简明泛函分析

熊锐

2018 年 1 月 26 日

纸张大小: A5

编译时间: 2018 年 1 月 26 日

主要参考文献如下.

- Conway. A course in Functional analysis.
- Rudin. Functional analysis.
- 张恭庆林源渠. 泛函分析讲义.
- 江泽坚. 泛函分析.

Contents

Chapter 1

Banach 空间

1.1 度量空间

定义 1.1 (距离空间) 对于集合 X, 称映射 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个距离, 当

(1) 对任意 $x \in X$, $d(x,x) \geq 0$. *(正定性)*

(2) 对任意 $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$. *(对称性)*

(3) 对任意 $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. *(三角不等式)*

称 (X, d) 为一个距离空间.

定义 1.2 对于距离空间 X, $Y, Z \subseteq X$, 可以定义 Y 到 Z"距离"

$$d(Y,Z) := \inf\{d(y,z) : y \in Y, z \in Z\}$$

特别地, $d(x,Y)$ 是 $d(\{x\},Y)$ 的简写.

命题 1.3 对于距离空间 X, $x \in X$, $Y \subseteq X$,

$$d(x, Y) = 0 \iff x \in \overline{Y}$$

证明 易知, $d(x, Y) = 0$ 意味着也可以取 $y_n \in Y$ 使得 $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$, 从而 x 的任何邻域都与 Y 有交点, 故 $x \in \overline{Y}$. 反之亦然. □

定义 1.4 (完备) *若 X 是距离空间, 对于序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$,*

- *依距离***收敛***到 $x_0 \in X$ 当*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \mathrm{s.\,t.}\, n > N \Rightarrow d(x_n, x_0) < \epsilon$$

并记为 $x_n \to x_0$.

- ***Cauchy**, 当*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \mathrm{s.\,t.}\, m, n > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

若翻 Cauchy 列皆收敛于某一额 $x_0 \in X$, 则称 X **完备**.

命题 1.5 对于完备距离空间 X, $Y \subseteq X$ 作为子空间也完备当且仅当 Y 是闭集.

证明 只要取极限不出 Y 即可. □

命题 1.6 对于距离空间 X, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, 则

(1) 若 $x_n \to x_0 \in X$, 则 $\{x_n\}$*Cauchy*.

(2) 对 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$, $x_n \to x_0 \iff$ 有子列 $x_{n_k} \to x_0$.

证明 (1) 预先取 $\epsilon/2$, 则

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

(2)$\Rightarrow$ 方向显然. 反之, 若有子列 $\{a_{n_k}\}$Cauchy, 取 $\epsilon/2$, 则

$$d(x_m, x_0) \leq d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon$$

只要挑选恰当的 n_k 即可. □

1.2 Banach 空间

我们假设 $\mathbb{K}$ 指的是 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 之中的一个.

定义 1.7 (Banach 空间) *对于 $\mathbb{K}$-向量空间 V, 称映射 $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ 是***一个范数**, *当*

(1) *对任意 $x \in V$, $||x|| \geq 0$, 且 $||x|| = 0 \iff x = 0$.* *(正定性)*

(2) *对任意 $x, y \in V$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.* *(三角不等式)*

(3) *对任意 $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.* *(齐次性)*

*其中 $|\lambda|$ 是 $\mathbb{K}$ 上的绝对值. 称 $(V, ||\cdot||)$ 为一个***赋范线性空间**.

显然, $d(x, y) = ||x - y||$ 是 V 上的一个距离, 称之为范数诱导的距离.

若在诱导的距离意义下是完备的, 则称 V 为 ***Banach* 空间**.

记号 1.8 *对于赋范向量空间 X, 记 $\operatorname{ball} X$ 为单位开球 $\{x \in X : ||x|| < 1\}$.*

命题 1.9 *对于 Banach 空间, $||\cdot||$, 加法, 数乘都是连续的.*

证明 因为对于距离空间, 距离是连续的. 而对于运算连续根据定义容易验证. $\square$

命题 1.10 (Weierstrass 判别法) 一个赋范线性空间 V 完备当且仅当如下的 ***Weierstrass*** **判别法**成立. 对序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 且

$$\left|\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right|\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|$$

证明 容易根据 Cauchy 得到 Weiestrass 判别法, 如下

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} x_i\right|\right| \leq \sum_{i=n}^{m} ||x_i||$$

反之, 对于 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, 可以找 $n(k)$ 单调递增趋于无穷使得

$$||x_{n(k+1)} - x_{n(k)}|| < \frac{1}{2^k}$$

此时

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n(k+1)} - x_{n(k)})$$

根据 Weierstrass 判别法, 这是收敛的, 即 $a_{k(n)}$ 收敛. $\square$

完备性的一个最为重要推论是到闭子集的距离总是可以取到.

命题 1.11 对于 *Banach* 空间 X, $x \in X$, 闭集 $C \subseteq X$, 则

$$\exists c \in C, \text{s.t.}\, d(x, C) = d(x, c)$$

证明 可以取 c_n 使得 $d(x, C) \leq ||x - c_n|| \leq d(x, C) + \frac{1}{n}$, 容易验证, $\{c_n\}$Cauchy, 故 $c_n \to c \in C$. 此时

$$d(x, C) = d(x, c) = ||x - c||$$

命题得证. $\square$

1.3 Hilbert 空间

定义 1.12 (Hilbert 空间) 对于 $\mathbb{K}$-向量空间 V, 称自身的配合 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ 是一个**内积**, 当

(1) 对任意 $x\in V$, $\langle x,x\rangle\geq 0$, 且 $\langle x,x\rangle=0\iff x=0$. *(正定性)*

(2) 对任意 $x,y\in V$, $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$. *(共轭对称性)*

(3) 对任意 $x,y,z\in V,\lambda\in\mathbb{K},x\in V$, $\langle x+\lambda y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\lambda\langle y,z\rangle$. *(线性性)*

其中 $\bar{\cdot}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的共轭. 称 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为**一个内积空间**.

称 $x,y\in V$ **正交**, 当 $\langle x,y\rangle=0$, 记为 $x\perp y$. 对于 $X\subseteq V$, 记 $X^{\perp}=\{y\in V:\forall x\in X,x\perp y\}$.

显然, $||x||:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 是 V 上的一个范数, 称为内积诱导的范数.

若在诱导的范数下, V 是完备的, 则称 V 为 ***Hilbert* 空间**.

定理 1.13 (Cauchy-Schwarz 不等式) 对于内积空间 X, 任何 $x,y\in X$, 有

$$\langle x,y\rangle\leq||x||\cdot||y||$$

且取到等号当且仅当 x,y 共线, 即存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得 $x=\lambda y$ 或 $y=\lambda x$.

证明 注意到

$$0\leq\langle y+\lambda x,y+\lambda x\rangle=|\lambda|^2\langle y,y\rangle+2\operatorname{Re}(\lambda\langle x,y\rangle)+\langle x,x\rangle \qquad (*)$$

我们可以通过转动 λ,

$$\operatorname{Re}(\lambda\langle x,y\rangle)=|\lambda\langle x,y\rangle|=|\lambda|\cdot|\langle x,y\rangle|$$

此时 $(*)$ 是关于 $|\lambda|$ 的二次函数, 因为恒非负, 从而判别式

$$4\left<x,y\right>^2-4\left<x,x\right>\left<y,y\right>\leq 0$$

整理即得. $\square$

Cauch-Schwarz 不等式给出了范数对内积的约束.

命题 1.14 (勾股定理) *对于内积空间 X, 任何两两正交的元素 $x,y,\ldots\in X$, 都有*

$$||x+y+\ldots+z||^2=||x||^2+||y||^2+\ldots+||z||^2$$

命题 1.15 (平行四边形法则) *对于内积空间 X, 任何 $x,y\in X$, 都有*

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$$

证明 直接展开得

$$\begin{aligned}||x+y||^2&=||x||^2+2\operatorname{Re}\left<x,y\right>+||y||^2\\||x-y||^2&=||x||^2-2\operatorname{Re}\left<x,y\right>+||y||^2\end{aligned}$$

得证. $\square$

平行四边形法则给出了范数对加法和减法的约束.

1.4 子空间

命题 1.16 *对于 Banach 空间 X, 子空间 $Y\subseteq X$, 将范数限制在 Y 上使得 Y 依旧成为一个 Banach 空间当且仅当 Y 是闭的.*

证明 因为根据条件, 只要 Cauchy 列收敛在 Y 里即可. $\square$

推论 1.17 *任何有限维子空间必然是闭子空间.*

命题 1.18 对于内积空间 X, $Y \subseteq X$, 则 $Y^{\perp}$ 是闭子空间.

证明 是子空间显然. 闭集需要注意到

$$Y^{\perp} = \bigcap_{y \in Y} \{z \in X : \langle y, z \rangle = 0\}$$

每一个被交项均是一个闭集. □

命题 1.19 对于赋范线性空间 X, 闭子空间 Y, 有限维子空间 Z, 则 $Y + Z$ 是闭子空间.

证明 不妨假设 Z 是一维空间 $\langle z \rangle$, 且 $z \notin Y$. 若序列 $y_n + \lambda_n z \to x \in X$, 对序列 $y_n \in Y, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

先证明 λ_n 有界. 否则, 可以找子列使得 $0 < \lambda_n \to \infty$, 通过替换不妨假设这个子列就是 a_n, 此时

$$\frac{y_n + \lambda_n z}{\lambda_n} = \frac{y_n}{\lambda_n} + z \to 0 \quad \text{i.e.} \quad -\frac{y_n}{\lambda_n} \to z$$

从而 $z \in M$, 矛盾.

于是 λ_n 有子列收敛. 同样, 通过替换, 假设 $\lambda_n \to \lambda$, 则

$$y_n = (y_n + \lambda_n z) - (\lambda_n z) \to x - \lambda z$$

故 $x - \lambda z \in Y$, 从而 $x \in Y + \langle z \rangle$. 命题得证. □

命题 1.20 对于赋范线性空间 X, 若 $Y \subseteq X$, 则 Y 生成的闭子空间为 $\overline{\langle Y \rangle}$.

证明 首先, 容易验证, 因为加法和数乘是连续的, 子空间的闭包是闭子空间, 故 Y 生成的闭子空间 $\subseteq \overline{\langle Y \rangle}$. 反之显然. □

命题 1.21 对于 *Hilbert* 空间 X, $x \in X$, 闭子空间 $Y \subseteq X$, 则

$$\exists! y_0 \in Y \text{ s.t. } d(x, Y) = d(x, y_0)$$

且 y_0 还是唯一满足任意 $y \in Y$, $y \perp x - y_0$ 的 Y 中元素.

证明 记 $d(x, Y) = d$. 首先, 存在性我们已经在 (1.11) 论证过.

唯一性. 不妨假设 $x = 0$, 否则, 有两个 y_0, y_0', 从图中看, y_0, y_0' 所夹的三角形的中线显然更短一些, 根据平行四边形法则, 这条中线 $\frac{y_0+y_0'}{2}$, 终点还落在 Y 中, 从而

$$d \le \left|\left|\frac{y_0 + y_0'}{2}\right|\right| = \frac{1}{2}(||y_0|| + ||y_0'||) \le d$$

于是根据平行四边形法则

$$||\frac{y_0 - y_0'}{2}||^2 = ||y_0||^2 + ||y_0'||^2 - ||\frac{y_0 + y_0'}{2}||^2 = 0$$

从而 $y_0 = y_0'$.

正交性. 从图中看, 就是只要往某个方向移动一点就会让距离更小产生矛盾. 这次, 不妨假设 $y_0 = 0$. 注意到, 对任意 $y \in Y$,

$$d^2 \le ||y - x||^2 \le ||y||^2 - 2\operatorname{Re}\langle y, x\rangle + ||x||^2$$

于是

$$2\operatorname{Re}\langle y, x\rangle \le ||y||^2$$

将 y 绕 $y_0 = 0$ 旋转, 可以得到

$$||y||^2 \le 2\langle y, x\rangle \le ||y||^2$$

令 y 沿某一方向趋向 0, 由于两边同为二阶无穷小, 中间为一阶, 这迫使中间为 0, 故正交. 正交性的唯一性来自于勾股定理 (1.14). □

命题 1.22 对于 *Hilbert* 空间 X, 若 $Y \subseteq X$, 则 Y 生成的闭子空间为 $(Y^{\perp})^{\perp}$.

证明 我们先证明

任何闭子空间 Y, 都有 $Y = (Y^{\perp})^{\perp}$. 否则有 $x \in (Y^{\perp})^{\perp}$ 使得 $d(x,Y) = d > 0$, 根据 (1.21), 存在 $y_0 \in Y$ 使得 $d(x,y_0) = ||x-y_0|| = d$. 此时 $x - y_0 \perp y$ 对任何 $y \in Y$. 从而 $x - y_0 \in Y^{\perp}$, 从而根据定义 $x - 0 \perp x - y_0 \perp y_0$, 故, 由 $x, y_0, 0$ 组成的三角形必然退化, 迫使 $x - y_0 = 0$, 产生矛盾.

Y 生成的闭子空间为 $(Y^{\perp})^{\perp}$. 设生成的闭子空间为 T, 首先注意到, $(Y^{\perp})^{\perp}$ 是一个闭子空间, 且 $Y \subseteq (Y^{\perp})^{\perp}$. 故 $T \subseteq (Y^{\perp})^{\perp}$. 反之, $Y \subseteq T$, 故

$$Y^{\perp} \supseteq T^{\perp} \quad \Rightarrow \quad (Y^{\perp})^{\perp} \subseteq (T^{\perp})^{\perp} = T$$

得证. $\square$

1.5 商空间

定义 1.23 (商空间) 对于赋范线性空间 X, 子空间 Y, 在商空间 X/Y 上可以定义

$$||x+Y|| := d(x,Y) = \inf\{||z|| : z \in x+Y\} = \inf_{y \in Y} ||x+y|| = d(x,Y)$$

为 x 到 Y 的“距离”.

命题 1.24 对于赋范线性空间 X, 子空间 Y, 则商空间 X/Y 上的 $||\cdot||$ 是范数 $\iff$ 子空间 Y 是闭集.

证明 根据范数定义的第一条, 若要成为范数,

$$x \in \overline{Y} \iff d(x,Y)=0 \iff ||x+Y||=0 \iff x \in Y$$

故 $Y=\overline{Y}$ 是闭集. 反之, 要验证几条, 第一条类似上面的论证, 第二条需要注意到

$$||x_1+Y||+||x_2+Y|| \leq |x_1+y_1+x_2+y_2| = |x_1+x_2+(y_1+y_2)|$$

因为 $Y+Y=Y$ 对右边取下确界有

$$||x_1+x_2+Y||$$

第三条容易. □

命题 1.25 对于赋范线性空间 X, 闭子空间 Y, 若序列 $x_n \to x_0$, 则 $x_n+Y \to x_0+Y$.

证明 仅仅因为 $||x_n-x_0+Y|| \leq ||x_n-x_0||$. □

命题 1.26 对于赋范线性空间 X, 闭子空间 Y, 则任何 $x+Y \in X/Y$, 任意的 $\epsilon>0$, 总存在 $x_0 \in x+Y$ 使得

$$||x+Y|| \leq ||x_0|| \leq (1+\epsilon)||x+Y||$$

特别地, 总存在 $x_0 \in x+Y$ 使得

$$||x+Y|| \leq ||x_0|| \leq 2||x+Y||$$

证明 当 $x+Y=0$ 时, 取 $x=0$. 否则 $||x+Y||>0$ 利用下确界的定义, 甚至对任意 δ 可以取 x_0 使得

$$||x+Y|| \leq ||x_0|| \leq ||x+Y||+\delta$$

取 $\delta=\epsilon||x+Y||$ 即可. □

推论 1.27 对于赋范线性空间 X, 闭子空间 Y,

$$\mathrm{ball}(X/Y) = \pi(\mathrm{ball}\, X)$$

其中 $\pi X \to X/Y$ 为自然映射.

命题 1.28 对于赋范线性空间 X, 闭子空间 Y, 在商空间 X/Y 中

$$x_n + Y \to x_0 + Y$$

则对任意 $x_0' \in x_0 + Y$, 存在 $x_n' \in x_n + Y$, 使得

$$x_n' \to x_0'$$

证明 通过平移, 只需要对 $x_0' = 0$ 讨论, 此时, 在 (1.26) 取 $\epsilon = 1$ 立刻得证. $\square$

命题 1.29 对于 *Banach* 空间 X, 闭子空间 Y, 则 X/Y 也是 *Banach* 空间.

证明 我们用 Weierstrass 判别法 (1.10) 论证. 对于序列 $\{x_n + Y\}_{n=1}^{\infty}$, 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n + Y|| < \infty$$

则根据 (1.26) 可以假定 $||x_n|| \leq 2||x_n + Y||$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 此时根据 (1.25), $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + Y$ 收敛. 命题得证. $\square$

Chapter 2

有界线性算子

2.1 有界线性算子

定义 2.1 (算子, 泛函) 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, Y, 线性映射 $F : X \to Y$ 被称为一个**线性算子**. 特别地, $Y = \mathbb{K}$ 时, F 被称为**线性泛函**.

定义 2.2 (有界线性算子) 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 定义

$$||A|| = \sup_{x \in X \setminus 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

特别地, 定义对于零算子 O, $||O|| = 0$. 若 $||A|| < \infty$, 则称 A 为**有界线性算子**.

命题 2.3 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 则

$$\begin{aligned} ||A|| &:= \sup_{x\in X\setminus 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{x\in X:||x||=1} ||Ax|| \\ &= \sup_{x\in X:||x||\leq 1} ||Ax|| = \sup_{x\in X:||x||<1} ||Ax|| \\ &= \min\{\lambda > 0 : \forall x \in X, ||Ax|| \leq \lambda||x||\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \forall x \in X, ||Ax|| < \lambda||x||\} \end{aligned}$$

如果 Y 还是内积空间, 则还有

$$\begin{aligned} ||A|| &:= \sup_{x\in X, y\in Y:||x||=||y||=1} \langle Ax, y\rangle \\ &= \sup_{x\in X, y\in Y:||x||=||y||\leq 1} \langle Ax, y\rangle \\ &= \sup_{x\in X, y\in Y:||x||\leq 1, ||y||\leq 1} \langle Ax, y\rangle = \dots \\ &= \min\{\lambda > 0 : \forall x \in X, y \in Y, \langle Ax, y\rangle \leq \lambda||x|| \cdot ||y||\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \forall x \in X, y \in Y, \langle Ax, y\rangle < \lambda||x|| \cdot ||y||\} \end{aligned}$$

证明 第一个等号是定义. 前四个等号是因为下面的等式

$$\frac{||Ax||}{||x||} = \frac{||A(\lambda x)||}{||\lambda x||}$$

第二个和第三个等号是取 $\lambda = \frac{1}{||x||}$ 即可. 第四个等号需要注意到可以取 $\lambda = 1 - \frac{1}{n}$ 将 $||x|| = 1$ 调整到单位球内, 再取极限. 第五个等号是上确界即最小上界的意思.

关于内积的部分, 需要注意到, 根据 Cauchy 不等式,

$$\langle Ax, y\rangle \leq ||Ax|| \cdot ||y|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$$

故 $\sup_{x,y\in X:||x||=||y||=1} \langle Ax, y\rangle \leq ||A||$. 反之, 对单位向量 x 取 $y = Ax$, 则

$$||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle \leq ||Ax|| \sup_{x,y\in X:||x||=||y||=1} \langle Ax, y\rangle$$

若 $Ax = 0$, 则 $||Ax|| \leq \langle Ax, y\rangle$ 自动成立故 $||Ax|| \leq \langle Ax, y\rangle$, 命题得证.
□

推论 2.4 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 则

$$\forall x \in X, ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

如果 Y 还是内积空间, 则还有

$$\forall x \in X, y \in Y, \langle Ax, y \rangle \leq ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$$

命题 2.5 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 则下列命题是等价的

(1) A 是连续的.

(2) A 在某一点处连续.

(3) A 在 0 连续.

(4) A 将有界集映为有界集.

(5) A 是有界线性算子.

证明 (1) 推 (2) 显然, (2) 推 (3), (2) 或 (3) 推 (1) 只需利用平移是同胚的事实. (3) 推 (4) 需要注意到连续的定义, 存在 $\epsilon > 0$ 使得以 ϵ 为半径的 X 中的球 $\epsilon \operatorname{ball} X$ 映入 Y 中单位球 $\operatorname{ball} Y$. 此时, X 的任意有界集 $Z \subseteq X$, 都可以取充分大的 λ 使得 $Z \subseteq \lambda(\epsilon \operatorname{ball} X)$ 此时根据线性性

$$A(Z) \subseteq \lambda f(\epsilon \operatorname{ball} X) \subseteq \lambda \operatorname{ball} Y$$

(4) 推 (5). 只需要设 A 将单位球 $\operatorname{ball} X$ 映入 $M \operatorname{ball} Y$, 则

$$\forall ||x|| < 1, \quad ||Ax|| < M$$

从而 $||A|| < \infty$.

(5) 推 (3) 需要注意到, $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$. □

定义 2.6 对于赋范线性空间 X, Y, 记全体 $X \to Y$ 的有界线性算子为 $\mathcal{L}(X, Y)$. 特别地, $X = Y$ 时, 记为 $\mathcal{L}(X)$. $Y = \mathbb{K}$ 时, 记为 $X^\wedge$, 称为 X 的**对偶空间**.

命题 2.7 对于赋范线性空间 X, Y, $\mathcal{L}(X, Y)$ 在算子的范数下是赋范线性空间. 且, 若 Y 完备, 则 $\mathcal{L}(X, Y)$ 也完备.

证明 注意到, $||A|| = 0$, 意味着 A 为零算子. 且对于 $||x|| = 1$,

$$||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq ||A|| + ||B||$$

从而 $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$. 齐次性是显然的.

下面论证完备性. 对于 Cauchy 列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则对于任意的 $||x|| = 1$, $\{A_n x\}$ 是 Cauchy 列, 设其收敛于 $Ax \in Y$, 我们证明 $A_n \to A$. 对于 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得 $m, n > N$ 时,

$$||A_n - A_m|| < \epsilon$$

从而任何 $||x|| = 1$ 有

$$||A_n x - A_m x|| < \epsilon$$

令 $m \to \infty$, 有

$$||A_n x - Ax|| < \epsilon$$

对 x 取上确界得 $||A_n - A|| < \epsilon$, 命题得证. □

命题 2.8 对于赋范线性空间 X, Y, Z, 线性算子 $A : X \to Y, B : Y \to Z$, 则

$$||B \circ A|| \leq ||B|| \cdot ||A||$$

证明 容易. □

命题 2.9 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A: X \to Y$, 则 $\ker A$ 是闭集.

证明 显然, 因为 ker 是闭集 $\{0\}$ 的原像. $\square$

定理 2.10 (同态基本定理) 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A: X \to Y$, 这诱导了一个映射

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \exists! \text{单射} \hat{A} X/\ker f \to Y \\ \mathrm{s.t.}\ \hat{A} \circ \pi = A \end{array} & \begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker A \arrow[ur, "\hat{A}"'] & \end{tikzcd} \end{array}$$

其中 $\pi: X \to X/\ker f$ 是自然映射. 且 $||\hat{A}|| = ||A||$.

证明 唯一的选择是 $\hat{A}: x + \ker f \mapsto Ax$, 根据 (1.27), 自然有 $||\hat{A}|| = ||A||$. $\square$

下面的证明中用一些后文才会证明的定理, 第一次阅读可以跳过.

命题 2.11 对于 *Banach* 空间 X, Y, 线性算子 $A: X \to Y$, 则 $\operatorname{im} A$ 是闭的当且仅当下方有界

$$\exists \lambda > 0, \mathrm{s.t.}\ \lambda d(x, \ker A) \le ||Ax||$$

特别地, 当 A 是单射时, $\operatorname{im} A$ 是闭的当且仅当**下方有界**

$$\exists \lambda > 0, \mathrm{s.t.}\ \lambda ||x|| \le ||Ax||$$

证明 下面论证 im 的部分. 首先, 通过考虑 $X/\ker A$, 我们只需考虑 A 是单射的情况.

充分性. 若 $Ax_n \to y \in Y$, 则从而 $\{Ax_n\}$Cauchy, 从而根据下方有界性, $\{Ax_n\}$ 将 x_n 控制住, 故 x_n 也 Cauchy, 设 $x_n \to x$, 则 $Ax_n \to Ax \in \operatorname{im} A$, 从而 $\operatorname{im} A$ 是闭集.

必要性. 此时 $A: X \to \operatorname{im} A$ 是有界的双射, 从而根据逆映射定理 (6.15), A 的逆也连续, 则 A 的逆的范数即原命题的 λ. □

2.2 Hilbert 空间上的算子

命题 2.12 (Riesz 表示定理) 对于内积空间 X, 一个有界线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$, 则存在唯一的 $x_0 \in X$ 使得 $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$.

证明 当 $f \neq 0$ 时, $M = \ker f$, 是余 1 维的闭子空间. 我们要找一个向量和它做内积恰好杀掉 M. 直接找向量 $x_0 \in M^\perp \setminus \{0\}$, 通过调整系数不妨假设 $f(x_0) = ||x_0||^2$, 此时, 任何 $x \in X$, 都有

$$f(||x_0||^2 x - f(x)x_0) = f(x) \cdot ||x_0||^2 - f(x) \cdot ||x_0||^2 = 0$$

从而 $||x_0||^2 x - f(x)x_0 \in M$, 从而

$$0 = \left\langle ||x_0||^2 x - f(x)x_0, x_0 \right\rangle \quad \text{i.e.} \quad ||x_0||^2 \langle x, x_0 \rangle = L(x) \langle x_0, x_0 \rangle$$

因为 $x_0 \neq 0$, 两边同时消去 $||x_0||^2$ 得证. □

命题 2.13 对于内积空间 X, Y, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则存在唯一的 $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ 使得

$$\forall x \in X, y \in Y, \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

且 $||A|| = ||A^*||$.

证明 由 Riesz 表示定理, 对于每个 y, $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ 定义了一个有界线性泛函, 从而存在唯一的 $A^* x \in X$ 使得 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$. A^* 线性根据 Riesz 表示定理的唯一性. 下面要验证有界, 注意到 (2.3)

$$||A^*|| \leq ||A|| \qquad \because |\langle A^* y, x \rangle| = |\langle Ax, y \rangle| \leq ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$$

然后注意到 $(A^*)^* = A$, 因为

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \iff \langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$$

从而得到另一边即可得到范数的另一边. □

定义 2.14 (共轭算子) *称上定理定义的* A^* *为* A *的***共轭算子**.

命题 2.15 *对于内积空间* $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$,

(1)$A \mapsto A^*$ *是* $\mathcal{L}(X, Y)$ *上的保距的共轭线性算子.*

(2)$(AB)^* = B^*A^*$.

(3) 若 A *可逆,* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明 直接验证. □

命题 2.16 *对于 Hilbert 空间* X, $A \in \mathcal{L}(X)$, *有* $||A|| = ||A^*A||^{1/2} = ||AA^*||^{1/2}$.

证明 注意到, 对单位向量 x,

$$||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \le ||A^*A||$$

故 $||A||^2 \le ||A^*A|| \le ||A|| \cdot ||A^*|| = ||A||^2$. □

命题 2.17 *对于 Hilbert 空间* X, $A \in \mathcal{L}(X)$, *有*

$$\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$$

证明 首先,

$$Ax = 0 \Rightarrow \langle x, A * y\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0$$

从而 $\ker \subseteq (\operatorname{im} A^*)^\perp$. 反之, 若

$$\forall x \in X, \langle A^*x, y\rangle = 0 \quad \text{i. e.} \quad \langle x, Ay\rangle = 0 \iff Ay = 0$$

命题得证. □

定义 2.18 对于 *Hilbert* 空间 X, $A \in \mathcal{L}(X)$, 定义

- A 是**自伴的**, 当 $A^* = A$.
- A 是**正规的**, 当 $A^*A = AA^*$.
- A 是**正定的**, 当 $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.
- A 是**正交的**, 当 $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

命题 2.19 对于 $\mathbb{C}$-*Hilbert* 空间 X, $A \in \mathcal{L}(X)$ 是自伴的, 当且仅当 A 是实定的, 即 $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ 对任何 $x \in X$.

证明 首先, A 自伴时, $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$, 为实数.

反之, 考虑二次型的完全平方公式

$$\langle A(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle = \langle Ax, x \rangle + |\lambda|^2 \langle Ay, y \rangle + \overline{\lambda} \langle Ax, y \rangle + \lambda \langle Ay, x \rangle$$

将取共轭相消得

$$\begin{aligned} \lambda \langle Ay, x \rangle + \overline{\lambda} \langle Ax, y \rangle &= \overline{\lambda \langle Ay, x \rangle} + \lambda \overline{\langle Ax, y \rangle} \\ &= \overline{\lambda} \langle x, Ay \rangle + \lambda \langle y, Ax \rangle \\ &= \lambda \langle A^* y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle A^* x, y \rangle \end{aligned}$$

再取 $\lambda = 1, i$, 可得 $\lambda, \overline{\lambda}$ 前系数相等, 即

$$\langle Ax, y \rangle = \langle A^*, x, y \rangle$$

从而是自伴的. □

推论 2.20 $\mathbb{C}$ 上的正定算子阶自伴.

命题 2.21 对于 $\mathbb{C}$-*Hilbert* 空间 X, X 上的自伴算子 A, 有

$$||A|| = \sup_{||x||=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

证明 根据 (2.3), 对于 $||x|| = 1$, 容易得到一边.

$$\langle Ax, x\rangle \leq ||A||$$

而另一边, 设右边为 M, 考虑二次型的完全平方公式

$$\langle A(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle \pm \langle Ax, y\rangle \pm \langle Ay, x\rangle$$

此时 $A^* = A$, 故

$$\langle A(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle \pm 2\,\mathrm{Re}(\langle Ax, y\rangle)$$

带入得

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{Re}\,\langle Ax, y\rangle \quad &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle \\ &\leq M(||x+y||^2 + ||x-y||^2) \\ &= 2M(||x||^2 + ||y||^2) = 4M \end{aligned}$$

通过让 x 旋转一个角度可以使得

$$||\,\langle Ax, y\rangle\,|| \leq M$$

另一边得证. □

2.3 紧算子

定义 2.22 (紧算子) *对于 Banach 空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$ 被称为**紧算子**, 如果 $\overline{A(\mathrm{ball}\,X)}$ 是紧致的.*

换句话说, 任何有界序列 $\{x_n\} \subseteq X$, $\{Ax_n\} \subseteq Y$ 都有收敛子列 (从而是有界的).

记 X, Y 之间全体紧算子为 $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$.

命题 2.23 对于 *Banach* 空间 X, Y, Z, W, 关于紧算子有

(1) $\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的闭子空间.

(2) $\mathcal{L}(X,Y)\circ\mathcal{C}(Y,Z)\circ\mathcal{L}(Z,W)\subseteq\mathcal{C}(X,W)$. 即紧算子的复合还是紧算子.

证明 (1) 这里要用一些距离空间的常识[1], 假设 $\{A_n\}\subseteq\mathcal{C}(X,Y)$ 收敛到 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$. 对于 $\epsilon>0$, 可以取 $N>0$, 使得

$$||A_N - A|| < \frac{\epsilon}{3}$$

可以取 $\epsilon/3$-网 $A_N x_1, \ldots, A_N x_n$, 使得

$$A_N(\operatorname{ball} X)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} A_N x_i + \frac{\epsilon}{3}\operatorname{ball} Y$$

此时, 若 $||x||<1$, 假设 $A_N x\subseteq A_N x_i + \frac{\epsilon}{3}\operatorname{ball} Y$, 则

$$||Ax - Ax_i|| \leq ||A_N x - A_N x_i|| + ||(A_N - A)x|| + ||(A_N - A)x_i|| < \epsilon$$

从而 $A(\operatorname{ball} X)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} A_N x_i + \epsilon\operatorname{ball} Y$. 故 A 是紧算子.

(2) 线性算子把有界集映为有界集, 把收敛序列映为收敛序列. $\square$

命题 2.24 对于 *Banach* 空间 X, Y, X 的闭子空间 M, Y 的闭子空间 N, 记

$$\pi: X\to X/M\text{是自然映射}\qquad \iota: N\to Y\text{是包含映射}$$

若算子 $A: X\to Y$, $\hat{A}: X/M\to N$ 使得 $\iota\circ\hat{A}\circ\pi = A$, 则

$$\begin{array}{c|c}
\begin{array}{c} A\text{ 是紧算子} \\ \Longleftrightarrow \\ \hat{A}\text{ 是紧算子} \end{array} &
\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\Updownarrow"] & Y \\ X/M \arrow[r, "\hat{A}"'] & N \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}
\end{array}$$

[1]度量空间的子集是紧致的当且仅当对任意 $\epsilon>0$ 存在有限 ϵ-网

证明 根据 (1.27), $\mathrm{ball}(X/M) = \pi(\mathrm{ball}\, X)$, 而在 N 中收敛 $\iff$ 在 Y 中收敛. $\square$

命题 2.25 *对于 Banach 空间的紧算子 $A : X \to Y$, 若 X 中网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 弱收敛, 即*

$$\forall f \in X^\wedge, \{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in A} \subseteq \mathbb{R}\text{收敛}$$

则 $\{Ax_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 依范数收敛.

证明 假设 $x_\alpha \overset{wk}{\to} x$. 若不依范数收敛, 则存在子网 $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$||Ax_{\alpha(n)} - Ax|| > \frac{1}{n} \tag{$*$}$$

根据一致有界原理 (6.20), $\{x_\alpha\}$ 有界, 从而 $\{Ax_{\alpha(n)}\}$ 有收敛子列, 且容易验证 $Ax_{\alpha(n)} \overset{wk}{\to} Ax$, 从而这个收敛子列收敛到 Ax, 这与 $(*)$ 矛盾. $\square$

命题 2.26 *可逆算子是紧算子当且仅当空间是有限维.*

证明 通过复合自己的逆, 得到恒等算子是紧的, 也就是说单位球是列紧的. 我们可以找 x_1 使得 $1/2 < ||x_1|| < 1$, 再找 $x_2 \notin \langle x_1\rangle$, 使得

$$1/2 < d(x_2, \langle x_1\rangle) \le ||x_2|| < 1$$

再找 $x_3 \notin \langle x_1, x_2\rangle$, 使得

$$1/2 < d(x_3, \langle x_1, x_2\rangle) \le ||x_3|| < 1$$

若为无穷维可以一直找下去, 那么 $\{x_n\}$ 就是一个无收敛子列的有界序列. $\square$

Chapter 3

补空间, 投影算子与基

3.1 补空间与投影算子

本节需要使用第6章的定理, 第一次阅读可以跳过.

定义 3.1 (补空间) 对于 $Banach$ 空间 X, 闭子空间 A, B, 若

$$X \cong A \oplus B$$

在代数和拓扑的意义下, 则称 A 是 B 的补. 其中 $A \oplus B$ 的范数是

$$||(a,b)|| = ||a|| + ||b||$$

命题 3.2 对于 $Banach$ 空间 X, 闭子空间 A, B, 若

$$A \cap B = \{0\} \qquad A + B = X$$

则 A 是 B 的补.

证明 代数意义不必说, 拓扑意义则是要验证,

$$\varphi : A \oplus B \to X \qquad (a, b) \mapsto a + b$$

是同胚. 注意到 $A \oplus B$ 的范数为 $||a|| + ||b||$.

$$||a + b|| \leq ||a|| + ||b|| = ||(a, b)||$$

于是 φ 是连续双射, 从而根据逆映射定理 (6.15), 是同胚. $\square$

命题 3.3 *对于 Banach 空间 X, 若 $P : X \to X$ 满足 $P^2 = P$, 则 $\ker P = \mathrm{im}(1 - P)$ 与 $\mathrm{im}\, P = \ker(1 - P)$ 互补.*

反之, 任何可补子空间 X 都对应某个这样的算子. 称这样的算子为 **投影算子**.

证明 注意到,

$$Px = 0 \Rightarrow x - Px = x \Rightarrow x \in \mathrm{im}(1 - P) \Rightarrow x = y - Py \Rightarrow Px = 0$$

所以 $\ker P = \mathrm{im}(1 - P)$. 以及

$$(1 - P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - P$$

依旧是幂等的, 所以同理得 $\mathrm{im}\, P = \ker(1 - P)$. 而 $\ker P$ 与 $\mathrm{im}\, P = \ker(1 - P)$ 都是闭的, 且根据线性代数, $\mathrm{im}(1 - P)$ 与 $\mathrm{im}\, P$ 是直和.

反之, 若 A 与 B 互补, 取投影算子

$$\begin{array}{rrcl} P: & X \cong A \oplus B & \to & X \\ & (a, b) & \mapsto & a \end{array}$$

这显然是有界线性算子, 此时 $P^2 = P$, $\ker P = P$. $\square$

命题 3.4 *对于 Banach 空间 X, Y, 有界线性算子 $A : X \to Y$, 则*

(1) A 有左逆当且仅当 $\ker A = 0$, $\operatorname{im} A$ 闭且可补.

(2) A 有右逆当且仅当 $\operatorname{im} A = Y$, $\ker A$ 可补.

证明 必要性都是容易的. (1) 的充分性. 显然, A 需要是单射. 设左逆为 $B : Y \to X$, 则

$$\operatorname{im} A = B^{-1}(X)$$

势必是闭的. 而 $AB : Y \to Y$ 恰给出 Y 到 $\operatorname{im} A$ 的投影算子, 更具体地, $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(AB)$ 和 $\operatorname{im}(1 - AB)$ 互补.

(2) 的充分性. 显然, A 需要是满射. 设右逆为 $B : Y \to X$, 则

$$\ker(1 - BA) = \ker A$$

则 $1 - BA$ 给出 $\ker A$ 的投影算子. 更具体地, $\ker A = \ker BA$ 和 $\ker(1 - BA)$ 互补. $\square$

命题 3.5 对于 *Banach* 空间, 有限维子空间是可补的.

证明 根据线性代数, 可以挑选这个空间的一组基 $\{e_i \in W\}$ 以及其对偶基 $\{f_i : W \to \mathbb{K}\}$ 满足 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. 利用 Banach 扩张定理 (6.2), 可以将 f_i 延拓到 $X \to \mathbb{K}$ 上, 滥用记号, 将延拓之后的算子仍然记作 $\{f_i : X \to \mathbb{K}\}$.

取 $V = \bigcap_i \ker f_i$, 这是闭集的交从而还是闭集, 注意到

$$x = \sum_i f_i(x) e_i \qquad \forall x \in W$$

故 $W \cap V = 0$. 而

$$f_j\left(x - \sum_i f_i(x) e_i\right) = f_j(x) - f_j(x) = 0 \qquad \forall j \forall x \in X$$

从而 $W + V = X$. 命题得证. $\square$

命题 3.6 *对于 Banach 空间 X, 有限余维的闭子空间是可补的.*

证明 设这个子空间为 W, 选取代表元 $\{x_i \in X\}$ 使得 $\{x_i + W\}$ 成为 X/W 的基. 容易验证原像 x_i 线性无关. 记 $M = \langle x_i \rangle$. 由于有限维空间都同构, 故可以作连续映射

$$P : X \to X/W \to M \to P$$

第一个是自然映射, 第二个是有限维空间的同构, 第三个是包含映射. 则 P 是有界线性算子, 且

$$P^2 = P \qquad \operatorname{im} P = M \qquad \ker P = W$$

命题得证. □

3.2 Hilbert 空间上的投影算子

我们下面证明, Hilbert 空间的子空间都是可补的.

定义 3.7 *对于 Hilbert 空间 X, 闭子空间 Y, 对任意 $x \in X$, (1.21) 定义了一个算子 P_Y, 使得 $P_Y(x)$ 是 Y 上距离 x 最近的点. 称这个算子为 $X \to Y$ 的***投影算子***.*

命题 3.8 *对于 Hilbert 空间 X, 闭子空间 Y, 投影算子 P_Y 是有界线性算子. 且*

- *Y 非零时, $||P_Y|| = 1$.*
- *$P_Y^2 = P_Y$.* *(幂等性)*
- *$Y = \operatorname{im} P_Y = \ker(1 - P_Y)$.*

- $x \in Y \iff P_Y x = x$.

- P 是自伴算子.

其中 $1 = \mathrm{id}$ 是单位算子.

证明 线性性来自于 (1.21) 的正交性及其唯一性的论断. 而有界性需要注意到,

$$||P_Y x||^2 = ||x||^2 - ||x - P_Y x||^2 \leq ||x||^2$$

从而 $||P|| \leq 1$. 而 $x \in Y$ 时, 显然 $P_Y x = x$, 从而取到 1. 关于自伴的断言是由于假设

$$x = x_1 + x_2 \qquad y = y_1 + y_2 \qquad x_1, y_1 \in Y, x_2, y_2 \in Y^\perp$$

有

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \ldots = \langle x, Py\rangle$$

其余都容易验证. □

也就是说, 在 Hilbert 空间中, 投影算子和子空间一一对应.

定义 3.9 (补空间) 对于 *Hilbert* 空间 X, 闭子空间 Y, 定义其**补空间**为

$$Y^\perp = \ker P_Y = \mathrm{im}(1 - P_Y)$$

命题 3.10 对于 *Hilbert* 空间 X, 闭子空间 Y, 则

$$X \cong Y \oplus Y^\perp$$

3.3 规范正交基

在本章, 我们将目光放在 Hilbert 空间上.

定义 3.11 (规范正交基) 对于 *Hilbert* 空间 X, 称 $\mathfrak{B} \subseteq X$ 为一组 *[*规范*]* 正交基, 如果

- $\mathfrak{B}$ 中元素两两 *[单位]* 正交. *([单位] 正交)*
- $\mathfrak{B}$ 生成的闭子空间为整个空间 X. *(生成)*

命题 3.12 对于 *Hilbert* 空间 X, 对于 $\mathfrak{B} \subseteq X$, 下列命题是等价的

(1) $\mathfrak{B}$ 是一组 *(单位)* 正交基.

(2) $\mathfrak{B}$ 是满足条件 *([单位] 正交)* 的极大者.

(3) $\mathfrak{B}$ 是满足条件 *(生成)* 的极小者.

证明 (1) $\iff$ (2). 因为 (1.22) 已经刻画过生成的闭子空间, 故 (2) 当且仅当 $\mathfrak{B}^{\perp} = \{0\}$ 当且仅当 (1).

(2)$\Rightarrow$(3). 否则, 有更小者 $\mathfrak{B}$‘, 使得对某个 $x \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}'$ 满足 (根据 (1.20))

$$x = \sum_{e \in \mathfrak{B}'} \lambda_e e \qquad (\text{收敛的可数求和})$$

因为内积连续, 故

$$\exists e_0 \in \mathfrak{B} \left\langle x, e_0 \right\rangle = \sum_{e \in \mathfrak{B}'} \lambda_e \left\langle e, e_0 \right\rangle \neq 0$$

故这与 (2) 矛盾.

(3)$\Rightarrow$(2). 否则, 有更大者 $\mathfrak{B}^{\dagger}$, 设某个 $x \in \mathfrak{B}^{\dagger} \setminus \mathfrak{B}$, 则

$$x = \sum_{e \in \mathfrak{B}} \lambda_e e \qquad (\text{收敛的可数求和})$$

因为内积连续, 故

$$\left\langle x, e_0 \right\rangle = \sum_{e \in \mathfrak{B}'} \lambda_e \left\langle e, e_0 \right\rangle = \lambda_{e_0}$$

这与正交性矛盾. $\square$

推论 3.13 对于 *Hilbert* 空间 X, 对于任何

- $A \subseteq X$ 满足 *([单位] 正交)* 条件.
- $C \subseteq X$ 满足 *(生成)* 条件.
- $A \subseteq C$.

都总存在 *[规范]* 正交基 $\mathfrak{B}$ 使得

$$A \subseteq \mathfrak{B} \subseteq C$$

证明 施以 Zorn 引理, 再单位化. $\square$

推论 3.14 对于 *Hilbert* 空间 X, 单位正交基 $\mathfrak{B}$, 则任何 $x \in X$, 都有唯一的 $\{\lambda_e\}_{e\in\mathfrak{B}}$, 使得只有可数的 λ 非 0, 且

$$x = \sum_{e\in\mathfrak{B}} \lambda_e e$$

事实上, $\lambda_e = \langle x, e\rangle$.

命题 3.15 (维数不变性) 对于 *Hilbert* 空间 X, 若有两组正交基 $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$, 则

$$\#\mathfrak{B} = \#\mathfrak{B}'$$

证明 有限情况是线性代数. 无限情况, 根据 (3.14), 对每个 $x \in \mathfrak{B}$, 找出那些 $\lambda_e \neq 0$ 的 $\mathfrak{B}'$ 中元素. 每个 $\mathfrak{B}$ 中元素, 至多对应可数个 $\mathbb{B}$; 元素, 故

$$\#\mathfrak{B} \leq \#\mathfrak{B}' \times \aleph_0 = \#\mathfrak{B}'$$

再反用一次得到所需结果. $\square$

定义 3.16 对于 *Hilbert* 空间 X, 我们可以定义其**维数** $\dim X = \#\mathfrak{B}$. 其中 $\mathfrak{B}$ 是正交基.

Chapter 4

凸集与拓扑向量空间

4.1 凸集

定义 4.1 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 子集 $C \subseteq X$

- 称 C 为**凸集**当满足
$$\forall x, y \in C, 0 < \lambda < 1, \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$
- 称 C 为**对称的**, 如果
$$\forall x \in C, \qquad -x \in C$$
- 称 C 为**均衡的**, 如果
$$\forall x \in C, |\lambda| = 1, \qquad x\lambda \in C$$
- 称 C 为**吸收的**, 如果
$$\forall x \in X, \exists \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{s.\,t.}\, \lambda x \in C$$

命题 4.2 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 一族凸集 $\{C_i\}_{i\in I}$, 则

- $\bigcap_{i\in I} C_i$ 还是凸集. *(凸集的交还是凸集)*
- 若 $\{C_i\}_{i\in I}$ 还是滤过的, 即 *(滤过凸集的并还是凸集)*

$$\forall C_i, C_j, \exists C_k, \quad \text{s.t.}\, C_i \subseteq C_k, C_j \subseteq C_k$$

  则 $\bigcup_{i\in I} C_i$ 还是凸集.

- 特别地, $\{C_i\}$ 是全序的, 即

$$C_i \subseteq C_j \text{或} C_j \subseteq C_i$$

  则 $\bigcup_{i\in I} C_i$ 还是凸集. *(全序凸集的并还是凸集)*

证明 交给读者验证. □

命题 4.3 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 子集 $S \subseteq X$, 总存在唯一的凸集 $C \subseteq X$ 使得任何凸集 $D \subseteq X$, 都有

$$S \subseteq D \iff C \subseteq D$$

且

$$C = \bigcap\{\text{凸集 } D \supseteq S\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i : s_i \in S, 0 < \lambda_i < 1, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$$

定义 4.4 (Minkowski 泛函) 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 含 0 的凸子集 $C \subseteq X$, 记

$$m : X \to [0, \infty] \qquad x \mapsto \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\right\}$$

称为 ***Minkowski* 泛函**.

命题 4.5 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 含 0 的凸子集 $C \subseteq X$, 其 *Minkowski* 泛函 m 有如下性质

$$m(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in C \quad \Rightarrow \quad m(x) \leq 1$$

命题 4.6 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 含 0 的凸子集 $C \subseteq X$, 其 *Minkowski* 泛函 m 有如下性质

- $m(0) = 0$.
- 对任何 $\lambda > 0, x \in X$, 都有 $m(\lambda x) = \lambda m(x)$. *(正齐次性)*
- 对任何 $x, y \in X$, 都有 $m(x+y) \leq m(x) + m(y)$. *(次可加性)*

证明 前两条容易验证, 最后一条需要注意到任意 ϵ,

$$\frac{x}{m(x)+\epsilon}, \frac{y}{m(y)+\epsilon} \in C$$

于是根据凸性

$$\frac{m(x)+\epsilon}{m(x)+m(y)+2\epsilon} \frac{x}{m(x)+\epsilon} + \frac{m(y)+\epsilon}{m(x)+m(y)+2\epsilon} \frac{y}{m(y)+\epsilon} \in C$$

从而

$$m(x+y) \leq m(x) + m(y) + 2\epsilon$$

根据 ϵ 任意性知 $m(x+y) \leq m(x) + m(y)$. □

命题 4.7 对于 $\mathbb{K}$-线性空间 X, 含 0 的凸子集 $C \subseteq X$, 其 *Minkowski* 泛函 m 有如下性质

- m 有限 $\Longleftrightarrow C$ 为吸收凸集.
- 对任何 $x, y \in X$, $m(\lambda x) = |\lambda| m(x)$ 当 C 为均衡凸集.

证明 若 m 不取 ∞, 意味着取 inf 的集合非空, 即 C 吸收. 而当 C 均衡时, 说明各向同性, 容易验证 $m(\lambda x) = |\lambda| m(x)$. □

4.2 半模

定义 4.8 (半模) 令 X 是一个 $\mathbb{K}$-线性空间, 一个**半模** 是一个映射 $q : X \to [0, \infty]$, 满足

- 对任何 $x, y \in X$, 有 $q(x + y) \le q(x) + q(y)$ *(三角不等式)*
- 对任何 $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, 有 $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$. *(齐次性)*

当 $q(X) \subseteq (0, \infty)$, 称为**有限半模**.

显然, 对半模 $q(x)$, $q(0) = 0$.

命题 4.9 在 $\mathbb{K}$-线性空间中,

- 半模 q 决定了一个含 0 的均衡凸集 $\{x \in X : q(x) < 1\}$.
- 含 0 的均衡凸集 C 决定了一个半模, C 的 *Minkowski* 泛函.
- 半模 q 决定的均衡凸集的 *Minkowski* 泛函为半模 q 本身.

将半模换为有限半模, 均衡凸集换为均衡吸收凸集也对.

证明 对 (有限) 半模 q, 我们验证 $\{x \in X : q(x) < 1\}$ 是均衡 (吸收) 凸集. 均衡 (和吸收) 来自齐次性, 凸性是因为

$$q\left(\lambda x + (1 - \lambda) y\right) \le \lambda q(x) + (1 - \lambda) q(y) < 1$$

对含 0 的均衡 (吸收) 凸集 C, (4.6), (4.7) 表明其 Minkowski 泛函 m 是一个 (有限) 半模.

最后, 半模 q 决定的均衡凸集的 Minkowski 泛函为

$$m : x \mapsto \inf\left\{\lambda > 0 : q\left(\frac{x}{\lambda}\right) < 1\right\} = \inf\{\lambda > 0 : q(x) < \lambda\} = q(x)$$

命题得证. □

也就是说, 在向量空间中均衡 (吸收) 凸集和 (有限) 半模相互决定.

4.3 拓扑向量空间

定义 4.10 对于 $\mathbb{K}$-向量空间 V, 称其为**拓扑向量空间** 如果 V 上有与代数相容的拓扑结构, 即加法和数乘

$$\begin{array}{rccc} +: & V\times V & \to & V \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times V & \to & V \\ & (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

都是连续映射.

命题 4.11 作为推论, 减法是连续映射. 平移和位似都是同胚. 从而任何一点 x 的邻域就是 $x+(0$ 的邻域).

命题 4.12 拓扑向量空间 X 是 *Hausdorff* 的当且仅当

$$\bigcap_{0\text{ 的邻域 }U} U=\{0\}$$

证明 首先, 对于 $x\neq 0$, 根据 Hausdorff 性, 存在 0 的邻域 U 使得 U 与 x 无交. 故总有邻域能分开 x 与 0, 即 $\bigcap_{0\text{ 的邻域 }U} U=\{0\}$.

反之, 要证明 Hausdorff 性, 只要对于 $x\neq 0$ 验证即可. 因为

- 根据条件可以挑选 0 的邻域 U 使得 $x\notin U$.
- 因为加法是连续的, 所以存在 0 的邻域 V,W 使得 $V+W\subseteq U$.
- 因为取符号是连续的, 故 $-W$ 也是 0 的邻域.
- 则 V 与 $x+(-W)$ 无交, 否则 $y=x-w=v$, 则 $x=v+w\in V+W\subseteq U$, 矛盾.

这样便证明了 Hausdorff 性. $\square$

命题 4.13 对于向量空间 X, 若其上有一族半模 $\mathfrak{Q}$, 则通过指定 0 处的邻域子基[1]为

$$\{x \in X : q(x) < \epsilon\} \qquad \epsilon > 0, q \in \mathfrak{Q}$$

这诱导了一个拓扑向量空间. 若 $\mathfrak{Q}$ 满足

$$\bigcap_{q \in \mathfrak{Q}} \{x \in X : q(x) = 0\} = \{0\}$$

则这个拓扑向量空间还是 *Hausdorff* 的.

证明 如上集合显然是可以作为邻域基. 下面验证和代数运算相容,

$$(q(x), q(y) < \epsilon/2 \quad \Rightarrow \quad q(x+y) < \epsilon$$

以及

$$|\lambda| < \epsilon, q(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad q(\lambda x) < \epsilon$$

这说明加法和数乘都是连续的. Hausdorff 性质根据 (4.12). □

定义 4.14 (局部凸) 称拓扑向量空间 X 是**局部凸**的, 当 0 处有凸集组成的邻域基.

命题 4.15 任何局部凸的拓扑向量空间 X 都是如同 *(4.13)* 一样由一族半模诱导的.

证明 先证明局部凸的拓扑向量空间在 0 处有均衡凸集组成的邻域基. 任意给 0 的邻域 U.

- 存在 $\epsilon > 0$ 和 0 的邻域 V 使得

$$\forall |\lambda| < \epsilon, v \in V, \quad \lambda v \in U$$

[1]即其有限交可以作为邻域基

- 因为数乘是连续的, 所以如下集合是开集

$$\{\lambda v : |\lambda| < \epsilon, v \in V\} = \bigcup_{|\lambda|<\epsilon} \lambda V \subseteq U$$

且容易验证, 这是均衡的.

这就证明了在 0 处有均衡凸集组成的邻域基.

取 X 在 0 处的均衡凸集组成的邻域基 $\{U_i\}_{i\in I}$, 对每一个 U_i, 取 Minkowski 泛函 q_i, 根据 (4.9) 这是一个半模, 容易说明, 按 (4.13) 诱导的拓扑就是原本的拓扑. □

定理 4.16 *局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间 X 是可度量化的当且仅当其是由至多可数个半模定义的.*

证明 对于至多可数的半模 $\{p_1, p_2, \ldots\}$, 定义

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y))}{1 + p_n(x-y)}$$

注意到 $\frac{t}{1+t}$ 是 $[0, \infty)$ 到 $[0, 1)$ 的单调同胚. 容易验证, 这是一个度量, 且对应拓扑与原本相同 (证明二者定义的同一点的邻域能够相互包含).

反之, 可度量意味着有可数邻域基, 从而根据 (4.15) 的证明, 可以由至多可数个半模定义. □

定理 4.17 *局部凸的 Hausdorff 拓扑向量空间 X 是可范数化的, 如果存在开集 U 有界. 这里有界指的是如下条件*

对任何 0 的邻域 V, 总存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\epsilon U \subseteq V$

证明 可以通过平移假设这个开集 U 是 0 的邻域, 则上述条件是说, ϵU 可以作为 0 的邻域基. 从而根据 (4.15) 的证明, 其上拓扑可以由一个半模诱导, 假设为 q. 从而根据条件

$$\{x \in X : q(x) < \epsilon\} \qquad \epsilon > 0$$

是 0 处的邻域基. 我们证明 q 是一个范数, 只要验证其正定性. 对于 $y \neq 0$, 根据 Hausdorff 性, 存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$y \notin \{x \in X : q(x) < \epsilon\}$$

从而 $q(x) \geq \epsilon > 0$, 从而得到了正定性. □

4.4 极点

本节需要使用第6章的定理, 第一次阅读可以跳过.

定义 4.18 (极点) 令 C 是向量空间 X 的子集,

- 称 $S \subseteq C$ 是**极集**, 当

$$\forall x, y \in S, 0 < \lambda < 1, \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in S \Rightarrow x, y \in S$$

  即 S 中没有点是线段的内点, 除非线段的端点在其中.

- 称一个点 $c \in C$ 是**极点**, 当 $\{c\}$ 是极集, 即

$$\forall x, y \in S, 0 < \lambda < 1, \quad \lambda x + (1-\lambda)y = c \Rightarrow x = y = c$$

  即 c 不是任何线段的内部.

定理 4.19 (Krein-Milman 定理) 假设 C 是赋范向量空间 X 的紧致凸子集, 则 C 的极点的闭包就是 C 本身.

证明 证明分几步.

找极小的紧致极集. 将 C 的所有非空紧致极集收集起来记为 $\Sigma \ni C$, 容易根据 Zorn 引理和紧致的条件知, 对于任何 $A \in \Sigma$, 其中必有极小元包含于 A, 设为 S, 我们说明这是极点.

证明 S 是单点集. 我们断言, 若 S 是极集, 假设 $f \in X^\wedge$ 在 S 上取到极大值 μ, 则 $f^{-1}(\mu) \cap S$ 也是极集. 这是因为

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in f^{-1}(\mu) \cap S \Rightarrow x, y \in S$$

而若 $x, y \notin f^{-1}(\mu)$, 则 $f(x) < \mu > f(y)$, 则

$$\lambda x + (1-\lambda)y \notin f^{-1}(\mu)$$

矛盾. 根据 (6.6), 因为一开始线性泛函是任意的, 所以必然可以将任意两个点区分开, 从而迫使 S 为单点集.

开始证明. 首先 C 的极点的闭包 $\subseteq C$ 为显然. 反之, 若有 C 中的点 c 不在 C 的极点的闭包中, 则凸集分离定理 (6.8) 保证存在 $f \in X^\wedge$ 分离 c 和 C 的极点的闭包. 即

$$\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(c) \qquad \forall x \in C \text{ 的极点的闭包}$$

因为 K 紧致, 从而 K 在 f 上取得最大值 μ, 从而

$$f^{-1}(\mu) \cap K \in \Sigma$$

根据前面的论证, 有极点. 但 $f^{-1}(\mu) \cap K$ 与 C 的极点的闭包分离, 产生矛盾. $\square$

Chapter 5

对偶空间与弱拓扑

5.1 对偶空间

回忆对偶空间的定理 (2.6).

记号 5.1 对于赋范线性空间 X, $x \in X, f \in X^\wedge$, 记

$$\langle f, x\rangle = \langle x, f\rangle = f(x)$$

这也被视为一种内积.

定义 5.2 (极) 对于赋范线性空间 X,

- 对于 $A \subseteq X$, 定义 A 的**极**为

$$A^\circ = \{f \in X^\wedge : \forall x \in A, |\langle f, x\rangle| \leq 1\}$$

特别地, 当 A 是子空间时, 因为 $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A$, 故

$$A^\circ = A^\perp = \{f \in X^\wedge : \forall x \in A, \langle f, x\rangle = 0\}$$

- 对于 $B \subseteq X^\wedge$, 定义 B 的**极**为

$$^\circ B = \{x \in X : \forall f \in B, |\langle f, x\rangle| \le 1\}$$

特别地, 当 B 是子空间时, 因为 $x \in B \Rightarrow \lambda x \in B$, 故

$$^\circ B = {}^\perp B = \{x \in X : \forall f \in B, \langle f, x\rangle = 0\}$$

命题 5.3 (双极定理) 对于赋范线性空间 X, $A \subseteq X$, 则

$$^\circ(A^\circ) = A \text{ 的闭均衡凸包} = \bigcap \{\text{闭均衡凸集 } C \supseteq A\}$$

证明 容易验证, 对 $B \subseteq X^\wedge$, $^\circ B$ 是均衡凸集, 且

$$^\circ B = \bigcap_{f \in B} \{x \in X : |f(x)| \le 1\}$$

是一个闭集. 且 $A \subseteq {}^\circ A^\circ$ 为显然, 故 $\subseteq$ 方向得证.

反之, 另一个方向只需要证明当 A 是闭集闭均衡凸集时, $^\circ A^\circ \subseteq A$. 取 A 之外一点 x_0, 根据凸集分离定理 (6.8), 存在 $f \in X^\wedge$, 使得

$$|f(x)| \le 1 < |f(x_0)| \qquad \forall x \in A$$

从而 $f \in A^\circ$, 从而 $x_0 \notin {}^\circ(A)^\circ$, 也就是说

$$x \notin A \Rightarrow x \notin {}^\circ A^\circ$$

命题得证. □

定理 5.4 (子空间和商空间的对偶) 对于 *Banach* 空间 X, M 为 X 的闭子空间, 则

(1) X 的子空间的对偶空间和对偶空间的某商空间保距自然同构, 通过

$$\varphi : X^\wedge / M^\perp \to M^\wedge \qquad f + M^\perp \mapsto f|_M$$

(2) X 的商空间的对偶空间和对偶空间的某子空间保距自然同构, 通过

$$\psi : (X/M)^\wedge \to M^\perp \qquad f \mapsto f \circ \pi$$

其中 $\pi : X \to X/M$ 是自然同态.

证明 (1) 先验证良定义性和单射, 对于 $f + M^\perp = 0$, 则 $f \in M^\perp$, 从而 $f|_M = 0$, 故为良定理的单射. 满射是因为根据 Banach 扩张定理 (6.2), 任何 $g :\in M^\wedge$ 都可延拓为 $f \in X^\wedge$, 使得 $f|M = g$. 成为同构是因为逆映射定理 (6.15). 为了验证保距, 只要验证范数相等.

- 首先, 根据定义, 显然 $||f|_M|| \leq ||f||$.
- 其次, Banach 扩张定理 (6.2) 保证了有 $g \in X^\wedge$ 使得 $||f|_M|| = ||g|| \geq ||g + M|| = ||f + M||$, 因为 $g + M^\perp = f + M^\perp$.

(2) 同样, 验证良定义性, $(f \circ \pi)(M) = f(\pi(M)) = f(0) = 0$. 根据 (1.27), 这显然是保距的, 从而自然有单射. 为了看到是满射, 对于任何 $g \in M^\perp$, 因为 $f(M) = 0$, 故 $M \subseteq \ker f$, 故诱导了一个 $f : X/M \to \mathbb{R}$ 的连续同态, 使得 $f \circ \pi = g$. 命题得证. $\square$

如读者所知, 对于有限维向量空间 X, $X^\wedge$ 的维数和 X 的维数相同. 但对无穷维向量空间 X, 一般而言, $X^\wedge$ 会大得多[1]. 下面这个定理说明对偶空间不太大的时候, 原空间也不太大.

命题 5.5 (Banach) *对于赋范线性空间 X, 若 $X^\wedge$ 可分, 则 X 可分.*

证明 交由读者取验证, X 是可分的当且仅当 X 的单位圆周是可分的[2]. 故可以选取 $\{f_n\}$ 使得

$$||f_n|| = 1 \qquad \overline{\{f_n\}} = X^\wedge \text{ 的单位圆周}$$

[1]如果不考虑拓扑结构的话

[2]将单位圆周看成去掉 0 后的一个商空间

可以在 X 的单位圆周上挑选 x_n 使得 $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$, 我们断言 $\{x_n\}$ 可分. 否则将有某个 X 的单位圆周上的点 $x_0 \notin \overline{\langle x_n \rangle}$ 分离, 那么根据 (6.3), 再调整一个系数, 存在泛函 $f_0 \in X^\wedge$ 使得

$$f_0(x_0) > 0 \qquad f_0(x_n) = 0 \qquad ||f_0|| = 1$$

这样, 不会有 $f_n \to f_0$, 因为

$$||f_n - f_0|| \geq ||f_n x_n - f_0 x_n|| > \frac{1}{2}$$

产生矛盾. $\square$

5.2 二次对偶

定义 5.6 (二次对偶) 对于赋范线性空间 X, 我们已经知道 $X^\wedge$ 也是赋范线性空间, 其对偶 $(X^\wedge)^\wedge$ 也是赋范线性空间. $(X^\wedge)^\wedge$ 被称为**二次对偶**, 记为 $X^{\wedge\wedge}$.

定义 5.7 (计算算子) 对于 $x \in X$, $f \in X^\wedge$, 有**计算泛函**

$$\sigma_x : X^\wedge \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto f(x)$$

即

$$\langle \sigma_x, f \rangle = \langle x, f \rangle \qquad x \in X, f \in X^\wedge$$

这显然是连续线性泛函, 这定义了一个自然同态

$$\sigma : X \to X^{\wedge\wedge} \qquad x \mapsto [\sigma_x : f \mapsto f(x)]$$

我们暂且称为**计算算子**.

命题 5.8 对任何赋范线性空间, 计算算子是等距嵌入.

证明 根据 (6.4), $||\sigma_x|| = ||x||$. 因为等距自然是嵌入. $\square$

定义 5.9 (自返空间) 对于赋范线性空间 X, 若计算算子是满射, 即通过 σ, $X \cong X^{\wedge\wedge}$. 则称 X 为**自返空间**.

命题 5.10 *Hilbert 空间都是自返的.*

证明 对于 Hilbert 空间 H, 有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & H^{opop} \arrow[d, "\psi : y \mapsto [x \mapsto \langle x, y\rangle']"] \\
 & H^{op} \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\varphi : y \mapsto [x \mapsto \langle x, y\rangle]"] & (H^{op})^{\wedge} \\
H \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, dashed] & H^{\wedge} \arrow[r, dashed] & H^{\wedge\wedge} \arrow[u, "\varphi^{\wedge}"]
\end{tikzcd}$$

其中 H^{op} 带有的内积是 $\langle x, y\rangle' = \langle y, x\rangle$. 根据 Riesz 表示定理 (2.12), 以上箭头都是双射, 且上下箭头还是赋范线性空间保距同构. 下面我们来计算最右边的箭头, 对于 $x \in H^{opop} = H$, 以及 $x \in H^{op}$ 有

$$\begin{aligned}
&[\psi(y)](x) = \langle x, y\rangle' = \langle y, x\rangle \\
&[\varphi^{\wedge}(\sigma_y)](x) = (\sigma_y)(\varphi(x)) = [\varphi(x)](y) = \langle y, x\rangle
\end{aligned}$$

故同构 $(\varphi^{\wedge})^{-1} \circ \psi$ 正是计算算子 σ. $\square$

5.3 伴随算子

定义 5.11 *对于赋范线性空间 X, Y, 有界线性算子 $A : X \to Y$, 则这诱导了***伴随算子**

$$A^\wedge : Y^\wedge \to X^\wedge \qquad f \mapsto f \circ A$$

也就是说,

$$\langle A^\wedge f, y\rangle = f(Ay) = \langle f, Ay\rangle$$

这个 Hilbert 空间的定义类似.

命题 5.12 *对于赋范线性空间 $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$,*

(1)$A \mapsto A^\wedge$ 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 上的保距线性算子.

(2)$(AB)^\wedge = B^\wedge A^\wedge$.

(3) 若 A 可逆, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明 类似 Hilbert 空间的论证. 关于保距, 首先容易验证 $||A^\wedge|| \leq ||A||$, 其次, 根据 (6.5),

$$||A|| = \sup_{||x||=1,||f||=1} fAx = \sup_{||x||=1,||f||=1} (A^\wedge f)x \leq ||A^\wedge||$$

命题得证. □

命题 5.13 *令 X, Y 为 Banach 空间, 对于 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则*

$$\ker(A^\wedge) = (\operatorname{im} A)^\perp \qquad \ker A = {}^\perp \operatorname{im}(A^\wedge)$$

证明 容易验证

$$A^\wedge f = 0 \iff {}^{\forall x \in X} \langle A^\wedge f, x\rangle \iff {}^{\forall x \in X} \langle f, Ax\rangle \iff f \in (\operatorname{im} A)^\perp$$

另一个论断是类似的. □

命题 5.14 对 *Banach* 空间 X, Y, 闭值域算子 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$,

- A 单射当且仅当 $A^\wedge$ 满射.
- A 满射当且仅当 $A^\wedge$ 单射.
- A 可逆当且仅当 $A^\wedge$ 可逆.

证明 (1,2) 通过单射闭值域算子 A, 可以认为 $X = \operatorname{im} A \subseteq Y$, A 是嵌入映射, 通过满射 A, 可以认为 $Y = X/\ker A$, $A = \pi : X \to X/\ker A$ 是自然映射. 这部分结果我们已经在 (5.4) 论证过.

反之, 当 $A^\wedge$ 是满射时, 从而 $A^{\wedge\wedge}$ 是单射, 限制到 $X \subseteq X^{\wedge\wedge}$ 上有

$$\langle A^{\wedge\wedge}\sigma_x, f\rangle = \langle \sigma_x, A^\wedge f\rangle = \langle x, A^\wedge f\rangle = \langle Ax, f\rangle \qquad \forall f \in Y^\wedge$$

从而 $A^{\wedge\wedge}|_X = A$ 也是单射.

当 $A^\wedge$ 是单射时, 若 A 不满, 则有 $y \in Y \setminus \operatorname{im} A$, 则根据 (6.3), 存在泛函

$$f \in \mathcal{L}(Y, X) \qquad f(\operatorname{im} A) = 0, f(y) \neq 0$$

则

$$\langle A^\wedge f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle = 0 \qquad \forall x \in X$$

但 $f \neq 0$, 这与 $A^\wedge$ 单射矛盾.

(3) 充分性是因为 $(A^{-1})^\wedge = (A^\wedge)^{-1}$.

反之, 若 $A^\wedge$ 可逆, 则 $A^{\wedge\wedge} : X^{\wedge\wedge} \to Y^{\wedge\wedge}$ 可逆, 限制到 $X \subseteq X^{\wedge\wedge}$ 上有

$$\langle A^{\wedge\wedge}\sigma_x, f\rangle = \langle \sigma_x, A^\wedge f\rangle = \langle x, A^\wedge f\rangle = \langle Ax, f\rangle \qquad \forall f \in Y^\wedge$$

从而 $A^{\wedge\wedge}|_X = A$. 同理 $((A^\wedge)^{-1})^\wedge|_Y = (A^{\wedge\wedge})^{-1}|_Y$ 成为 A 的逆. $\square$

命题 5.15 对于 *Banach* 空间之间的算子 A, A 是紧算子 $\iff$ $A^\wedge$ 是紧算子.

证明 这也需要一些度量空间的常识[3]. 记 $A : X \to Y$. 取 $\{f_n\} \in \mathrm{ball}\, Y^\wedge$, 将其视为 Y 的单位圆周上的连续函数, 则一致有界

$$|(T^\wedge f_n)(x)| = |f_n(Tx)| \leq ||T||$$

且等度连续

$$|(T^\wedge f_n)(x-y)| = |f_n(T(x-y))| \leq ||x-y||$$

从而有收敛子列, 将收敛的圆周上的函数线性延拓即可.

反之, 若 $A^\wedge$ 是紧算子, 则 $A^{\wedge\wedge}$ 也是紧算子, 从而通过复合一个嵌入, $A^{\wedge\wedge}|_X = A$ 也是紧算子. □

5.4 弱拓扑

定义 5.16 (弱拓扑) 对于赋范线性空间 X, 考虑如下的拓扑子基

$$\{f^{-1}(U) : f \in X^\wedge, U \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中开集}\}$$

其生成的拓扑被称为 X 上的弱拓扑.

定理 5.17 (弱拓扑结构定理) 对于赋范线性空间 X, 其上的弱拓扑的各种拓扑对象如下

开集 弱拓扑的开集都形如如下集合的有限交

$$f^{-1}(U) \qquad f \in X^\wedge, U \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中开集}$$

[3]即 Ascoli 引理, 函数空间 $C(X)$ 序列有子列收敛 $\iff$ 等度连续且一致有界

邻域 弱拓扑在 0 处的邻域都形如入集合的有限交

$$\{x \in X : |f(x)| < \epsilon\} \qquad f \in X^\wedge, \epsilon > 0$$

换句话说, 弱拓扑是由半模族 $\{|\langle f, -\rangle| : f \in X^\wedge\}$ 定义的, 所以弱拓扑使得 X 称为局部凸拓扑向量空间.

收敛 对于网 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 若 x_α 弱收敛到 x 等价于

$$\forall f \in X^\wedge, \quad f(x_\alpha) \to f(x)$$

记为 $x_\alpha \overset{wk}{\to} x$.

定义 5.18 (弱星拓扑) 对于赋范线性空间 X, 考虑 $X^\wedge$ 上如下的拓扑子基

$$\{\sigma_x^{-1}(U) : x \in X, U \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中开集}\}$$

其中 $\sigma : X \to X^{\wedge\wedge}$ 是计算同态. 其生成的拓扑被称为 X 上的弱星拓扑.

定理 5.19 (弱星拓扑结构定理) 对于赋范线性空间 X, 其上的弱拓扑的各种拓扑对象如下

开集 弱星拓扑的开集都形如如下集合的有限交

$$\sigma_x^{-1}(U) \qquad x \in X, U \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中开集}$$

邻域 弱星拓扑在 0 处的邻域都形如入集合的有限交

$$\{f \in X^\wedge : |f(x)| < \epsilon\} \qquad x \in X, \epsilon > 0$$

换句话说, 弱拓扑是由半模族 $\{|\langle -, x\rangle| : f \in X^\wedge\}$ 定义的, 所以弱拓扑使得 X 称为局部凸拓扑向量空间.

收敛 对于网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 若 x_α 弱收敛到 x 等价于

$$\forall f \in X^\wedge, \quad f(x_\alpha) \to f(x)$$

记为 $x_\alpha \overset{\wedge wk}{\to} x$.

5.5 向量值微积分

本节我们将目光放在 $\mathbb{C}$ 上. 本部分需要一定的复分析.

定义 5.20 (解析) 对 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间 X, 复平面内的区域 $D \subseteq \mathbb{C}$, 若函数 $f : D \to X$ 满足

- 任何 $z \in D$,
$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$
存在, 则称 f **解析**.

- 任何 $g \in X^\wedge$,
$$g \circ f : D \to \mathbb{C}$$
是解析的, 则称 f **弱解析**.

命题 5.21 对 $\mathbb{C}$-*Banach* 空间 X, 复平面内的区域 $D \subseteq \mathbb{C}$, 函数 $f : D \to X$, f 解析 $\iff$ 弱解析.

证明 显然解析蕴含弱解析. 反之, 对任何 $z \in D$, 可以挑选可微边界的区域 C 使得

$$z \in C \subseteq \overline{C} \subseteq D$$

此时, 根据 Cauchy 积分公式, 对任意 $g \in X^\wedge$

$$g(f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C} \frac{g(f(w))}{w - z} \mathrm{d}w$$

此时

$$
\begin{aligned}
& g\left(\frac{(f(z+a)-f(z)}{a}-\frac{f(z+b)-f(z)}{b}\right) \\
= & \frac{g(f(z+a))-g(f(z))}{a}-\frac{g(f(z+b))-g(f(z))}{b} \\
= & \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C}\frac{g(f(w))(a-b)}{(w-z)(w-z-a)(w-z-b)}\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

如果 a, b 足够小, 使得 $z+a, z+b$ 落在 C 内部且和 ∂C 分隔开某一个正数 $\epsilon>0$, 此时

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{g(f(z+a))-g(f(z))}{a}-\frac{g(f(z+b))-g(f(z))}{b}\right| \\
\leq & \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{length}\partial C}{\epsilon^3}||g||\cdot||(f(z))||_{\partial C}|a-b|
\end{aligned}
$$

下面的估计说明

$$
g\left(\frac{1}{|a-b|}\left(\frac{(f(z+a)-f(z)}{a}-\frac{f(z+b)-f(z)}{b}\right)\right)
$$

是有界的. 根据一致有界原理, 存在 $M>0$, 对任何满足条件的 a, b 都有

$$
\left|\frac{f(z+a)-f(z)}{a}-\frac{f(z+b)-f(z)}{b}\right|<M|a-b|
$$

从而任何 $h_n\to 0$, $\left\{\frac{f(z+h_n)-f(z)}{h_n}\right\}$ 是 Cauchy 列, 从而收敛到某一个值, 即

$$
f'(z):=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}
$$

存在. □

评注 5.22 *类比复分析, 我们依旧有 Liouville 定理, Taylor 级数, Laurant 级数等理论. 在此不一一展开.*

Chapter 6

三大定理

6.1 Hahn-Banach 扩张定理

定义 6.1 (次线性泛函) 令 X 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, 一个**次线性泛函** 是一个泛函 $q : X \to \mathbb{R}$, 满足

- 对任何 $x, y \in X$, 有 $q(x+y) \le q(x) + q(y)$ (三角不等式)
- 对任何 $x \in X, \lambda \ge 0$, 有 $q(\lambda x) = \lambda q(x)$. (正齐次性)

再回忆半模的定义 (4.8).

定理 6.2 (Banach 扩张定理) 对于 $\mathbb{R}$[或 $\mathbb{C}$]-线性空间 X, q 是 X 上的次线性泛函 [或半范数], 若子空间 $X_0 \subseteq X$, 其上有泛函 $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$, 满足受控制条件

$$\forall x \in X_0, \quad |f_0(x)| \le q(x)$$

则存在 X 的泛函 f 使得 $f|_{X_0} = f_0$, 且依旧满足受控制条件

$$\forall x \in X, \quad |f(x)| \le q(x)$$

特别地, 当 X 为 *Banach* 空间时, 若 f_0 是有界线性算子, 还可以假定 f 是有界线性算子, 且 $||f_0|| = ||f||$.

证明 关于存在性无疑是标准地使用 Zorn 引理的过程. 我们只要证明可以拓展一维出去即可.

对 $\mathbb{R}$ 的情况 对于 $y \in X \setminus X_0$, 我们要指定 $f(y)$ 的值, 使得对任意 $x \in X_0$

$$-q(x+\lambda y) \leq f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \leq q(x+\lambda y)$$

通过调整一个非零数乘, 只需要 $\lambda = \pm 1$. 这等价于对任意 $x \in X$

$$f(x) - q(x-y) \leq f(y) \leq -f(x) + q(x+y)$$

总可以找到这样的 $f(y)$ 是等价于

$$\sup_{x \in X_0} (f(x) - q(x-y)) \leq \inf_{x \in X_0} (-f(x) + q(x+y))$$

只要验证对任意 $x, x' \in X_0$, 有

$$f(x) - q(x-y) \leq -f(x') + q(x'+y)$$

这始终是正确的, 因为

$$f(x)+f'(x') = f(x+x') \leq q(x+x') = q(x'+y+x-y) \leq q(x'+y)+q(x-y)$$

从而始终可以找到 $f(y)$, 命题得证.

对 $\mathbb{C}$ 的情况. 因为通过 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, 可以将 X 视为 $\mathbb{R}$-线性空间, 因为显然半范数是次线性泛函, 根据 $\mathbb{R}$ 的情况, 存在泛函 $g : X \to \mathbb{R}$ 满足 $g|_{X_0} = \operatorname{Re} f_0$, 且

$$\forall x \in X, \quad |g(x)| \leq q(x)$$

作

$$f(x) = g(x) - ig(ix)$$

则 $f|_{X_0} = f_0$, 且可以通过旋转 θ 角使得 $\mathrm{Re}\, g = |f|$, 此时

$$|f(x)|| = |f(e^{i\theta}x)| = g(e^{i\theta}x) \le p(e^{i\theta}x) = p(x)$$

命题得证.

Banach 空间的情况. 只需要取半范数 $x \mapsto \min(p(x), ||f_0|| \cdot ||x||)$, 容易验证, 这成为一个半范数. 且

$$||f(x)|| \le ||f_0|| \cdot ||x||$$

从而 $||f|| \le ||f_0||$. 而又因为可以取到故等号得证. □

推论 6.3 *对于赋范线性空间 X, 线性子空间 Y, 对于 $x_0 \in X$, 则存在泛函 $f \in X^\wedge$, 使得*

$$f(Y) = 0 \qquad f(x_0) = d(x_0, Y) \qquad ||f|| = 1$$

证明 直接在 $Y + \langle x_0 \rangle$ 上定义 $f_0(y + \lambda x_0) = \lambda d(x_0, Y)$ 注意到

$$f_0(y + \lambda x_0) = \lambda d(x_0, Y) = d(\lambda x_0, Y) = d(y + \lambda x_0, Y) \le ||y + \lambda x_0||$$

可得 $||f_0|| \le 1$, 反之, 通过取序列 $y_n \in Y$ 使得

$$||x_0 - y_n|| \to d(x_0, Y) \qquad \frac{|f_0(-\lambda y_n + \lambda x_0)|}{|| - \lambda y_n + \lambda x_0||} \to 1$$

故 $||f_0|| \ge 1$. 从而根据 Banach 扩张定理 (6.2), 可以延拓出去, 此时 $||f|| = ||f_0|| = 1$. □

推论 6.4 对于赋范线性空间 X, $x \in X$, 则有类比算子范数定义的事实

$$||x|| = \sup\{f(x) : f \in X^{\wedge}, ||f|| = 1\}$$

证明 取上定理 (6.3) 的 $Y = \{0\}$, 可得 $||x|| \leq$ 右边, 而显然, 右边 $\leq ||x||$. $\square$

推论 6.5 对于赋范线性空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 则

$$||A|| = \sup\{fAx : f \in Y^{\wedge}, ||f|| = 1, x \in X, ||x|| = 1\}$$

证明 对任何 $x \in X, ||x|| = 1$,

$$Ax = \sup\{fAx : f \in Y^{\wedge}, ||f|| = 1\}$$

再对 x 取上确界得证. $\square$

推论 6.6 对于赋范线性空间空间 X, 若 $x \neq y$, 则存在 $f \in X^{\wedge}$ 使得 $f(x) \neq f(y)$. 即 f 分离 Y 中的点. 换句话说, 两个向量相等, 当且仅当弱相等.

证明 对 $x - y$ 和空间 $\{0\}$ 用 (6.3), 此时得到的 f 满足

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = ||x - y|| > 0$$

命题得证. $\square$

推论 6.7 对于 *Banach* 空间 X, 子空间 Y, 则 Y 生成的子空间为

$$\{x \in X : \forall f \in X^{\wedge}, (f(M) = 0 \Rightarrow f(x) = 0)\}$$

即子空间的闭包为弱闭包.

证明 一方面生成的子空间必然包含于其中. 反之, 若 x 不在 Y 生成的子空间中, 则 $d(x, Y) > 0$, 此时根据上定理 (6.3) 的 $Y = \{0\}$, 存在泛函 $f \in X^{\wedge}$ 使得 $f(M) = 0$ 但 $f(x) = d(x, Y) > 0$, 从而不在弱闭包之中. $\square$

6.2 凸集分离定理

定理 6.8 (凸集分离定理) 赋范线性空间 X 中若有两个不交的凸集 C_1, C_2, 且其一含有内点. 则存在有界线性泛函 $f \in X^\wedge$ 使得

$$\operatorname{Re} f(C_1) \leq \operatorname{Re} f(C_2)$$

即总存在超平面将其分成两部分. 特别地,

- 如果 C_1 是开的, 可以假设
$$\operatorname{Re} f(C_1) < \lambda \leq \operatorname{Re} f(C_2)$$
- 如果 C_1 紧致, C_2 是闭的则可以假设
$$\operatorname{Re} f(C_1) < \lambda < \lambda' < \operatorname{Re} f(C_2)$$
- 如果 C_1 是均衡的闭集, C_2 是单点集, 还可以进一步假定
$$|f(C_1)| \leq 1 < f(C_2)$$

证明 问题同样需要转化.

C_1 是开的时候. 根据开映射定理 (6.14), C_1 是开集时, $f(C_1)$ 也是, 从而可以取 $\lambda = \sup f(C_1)$.

C_1 紧致, C_2 是闭的情形. 可以选择 ϵ, 使得 $C_1 + \epsilon \operatorname{ball} X$ 与 C_2 分离. 且此时 C_1 是开集, 根据开集的情况有

$$\operatorname{Re} f(C_1) \subseteq \operatorname{Re} f(C_1 + \epsilon) < \lambda'' \leq \operatorname{Re} f(C_2)$$

有由于 $\operatorname{Re} f(C_1)$ 是紧致的, 从而还有可以取 $\lambda = \lambda = \sup f(C_1), \lambda' = \frac{\lambda + \lambda''}{2}$ 满足

$$\operatorname{Re} f(C_1) < \lambda < \lambda' < \operatorname{Re} f(C_2)$$

C_1 是均衡的, C_2 是单点集时. 此时 C_2 紧致, C_1 均衡, 用上面的结论得

$$\operatorname{Re} f(C_2) < \lambda < \lambda' < \operatorname{Re} f(C_1)$$

通过旋转和伸缩, 使得 $\operatorname{Re} f(C_2) = f(C_2)$, 因为 C_1 是均衡的, 所以 $f(C_1) = |f(C_1)|$. 通过调整系数, 分离成功.

只需要证明 C_2 为单点集的情况. 容易验证 $C_1 - C_2$ 是与原点不交的凸集, 则

$$\operatorname{Re} f(C_1 - C_2) < \operatorname{Re} f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{Re} f(C_1) < \operatorname{Re} f(C_2)$$

开始证明 无妨假设 C_1 含有内点, 通过平移, 假设这个内点是 0, 并设 $C_2 = \{x_0\}$. 从而 C_1 是吸收的, 考虑其上的 Minkowski 次泛函 m, 则 $m(x_0) \geq 1$. 在 $\langle x_0 \rangle$ 上定义

$$f(\lambda x_0) = \lambda$$

则无论 λ 正负, 都有 $f(\lambda x_0) \leq m(\lambda x_0)$, 从而根据 (6.2), 存在 $f \in X^\wedge$, 使得 $f(x_0) = 1$, 且

$$f(C_1) \leq m(C_1) \leq 1 = f(x_0) = f(C_2)$$

命题得证. □

推论 6.9 令 C 为赋范线性空间 X 中子集, 则 C 的凸闭包

$$\overline{\operatorname{cov}(C)} = \bigcap \{f^{-1}(B) \supseteq C : f \in X^\wedge, B \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中闭集}\}$$

即凸集的闭包为弱闭包, 一般子集的凸闭包为弱闭包.

证明 记右边是 $\langle C\rangle$. 根据上面的定理容易验证, 对于凸闭集 C, $\overline{C}=\langle C\rangle$. 因为总可以将 C 和单点集 (从而紧致)$x_0\notin C$ 用某个泛函分开一段距离.

然后, 因为 $\langle C\rangle$ 已经是闭凸集, 从而 $\overline{\mathrm{cov}(C)}\subseteq\langle C\rangle$. 反之,

$$C\subseteq\overline{\mathrm{cov}(X)}\quad\Rightarrow\quad\langle C\rangle\subseteq\left\langle\overline{\mathrm{cov}(X)}\right\rangle=\overline{\mathrm{cov}(X)}$$

命题得证. □

推论 6.10 (Mazur) 对于赋范线性空间 X, 若有弱收敛序列 $x_n\overset{wk}{\to}x_0$, 则 x_n 的前 n 项的凸组合可以依范数收敛到 x_0, 即存在 $\{\lambda_{ni}\geq 0\}_{i\leq n=1}^{\infty}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ni}=1\qquad\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ni}x_i\to x_0$$

证明 即 x_0 落于 $\{x_n\}$ 的弱闭包当中, 根据刻画 (6.9), x_0 落于 $\{x_n\}$ 凸组合的闭包当中. 也就是说, 存在 $N_k\geq 0$, 以及 $\{\mu_{ki}\geq 0\}_{i=1}^{N_k}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{N_k}\mu_{ki}=1\quad\left\|\sum_{i=1}^{N_k}\mu_{ki}x_i-x_0\right\|<\frac{1}{k}$$

在 $N_{k-1}<n\leq N_k$ 取

$$\lambda_{ni}=\mu_{ki}$$

并以 0 填充, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ni}x_i-x_0\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{N_k}\mu_{ki}x_i-x_0\right\|\leq\frac{1}{k}$$

我们可以假定 N_k 单调递增趋于无穷, 故 $\frac{1}{k}\to 0$, 命题得证. □

6.3 Baire 纲定理

定理 6.11 (Baire 纲定理) 令 X 是完备的度量空间, 若 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $(\overline{F_n})^{\circ}=\varnothing$, 则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^{\circ}=\varnothing$$

证明 证明分几步.

一些转化. 首先, 无妨假设 F_n 都是闭集.

若 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^{\circ}\neq\varnothing$, 也就是说存在开集 U 使得 $U\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$, 不妨将问题限制在 U 内的一个有内部的闭集 $\overline{V}$ 上考虑.

通过取补集, 我们只需要证明如下论断.

对于完备的度量空间 X, 若 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\overline{U_n}=X$, 则

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n}=X$$

开始证明. 假如非空开集 $U\subseteq X$, 由于 $\overline{U_1}=X$, 故可以取 V_1 使得

$$V_1\subseteq\overline{V_1}\subseteq U\cap U_1$$

由于 $\overline{U_2}=X$, 故可以取 V_2 使得

$$V_2\subseteq\overline{V_2}\subseteq U_1\cap U_2$$

以此类推, 可以得到 $\{V_n\}$ 使得

$$V_n\subseteq\overline{V_n}\subseteq V_{n-1}\cap U_n\subseteq V_{n-1}\subseteq\ldots U$$

我们还可以假定 V_n 的半径不断缩小, 从而任取 $x_n\in V_n$ 就成为 Cauchy 列. 假设 $x_n\to x$, 此时 $x\in U\cap\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, 故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ 稠密. □

Baire 纲定义是说, 没有内部的闭集之并不能产生内部. 这可以看做某种形式的鸽笼原理.

定义 6.12 (乏集) 对于拓扑空间 X, 若 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 对可数个 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $(\overline{F_n})^{\circ}=\varnothing$, 则称 F 为**乏集**或**第一纲集**, 反之称为**第二纲集**, 第一纲集的补集被称为**剩集**.

推论 6.13 对于完备的度量空间 X, X 不是乏集.

定理 6.14 (开映射定理) 对于 *Banach* 空间 X, Y, 有界线性泛函 $A: X\to Y$, 若 A 是满射, 则 A 是开映射.

证明 因为平移是同胚, 所以我们只要证明在原点处是开映射. 通过伸缩, 我们只要证明, 单位球在 A 下的像以 0 为内点, 即

$$\exists\epsilon>0, \mathrm{s.\,t.}\,\epsilon\,\mathrm{ball}\,Y\subseteq A(\mathrm{ball}\,X)$$

只要证明 $\overline{A(\mathrm{ball}\,X)}$ 以 0 为内点. 假设

$$\epsilon\,\mathrm{ball}\,Y\subseteq\overline{A(\mathrm{ball}\,X)} \tag{$*$}$$

这正是说 $\overline{A(\mathrm{ball}\,X)}$ 下方有界. 我们证明

$$\frac{\epsilon}{2}\,\mathrm{ball}\,Y\subseteq A(\mathrm{ball}\,X)$$

对于 $y\in\frac{\epsilon}{2}\,\mathrm{ball}\,Y$, 根据 $\frac{1}{2}(*)$, 存在 $||x_1||<\frac{1}{2}$, 使得

$$||y-Ax_1||<\frac{\epsilon}{4}\epsilon$$

对于 $y-Ax_1\in\frac{\epsilon}{4}\,\mathrm{ball}\,Y$, 根据 $\frac{1}{4}(*)$, 存在 $||x_2||<\frac{1}{4}$, 使得

$$||y-Ax_1-Ax_2||<\frac{\epsilon}{8}$$

以此类推, 得到级数 $\sum Ax_n\to y$, 而 $\sum x_n$ 根据 Weierstrass 判别法 (1.10) 收敛, 设收敛到 x, 且 $||x||<1$, 从而 $y\in A(\mathrm{ball}\,X)$.

只要证明 $\overline{A(\mathrm{ball}\, X)}$ 有内点. 通过缩小一倍, 假设

$$y + 2\epsilon\, \mathrm{ball}\, Y \subseteq \overline{A\left(\frac{1}{2}\, \mathrm{ball}\, X\right)}$$

则有 $||x_0|| < 1/2$ 使得

$$Ax_0 + \epsilon\, \mathrm{ball}\, Y \subseteq \overline{A\left(\frac{1}{2}\, \mathrm{ball}\, X\right)}$$

这样

$$\overline{A\left(\mathrm{ball}\, X\right)} = \overline{A\left(\frac{1}{2}\, \mathrm{ball}\, X - \frac{1}{2}\, \mathrm{ball}\, X\right)} \supseteq \overline{A\left(\frac{1}{2}\, \mathrm{ball}\, X\right)} - Ax_0 \supseteq \epsilon\, \mathrm{ball}\, Y$$

开始证明 否则 $A(\mathrm{ball}\, X)$ 的闭包没有内点, 注意到

$$Y = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} n\, \mathrm{ball}\, X\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(\mathrm{ball}\, X)$$

由于 Y 是完备的, 从而不是乏集, 矛盾. □

开映射定理指出了一个重要事实, 满射的有界线性算子必然将有内部的集合映为有内部的集合.

推论 6.15 (逆映射定理) 对于赋范线性空间 X, *Banach* 空间 Y, 若有界线性算子 $A : X \to Y$ 是双射, 则是 $A^{-1} : Y \to X$ 也是有界线性算子.

推论 6.16 (范数等价定理) 对于赋范线性空间 X, 其上有两个完备范数 $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$, 若存在 $C > 0$

$$||x||_1 \leq C||x||_2 \qquad \forall x \in X$$

则两范数等价. 即存在 $c > 0$ 使得

$$c||x||_2 \leq ||x||_1 \leq C||x||_2 \qquad \forall x \in X$$

证明 考虑连续映射 $\mathrm{id}_X : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$. $\square$

命题 6.17 (闭图像定理) 对于 *Banach* 空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 若其图像

$$\Gamma = \{(x, Ax) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

是作为乘积空间的闭集, 则 A 是有界的.

证明 在 X 上定义图范数

$$||x||_g := ||x|| + ||Ax||$$

且对于此意义下的 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 则 $\{(x_n, Ax_n)\}$ 是完备空间 $X \times Y$ 中的 Cauchy 列, 故根据图像是闭的, 收敛于某个 (x, Ax), 此时在图范数意义下 $x_n \to x$. 故在此范数下依旧完备. 则根据范数等价定理 (6.16), 存在 C 使得

$$||Ax|| \leq ||x|| + ||Ax|| \leq C||x||$$

从而 A 是有界的. $\square$

命题 6.18 对于 *Banach* 空间 X, Y, 线性算子 $A : X \to Y$, 则 A 连续当且仅当如下的半弱连续条件

$$x_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad Ax_n \overset{wk}{\to} 0$$

证明 我们证明 A 有闭的图像. 若 $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, 则对任何 $f \in Y^\wedge$, 有

$$fA(x_n - x) \to 0$$

此时

$$fy = fAx$$

因为 f 分离 Y 中的点 (6.6), 故由 f 任意性知 $y = Ax$, 从而 (x, y) 在 A 的图像上. 然后根据闭图像定理得证. $\square$

也就是说对于线性算子来说连续 $\iff$ 半弱连续.

6.4 一致有界原理

定理 6.19 (一致有界原理) 对于 *Banach* 空间 X, 赋范线性空间 Y, 对于 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{Y}$, 则

$$\sup_{A \in \mathcal{W}} ||A|| < \infty \iff \forall x \in X, \sup_{A \in \mathcal{W}} ||Ax|| < \infty$$

证明 左推右是容易的. 反之, 在 X 上定义新范数

$$||x||_W := ||x|| + \sup_{A \in W} ||Ax||$$

容易验证, 这是一个强于 $||\cdot||$ 的范数. 且对于此意义下的 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 即

$$m, n \gg 0, \quad ||x_m - x_n|| + \sup_{A \in W} ||Ax_m - Ax_n|| < \epsilon$$

从而 $\{x_n\}$ 是原本意义下的 Cauchy 列, 设收敛于 x, 且

$$\sup_{A \in W} ||Ax_m - Ax_n|| < \epsilon$$

令 $m \to \infty$, 得

$$\sup_{A \in W} ||Ax_n - Ax|| < \epsilon$$

这就是说在新范数意义下, $x_n \to x$. 那么根据范数等价定理 (6.16), 存在 $C > 0$ 使得

$$\sup_{A \in W} ||Ax|| \leq C||x||$$

这就是我们要找的一致的界, 因为这就意味着 $\sup_{A \in W} ||A|| \leq C$. □

推论 6.20 对于 *Banach* 空间 X, $C \subseteq X$, 则 C 有界当且仅当弱有界, 即

$$\sup_{x \in C} ||x|| < \infty \iff \forall f \in X^{\wedge}, \sup_{y \in C} ||f(x)|| < \infty$$

证明 将 C 置于二次对偶 $X^{\wedge\wedge}$ 中考虑. $\square$

推论 6.21 对于 *Banach* 空间 X, Y, 对于 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}, \mathcal{Y}$, 则

$$
\begin{aligned}
& & \sup_{A\in\mathcal{W}} ||A|| < \infty \\
\iff & \forall x \in X, & \sup_{A\in\mathcal{W}} ||Ax|| < \infty \\
\iff & \forall f \in Y^{\wedge}, & \sup_{A\in\mathcal{W}} ||fAx|| < \infty \\
\iff & \forall x \in X, f \in Y^{\wedge}, & \sup_{A\in\mathcal{W}} ||fAx|| < \infty
\end{aligned}
$$

定理 6.22 (Banach-Steinhaus) 对于 *Banach* 空间 X, 赋范线性空间 Y, 一列有界线性算子 $A_n : X \to Y$, 和另一个有界线性算子 $A : X \to Y$, 则

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$$

当且仅当 $||A_n||$ 有界, 且在某个 X 的稠子集 D 上有

$$\forall x \in D, \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$$

证明 首先, 必要性. 因为对任意 $x \in X$, $A_n x$ 收敛, 故有界.

反之, 充分性. 假设 $||A_n|| < M$, 则

$$
\begin{aligned}
||A_n x - Ax|| &= ||A_n(x-d)|| + ||A(x-d)|| + ||(A_n - A)d|| \\
&\leq (M + ||A||)||x - d|| + ||(A_n - A)d||
\end{aligned}
$$

令 d 充分接近 x, 使得第一项很小, 再取 n 充分大使得第二项很小, 命题得证. $\square$

定理 6.23 (Lax 等价定理) 如果对于赋范线性空间 X, *Banach* 空间 Y, 一列有界线性同构 $A_n : X \to Y$, 和另一个有界线性同构 $A : X \to Y$, 且

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$$

则

$$\forall y \in Y, \quad \lim_{n\to\infty} A_n^{-1}y = A^{-1}y$$

当且仅当 A_n 稳定, 即 $\sup_n ||A_n^{-1}|| < \infty$.

证明 充分性.

$$||A_n^{-1}y - A^{-1}y|| \leq ||A_n^{-1}|| \cdot ||A_n(A^{-1}y) - A(A^{-1}y)|| \to 0$$

必要性, $A_n^{-1}y$ 有极限自然有界, 根据一致有界原理 (6.19), 从而一致有界, 即 A_n^{-1} 有界. □

6.5 Alaoglu 定理

命题 6.24 可分的赋范线性空间 X 的对偶空间 $X^\wedge$ 中的单位闭球 $\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}$ 是星弱列紧的.

即任何有界序列 $\{f_n\} \subseteq X^\wedge$, 都有星弱收敛子列.

证明 对于有界序列 $\{f_m\} \subseteq X^\wedge$, 挑选 X 的可数稠密子集 $\{x_n\}$, 则可以得到数表 $\{f_j(x_i)\}_{i,j}$, 对固定的 i, $f_j(x_i)$ 是有界的, 从而有子列收敛. 我们通过如下的对角线方法挑选 f_j 的子列使得对任意 i, $f_j(x_i)$ 都收敛.

- 先选则 $\{f_{1j}\} \subseteq \{f_j\}$ 使得 $f_{1j}(x_1)$ 收敛.
- 再选择 $\{f_{2j}\} \subseteq \{f_{1j}\}$ 使得 $f_{2j}(x_2)$ 收敛.
- ...
- 以此类推, 得到 $\{f_{ij}\}$ 使得 $f_{ij}(x_i)$ 收敛.
- 抽出对角线 f_{ii}, 从而 $j > i$ 时, $f_{jj} \subseteq \{f_{ij}\}$, 从而 $f_{ii}(x_i)$ 收敛.

节约字母, 设这样抽出的子列还是 $\{f_m\}$. 由于 $\{x_n\}$ 稠密, $\{f_m\}$ 有界, 根据 (6.22), 对任意的 $x \in X$, $f_m(x)$ 都收敛, 记极限值为 $f_0(x)$. 通过取极限容易验证其是线性的, 且对固定的 $||x|| = 1$,

$$|f(x)| \leq \sup_m ||f_m|| < \infty$$

从而 $f \in X^\wedge$, 且显然, f_m 若收敛到 f_0. $\square$

类比于上述对列紧性的证明, 我们有紧致性的结论.

定理 6.25 (Alaoglu 定理) *赋范线性空间 X 的对偶空间 $X^\wedge$ 中的单位闭球 $\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}$ 是星弱紧致的.*

即, 任何对于这样一列 $\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}$ 的开覆盖

$$\left\{x_i^{-1}(U_i) := \{f \in X^\wedge : f(x_i) \in U_i\}\right\}_{i \in I} \qquad x_i \in X, U_i \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 中开集}$$

总有有限子覆盖.

证明 对 $x \in X$,

$$x(\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}) = \{f(x) : f \in \mathrm{ball}\, X\} \subseteq [-a_x, a_x] \qquad a_x = ||f|| \cdot ||x||$$

则可以将 $\mathrm{ball}\, X$ 视为

$$P = \prod_{x \in X} [-a_x, a_x]$$

的子空间, 根据 Tychonoff 定理, 这是紧致的. 此时 $C \subseteq X^\wedge \cap P$, 我们将要证明

- 在 $\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}$ 上, 由 P 继承来的拓扑和 $X^\wedge$ 的星弱拓扑是一致的.
- $\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}$ 是 P 的闭子集.

于是 $\overline{\mathrm{ball}\, X^\wedge}$ 是星弱紧致的.

拓扑是一致的. 我们证明邻域相同. 固定一点 $f_0 \in \overline{\text{ball}\, X^\wedge}$, 则在 $X^\wedge$ 中的有星弱 "邻域子基", 即其有限交构成一个邻域基

$$U_{\epsilon,x} = \{f \in X^\wedge : |f(x) - f_0(x)| < \epsilon\} \qquad \epsilon > 0, x \in X$$

在 P 中的有 "邻域子基"

$$V_{\epsilon,x} = \{f \in P : |f(x) - f_0(x)| < \epsilon\} \qquad \epsilon > 0, x \in X$$

故

$$U_{\epsilon,x} \cap \overline{\text{ball}\, X^\wedge} = U_{\epsilon,x} \cap P = V_{\epsilon,x} \cap X^\wedge = V_{\epsilon,x} \cap \overline{\text{ball}\, X^\wedge}$$

这样就证明了拓扑是一致的.

$\overline{\text{ball}\, X^\wedge}$ 是 P 的闭子集. 假设 $f_0 \in P$ 使得 f 的任何邻域都与 $\overline{\text{ball}\, X^\wedge}$ 有交, 即

$$\forall \epsilon > 0, \{x_i\}_{i=1}^n \subseteq X, \exists f \in C, \quad (1 \le i \le n \Rightarrow |f(x_i) - f(x_0)| < \epsilon)$$

通过选择 $x, y, x + \lambda y$, 可得

$$|f_0(x + \lambda y) - f_0(x) - \lambda f_0(y)| < (1 + 1 + |\lambda|)\epsilon$$

因为 ϵ 是任意的, 故 f_0 也是线性的. 然后, 对固定的 $||x|| = 1$, 任意 $\epsilon > 0$, 都有 $f \in \overline{\text{ball}\, X^\wedge}$ 满足

$$|f(x) - f_0(x)| < \epsilon \quad \overset{|f(x)| \le 1}{\Rightarrow} \quad |f(x)| < 1 + \epsilon$$

根据 ϵ 任意性知, $||f|| \le 1$, 从而 $f \in \overline{\text{ball}\, X^\wedge}$. 命题得证. $\square$

Chapter 7

谱理论

7.1 谱

下面我们考虑 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情况.

定义 7.1 (谱) 对于 *Banach* 空间 X, 算子 $A \in \mathcal{L}(X)$, 记 A 的**谱**为

$$\sigma \mathrm{epc}\, A = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{不可逆}\}$$

记 A 的**预解集**为

$$\rho \mathrm{es}\, A = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{可逆}\} = \mathcal{L}(X) \setminus \sigma \mathrm{epc}\, A$$

命题 7.2 对于 *Banach* 空间 X, $\mathcal{L}(X)$ 的可逆元是开集.

证明 若算子 $A \in \mathcal{L}(X)$ 可逆, 我们证明 $||A - B||$ 充分小时, B 也有逆, 形式上地,

$$B^{-1} = \frac{1}{B} = \frac{1}{A - (A - B)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A-B}{A}} = \frac{1}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A - B}{A}\right)^n$$

故只要

$$\left|\left|(A-B)A^{-1}\right|\right| \leq 1$$

即可保证 B 可逆. 只要 $||A-B|| < 1/||A^{-1}||$ 即可. $\square$

命题 7.3 对于 *Banach* 空间 X, , 算子 $A \in \mathcal{L}(X)$, 则

$$R_A : \rho\mathrm{es}\, A \to X \qquad \lambda \mapsto (A-\lambda I)^{-1}$$

是不能再延拓的解析函数.

证明 注意到

$$\frac{1}{A-\lambda I} - \frac{1}{A-\lambda' I} = \frac{\lambda-\lambda'}{(A-\lambda I)(A-\lambda' I)}$$

利用 (5.21) 立得. 不能延拓是因为若可以延拓, 则根据复分析理论, 将成为 $A-\lambda I$ 的逆. $\square$

命题 7.4 对于 *Banach* 空间 X, , 算子 $A \in \mathcal{L}(X)$, 则 $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 是非空紧致闭集, 且 $\sigma\mathrm{epc}\, A \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ||A||\}$.

证明 分几条来论证.

有界. 因为 $A-\lambda I$ 可逆 $\iff I - \frac{A}{\lambda}$ 可逆, 形式地,

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

故 $||A/\lambda|| < 1$, 即 $\lambda > ||A||$ 时, $A-\lambda I$ 可逆, 从而

$$\sigma\mathrm{epc}\, A \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ||A||\}$$

闭. $\lambda \mapsto A-\lambda I$ 是连续函数, 可逆元是开集 (7.2), 从而 $\rho\mathrm{es}\, A$ 是开集, 从而 $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 是闭集.

非空. 若 $\sigma\mathrm{epc}\, A = \varnothing$, 则 (7.3) 定义的

$$R : \lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1}$$

是解析函数. 且注意到 $\lambda = \infty$ 时, $R = 0$, 根据复分析 Liouville 定理[1], 知 R 是常数, 这不可能. □

定理 7.5 (谱半径公式) 对于 *Banach* 空间 X, , 算子 $A \in \mathcal{L}(X)$, 则

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\mathrm{epc}\, A\} = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$$

证明 证明分几步

$||A^n||^{1/n}$ **极限存在.** 我们证明如果数列 $\{x_n\}$ 满足

$$0 \le x_{m+n} \le x_n x_m$$

则 $\lim \sqrt[n]{x_n}$ 极限存在或为负无穷. 对任意 n, k 可以施加以带余除法使得 $n = mk + \ell$, 其中 $\ell \le m$, 则

$$x_n^{1/n} = x_k^{m/n} x_\ell^{1/n} = x_k^{m/(mk+\ell)} x_\ell^{1/n}$$

固定 k, 则 $n \to \infty, m \to \infty$, 此时

$$\limsup x_n^{1/n} \le x_k^{1/k}$$

再对 k 取下极限得

$$\limsup x_n^{1/n} \le \liminf x_k^{1/k}$$

命题得证. 而 $x_n = ||A^n||$ 恰满足这个性质.

[1]通过复合任意一个泛函.

证明相等. 事实上更精细地, 考虑 (7.3) 定义的解析函数

$$R : \lambda \mapsto (A - \lambda I)^{-1}$$

将其在 ∞ 处展成幂级数

$$\frac{1}{A - \lambda I} = -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{I - A/\lambda} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

可以算得 Hadamard 幂级数收敛半径公式得到

$$\inf\{\lambda \in C : A - \lambda I\text{可逆}\} = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$$

故

$$\sup\{\lambda \in C : A - \lambda I\text{不可逆}\} = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$$

即 $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\mathrm{epc}\, A\} = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$. [2] □

命题 7.6 (谱映照定理) 对于 *Banach* 空间 X, , 算子 $A \in \mathcal{L}(X)$, 对于定义在 $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 邻域上的解析 f, 有

$$\sigma\mathrm{epc}\, f(A) = f(\sigma\mathrm{epc}\, A)$$

[2]如果读者不喜欢第一段的证明可以这样论证. 对于算子 B, 复数 β, 注意到

$$B^n - \beta^n I = (B - \beta I)(B^{n-1} + B^{n-2}\beta + \ldots + B\beta^{n-2} + \beta^{n-1} I)$$

从而 $B - \beta I$ 可逆 $\iff B^n - \beta^n I$ 可逆. 对于 $\lambda \in \sigma\mathrm{epc}\, A$, 则 $\lambda^n \in \sigma\mathrm{epc}\, A^n$, 从而根据 (7.4) 的讨论, $|\lambda|^n \le ||A^n||$, 即 $|\lambda| \le ||A^n||^{1/n}$. 从而

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\mathrm{epc}\, A\} \le \liminf_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$$

而第二段幂级数收敛半径则需要改为

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\mathrm{epc}\, A\} = \limsup_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}$$

夹逼便得.

证明 若 $\lambda \in \sigma(A)$, 根据复分析存在 $g(z)$ 使得 $f(z)-f(\lambda)=(z-\lambda)g(z)$, 此时[3] 若 $f(A)-f(\lambda)=(A-\lambda I)g(A)$ 可逆, 则 $A-\lambda I$ 可逆, 矛盾, 故 $\sigma\mathrm{epc}\, f(A) \supseteq f(\sigma\mathrm{epc}\, A)$. 反之, $\lambda \notin f(\sigma\mathrm{epc}\, A)$, 则 $g(z)=\frac{1}{f(z)-\lambda}$ 定义在 $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 邻域上, 但 $g(A)(f(A)-\lambda I)=1$, 故 $\lambda \notin \sigma\mathrm{epc}\, f(A)$. $\square$

7.2 紧算子的谱

回忆紧算子的定义 (2.22).

命题 7.7 *对 Banach 空间 X, $A \in \mathcal{C}(X)$, 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, 都有*

$$\dim\ker(A-\lambda I)<\infty$$

证明 因为 $\ker(A-\lambda I)$ 是 A-不变子空间, 可以将 A 限制在闭子空间 $\ker(A-\lambda I)$ 上, 根据 (2.23) 这还是紧算子, 此时 A 的在 $\ker(A-\lambda I)$ 作用是位似 $x\mapsto \lambda x$. 当 $\lambda\neq 0$ 时, 这是一个可逆映射, 这迫使恒等算子是紧算子, 根据 (2.26), 这迫使 $\dim\ker(A-\lambda I)<\infty$. $\square$

命题 7.8 *对 Banach 空间 X, $A \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $A-\lambda I$ 是闭值域算子.*

证明 无妨通过单位化取 $\lambda=1$. 根据 (2.24), 我们可以不妨假设 $A-I$ 是单射, 根据 (2.11), 只需要验证下方有界. 若无界, 则存在

$$||(A-I)x_n|| \le \frac{1}{n} \qquad ||x_n||=1$$

[3]这里可以将算子带入全纯函数是通过在邻域内作分段光滑的封闭曲线 C, 使得曲线的内部包含 $\sigma\mathrm{epc}\, A$, 再利用积分定义

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-A}\mathrm{d}w$$

算子的积分指的是复合任何一个有界线性泛函.

而 A 是紧算子, 从而 Ax_n 有收敛子列, 不妨假设自己就是那个收敛子列, 且收敛于 x_0 此时因为 $(A-I)x_n \to 0$, x_n 也收敛到 x_0, 这样 $||x_0|| = 1$. 这样 $(A-I)x_0 = 0$, 与 $A-I$ 单射矛盾. $\square$

评注 7.9 *作为 (5.13) 的补充, 令 X, Y 为 Banach 空间, 对于 $A \in \mathcal{C}(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T = A - \lambda I$. 则除了*

$$\ker(T^\wedge) = (\operatorname{im} T)^\perp \qquad \ker T = {}^\perp \operatorname{im}(T^\wedge)$$

根据双极定理 (5.3), 还有

$${}^\perp \ker(T^\wedge) = \operatorname{im} T \qquad \ker T^\perp = \operatorname{im}(T^\wedge)$$

命题 7.10 *对 Banach 空间 X, $A \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A - \lambda I$ 是单射 $\Rightarrow A - \lambda I$ 是满射.*

证明 假设 $\lambda = 1$, $T = A - I$. 如果不是满射的话, 那么会得到递降子列

$$X \supseteq T(X) \supseteq T^2(X) \supseteq \dots$$

因为 T 是单射, 所以上述链始终严格递降, 但是这样, 可以抽取 $x_1 \in X \setminus T(X)$, 使得

$$\frac{1}{2} < d(x_1, T(X)) \leq ||x_1|| < 1$$

抽取 $x_2 \in T(X) \setminus T^2(X)$, 使得

$$\frac{1}{2} < d(x_2, T^2(X)) \leq ||x_2|| < 1$$

这样一直下去就会得到有界序列 $\{x_n\}$, 但

$$||Ax_n - Ax_{n+p}|| = ||x_n - Tx_n + Tx_{n+p} - x_{n+p}|| \geq d(x_n, T_n) = \frac{1}{2}$$

$\{Ax_n\}$ 无收敛子列, 与紧算子矛盾. $\square$

定理 7.11 对 *Banach* 空间 X, $A \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 下列四个数是相等且有限的

$$
\begin{array}{ccccc}
\infty > & \dim\ker(A-\lambda I) & = & \operatorname{codim}\operatorname{im}(A-\lambda I) \\
 & || & & || \\
 & \dim\ker(A^\wedge-\lambda I) & = & \operatorname{codim}\operatorname{im}(A^\wedge-\lambda I)
\end{array}
$$

证明 证明分很多步. 方便起见, 通过单位化, 假定 $\lambda = 1, T = A - I$. 记待证明式为 $\left[\begin{array}{cccc} \infty > & \alpha & = & \beta \\ & || & & || \\ & \alpha^\wedge & = & \beta^\wedge \end{array}\right]$. 我们要证明 $\left[\begin{array}{ccc} \alpha & \geq & \beta \\ & \times & \\ \alpha^\wedge & \geq & \beta^\wedge \end{array}\right]$.

先证明 $\beta = \alpha^\wedge$. 直接计算

$$
\begin{aligned}
\operatorname{codim}\operatorname{im} T &= \dim X/\operatorname{im} T && \because \text{定义} \\
&= \dim(X/\operatorname{im} T)^\wedge && \because \text{等号右边} < \infty \\
&= \dim\operatorname{im} T^\perp && \because \text{子空间和商空间的对偶 (5.4)} \\
&= \dim\ker T^\wedge && \because (7.9) \\
&< \infty && \because (5.15), (7.7)
\end{aligned}
$$

再证明 $\beta^\wedge = \alpha$. 直接计算

$$
\begin{aligned}
\operatorname{codim}\operatorname{im} T^\wedge &= \dim X^\wedge/\operatorname{im} T^\wedge && \because \text{定义} \\
&= \dim X^\wedge/\ker T^\perp && \because (7.9) \\
&= \dim\ker T^\wedge && \because \text{子空间和商空间的对偶 (5.4)} \\
&= \dim\ker T && \because \text{因为 } \ker T < \infty \\
&< \infty && \because (5.15), (7.7)
\end{aligned}
$$

证明 $\beta \le \alpha$. 由于我们已经证明了有限 (余) 维的闭子空集是可补的 (3.5) 和 (3.6), 可以假设

$$X = \operatorname{im} T \oplus F = \ker T \oplus X_0 \qquad \dim F = \beta, \dim \ker T = \alpha$$

且通过 T 诱导了 $\hat{T} : \operatorname{im} T \cong X_0$, 这样, T 的矩阵就可以分块写出来

$$\operatorname{im} T \oplus F \ni (a, b) \mapsto (c, d) \in \operatorname{im} T \oplus F \iff \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

通过给右下角的 0 的对角线上补上 1, 若 $\beta > \alpha$, 则补完后成为 "列满秩", 为不满的单射, 改变有限维空间的映射不改变算子的紧性[4], 故不妨假设 T 是单射, 根据 (7.10), 这意味着 T 是满射, 这说明添加 1 添加到了最后一行, 产生矛盾. 从而 $\beta \le \alpha$.

证明 $\beta^\wedge \le \alpha^\wedge$. 因为 (5.15), 所以 $A^\wedge$ 也是紧算子, 也有 $\beta^\wedge \le \alpha^\wedge$. □

定理 7.12 对 *Banach* 空间 X, $A \in \mathcal{C}(X)$, 则

(1) $\dim X = \infty$ 时, 总有 $0 \in \sigma\mathrm{epc}\, A$.

(2) $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 除 0 以外都是特征值.

(3) $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 至多以 0 为聚点.

证明 (1) 根据 (2.26). (2) 就是 (7.10). 下面证明 (3), 我们证明, 对任何 $\epsilon > 0$

$$\{\lambda \in \sigma\mathrm{epc}\, A : ||\lambda|| > \epsilon\}$$

是有限的. 否则, 根据 (2), 对应无穷个特征值, 而属于不同特征值的特征向量线性无关, 故有无穷个特征向量 $\{x_n\}$, 此时 $\overline{\{x_n\}}$ 是无穷向量空间, 且是 A-不变子空间. 此时 A 是可逆的紧算子, 根据 (2.26), 得到矛盾. □

[4]因为任何像是有限维空间的算子必然是紧算子

推论 7.13 无穷维 *Banach* 空间上的紧算子只有三种情况,

- $\sigma\mathrm{epc} = \{0\}$.
- $\sigma\mathrm{epc} = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
- $\sigma\mathrm{epc} = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\} \qquad \lambda_n \to 0$.

7.3 紧正规算子的谱

在本节我们证明, 紧正规算子是可以对角化的. 回忆定义 (2.18).

引理 7.14 对 *Hilbert* 空间上的自伴算子 A, $\sigma\mathrm{epc}\, A$ 都是实数.

证明 我们证明, 对于 $\lambda = a + bi$ 不是实数时, $A - \lambda I$ 可逆, 注意到

$$||(A - \lambda I)x||^2 = ||(A - aI)x||^2 + |b|^2||x||^2 \geq |b|^2||x||^2$$

从而根据 (2.11), $A - \lambda I$ 是单射闭值域的. 而根据 (2.17),

$$\mathrm{im}(A - \lambda I)^{\perp} = \ker(A - \lambda I)^{\wedge} = \ker(A^{\wedge} - \overline{\lambda} I) = 0$$

故还是 $A - \lambda I$ 满射. □

引理 7.15 对 *Hilbert* 空间上的自伴算子 A, $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} = ||A||$.

证明 因为

$$||A||^2 = \sup_{||x||=1} \langle Ax, Ax\rangle = \sup_{||x||=1} \left\langle A^2x, x\right\rangle = ||A^2||$$

由于我们已经知道 $||A^n||^{1/n}$ 收敛, 故 $\lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n} = ||A||$. □

从而根据谱半径公式 (7.5), $\pm||A||$ 总有一个能够取到. 如果读者不喜欢上面的证明, 还可以采取下面的论证.

引理 7.16 对 *Hilbert* 空间上的紧自伴算子 A, $\pm||A||$ 中有一个在 $\sigma\mathrm{epc}\,A$ 中.

证明 回忆 (2.21), 不妨假设有

$$\langle Ax_n, x_n\rangle \to ||A|| \qquad ||x_n|| = 1$$

又 A 是紧算子, 不妨假设 Ax_n 收敛到 y, 我们证明 y 就是属于 $||A||$ 特征值.

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||(A - ||A||I)x_n||^2 \\ &= ||Ax_n||^2 - 2||A||\,\langle Ax_n, x_n\rangle + ||A||^2 \\ &\leq ||A||^2 - 2||A||\,\langle Ax_n, x_n\rangle \to 0 \end{aligned}$$

故 $Ay = ||A||y$, 即 y 就是属于 $||A||$ 特征值. 而 $-||A||$ 是类似的. □

定理 7.17 *Hilbert* 空间 H 上的紧对称算子 A, 必然可以对角化. 具体来说,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\, e_n$$

对某些 $\lambda_n \in \mathbb{R}, e_n \in H$.

证明 可以找单位向量 e_1 使得

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1 \qquad \lambda_1 = ||A||$$

然后限制在 $\langle e_1\rangle^{\perp}$ 上, A 还是自伴的, 此时, 可以再找单位向量 e_2 使得

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2 \qquad \lambda_2 = -||A|_{\Box}||$$

然后限制在 $\langle e_1, e_2\rangle^{\perp}$ 上, A 还是自伴的.... 以此类推, 正负交错进行, 根据 (7.7) 和 (7.13) 以及自伴算子特征值都是实数这条常识, 上述 λ_n 取遍了 $\sigma\mathrm{epc}\,A$ 中的非零元. 且此时, 可以根据 (3.13) 可将 e_n 扩张为一组基. 容易验证, A 在 $\overline{\langle x_n\rangle}^{\perp}$ 上作用是 0. 故根据 (3.14), 有 $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\, e_n$. □

推论 7.18 *Hilbert* 空间 H 上的紧自伴算子 A, 必然可以对角化. 具体来说,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

对某些 $\lambda_n \in \mathbb{C}, e_n \in H$.

证明 可以分离 A 的实部虚部为

$$\operatorname{Re} A = \frac{A + A^*}{2} \qquad \operatorname{Im} A = \frac{A - A^*}{2}$$

则 A 正规当且仅当是不变的虚部可交换. 先对自伴的 $\operatorname{Re} A$ 对角化, 根据 (7.7), 在每个特征空间上, 是有限维线性空间. 因为可交换, 所以是 A-不变子空间, 根据线性代数, A 在其上可以对角化, 故整体可以对角化. □

Index