{-1} Qg \tag{1.17}$$

其中$g \in D(T^\dagger)$.

2 Tikhonov正则化方法