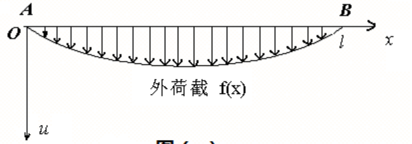
有限差分法

案例 1：弦的平衡问题

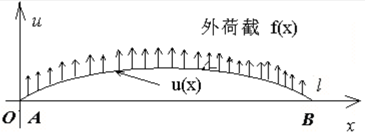
1. 弦的平衡问题
   - 背景问题
   - 数学建模
   - 有限差分法
   - 算法设计与实现
   - 数值实验
   - 理论分析

设一根长为 l 的弦，水平放置，两端固定在 A, B 两点。现有强度为 $f(x)$ 的小荷载作用在弦上，其作用方向是垂直向下或向上。在该荷载作用下，弦会发生形变，由于荷载强度较小，因而发生的形变也很小，最终会达到平衡。

试给出平衡状态下弦的曲线函数。



图(a)



图(b)

坐标系

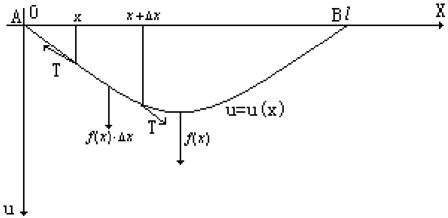
1. 将 x 轴的正向取为水平方向向右;
2. 纵轴 (u轴) 的正向, 有两种取法:
   - 当荷载垂直向下, 正向垂直向下(见图(a))
   - 当荷载垂直向上, 正向垂直向上(见图(b))

在此坐标系的规定下, 平衡状态下弦的曲线

$$u = u(x) > 0$$

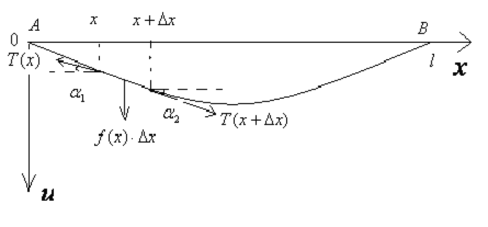
利用力平衡条件导出 $u(x)$ 满足的关系式。

采用微元法进行分析，见图(c)。



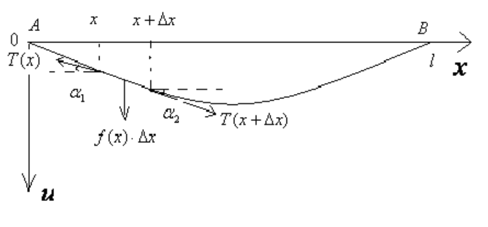
图(c)

考虑 $[x, x+\Delta x]$ 所对应的弦段



该弦段受以下几个力的作用:

- 向下的合外力 $f(x)\Delta x$
- 两端各有一个张力，其方向是沿着弦的切线向外的，这里设张力的大小为常量 T



该弦段沿水平所受张力的力平衡方程为

$$T\cos\alpha_2 - T\cos\alpha_1 = 0 \tag{1}$$

沿垂直方向上的力与外力平衡，所以有

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 + f(x)\cdot\Delta x = 0$$

上式等价于

$$T\cos\alpha_2\cdot\tan\alpha_2 - T\cos\alpha_1\cdot\tan\alpha_1 + f(x)\cdot\Delta x = 0 \tag{2}$$

将(1)代入(2)整理得

$$\cos\alpha_1 \cdot T \cdot [\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1] + f(x) \cdot \Delta x = 0$$

而$\tan\alpha_1 = u'(x), \tan\alpha_2 = u'(x+\Delta x)$, 在小扰动假设下$(\cos\alpha_1 \approx 1)$, 上式可以改写成

$$T\frac{u'(x+\Delta x) - u'(x)}{\Delta x} + f(x) \approx 0,$$

当$\Delta x \to 0$ 时, 可得平衡曲线 u 在点 x 处所满足的关系式

$$-Tu''(x) = f(x),\ 0 < x < l \tag{3}$$

由已知条件知 u 还应满足边值条件

$$u(0)=0, u(l)=0 \tag{4}$$

(3) 和 (4) 便构成了两点边值问题，可以证明解的存在唯一性

本案例将针对如下两点边值问题介绍有限差分法.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f, \quad x \in I, \tag{5}$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \tag{6}$$

其中 $I = (a, b)$ $(a < b)$, f 为 $\bar{I} = [a, b]$ 上的连续函数, α, β 为给定常数.

有限差分法的步骤

对给定的微分方程模型:

1. 对求解区域做网格剖分, 得到计算网格
2. 对微分方程中的各阶导数进行差分离散, 得到差分方程
3. 根据边界条件, 进行边界处理
4. 解线性代数方程组, 得到数值解向量

将上述前3步工作称为有限差分离散.

1 网格剖分

对求解区间 I 做下图所示的网格剖分

其中

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

称为网格节点; $x_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 被称为第 i 个内部节点; x_0 和 x_n 被称为边界节点.

$I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 称为第 i 个 剖分单元;

$h_i = x_i - x_{i-1}$ 称为单元 I_i 的剖分步长;

记 $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$, 特别对均匀 (或等距) 剖分

$$h = \frac{b-a}{n}$$

2 导数的差分离散

任一给定的内部节点 x_i 处的微分方程:

$$-\frac{d^2u(x_i)}{dx^2} = f(x_i) \tag{7}$$

离散的关键: 给出

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i := \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i}$$

的离散公式.

模板点要求:

$$x_i,\ x_{i-1},\ x_{i+1}$$

下面在步长为 h 的均匀网格剖分假设下，介绍建立离散（或近似）公式的两种方法.

方法一. 待定系数 + Taylor 展开

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i \approx \alpha_i u(x_i) + \alpha_{i-1} u(x_{i-1}) + \alpha_{i+1} u(x_{i+1})$$

要求截断误差

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i - \alpha_i u(x_i) - \alpha_{i-1} u(x_{i-1}) - \alpha_{i+1} u(x_{i+1}) = O(h^m) \tag{8}$$

中的非负整数 m 尽可能的大.

利用 Taylor 展开，有(设 $u \in C^5[\bar{I}]$)

$$u(x_{i\pm1}) = u(x_i) \pm h\left[\frac{du}{dx}\right]_i + \frac{h^2}{2}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i \pm \frac{h^3}{6}\left[\frac{d^3u}{dx^3}\right]_i + \frac{h^4}{24}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_i + O(h^5), \quad (9)$$

可知

$$\begin{aligned}
&\alpha_i u(x_i) + \alpha_{i-1}u(x_{i-1}) + \alpha_{i+1}u(x_{i+1}) = (\alpha_i + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1})u(x_i)h^0 \\
&+(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})\left[\frac{du}{dx}\right]_i h^1 + \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i h^2 \\
&+\frac{1}{6}(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})\left[\frac{d^3u}{dx^3}\right]_i h^3 + \frac{1}{24}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_i h^4 + O(h^5), \quad (10)
\end{aligned}$$

将 (10) 带入 (8) 的左端, 可得

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i - \alpha_i u(x_i) - \alpha_{i-1}u(x_{i-1}) - \alpha_{i+1}u(x_{i+1})$$

$$= -(\alpha_i + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1})u(x_i)h^0 - (\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})\left[\frac{du}{dx}\right]_i h^1$$

$$+[1 - \frac{h^2}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})]\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i$$

$$-\frac{1}{6}(\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1})\left[\frac{d^3u}{dx^3}\right]_i h^3 - \frac{1}{24}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1})\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_i h^4 + O(h^5)$$

为了 (8) 中 m 尽量大，应有

$$\begin{cases} \alpha_i+\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}=0 \\ \alpha_{i+1}-\alpha_{i-1}=0 \\ 1-\dfrac{h^2}{2}(\alpha_{i+1}+\alpha_{i-1})=0 \end{cases}$$

解此方程组，有

$$\alpha_i=-\frac{2}{h^2},\ \alpha_{i+1}=\alpha_{i-1}=\frac{1}{h^2}$$

带入 (11)，可得

$$\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}=\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i+R_i(u) \tag{11}$$

其中

$$R_i(u)=\frac{h^2}{12}\left[\frac{d^4u}{dx^4}\right]_i+O(h^3) \tag{12}$$

方法二. 差商逼近导数

利用一阶中心差商，有

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h}, \quad \left[\frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h}$$

和

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i \approx \frac{\left[\frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} - \left[\frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}}}{h}$$

因此，有

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i \approx \frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}$$

将 (11) 代入 (7) 可得

$$-\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}=f(x_i)+R_i(u) \qquad (13)$$

在 (13) 中，丢弃小量 $R_i(u)$，则得到数值解向量

$$U_{n-1}:=(u_1,\cdots,u_{n-1})^T\in R^{n-1}$$

在 x_i 处满足的满足的计算公式(格式):

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=f_i, i=1,\cdots,n-1 \qquad (14)$$

3 边界处理

由 (6) 可得

$$u_0 = \alpha, \qquad u_n = \beta \tag{15}$$

称 (14), (15) 为逼近 (5), (6) 的差分方程或差分格式，并称相应的数值解向量 U_{n-1} 为差分解，u_i 为 $u(x_i)$ 的近似值。

注意　由于 (14) 是用二阶中心差商代替 (5) 中二阶微商得到的，故也称 (14) 为中心差分格式.

至此就完成了对微分方程模型 (5) (6) 的有限差分离散.

导数差分逼近的其它格式

一阶、二阶导数的差分逼近，FD=前向差分，BD=后向差分，CD=中心差分

导数	有限差分逼近	类型	误差
u_x	$\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$-\frac{u_{i+2}+4u_{i+1}-3u_i}{2\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{3u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{2\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+8u_{i+1}-8u_{i-1}+u_{i-2}}{12\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^4$
u_{xx}	$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{(\Delta x)^2}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^2}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i-2}}{12(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^4$

4 离散化线性代数方程组及其求解

由 (14), (15), 可得

$$\frac{2}{h^2}u_1 - \frac{1}{h^2}u_2 = f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, \quad i = 1$$

$$\frac{2}{h^2}u_i - \frac{1}{h^2}u_{i-1} - \frac{1}{h^2}u_{i+1} = f_i, \quad i = 2, \cdots, n-2$$

$$\frac{2}{h^2}u_{n-1} - \frac{1}{h^2}u_{n-2} = f_{n-1} + \frac{\beta}{h^2}, \quad i = n-1$$

利用矩阵和向量可将上述线性方程组表示为

$$A_{n-1}U_{n-1} = F_{n-1} \tag{16}$$

其中

$$A_{n-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} \end{bmatrix}$$

$$U_{n-1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad F_{n-1} = \begin{bmatrix} f_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix}$$

或者可表示为

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_1 & d_1 & c_1 & 0 & & & \vdots \\
0 & a_2 & d_2 & c_2 & 0 & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & 0 & a_{n-2} & d_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\
\vdots & & & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \alpha \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}
\tag{17}
$$

其中

$$
a_i = -\frac{1}{h^2}, \quad d_i = \frac{2}{h^2}, \quad c_i = -\frac{1}{h^2}
$$

可以证明差分方程(14), (15) (或线性代数方程组(16))的解存在且唯一(见后面介绍的理论部分).

注意线性代数方程组(16)的系数矩阵为三对角矩阵，下面分别介绍三种求解方法:

- 追赶法
- Jacobi 迭代法
- Gauss-Seidel 迭代法

为叙述方便，记上述线性代数方程组为

$$Ax = b$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & d_N \end{bmatrix}$$

特别，关于对线性系统 (17) $N = n + 1$.

三对角矩阵分解 (Crout 分解)

可将上述三对角矩阵分解为

$$A=\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & l_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & l_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & l_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & u_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=LU$$

其中

$$\begin{cases} l_1=d_1, \quad u_1=\dfrac{c_1}{l_1}, \\ l_i=d_i-a_iu_{i-1}, \quad i=2,\ldots,N, \\ u_i=\dfrac{c_i}{l_i}, \quad i=2,\ldots,N-1. \end{cases}$$

利用矩阵的Crout分解:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & l_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{N-1} & l_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & l_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_1} \\ y_i = \dfrac{b_i - a_i y_{i-1}}{l_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, N \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_N = y_N \\ x_i = y_i - u_i x_{i+1}, \quad i = N-1, N-2 \ldots, 1 \end{cases}$$

即为解三对角方程组的追赶法:

$$\begin{cases} \text{追}: y_1 \longrightarrow y_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow y_N \\ \text{赶}: x_N \longrightarrow x_{N-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_1 \end{cases}$$

对一般的n阶线性代数方程组

$$Ax = b, \quad A = (a_{ij})_{N\times N}, \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$$

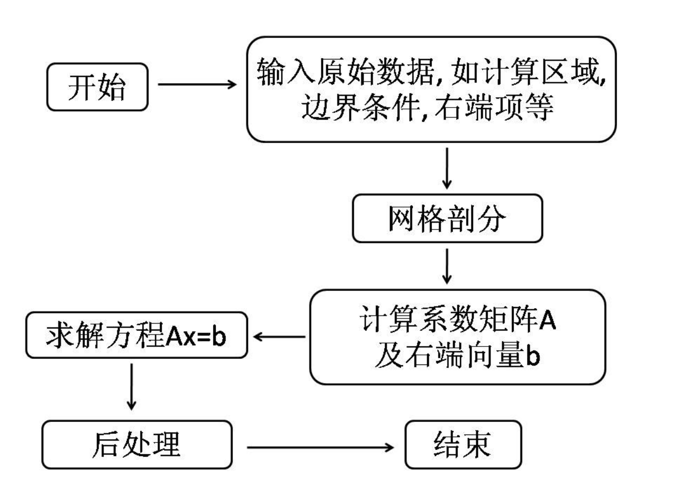
其相应的Jacobi迭代算法为:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Gauss-Seidel迭代算法为:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

算法流程


开始
输入原始数据，如计算区域，边界条件，右端项等
网格剖分
计算系数矩阵A及右端向量b
求解方程Ax=b
后处理
结束

后处理包括：误差估计，可视化，$\cdots$

记误差向量 $e = (e_1, \cdots, e_{n-1})^T \in R^{n-1}$，其中 $e_i = u(x_i) - u_i$ 为真解与数值解在网格节点 x_i 处的误差.

为了度量误差，引入如下**范数**(其证明见后面的理论部分)

$$||e||_C = \max_{1 \le i \le n-1} |e_i|, \quad ||e||_0^2 = \sum_{i=1}^{n-1} h e_i^2, \quad ||e||_1^2 = ||e||_0^2 + |e|_1^2$$

其中

$$|e|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} h \left(\frac{e_i - e_{i-1}}{h}\right)^2$$

对于两点边值问题(5)-(6)，以下是相应的Matlab代码

```
function [x,U] = FD1d_bvp(N, f, a, b,u)

%**********************************************************************80
%% FD1d_bvp 利用中心差分格式求解两点边值问题.
%
%   参数:
%     输入参数:
%                   整数 N, 网格节点数.
%
%                   函数f( x ), 计算右端函数 f(x);
%
%                   a, 计算区间左端点
%
%                   b, 计算区间右端点
%
%                   u, 真解函数
%     输出参数:
%                   差分解向量U.

%
%   均匀剖分区间[a,b], 得到网格x(i)=a+(i-1)*(b-a)/(N-1)
%
```

```
  h=(b-a)/(N-1);
  x = (a:h:b)';
%
%  创建线性差分方程组系数矩阵
%

   c1 = -1/h/h;
   c2 = 2/h/h;
   g = [c1*ones(1,N-2), 0];
   c = [0, c1*ones(1,N-2)];
   d = [1, c2*ones(1,N-2), 1];
   A = diag(g, -1)+diag(d)+diag(c,1);
%
%  创建线性差分方程组右端项
%
  rhs = f(x);
  rhs(1) = u(x(1));
  rhs(N) = u(x(N));
%
%  求解上述代数系统.
%
  U = A \ rhs;
end
```

算例 1：我们利用有限差分法去求解

$$
\begin{gathered}
-u''(x) = 16\pi^2 \sin(4\pi x), \\
u(0) = 0, \quad u(1) = 0.
\end{gathered}
$$

问题的真解为

$$
u(x) = \sin(4\pi x)
$$

下面给出相应的数值实验代码

```
function f=f(x)

f=16*pi*pi*sin(4*pi*x);

end
```

```
function u=u(x)

u=sin(4*pi*x);

end
```

```
function [e0,e1,emax] = FD1d_error(x,U,u_exact)
%% FD1D_ERROR 计算有限差分误差
%
%
%   参数:
%      输入参数:
%             x, 网格节点坐标向量
%          ,上的有限差分数值解向量Ux
%             u_exact, 真解函数
%      输出参数:
%             ,范数误差e0L2
%          e1, 范数误差H1
%          ,无穷范数误差emaxL
```

```
  N = length(x);
  h = (x(end) - x(1))/(N-1);
  ue=u_exact(x);% 真解在网格点处的值x
  ee=ue-U;

  e0 = h*sum(ee.^2);
  e1 = sum((ee(2:end)-ee(1:end-1)).^2)/h;
  e1 = e1+e0;

  e0 = sqrt(e0);
  e1 = sqrt(e1);
  emax=max(abs(ue-U));
end

 %% 测试脚本 FD1d_bvp_test.m

 % 初始化相关数据
  N = [6,11,21,41,81];
  L = 0;
  R = 1;
  emax = zeros(5,1);
  e0 = zeros(5,1);
  e1 = zeros(5,1);

  %% 求解并计算误差
```

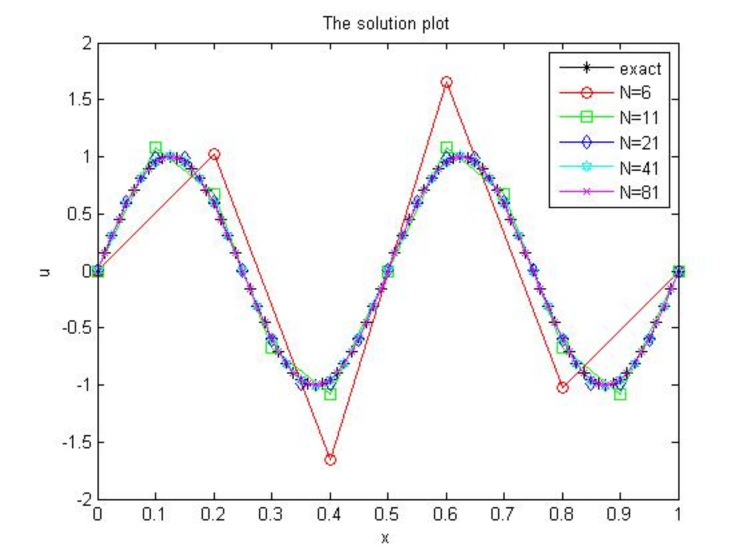
```
for i = 1:5
    [x,U] = FD1d_bvp(N(i),@f,L,R,@u);
    [e0(i),e1(i),emax(i)]=FD1d_error(x,U,@u);
    X{i} = x;
    UN{i} = U;
end
ue = u(X{5});

%% 显示真解及不同网格剖分下的数值解
plot(X{5}, ue, '-k*', X{1}, UN{1}, '-ro', X{2},...
    UN{2}, '-gs', X{3}, UN{3}, '-bd',...
    X{4}, UN{4}, '-ch',X{5},UN{5},'-mx');
title('The solution plot');
xlabel('x');  ylabel('u');
legend('exact','N=6','N=11','N=21','N=41','N=81');

%% 显示误差
format shorte
disp('     emax            e0           e1');
disp([emax, e0, e1]);
```

运行脚本测试脚本：

```
>> FD1d_bvp_test
      emax            e0            e1
  7.0935e-001   5.2740e-001   5.0435e+000
  1.3569e-001   1.0089e-001   1.1903e+000
  3.1916e-002   2.3729e-002   2.9427e-001
  8.2654e-003   5.8445e-003   7.3376e-002
  2.0587e-003   1.4557e-003   1.8332e-002
```

相邻粗细网格上的误差之比见下表：

N	6	11	21	41	81
$\|u-U\|_c$	0.7093	0.1357	0.0319	0.0083	0.0021
误差比	-	5.23	4.25	3.84	3.95
$\|u-U\|_0$	0.5274	0.1009	0.0237	0.0058	0.0015
误差比	-	5.23	4.25	4.08	3.87
$\|u-U\|_1$	5.0158	1.1860	0.2933	0.0731	0.0183
误差比	-	4.23	4.04	4.01	3.99


The solution plot
exact
N=6
N=11
N=21
N=41
N=81
u
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

上机实践：利用有限差分法去求解

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + u(x) &= f(x),\\
u(-1) = 0, \quad u(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

真解为

$$u(x) = e^{-x^2}(1 - x^2)$$

适定性、稳定性与收敛性

针对差分格式 (14) 和 (15):

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=f_i,\ \ i=1,\cdots,n-1$$

$$u_0=\alpha,\qquad u_n=\beta$$

或其等价式 (见(17))

$$\begin{cases} d_0u_0+c_0u_1=\alpha; \\ a_iu_{i-1}+d_iu_i+c_iu_{i+1}=f_i,\ \ i=1,\cdots,n-1; \\ a_nu_{n-1}+d_nu_n=\beta \end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} a_i=-\dfrac{1}{h^2},\ \ d_i=\dfrac{2}{h^2},\ \ c_i=-\dfrac{1}{h^2}, i=1,\cdots,n-1; \\ d_0=1;\ \ c_0=0;\ \ d_n=1;\ \ a_n=0 \end{cases} \tag{19}$$

讨论

1. 适定性：解向量的存在唯一性.
2. 稳定性：解向量连续依赖于右端向量 $f_i,\ i=1,\cdots,n-1$ 和边值 α,β.
3. 收敛性：当 $h\to 0$ 时，数值解向量是否收敛于真解向量，即

$$U_{n-1}=(u_1,\cdots,u_{n-1})^T \ \to \ (u(x_1),\cdots,u(x_{n-1}))^T?$$

4. 收敛速度：当 $h\to 0$ 时，收敛的快慢！

下面关于线性代数方程组 (18) (或差分格式 (14) 和 (15))，回答上述理论问题.

截断误差

记

$$[Lu]_i := -\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x_i} \qquad L_h u_i := -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

由(7)和(13)，有

$$R_i(u) = L_h u(x_i) - [Lu]_i \tag{20}$$

可见：$R_i(u)$ 为 x_i 处用差分算子 L_h 代替微分算子 L 所产生的误差，称之为差分方程 (14) 的截断误差.

由 (12) 可知：若 $u \in C^4(\bar{I})$，则有 (习题 1)

$$|R_i(u)| \leq Ch^2, \; i = 1, \cdots, n-1 \tag{21}$$

其中 $C = \max\limits_{x \in \bar{I}} \left|\frac{d^4u(x)}{dx^4}\right|$ 是与 h 无关的正常数.

网函数的概念

(1) 记内节点集合和所有节点的集合

$$I_h = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\},\ \bar{I}_h = \{x_0, x_n\} \cup I_h$$

(2) 称定义在 I_h 上的函数为 I_h 上的网函数, 记 V_{n-1} 为所有 I_h 上的网函数所构成的线性空间 (简称I_h 上的网函数空间). 对 $\forall v_h \in V_{n-1}$, 记

$$v_i = v_h(x_i),\ \ i = 1, \cdots, n-1$$

注: 类似的可定义 $\bar{I}_h$ 上的网函数空间 V_{n+1}.

对于任意 $v_h \in V_{n-1}$，引入如下(网函数)范数(习题 2^*)

$$||v_h||_C = \max_{1 \le i \le n-1} |v_i| \tag{22}$$

$$||v_h||_0^2 = \sum_{i=1}^{n-1} h v_i^2 \tag{23}$$

$$||v_h||_1^2 = ||v_h||_0^2 + |v_h|_1^2 \tag{24}$$

其中

$$|v_h|_1^2 = \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right)^2 \tag{25}$$

今后若不特别说明，用 $||\cdot||$ 表示上述三种范数中的某一种.

下面定义几种特殊的网函数.

1. 真解网函数：由于真解函数 u 的定义域为 $[a,b]$，特别在 I_h 上有定义，称 u 是 I_h 上的限制函数为真解网函数，不妨仍将其记为 u.
2. 差分解(网)函数：称由差分解 U_{n-1} 所确定的网函数 u_h 为差分解(网)函数，即 u_h 满足 $u_h(x_i)=u_i,\ i=1,\cdots,n-1$.
3. 截断误差(网)函数：称由截断误差向量 $(R_1(u),\cdots,R_{n-1}(u))^T$ 所确定的网函数R_h^u 为截断误差(网)函数，即有 $R_h^u(x_i)=R_i(u),\ i=1,\cdots,n-1$.
4. 误差(网)函数：记在 x_i 处的误差 $e_i=u(x_i)-u_i$. 称由误差向量 $(e_1,\cdots,e_{n-1})^T$ 所确定的网函数 e_h 为误差(网)函数，即有 $e_h(x_i)=e_i,\ i=1,\cdots,n-1$.

收敛性的概念

定义 1 称差分解 u_h 收敛到边值问题的解 u，如果当 h 充分小时，(14), (15) 的解 u_h 存在，且有

$$\lim_{h\to 0} ||e_h|| = 0 \tag{26}$$

可以证明误差(网)函数 e_h 满足如下差分方程

$$\begin{cases} L_h e_i = R_i(u), & i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ e_0 = e_n = 0, \end{cases} \tag{27}$$

事实上，注意 $e_i = u(x_i) - u_i$，以及

$$L_h u(x_i) = f_i + R_i(u), \quad L_h u_i = f_i$$

所以

$$L_h e_i = R_i(u).$$

相容性的概念

为了保证差分解的收敛性，需要求 (27) 所对应的差分算子 L_h 满足一定条件.

定义 2 设 $\mathcal{M}$ 是某一充分光滑的函数类，R_h^u 是截断误差（网）函数. 若对任何 $u \in \mathcal{M}$,恒有

$$\lim_{h \to 0} ||R_h^u|| = 0, \tag{28}$$

则说差分算子 L_h 逼近微分算子 L，而称 (28) 为相容条件.

由 (21) 知：若 $u \in \mathcal{M} := \{v : v \in C^4(\bar{I})\}$，则 L_h 所对应的截断误差函数满足

$$||R_h^u||_C = O(h^2),\ ||R_h^u||_0 = O(h^2),\ ||R_h^u||_1 = O(h).$$

即 L_h 满足相容条件.

关于相容条件的证明 (设 $u \in C^4(\bar{I})$).

仅证明以下估计式成立 ($||R_h(u)||_C = O(h^2)$ 可类似证得)

$$||R_h^u||_0 = O(h^2), \ ||R_h^u||_1 = O(h)$$

为此，仅需证得

$$||R_h^u||_0^2 = O(h^4), \ |R_h^u|_1^2 = O(h^2)$$

注意 $R_i(u) = O(h^2)$ (见 (12)), 因此

$$\begin{aligned} ||R_h^u||_0^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} hR_i(u)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} hO(h^4) \\ &= (n-1)hO(h^4) = O(1)O(h^4) = O(h^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_h^u|_1^2 &= \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{R_i(u) - R_{i-1}(u)}{h}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{O(h^2) - O(h^2)}{h}\right)^2 \\ &= nhO(h^2) = O(h^2) \end{aligned}$$

稳定性的概念

定义 3 称差分方程

$$\begin{cases} L_h v_i = f_i, & i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ v_0 = v_n = 0, \end{cases}$$

关于右端稳定，如果存在与网格 I_h 及右端 f_h 无关的正常数 M 和 h_0，使

$$\|v_h\| \le M\|f_h\|_R, \quad 当 0 < h < h_0, \tag{29}$$

其中，网函数 f_h 和 v_h 满足

$$f_h(x_i) = f_i, \ v_h(x_i) = v_i, \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$\|f_h\|_R$ 是关于右端网函数 f_h 的某一范数，它可以和 $\|\cdot\|$ 相同，也可以不同.

(29) 通常称为关于差分方程的先验估计.

由 (29) 可导出结论：解 v_h 连续依赖右端 f_h，即右端变化小时解的变化也小.

事实上，设 $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$ 是差分方程 (14), (15) 相应于右端$f_h^{(1)}, f_h^{(2)}$ 的解，则 $v_h = u_h^{(1)} - u_h^{(2)}$ 满足

$$L_h v_i = f_i^{(1)} - f_i^{(2)}, \quad v_0 = v_n = 0$$

这里 $v_i = v_h(x_i)$, $f_i^{(l)} = f_h^{(l)}(x_i)$, $u_i^{(l)} = u_h^{(l)}(x_i)$, $l = 1, 2.$
由 (29)可知

$$\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\| = \|v_h\| \leq M\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\|_R.$$

$\square$

适定性理论

定理 1 若满足齐次边值条件(即$\alpha = 0 = \beta$)的差分方程 (14) (或(18)) 关于右端稳定 (29), 则差分解存在且唯一.

事实上, 只需证明 (14), (15) 相应的齐次方程组

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ u_0 = u_n = 0, \end{cases}$$

只有零解. 注意由于这时 $f_h = (f_1, \cdots, f_{n-1})^T = (0, \cdots, 0)^T$, 从而

$$\|f_h\|_R = 0$$

由此及 (29) 可知

$$\|u_h\| = 0 \Leftrightarrow u_i \equiv 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$$

收敛性理论

定理 2 若差分方程关于右端稳定，即满足 (29)，则有误差估计式

$$\|e_h\| \leq M\|R_h^u\|_R \tag{30}$$

其中 M 是不依赖 h 的正常数. 进一步，若边值问题的解 u 充分光滑，差分方程按 $\|\cdot\|_R$ 满足相容条件， 则差分解 u_h 按 $\|\cdot\|$ 收敛到边值问题的解，且有和 $\|R_h^u\|_R$ 相同的收敛阶.

收敛性理论

事实上，注意误差（网）函数 $e_h = u - u_h$ 所满足的差分方程 (27)，所以利用 (29) 知 (30) 成立.

进一步，由(30) 及差分方程按 $\|\cdot\|_R$ 满足相容条件，可得

$$\lim_{h\to 0} ||e_h|| \leq M \lim_{h\to 0} \|R_h^u\|_R = 0$$

即差分解 u_h 按 $\|\cdot\|$ 收敛到边值问题的解，且且 $||e_h||$ 和 $\|R_h^u\|_R$ 具有相同的收敛阶. $\square$

极值定理和稳定性理论

先给出线性代数方程组 (18) 和 (19) (或差分方程 (14), (15))的系数矩阵 A 的若干性质:

1. A 为稀疏矩阵: 每行最多 3 个非零元素.
2. A 的对角元素是正的, 非对角元是非正的.
3. 对角占优性

$$d_i - |a_i| - |c_i| = d_i + a_i + c_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

极值定理

定理 3 (极值定理) 若

$$L_h u_i \le 0 \ (\text{或}\ L_h u_i \ge 0),\ \ i = 1, \cdots, n-1$$

则 u_i 不可能在内点取正的极大 (或负的极小), 除非

$$u_i \equiv \text{常数}, i = 0, \cdots, n$$

反证法. 只证明 $L_h u_i \le 0$ 的情况, $L_h u_i \ge 0$ 的情形完全类似.

设 u_i 在某内节点 x_{i_0} $(1 \le i_0 \le n-1)$ 处取正的极大值 M, 且 u_i 不恒为常数. 由于

$$\begin{aligned} 0 \ge L_h u_{i_0} &= a_{i_0} u_{i_0-1} + d_{i_0} u_{i_0} + c_{i_0} u_{i_0+1} \\ &\ge (a_{i_0} + d_{i_0} + c_{i_0}) M \ge 0 \end{aligned} \tag{31}$$

由此可知: 只有当

$$u_{i_0-1} = u_{i_0+1} = M$$

才不会产生矛盾. 这意味着 u_i 在节点 x_{i_0-1} 和 x_{i_0+1} 处也取正的极大值 M.

对节点 x_{i_0-1} 和 x_{i_0+1} (如果是内节点) 重复上述做法, 并不断继续此过程(注意网格节点间的连通性), 则可证明 u_i 在所有的节点处均取正的极大值 M, 这就与 u_i 不恒为常数发生矛盾. □

习题 3: 利用极值定理证明差分方程 (14), (15)的适定性.

习题 4: 若

$$L_h u_i = f_i \geq 0 \text{ (或 } \leq 0) \quad i = 1, \cdots, n-1$$

且

$$u_0 \geq 0 \text{ (或 } \leq 0); \; u_n \geq 0 \text{ (或 } \leq 0)$$

则

$$u_i \geq 0 \text{ (或 } \leq 0), \; i = 1, \cdots, n-1$$

习题 5* 试证明 A 的逆矩阵是非负矩阵.
A^{-1} 为非负矩阵等价于: 对任意非负向量 $F = (f_1, \cdots, f_{n-1})^T$, 线性代数方程组 $AU = F$ 的解向量

$$U = (u_1, \cdots, u_{n-1})^T = A^{-1}F \geq 0$$

定理 4 (比较定理) 设序列 (对应于网函数) $\{u_i\}_{i=0}^n$ 和 $\{U_i\}_{i=0}^n$, 满足

$$|L_h u_i| \leq L_h U_i, \quad i = 1, \cdots, n-1; \quad |u_0| \leq U_0, \quad |u_n| \leq U_n$$

则

$$|u_i| \leq U_i, \quad i = 0, \cdots, n.$$

证明：注意到

$$|L_h u_i| \leq L_h U_i \;\Leftrightarrow\; -L_h U_i \leq L_h u_i \leq L_h U_i$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} L_h(u_i - U_i) \leq 0, \\ L_h(u_i + U_i) \geq 0 \end{cases} \tag{32}$$

同样

$$|u_0| \leq U_0,\ |u_n| \leq U_n$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u_0 - U_0 \leq 0, \\ u_0 + U_0 \geq 0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} u_n - U_n \leq 0, \\ u_n + U_n \geq 0 \end{cases} \tag{33}$$

(32) 和 (33) 等价于

$$\begin{cases} L_h(u_i - U_i) \le 0, & i = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 - U_0 \le 0, & u_n - U_n \le 0. \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} L_h(u_i + U_i) \ge 0, & i = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 + U_0 \ge 0, & u_n + U_n \ge 0. \end{cases}$$

利用习题 4, 有

$$\begin{cases} u_i - U_i \le 0, \\ u_i + U_i \ge 0, \end{cases} \quad i = 1, \cdots, n-1$$

$\Leftrightarrow$

$$|u_i| \le U_i, \ i = 0, \cdots, n$$

□

习题 6 (关于边界值的稳定性)

试证明差分方程

$$\begin{cases} L_h u_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1 \\ u_0 = \alpha, \quad u_n = \beta \end{cases}$$

的解 $\{u_i\}$ 满足估计式

$$\|u_h\|_C = \max_{1\le i\le n-1} |u_i| \le \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

稳定性理论

定理 5 (关于右端稳定性定理) 满足齐次边值条件的差分方程 (14) (或(18), 其中 $\alpha = 0 = \beta$)的解 u_i 满足估计式

$$\|u_h\|_C = \max_{1\le i\le n-1} |u_i| \le M\|f_h\|_C$$

其中, M 为与 h 无关的正常数.

证明: 令 $r = \max\{|a|, |b|\}$, 构造序列

$$U_k = \frac{\|f_h\|_C}{2}(r^2 - x_k^2) \ge 0, \ \ k = 0, \cdots, n$$

对于每个内节点 $x_i \in I_h$, 由 (18) 和(19), 有

$$
\begin{aligned}
L_h U_i &= d_i U_i + a_i U_{i-1} + c_i U_{i+1} = \frac{1}{h^2}[2U_i - U_{i-1} - U_{i+1}] \\
&= \frac{\|f_h\|_C}{2h^2}\left[2(r^2 - x_i^2) - (r^2 - x_{i-1}^2) - (r^2 - x_{i+1}^2)\right] \\
&= \frac{\|f_h\|_C}{2h^2}[-2x_i^2 + (x_i - h)^2 + (x_i + h)^2] \\
&= \|f_h\|_C \geq |f_i| = |L_h u_i|
\end{aligned}
$$

又注意在边界节点处有

$$
|u_0| = 0 \leq U_0, |u_n| = 0 \leq U_n
$$

故由比较定理有 $(M = \frac{r^2}{2})$

$$
|u_i| \leq U_i = \frac{\|f_h\|_C}{2}(r^2 - x_i^2) \leq M\|f_h\|_C, i = 1, \cdots, n-1
$$

收敛性结论

结合定理 5 和定理 2 (由定理 5 知其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_C = \|\cdot\|_R$) 可得误差估计式

$$\|e_h\|_C \leq M\|R_h^u\|_C \tag{34}$$

其中, M 为与 h 无关的正常数.

由前面可知：截断误差的收敛阶在以下三种范数下分别为

$$||R_h^u||_C = O(h^2),\ ||R_h^u||_0 = O(h^2),\ ||R_h^u||_1 = O(h)$$

因此，利用 (34)，有

$$\|e_h\|_C = O(h^2)$$

一阶、二阶导数的差分逼近，FD=前向差分，BD=后向差分，CD=中心差分

导数	有限差分逼近	类型	误差
u_x	$\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)$
	$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$-\frac{u_{i+2}+4u_{i+1}-3u_i}{2\Delta x}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{3u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{2\Delta x}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+8u_{i+1}-8u_{i-1}+u_{i-2}}{12\Delta x}$	CD	$O(\Delta x)^4$
u_{xx}	$\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{(\Delta x)^2}$	FD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^2}$	BD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^2$
	$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i-2}}{12(\Delta x)^2}$	CD	$O(\Delta x)^4$

习题 7* 在一般网格剖分下，对微分方程

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases}$$

其中(设 p_0 是不依赖 x 的正常数)

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0$$

1) 建立中心差分格式;

2) 导出误差估计式.

习题 8* 在均匀网格剖分下，对二维 Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u|_{\partial\Omega} = \alpha \end{cases}$$

1) 建立中心差分格式;

2) 导出误差估计式.