正交投影的相关理论

DotFeng

2018 年 10 月 25 日

目录

1 正交投影

本节主要叙述关于正交投影的三个定理. 首先定义一些记号:X,Y为Hilbert空间,$L(X,Y)$表示从X到Y的线性有界算子空间.定义$L(X) := L(X,X)$. 对于$T\in L(X,Y)$,零空间与像空间分别记作$N(T):=\{\varphi\in X : T\varphi=0\}$和$R(T):=T(X)$

定理 1.1 令U为X的一个凸的线性闭子空间.那么对于每一个$\varphi\in X$,存在唯一的一个向量$\psi\in U$,满足

$$\|\psi-\varphi\| = \inf_{u\in U}\|u-\varphi\|. \tag{1.1}$$

ψ称为φ的最佳逼近.ψ是U中唯一满足此性质的向量,并且

$$\langle\varphi-\psi,u\rangle = 0 \text{ 对于所有的} u\in U \tag{1.2}$$

定理 1.2 令$U\neq\{0\}$是X的闭线性子空间,令$P:X\to U$表示到U的正交投影,其将一个向量$\varphi\in X$映射到其在U上的最佳逼近. 则P是一个线性算子,且$\|P\|=1$ 满足

$$P^2 = P \text{ 以及 } P^\star = P. \tag{1.3}$$

$I-P$表示到闭子空间$U^\perp$上的正交投影. 其中$U^\perp := \{v\in X : \langle v,u\rangle = 0,\text{对于任意的}u\in U\}$

证明:因为$P\varphi=\varphi$对于任意的$\varphi\in U$,得$P^2=P$,及$\|P\|\geq 1$. 在(1.2)中,令$u=P\varphi$,得$\|\varphi\|^2=\|P\varphi\|^2+\|(I-P)\varphi\|^2$.因此$\|P\|\leq 1$. 又因为

$$\langle P\varphi,\psi\rangle = \langle P\varphi, P\psi+(I-P)\psi\rangle = \langle P\varphi,P\psi\rangle \tag{1.4}$$

又$\langle\varphi,P\psi\rangle=\langle P\varphi,P\psi\rangle$,得算子$P$是自共轭的. 又由内积的线性性与连续性,易得$U^\perp$是$X$的闭线性子空间. 且由(1.2)可得,$(I-P)\varphi\in U^\perp$,其中$\varphi\in X$. 更进一步的,$\langle\varphi-(I-P)\varphi,V\rangle=\langle P\varphi,v\rangle=0$,对所有的$v\in U^\perp$.则根据定理(1.2)可知,$(I-P)\varphi$是$\varphi$在$U^\perp$中的最佳逼近元.

定理 1.3 如果$T\in L(X,Y)$,那么有

$$N(T) = R(T^\star)^\perp \quad \text{以及} \quad \overline{R(T)} = N(T^\star)^\perp \tag{1.5}$$

证明:如果$\varphi\in N(T)$,则对所有的$\psi\in Y$ 有$\langle\varphi,T^\star\psi\rangle=\langle T\varphi,\psi\rangle=0$ 则$\varphi\in R(T^\star)^\perp$.因此,$N(T)\subset R(T^\star)^\perp$ 如果$\varphi\in R(T^\star)^\perp$,则对所有的$\psi\in Y$ 那么,$0=\langle\varphi,T^\star\psi\rangle=\langle T\varphi,\psi\rangle$ 因此$T\varphi=0$,即$\varphi\in N(T)$,则$R(T^\star)^\perp\subset N(T)$