

求解不适定问题

DotFeng

2018 年 10 月 26 日

目录	2
----	---

目录

1 求解不适定问题的正则化方法	3
1.1 预备知识	3
1.1.1 不适定问题	3
1.1.2 正交投影	4
1.1.3 Moore-Penrose 广义逆	5
2 Tikhonov正则化方法	7

1 求解不适定问题的正则化方法

因为偏微分方程的大部分反问题都可以归结为求解第一类算子方程,而第一类算子方程被证明是不适定的.正则化方法就是对不适定方程建立一个稳定的近似解的方法.本节介绍了求解不适定问题的一系列正则化方法,这些方法是求解反问题的基础.

1.1 预备知识

1.1.1 不适定问题

首先引入不适定问题的定义.

定义 1.1 设 $K : U \subset X \rightarrow Y$, 其中 X, Y 是赋范空间. 方程 $Kx = y$ 叫做适定的, 是指 K 是双射, 且 $K^{-1} : Y \rightarrow U$ 是连续的, 否则, 就叫做不适定的.

由以上的定义可知, 适定需同时满足下列三个条件:

- 若对任一个 $y \in Y$, 至少存在一个 $x \in U$, 使得 $Kx = y$, 称为解的存在性(Existence);
- 设 $y_1, y_2 \in Y$, 若对 $x_1, x_2 \in U$ 分别是 $Kx = y$ 对应于 $y_1 \neq y_2$ 的解, 则必有 $x_1 \neq x_2$, 称为解的唯一性(Uniqueness);
- 解 z 相对于空间偶 (U, Y) 而言是稳定的, 称为解的稳定性(Stability), 即对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 只要

$$\rho_U(x_1, x_2) \leq \delta(\epsilon), x_1, x_2 \in U \quad (1.1)$$

就有

$$\rho_Y(y_1, y_2) < \epsilon, Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2 \quad (1.2)$$

反之, 如果上述三个条件中至少有一个不能满足, 就称其为不适定的(ill-posed), 由以上定义可知, 不适定方程有三种类型:

- K 不是满射, 即存在 $y \in Y$, 对任意 $x \in U$ 有 $Kx \neq y$;
- K 不是单射, 即存在 $u, v \in U$, 且 $u \neq v$ 使得 $Ku = Kv$;
- K^{-1} 不连续, 即方程 $Kx = y$ 的解不连续依赖于数值 f .

在实际问题中,方程右端的数据项一般通过测量获得,精确的数据 y 并不知道,只知道被误差扰动后的测量数据 y^δ ,及其误差水平 $\delta > 0$,即

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta, y^\delta \in Y. \quad (1.3)$$

我们的目标是求解扰动后的方程

$$Kx^\delta = y^\delta. \quad (1.4)$$

通常该方程是不可解的,因为测量数据 y^δ 很可能不在 K 的值域 $K(X)$ 中.于是我们希望找到一个近似解 $x^\delta \in X$,一方面它能足够接近精确解 x ,另一方面它能连续的依赖于数据 y^δ .

1.1.2 正交投影

本节主要叙述关于正交投影的三个定理. 首先定义一些记号: X, Y 为Hilbert空间, $L(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的线性有界算子空间.定义 $L(X) := L(X, X)$. 对于 $T \in L(X, Y)$,零空间与像空间分别记作 $N(T) := \{\varphi \in X : T\varphi = 0\}$ 和 $R(T) := T(X)$

定理 1.1 令 U 为 X 的一个凸的线性闭子空间.那么对于每一个 $\varphi \in X$,存在唯一的一个向量 $\psi \in U$,满足

$$\|\psi - \varphi\| = \inf_{u \in U} \|u - \varphi\|. \quad (1.5)$$

ψ 称为 φ 的最佳逼近. ψ 是 U 中唯一满足此性质的向量,并且

$$\langle \varphi - \psi, u \rangle = 0 \text{ 对于所有的 } u \in U \quad (1.6)$$

定理 1.2 令 $U \neq \{0\}$ 是 X 的闭线性子空间,令 $P : X \rightarrow U$ 表示到 U 的正交投影,其将一个向量 $\varphi \in X$ 映射到其在 U 上的最佳逼近. 则 P 是一个线性算子,且 $\|P\| = 1$ 满足

$$P^2 = P \text{ 以及 } P^* = P. \quad (1.7)$$

$I - P$ 表示到闭子空间 U^\perp 上的正交投影. 其中 $U^\perp := \{v \in X : \langle v, u \rangle = 0, \text{ 对于任意的 } u \in U\}$

证明: 因为 $P\varphi = \varphi$ 对于任意的 $\varphi \in U$,得 $P^2 = P$,及 $\|P\| \geq 1$. 在(1.6)中,令 $u = P\varphi$,得 $\|\varphi\|^2 = \|P\varphi\|^2 + \|(I - P)\varphi\|^2$.因此 $\|P\| \leq 1$. 又因为

$$\langle P\varphi, \psi \rangle = \langle P\varphi, P\psi + (I - P)\psi \rangle = \langle P\varphi, P\psi \rangle \quad (1.8)$$

又 $\langle \varphi, P\psi \rangle = \langle P\varphi, P\psi \rangle$, 得算子 P 是自共轭的. 又由内积的线性性与连续性, 易得 U^\perp 是 X 的闭线性子空间. 且由(1.6)可得, $(I - P)\varphi \in U^\perp$, 其中 $\varphi \in X$. 更进一步的, $\langle \varphi - (I - P)\varphi, V \rangle = \langle P\varphi, v \rangle = 0$, 对所有的 $v \in U^\perp$. 则根据定理(1.2)可知, $(I - P)\varphi$ 是 φ 在 U^\perp 中的最佳逼近元.

定理 1.3 如果 $T \in L(X, Y)$, 那么有

$$N(T) = R(T^*)^\perp \quad \text{以及} \quad \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp \quad (1.9)$$

证明: 如果 $\varphi \in N(T)$, 则对所有的 $\psi \in Y$ 有 $\langle \varphi, T^*\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle = 0$ 则 $\varphi \in R(T^*)^\perp$. 因此, $N(T) \subset R(T^*)^\perp$ 如果 $\varphi \in R(T^*)^\perp$, 则对所有的 $\psi \in Y$ 那么, $0 = \langle \varphi, T^*\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle$ 因此 $T\varphi = 0$, 即 $\varphi \in N(T)$, 则 $R(T^*)^\perp \subset N(T)$

1.1.3 Moore-Penrose 广义逆

考虑算子方程

$$T\varphi = g \quad (1.10)$$

其中算子 $T \in L(X, Y)$. 此时既不假设算子 T 是单射, 也不假设 $g \in R(T)$. 在这种假设下, 我们先来定义, 何为算子方程(1.10)的解. 这就引出了算子 T 的逆的概念.

定义 1.2 φ 称为方程(1.10)的最小二乘解, 如果满足

$$\|T\varphi - g\| = \inf\{\|T\psi - g\| : \psi \in X\}. \quad (1.11)$$

$\varphi \in X$ 被称为方程(1.10)的最佳近似解, 如果 φ 是方程(1.10)的最小二乘解, 且满足

$$\|\varphi\| = \inf\{\|\psi\| : \psi \text{ 是方程(1.10)的最佳近似解}\}. \quad (1.12)$$

定理 1.4 用 $Q : Y \rightarrow \overline{R(T)}$ 表示投影到 $\overline{R(T)}$ 上面的正交投影. 则下列条件是等价的:

$$\varphi \text{ 是 } T\varphi = g \text{ 的最小二乘解.} \quad (1.13)$$

$$T\varphi = Qg \quad (1.14)$$

$$T^*T\varphi = T^*g \quad (1.15)$$

证明:因为 $\langle T\varphi - Qg, (I - Q)g \rangle = 0$,根据定理(1.2)有

$$\|T\varphi - g\|^2 = \|T\varphi - Qg\|^2 + \|Qg - g\|^2. \quad (1.16)$$

这表明,由(1.14)可以推出(1.13). 反之亦然,如果 φ_0 是一个最小二乘解,则 φ_0 是函数 $\varphi \mapsto \|T\varphi - Qg\|$ 的最小值. 又根据 Q 的定义, $\inf_{\varphi \in X} \|T\varphi - Qg\| = 0$, φ 必定满足(1.14).

又根据定理(1.2)、(1.3),我们有 $N(T^*) = R(T)^\perp = R(I - Q)$, 由此可推得等式 $T^*(I - Q)$ 成立.因此由(1.14)可得(1.15)成立. 反之,如果(1.15)成立,则有 $T\varphi - g \in N(T^*) = R(T)^\perp$. 因此 $0 = Q(T\varphi - g) = T\varphi - Qg$.

方程(1.15)称为方程(1.10)的正规方程.注意到一个方程的最小二乘解并不一定存在,因为(1.11)中的下确界并不一定可以取到.由定理1.4可得,方程(1.10)的最小二乘解存在, 当且仅当 $g \in R(T) + R(T)^\perp$

注: 如果 φ_0 是一个最小二乘解, 则其并不唯一,若 $N(T)$ 中除去零元素还有其他元素. 此时最小二乘解可写成集合 $\{\varphi_0 + u : u \in N(T)\}$

定义 1.3 算子 T 的Moore-Penrose广义逆 T^\dagger 定义在 $D(T^\dagger) := R(T) + R(T)^\perp$ 上,其将 $g \in D(T^\dagger)$ 映到算子方程(1.10)的最佳近似解.

显然, $T^\dagger = T^{-1}$,如果 $R(T)^\perp = 0$,以及 $N(T) = 0$. 值得注意的是,并不是对于所有的 $g \in Y$, $T^\dagger g$ 有定义,假若 $R(T)$ 不是闭集.

令 $\tilde{T} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$, $\tilde{T}\varphi := T\varphi$, 表示将 T 限制在 $N(T)^\perp$ 上. 因为 $N(T)^\perp = N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$ 以及 $R(\tilde{T}) = R(T)$, 则有算子 \tilde{T} 是可逆的. 则Moore-Penrose逆可被写成

$$T^\dagger g = \tilde{T}^{-1}Qg \quad (1.17)$$

其中 $g \in D(T^\dagger)$.

2 Tikhonov正则化方法