Ritz-Galerkin 方法

案例 5：弦的平衡问题

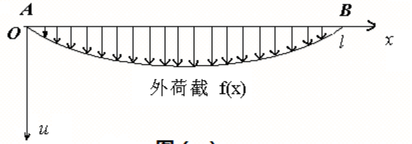
制作人： 舒适 魏华祎 易年余 岳孝强

1 弦平衡问题

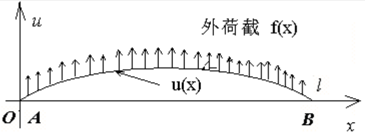
- 背景问题与数学建模
- Sobolev 空间
- 虚功原理与极小位能原理
- Ritz-Galerkin 方法
- Galerkin 算法设计、实现与数值实验
- 理论分析

背景问题

见案例 1.



图(a)



图(b)

数学模型

在案例 1 中, 利用力平衡原理导出位移函数 u 满足两点边值问题 (设 $l=1$).

$$-T\frac{d^2u}{dx^2}=f, \quad x\in I, \tag{1}$$

$$u(0)=0, \quad u(1)=0 \tag{2}$$

下面利用极小位能原理, 推导弦平衡问题的另一数学模型.

极小位能原理

考虑弦在任一位置 $w = w(x)$ 时，有

1. 弦所对应的内能

$$W_n = \frac{1}{2}\int_0^l T(w')^2 dx$$

2. 弦克服外力所作的功

$$W_w = -\int_0^l f \cdot w dx$$

总能量为

$$J(w) = W_n + W_w = \frac{1}{2}\int_0^l T(w')^2 dx - \int_0^l f \cdot w dx \tag{3}$$

记弦平衡位置曲线为 u，由极小位能原理知： 在满足边值条件 (2) 的一切可能位置中，弦平衡位置的能量达到极小，即：

$$J(u) = \min_{w} J(w) \tag{4}$$

上述模型不完备（严格）：自变量函数 w 的所属空间不清楚.

力平衡方程: 涉及二阶导数.

极小问题: 只涉及一阶导数.

因此: 前者对解函数的光滑性要求比后者要高.

下面引入弱意义下的导数, 以及相应的函数空间: Sobolev 空间.

Sobolev 空间简史

前苏联数学家 S.L. Sobolev 从 1938 年开始，在研究弹性体中的波动等问题时，建立了一系列新的概念，如广义解、广义导数、嵌入定理等。以泛函分析为工具发展了一套新型的可微函数空间 $W^{k,p}(\Omega)$ (Sobolev 空间) 理论，该理论同时也为微分方程的近代研究奠定了理论基础.

后来许多学者改进和推广了上述工作，如 1956–1958: 引进了“分数次求导”的概念，建立了分数次 Sobolev 空间 $W^{s,p}(\Omega)$.

$L^2(I)$ 空间

Hilbert 空间

$$L^2(I), I = (a, b)$$

内积和范数

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \ \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

Schwartz 不等式: $|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

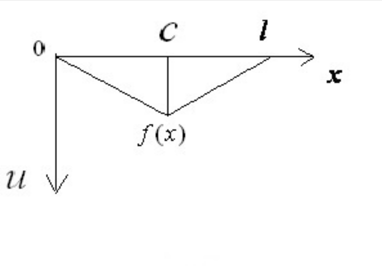
一阶广义导数

为什么要引入一阶广义导数？记空间

$$W=\{w:w,w'\in L^2(I)\}$$

如果 w' 为通常意义下的导函数（逐点意义下），则

(i) 可能会丢失一些有很好物理背景的极小解.



(ii) 函数空间 $C^1([0,1])$，在一种自然的范数

$$\|w\|_1 = \left\{ \int_I [w^2 + (w')^2] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

下是不完备的.

定义检验函数空间 $C_0^\infty(I)$: 在区间 I 上无穷次可微，且在端点 a, b 的某一邻域内等于零的函数类.

例 1 $I = (-1, 1)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} exp(-\frac{1}{\eta^2 - x^2}), & |x| < \eta, \\ 0, & \text{在别处}. \end{cases}$$

其中 $\eta = 1/2$.

可以证明

$$\varphi(x) \in C_0^\infty(I)$$

空间 $C_0^\infty(I)$ 的特点:

在 $L^2(I)$ 中稠密

充分光滑

各阶导函数在边界点上为 0

下面引出所需要的积分恒等式.

设 $u(x), v(x) \in C^1[a,b]$, 则有如下分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

上述假设条件可适当的减弱, 如可减弱为(习题*):

设函数 $u, v \in C(\overline{I})$, u', v' 在 $\overline{I}$ 上仅有有限个不连续点, 且在这些点左右极限存在 (对边界点要求单边极限存在).

$\Rightarrow$

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \qquad (6)$$

习题 设 $f \in C(\bar{I})$, $I = (a, b)$, f' 仅在 $x_c = \frac{a+b}{2}$ 处有间断, 且该点左右极限存在, 试证明

$f' \in L^2(I)$, 且对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, 以下积分恒等式成立

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$$

一阶广义导数的定义:

设 $f(x) \in L^2(I)$, 若存在 $g(x) \in L^2(I)$, 使等式

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \forall\varphi \in C_0^\infty(I) \tag{7}$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上有一阶广义导数 $g(x)$, 仍记为

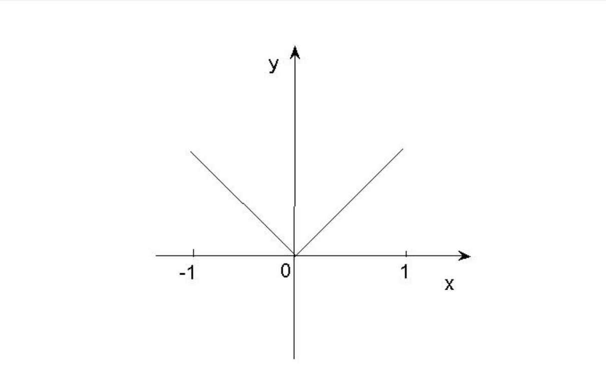
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = g(x)$$

一阶广义导数和一阶常义导数的区别与联系：

1) 若 $f(x)$ 有通常意义下属于 $L^2(I)$ 的导数 $f'(x)$, 则 $f'(x)$ 也是 $f(x)$ 的一阶广义导数, 但反之不然；

2) 同一函数的广义导数可能不唯一.

例 2 试考察函数 $f(x) = |x|, x \in \bar{I}$, $I = (-1, 1)$ 的一阶广义导数和常义导数。



解: 显然 $f(x) \in C(\bar{I}) \subset L^2(I)$.

对$\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, 有

$$\begin{aligned}
-\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\
&= [(x\varphi(x))|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx] \\
&\quad -[(x\varphi(x))|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx] \\
&= -\int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ c & x = 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

容易验证 $g(x) \in L^2(I)$, 所以它是 $f(x)$ 的一阶广义导数。

注意 $f(x)$ 在 0 点处的导数没定义, 这说明有广义导数, 不一定有常义导数.

又由于 c 是任意有限数, 故在逐点意义下, 广义导数不唯一.

结论: 同一函数的广义导数在相差一个零测度集意义下是唯一的(几乎处处相等).

变分法的基本引理: 设 $f \in L^2(I)$ 满足

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$$

则 $f(x)$ 几乎处处为0.

习题 设$f \in C(\bar{I})$, 试证明该引理.

利用变分法的基本引理可证明上述结论.

设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 均为 $f(x)$ 的一阶广义导数，则

$$\int_a^b g_1(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

$$\int_a^b g_2(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

两式相减，得

$$\int_a^b [g_1(x) - g_2(x)]\varphi(x)dx = 0$$

$\Rightarrow$

$$g_1 = g_2, \quad a.e.$$

$\square$

例 3 试证明阶梯函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

不存在广义导数。

反证法: 设 $f(x)$ 有广义导数 $g(x)$, 则 $g\in L^2(I)$ 满足

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx &= -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx\\ &= -\int_{0}^{1}\varphi'(x)dx\\ &= -\varphi(x)|_0^1=\varphi(0)\end{aligned}\tag{8}$$

从而 $g(x)=\delta(x)$ ($\delta-$函数).

利用 (8),

$$\begin{aligned} |\varphi(0)| &= |\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx| \\ &\leq ||g(x)|| \cdot ||\varphi(x)|| \end{aligned} \tag{9}$$

特别对$0 < \varepsilon < 1$, 取 $C_0^\infty(I)$ 中的函数

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right) & |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

注意 $\varphi_\varepsilon(0) = e^{-1}$, 以及

$$
\begin{aligned}
||\varphi_\varepsilon||^2 &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\exp\left(-\frac{1}{1-(x/\varepsilon)^2}\right)\right]^2 dx \\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{2}{1-(x/\varepsilon)^2}\right) dx \\
&= \varepsilon \int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right) dt < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

则有

$$
e^{-1} \leq \sqrt{2\varepsilon}||g(x)||
$$

从而导致矛盾. $\square$

习题 试给出分(有限)段代数多项式函数具有一阶广义导数的充要条件, 并证明之.

利用一阶广义导数，可定义区间 I 上的一阶 Sobolev 空间 $H^1(I)$

$$H^1(I) := \{f | f \in L^2(I), f' \in L^2(I)\}$$

其中， f' 为 f 的一阶广义导数.

解答 I

首先给出充分性证明. 对 $\forall \phi(x) \in C_0^\infty(I)$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\phi'(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}^-} f_1(x)\phi'(x)dx + \int_{\frac{1}{2}^+}^1 f_2(x)\phi'(x)\,dx \\
&= f_1(x)\phi(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}^-} - \int_0^{\frac{1}{2}^-} f_1'(x)\phi(x)dx \\
&\quad + f_2(x)\phi(x)\Big|_{\frac{1}{2}^+}^1 - \int_{\frac{1}{2}^+}^1 f_2'(x)\phi(x)dx \\
&= f_1(\tfrac{1}{2}^-)\phi(\tfrac{1}{2}^-) - \int_0^{\frac{1}{2}^-} f_1'(x)\phi(x)\,dx \\
&\quad - f_2(\tfrac{1}{2}^+)\phi(\tfrac{1}{2}^+) - \int_{\frac{1}{2}^+}^1 f_2'(x)\phi(x)\,dx \\
&= (f_1(\tfrac{1}{2}^-) - f_2(\tfrac{1}{2}^+))\phi(\tfrac{1}{2}) \\
&\quad - \left(\int_0^{\frac{1}{2}^-} f_1'(x)\phi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}^+}^1 f_2'(x)\phi(x)\,dx\right)
\end{aligned}
$$

解答 II

由上式可知: 若 $f_1(\frac{1}{2}-) = f_2(\frac{1}{2}+)$, 即 $f(x)$ 在段点处连续, 则有

$$\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\phi(x)\,dx$$

其中

$$g(x) = \begin{cases} f_1{}'(x), & x \in [0, \frac{1}{2}](\text{或}[0, \frac{1}{2})) \\ f_2{}'(x), & x \in (\frac{1}{2}, 1](\text{或}[\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

属于 $L^2(I)$, 这样就完成了充分性证明.

下面利用反证法证明必要性. 设 $f(x)$ 在段点处不连续, 即

$$c_0 = f_1(\frac{1}{2}-) - f_2(\frac{1}{2}+) \neq 0 \tag{10}$$

解答 III

但 $f \in L^2(I)$ 具有一阶广义导数 $g \in L^2(I)$. 这时, 有

$$\int_0^1 g(x)\phi(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\phi'(x)\,dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I)$$

由上式及充分性证明过程知: 对 $\forall \phi \in C_0^\infty(I)$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 g(x)\phi(x)\,dx \\
&= -\left(f_1(\tfrac{1}{2}-) - f_2(\tfrac{1}{2}+)\right)\phi(\tfrac{1}{2}) + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f_1'(x)\phi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2'(x)\phi(x)\,dx\right) \\
&= -c_0\phi(\tfrac{1}{2}) + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f_1'(x)\phi(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2'(x)\phi(x)\,dx\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{c_0}(-\int_0^1 g(x)\phi(x)dx + (\int_0^{\frac{1}{2}} f_1'(x)\phi(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2'(x)\phi(x)dx))$$

解答 IV

$\Rightarrow$

$$\left|\phi(\tfrac{1}{2})\right| \leq \frac{1}{|c_0|}\left[\left|\int_0^1 g(x)\phi(x)\,dx\right| + \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f_1{}'(x)\phi(x)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f_2{}'(x)\phi(x)\,dx\right|\right]$$

$\Rightarrow$

$$\left|\phi(\tfrac{1}{2})\right| \leq \frac{1}{|c_0|}\left[\|g\|_{L_2(0,1)} + \|f_1{}'\|_{L_2(0,1/2)} + \|f_2{}'\|_{L_2(1/2,1)}\right]\|\phi\|_{L_2(0,1)} \quad \text{(利用 Schwarz 不等式)} \tag{11}$$

特别对 $0 < \varepsilon < 1$，取

$$\phi(x) = \phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\right) & |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解答 V

则一方面：$\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(I)$ 且 $\phi_\varepsilon(\frac{1}{2}) = e^{-1}$. 另一方面：

$$
\begin{aligned}
||\phi_\varepsilon||^2 &= \int_{-\varepsilon+\frac{1}{2}}^{\varepsilon+\frac{1}{2}} \left[\exp\left(\frac{1}{\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\right)\right]^2 dx \\
&= \int_{-\varepsilon+\frac{1}{2}}^{\varepsilon+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2}{\left(\frac{x-1/2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\right) dx \\
&= \varepsilon \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{2}{t^2 - 1}\right) dt \quad (\text{令} \, t = \frac{x-1/2}{\varepsilon}) \\
&\leq \varepsilon \int_{-1}^{1} \exp(0) dt = 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

解答 VI

将上式代入 (11) 式，即

$$e^{-1} \leq C\sqrt{2\varepsilon}$$

其中

$$C = \frac{1}{|c_0|}[\|g\|_{L_2(0,1)} + \|f_1{}'\|_{L_2(1,1/2)} + \|f_2{}'\|_{L_2(1/2,1)}]$$

当$\varepsilon \to 0$时，右端$\to 0$, 从而产生矛盾.

因此，$g \notin L^2(I)$ 即 $f(x)$ 没有 $L^2(I)$ 中的广义导数,这与题设显然是矛盾的,故有 $f(x)$ 在段点处连续,必要性得证。

$H^1(I)$: 线性空间, 引入内积

$$(f,g)_1=\int_a^b[f(x)g(x)+f'(x)g'(x)]dx,\ \forall f,g\in H^1(I)$$

范数

$$||f||_1=\sqrt{(f,f)_1}=\{\int_a^b[f^2+(f')^2]dx\}^{\frac{1}{2}},\forall f\in H^1(I)$$

可以证明 $H^1(I)$ 是完备内积空间: Hilbert 空间.

类似地，可定义(习题*)

(1) m 阶广义导数 (P.15 习题1.2.1, 仅要求 $m=2$)、m 阶 Sobolev 空间 $H^m(I)$;

(2) 多元函数的广义偏导数.

极小问题的严格描述

定义 $H^1(I)$ 的子空间

$$H_0^1(I) := \{v|v \in H^1(I),\ v(a) = 0 = v(b)\}$$

极小问题 (4) 的严格描述：求 $u \in H_0^1(I)$, $I = (0, l)$ 使得

$$J(u) = \min_{w \in H_0^1(I)} J(w) \tag{12}$$

其中

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_0^l T(w')^2 dx - \int_0^l f \cdot w dx$$

等价变分问题

由于极小问题(12) 和两点边值问题

$$-Tu''(x) = f(x),\ 0 < x < l \tag{13}$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{14}$$

刻划同一物理背景问题，所以存在等价性.

下面，将针对一类更广泛的两点边值问题，建立两种等价变分问题，并回答上述等价性.

考察问题 (A)——两点（混合）边值问题:

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \;\; a < x < b \tag{15}$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0 \tag{16}$$

其中，$f \in L^2(I)$，且 (A) 满足椭圆型条件:

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{I}), p(x) \geq p_{\min} > 0 \\ q \in C^0(\bar{I}), q(x) \geq 0 \end{cases} \tag{17}$$

引入解$u(x)$ 所属函数空间—-试探 (trival) 函数空间

$$H_E^1(I) := \{u : u \in H^1(I), \;\; u(a) = 0\}$$

.

一、建立问题 (A) 的第一种等价问题

线性代数方程组求解问题: 求 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T \in R^n$, 满足

$$Ax^* = b \tag{18}$$

其中

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in R^n, \quad A = (a_{ij})_{n\times n}$$

第一种等价问题 (习题): 求 $x^* \in R^n$, 满足

$$(Ax^*, x) = (b, x), \quad \forall x \in R^n \tag{19}$$

将问题 (18)与问题 (A) 比较:

解向量所属的空间 R^n	$\leftrightarrow$	解函数所属的空间 $H_E^1(I)$
系数矩阵 A	$\leftrightarrow$	微分算子 L
右端向量 b	$\leftrightarrow$	右端函数 f

等价问题(19)中, 任意向量 x 所属的空间 R^n 被称为检验 (test) 空间. 问题 (A) 所对应的 test 函数空间应为 $H_E^1(I)$.

注意: 检验函数与试探函数空间不一定相同.

下面从形式上推导问题 (A) 的第一种等价问题.

由 (15), 有

$$\int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu]vdx = \int_a^b fvdx, \ \forall v \in H_E^1(I) \qquad (20)$$

应用分部积分公式, 并利用边值条件 $v(a) = 0, u'(b) = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \int_a^b -\tfrac{d}{dx}(p\tfrac{du}{dx})vdx &= -v(p\tfrac{du}{dx})\big|_a^b + \int_a^b p\tfrac{du}{dx}\cdot\tfrac{dv}{dx}dx \\ &= \int_a^b p\tfrac{du}{dx}\cdot\tfrac{dv}{dx}dx \end{aligned}$$

等价问题（B）： 求 $u \in H_E^1(I)$，使

$$a(u,v) = (f,v),\ \forall v \in H_E^1(I) \tag{21}$$

其中

$$a(u,v) = \int_a^b [p\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + quv]dx \tag{22}$$

$$(f,v) = \int_a^b fv dx \tag{23}$$

称方程 (21) 为变分方程 (或虚功方程).

关于泛函 $a(u,v)$ 的若干性质

性质1（双线性）

对$\forall c_1, c_2 \in R^1, u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H_E^1(I)$，成立

$$\begin{aligned} a(c_1u_1 + c_2u_2, v) &= c_1a(u_1, v) + c_2a(u_2, v) \\ a(u, c_1v_1 + c_2v_2) &= c_1a(u, v_1) + c_2a(u, v_2) \end{aligned}$$

性质2（对称性）

$$a(u,v) = a(v,u)$$

性质3（正定性或强制性）

$$a(u,u) \geq \gamma \|u\|_1^2, \forall u \in H_E^1$$

这里，$\|\cdot\|_1$ 为 $H^1(I)$ 中的范数，即

$$\|u\|_1 = [\int_a^b (u^2 + (u')^2) dx]^{1/2}$$

其中，γ 是与 u 无关的正常数.

证明：由 $a(u,v)$ 的定义及椭圆型条件，有

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_a^b (qu^2 + p(u')^2)dx \\ &\geq \int_a^b p(u')^2 dx \\ &\geq p_{\min} \int_a^b (u')^2 dx \end{aligned} \tag{24}$$

注意

$$u(x) = \int_a^x u'(x)dx \tag{25}$$

利用 Schwarz 不等式，有

$\Rightarrow$

$$u^2 \leq (x-a)\int_a^b (u')^2 dx$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^b u^2 dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b (u')^2 dx$$

即

$$\int_a^b (u')^2 dx \geq \frac{2}{(b-a)^2} \cdot \int_a^b u^2 dx \tag{26}$$

由 (24) 和 (26) 式，可得

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq p_{\min}\int_a^b (u')^2 dx \\ &= \tfrac{1}{2}p_{\min}\cdot\left[\int_a^b (u')^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx\right] \\ &\geq \tfrac{1}{2}p_{\min}\cdot\left[\tfrac{2}{(b-a)^2}\int_a^b u^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx\right] \\ &\geq \gamma\cdot\left[\int_a^b u^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx\right] = \gamma\cdot\|u\|_1^2 \end{aligned}$$

其中

$$\gamma = \min\left(p_{\min}\frac{1}{(b-a)^2}, \frac{1}{2}p_{\min}\right)$$

与 u 无关. □

性质4（连续性或有界性）

$$a(u,v) \leq M\|u\|_1\|v\|_1$$

其中，M 是与 u，v 无关的正常数.

虚功原理

定理（虚功原理） 设$u \in C^2(\bar{I}), p \in C^1(\bar{I}), q \in C^0(\bar{I})$，则 u是问题 (A) 的解的充分必要条件是，u 是问题 (B) 的解.

证明： 必要性显然成立，下面证明充分性. 若 $u \in C^2(\bar{I})$ 是问题 (B) 的解，则 $u \in H_E^1(I) \cap C^2(\bar{I})$，且成立

$$a(u, v) = (f, v), \ \forall v \in H_E^1(I)$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_a^b (p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv - fv)dx = 0, \ \forall v \in H_E^1(I)$$

$\Leftrightarrow$

$$p\frac{du}{dx}v|_a^b + \int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu - f]vdx = 0, \ \forall v \in H_E^1(I)$$

$\Leftrightarrow$

$$p(b)u'(b)v(b) + \int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu - f]vdx = 0, \ \forall v \in H_E^1(I) \quad (27)$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^b (-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu - f)vdx = 0, \ \forall v \in C_0^\infty(I)$$

由 $u \in C^2(\bar{I}), p \in C^1(\bar{I}), q \in C^0(\bar{I})$ 及变分法基本引理知

$$-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f \tag{28}$$

将 (28) 代入 (27)，得

$$p(b)v(b)u'(b) = 0, \forall v \in H_E^1(I)$$

从而

$$u'(b) = 0$$

即 u 是问题 (A) 的解.

$\square$

二、建立问题 (A) 的第二种等价问题

从形式上推导出问题 (A) 的第二种等价问题: 求泛函极小问题.

关键: 泛函 $J(u)$ 的构造.

考察线性代数方程组求解问题: 求 $x^* \in R^n$, 满足

$$Ax^* = b$$

第二种等价问题 (习题): 设A为对称正定矩阵, 求 $x^* \in R^n$, 满足

$$J(x^*) = \min_{x \in R^n} J(x) \tag{29}$$

其中

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \tag{30}$$

$$\begin{array}{ccc} R^n & \leftrightarrow & H_E^1(I) \\ A & \leftrightarrow & L \\ b & \leftrightarrow & f \end{array}$$

可形式上给出问题 (A) 所对应的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u), \ \forall u \in H_E^1(I) \tag{31}$$

这里

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu \tag{32}$$

又考察弦平衡问题. 两点边值问题中微分方程 (见(13))

$$Lu := -Tu''(x) = f(x)$$

相应的极小问题(见 (12)) 中的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^l T(u')^2 dx - \int_0^l f \cdot u dx, \ \forall u \in H_0^1(I)$$

注意

$$(Lu, u) = \int_0^l T(u')^2 dx, \ \forall u \in H_0^1(I) \tag{33}$$

所以也有

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - (f, u), \ \forall u \in H_0^1(I)$$

关于(33) 的证明. 事实上,

$$
\begin{aligned}
(Lu, u) &= \int_0^l (-Tu''u)dx = -T\int_0^l u\,du' \\
&= -T[(u\cdot u')|_0^l - \int_0^l (u'\cdot u')dx] \\
&= \int_0^l T(u')^2 dx
\end{aligned}
$$

$\square$

利用 (31) 定义的 $J(u)$, 并注意

$$(Lu, u) = a(u, u), \quad \forall u \in H_E^1(I) \tag{34}$$

所以问题 (A) 所对应的泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u), \ \forall u \in H_E^1(I) \tag{35}$$

关于 (34) 的证明.

利用边值条件 $u(a)=0, u'(b)=0$, 容易验证

$$\begin{aligned}(Lu,u) &= \int_a^b [-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+qu]udx \\ &= \int_a^b (p(\frac{du}{dx})^2+qu^2)dx - u(p\frac{du}{dx})|_a^b \\ &= \int_a^b (p(\frac{du}{dx})^2+qu^2)dx \\ &= a(u,u)\end{aligned}$$

$\square$

因此问题 (A) 的第二种等价问题 (C) 为： 求 $u \in H_E^1(I)$，使

$$J(u) = \min_{v \in H_E^1(I)} J(v) \tag{36}$$

其中泛函 $J(\cdot)$ 由 (35) 定义.

定理（极小位能原理） 设 $u \in C^2(\bar{I})$，则 u 是问题 (A) 的解的充分必要条件是， u 是问题 (C) 的解.

证明：只需证明问题 (C) 的解与问题 (B) 的解的等价性.

设$u \in C^2(\bar{I})$，则 u 是问题 (C) 的解的充分必要条件是

$$u \in H_E^1(I)$$

$$J(u+tv) \geq J(u), \forall v \in H_E^1(I), t \in R$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - (f, u+tv)\\&-[\tfrac{1}{2}a(u,u) - (f,u)] \geq 0, \forall v \in H_E^1(I), t \in R\end{aligned} \tag{37}$$

利用$a(\cdot,\cdot)$ 的对称性，有

$$\begin{aligned}&a(u+tv, u+tv)\\&= a(u,u) + ta(u,v) + ta(v,u) + t^2 a(v,v)\\&= a(u,u) + 2ta(u,v) + t^2 a(v,v)\end{aligned}$$

将上式代入(37)

$\Leftrightarrow$

$$t[a(u,v)-(f,v)]+\frac{t^2}{2}a(v,v)\geq 0,\ \ \forall v\in H_E^1(I),t\in R \tag{38}$$

$\Leftrightarrow$

$$a(u,v)=(f,v),\forall v\in H_E^1(I) \tag{39}$$

事实上, 显然有 (39)$\Rightarrow$ (38), 下面证明

$$(38)\Rightarrow(39)$$

只需对 $v\neq 0$ 的情形证明之.

反证法: 若存在$\bar{v} \in H_E^1(I)$，使

$$\alpha := a(u, \bar{v}) - (f, \bar{v}) \neq 0$$

不妨设$\alpha < 0$(否则，令$\bar{v} = -\bar{v}$)，则由 (38) 式知

$$t[a(u, \bar{v}) - (f, \bar{v})] + \frac{t^2}{2} a(\bar{v}, \bar{v}) = \alpha t + \beta t^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathrm{R}$$

其中，α, $\beta := a(\bar{v}, \bar{v})/2 > 0$ 均不依赖于 t.

注意：显然存在充分小的 $t > 0$ 使得上式不成立. $\square$

注意：虚功原理比极小位能原理 (要求对称) 应用要广.

习题 试对问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx}) + u = 6, \quad 1 < x < 2 \\ u(1) = 8, \quad u'(2) + 2u(2) = 3 \end{cases}$$

建立相应虚功原理或极小位能原理。

综上: 为两点边值问题 (A) :

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx}) + qu = f, \;\; a < x < b$$
$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0$$

建立两种等价问题:

变分问题 (B) : 求 $u \in H_E^1(I)$, 使

$$a(u, v) = (f, v), \; \forall v \in H_E^1(I)$$

极小问题 (C) 为: 求 $u \in H_E^1(I)$, 使

$$J(u) = \min_{v \in H_E^1(I)} J(v)$$

冯康原理:

同一物理问题可以有许多不同的数学形式，它们在数学上是等价的，但在实践中并不等效.

从不同的数学形式可能导致不同的数值计算方法，原问题的基本特征在离散后应尽可能得到保持.

分别从微分方程边值问题的等价问题（B）和（C）出发，可以给出相应的数值求解方法：Galerkin 方法和 Ritz 方法。

Ritz: 德国光学家，Ritz方法于 19 世纪末提出

Galerkin：俄国工程师，Galerkin 方法于 1906 年提出
是Ritz方法的推广

Galerkin 方法

Galerkin 方法的基本思想:

将试探函数空间和检验函数空间 $H_E^1(I)$ (无限维) 分别用其适当的有限维子空间 V_n 近似代替.

设 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 是 V_n 的一组基, 则对 $\forall u_n \in V_n$, 有

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$$

变分问题 (B) 的近似变分问题为：求 $u_n \in V_n$，使得

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n), \forall v_n \in V_n$$

$\Leftrightarrow$ 求 $u_n \in V_n$，使得

$$a(u_n, \phi_i) = (f, \phi_i),\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{40}$$

$\Leftrightarrow$ 求 $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$ 中的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，满足

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_j, \phi_i) c_j = (f, \phi_i), i = 1, 2, \cdots, n \tag{41}$$

Ritz 方法

Ritz 方法的基本思想:

将函数空间 $H_E^1(I)$ 用有限维子空间 V_n 近似代替. 极小问题 (C) 的近似问题: 求 $u_n \in V_n$, 使得

$$J(u_n) = \min_{v_n \in V_n} J(v_n)$$

注意

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a(\phi_i, \phi_j)c_i c_j - \sum_{i=1}^{n} c_i(\phi_i, f)$$

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i(x) \text{ 是最小值函数} \Leftrightarrow \text{系数 } c_1,\cdots c_n, \text{ 满足(习题)}$$

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial c_j}=0 \ \Leftrightarrow\ \sum_{j=1}^{n}a(\phi_j,\phi_i)c_j=(f,\phi_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

由此知: Ritz 方法与 Galerkin 方法导出数值解满足的计算公式完全相同, 习惯上称方程 (41) 为Ritz-Galerkin 方程, 并称相应的数值解为 Galerkin (或 Ritz) 数值解.

Ritz 方法与 Galerkin 方法的比较

Galerkin 方法： 方法推导更直接，适用面更广，如不要求 $a(u,v)$ 对称.

Ritz 方法：力学意义更明确，理论基础比较容易建立.

例. 两点边值问题:

$$\begin{cases} Lu := -u'' + u' + u = f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, u'(1) = 0 \end{cases} \tag{42}$$

与之相对应的双线性形式为

$$a(u,v) = \int_a^b (u'v' + u'v + uv)dx$$

注意：当 Ritz-Galerkin 方法用于非齐次边值问题时，试探和检验函数空间不相同，但通过齐次化处理后，可转化为相同情形.

例如对上例，令 $w = u - (1 - x)$ 则

$$\begin{cases} Lw = -w'' + w' + w = g, & 0 < x < 1 \\ w(0) = 0, w'(1) = 1 \end{cases}$$

其中 $g(x) = f(x) + x$.

w 满足齐次本质边界条件.

考虑如下两点边值问题

$$\begin{cases} Lu := u'' + u = -x, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{43}$$

其真解为$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$.

令 $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I), u(0) = u(1) = 0\}$, 则上述边值问题 (形式上)的基于虚功方程的变分问题为:

求 $u \in H_0^1(I)$, 满足

$$a(u, v) \quad = \quad -(x, v), \forall v \in H_0^1(I), \tag{44}$$

其中

$$a(u, v) = (Lu, v) = \int_0^1 (-u'v' + uv)dx \tag{45}$$

记 $\omega(x) = x(1-x)$, 引入 $H_0^1(I)$ 的 n 维近似 (代数多项式) 子空间

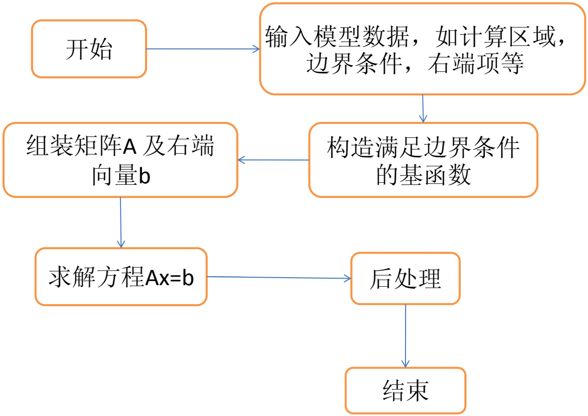
$$U_n = \{\phi_1, \cdots, \phi_n\},\ \phi_i = \omega(x)x^{i-1},\ i = 1, \cdots, n$$

利用 Ritz-Galerkin 计算公式 (41) 可知: 问题 (43) 关于 U_n 下的近似变分问题解 $u_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$ 中的系数 $c = (c_1, \cdots c_n)^T \in R^n$ 满足

$$\sum_{j=1}^{n} a(\phi_j, \phi_i)c_j = -(x, \phi_i), i = 1, 2, \cdots, n$$

下面首先给出求 Galerkin 数值解的算法流程, 然后再给出实现算法的 Matlab 代码, 最后给出数值实验结果.

算法流程


开始
输入模型数据，如计算区域，边界条件，右端项等
构造满足边界条件的基函数
组装矩阵A 及右端向量b
求解方程Ax=b
后处理
结束

算法实现 I

```
function Galerkin_test
%% 准备初始数据

% 微分方程模型数据。函数 modeldata 返回一个结构体 pde
% pde.f : 右端项函数
% pde.exactu : 真解函数
% pde.Du : 真解导数
pde = modeldata();

% 区间
I = [0,1];

% 空间维数（基函数个数）
n = 2;

% 积分精度
option.quadOrder = 10;

%% Galerkin 方法求解
uh = Galerkin(pde,I,n,option);
```

算法实现 II

```
%% 显示数值解图像
showsolution(uh,'-k');

%% 计算代表点处真解和数值解
x = [1/4;1/2;3/4];
[v,~] = basis(x,n);
format shorte
u = pde.exactu(x)
ux = v'*uh
```

```
function pde = modeldata()
%% MODELDATA
%   u(x) = sin(x)/sin(1) - x
%   Du(x) = cos(x)/sin(1)
%   f(x) = -x

pde = struct('exactu',@exactu,'f',@f,'Du',@Du);
%% 精确解
function z = exactu(x)
z = sin(x)/sin(1) - x;
end
%% 右端项
function z = f(x)
z = -x;
end
%% 精确解梯度
function z = Du(x)
z = cos(x)/sin(1);
end
end
```

```
function [phi,gradPhi] = basis(x,n)
%% BASIS 计算 n 维空间 n 个基函数在 m(=length(x)) 个点上的取值
%
% H_0^1([0,1]) 的 n 维近似子空间, 取 w(x) = x*(1-x), n 个基函数分别为:
%          phi_i = w(x)*x^{i-1}, i = 1, 2,..., n
%
% 输入:
%  x(1:m,1): 点
%  n: 空间维数
%
% 输出:
%  phi(1:n,1:m): phi(i,j) 为第 i 个基函数在第 j 个点在处的函数值.
%  gradPhi(1:n,1:m): gradPhi(i,j) 为第 i 个基函数在第 j 个点处的导数值.


m = length(x);% 点的个数

%% 函数值
w = x.*(1-x);
v = ones(n,m);
v(2:end,:) = bsxfun(@times,v(2:end,:),x');
v = cumprod(v,1);
phi = bsxfun(@times,v,w');
```

```
%% 函数梯度值
gw = 1-2*x;
gv = [zeros(1,m);v(1:end-1,:)];
gv(3:end,:) = bsxfun(@times,(2:n-1)', gv(3:end,:));
gradPhi = bsxfun(@times,v,gw') + bsxfun(@times,gv,w');
```

```
function uh = Galerkin(pde,I,n,option)
%% GALERKIN 组装矩阵 A 和右端向量 b，并求解
%
%    pde: 模型数据
%    I  : 区间
%    n : 空间维数

% 区间长度
h = I(2) - I(1);

% 区间 [0,1] 上的 Gauss 积分点及权重
[lambda, weight] = quadpts1d(option.quadOrder);
%积分点个数
nQuad = length(weight);

%% 构造 A 和 b
A = zeros(n,n);
b = zeros(n,1);
for q = 1:nQuad
  gx = lambda(q);
  w = weight(q);
  [phi,gradPhi] = basis(gx,n);
  A = A+(-gradPhi*gradPhi' + phi*phi')*w;
  b = b + pde.f(gx)*phi*w;
```

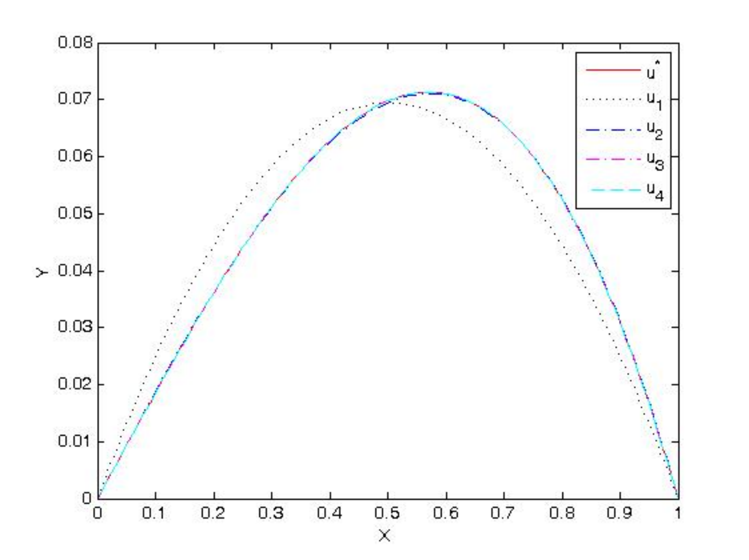
```
end
A = h*A;
b = h*b;

%% 求解
uh = A\b;
```

实验结果 I

下面分别给出了 $n = 1, 2, 3, 4$ 时, Galerkin 数值解 $u_n(x)$ 与真解 u^* 在三个代表点处的值:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
u^*	4.401365432e-002	6.974696366e-002	6.00561663e-002
u_1	5.208333333e-002	6.944444444e-002	5.20833333e-002
u_2	4.408028455e-002	6.944444444e-002	6.00863821e-002
u_3	4.403238182e-002	6.974637681e-002	6.00384793e-002
u_4	4.401416668e-002	6.974637681e-002	6.00566945e-002

实验结果 II


u*
u1
u2
u3
u4
Y
X
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

由该例子可见：尽管 $a(u,v)$ 不满足强制性条件，但就算法本身而言，Galerkin 方法仍然可用（因为对真解有逼近），因此，Galerkin 方法 的适应范围可以比理论上的假设条件更广。

习题 1 试举一反例说明 $a(u,v)=\int_0^1(-u'v'+uv)dx$ 不满足强制性.

Galerkin (或 Ritz) 方法的适定性

定理. 基于 Galerkin (或 Ritz) 数值解存在且唯一。

证明：只需证明方程 (41) 的系数矩阵 A 正定，即

$$(Aw, w) \geq 0,\ \forall w \in R^n,\quad (Aw, w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$$

注意：对 $\forall w := (w_1, \cdots, w_n)^T$，令函数

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$$

有

$$(Aw, w) = a(u_n, u_n) \tag{46}$$

事实上,

$$
\begin{aligned}
Aw &= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}w_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}w_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}w_j\Big)^T \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{n} a(\phi_1,\phi_j)w_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a(\phi_n,\phi_j)w_j\Big)^T \\
&= \Big(a(\phi_1, \sum_{j=1}^{n} w_j\phi_j), \cdots, a(\phi_n, \sum_{j=1}^{n} w_j\phi_j)\Big)^T \\
&= \big(a(\phi_1,u_n), \cdots, a(\phi_n,u_n)\big)^T
\end{aligned}
$$

因此

$$(Aw, w) = \sum_{i=1}^{n} w_i a(\phi_i, u_n) = a\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i\phi_i, u_n\Big) = a(u_n, u_n)$$

$\square$

利用 (46) 和 $a(\cdot,\cdot)$ 的强制性，可得

$$(Aw, w) = a(u_n, u_n) \geq \gamma \|u_n\|_1^2 \geq 0, \ \forall w \in R^n$$

且

$$(Aw, w) = 0 \Leftrightarrow u_n \equiv 0$$

又由于 $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi_i(x)$，而 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ 是 V_n 的一组基，所以

$$u_n \equiv 0 \Leftrightarrow w_i = 0, i = 1(1)n \Leftrightarrow w = \vec{0}$$

这样就证得了 A 的正定性. $\square$

Galerkin (或 Ritz) 数值解的收敛性

设 u 是变分问题 (B) 的真解函数，即满足

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_E^1(I) \tag{47}$$

u_n是 Galerkin 数值解函数，即满足

$$a(u_n, v_n) = (f, v_n), \forall v_n \in V_n \tag{48}$$

利用 (47) 和 (48)，并注意 $V_n \subset H_E^1(I)$，可得 (正交投影性质):

$$a(u - u_n, v_n) = 0, \forall v_n \in V_n \tag{49}$$

$\Rightarrow$ (利用(49))

$$\begin{aligned}\|u-u_n\|_1^2 &\leq \gamma^{-1}a(u-u_n,u-u_n)\\ &= \gamma^{-1}a(u-u_n,u)=\gamma^{-1}a(u-u_n,u-v_n)\\ &\leq \gamma^{-1}M\|u-u_n\|_1\|u-v_n\|_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (拟最佳逼近性)

$$\|u-u_n\|_1 \leq C\inf_{v_n\in V_n}\|u-v_n\|_1 \tag{50}$$

完全性: $\{\phi_i\}_1^\infty$ 的一切可能的线性组合于 $H_E^1(I)$ 中稠密.

定理. 若 $\{\phi_i\}_1^\infty$ 于 $H_E^1(I)$ 中是完全的, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0$$

事实上，由完全性知：对于真解函数 $u \in H_E^1(I)$，存在函数序列

$$\{\psi_n\}_1^\infty, \ \psi_n \in V_n = span\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$$

使得

$$\lim_{n\to\infty} \|u - \psi_n\|_1 = 0$$

$\Rightarrow$ (利用(50))

$$\|u - u_n\|_1 \leq C \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_1 \leq C \|u - \psi_n\|_1$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0$$

$\square$

Ritz-Galerkin 法的主要困难

1. 近似子空间 (或基函数) 的合理选取
2. 数值积分计算量大
3. 代数方程组求解困难