有限差分法

案例 2：均匀直棒热传导问题-II

舒适 魏华祎 易年余 岳孝强

1. 理论分析
   - 相容性
   - 稳定性
     - 两种稳定性
     - 代数判定方法
     - Fourier 判定方法
   - 收敛性

前面介绍的差分格式均满足相容性.

两层格式: 向前、向后和 Crank-Nicholson 格式的截断误差 $R_j^k(u)$ 分别为

$$O(\tau+h^2),\ O(\tau+h^2),\ O(\tau^2+h^2)$$

三层格式: Richardson格式的截断误差为

$$O(\tau^2+h^2)$$

准备工作

记 $N-1$ 维向量

$$U^k = (u_1^k, u_2^k, \cdots, u_{N-1}^k)^T, \quad F = (f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})^T$$

则前面介绍的两层差分格式可统一表示为:

$$U^{k+1} = CU^k + \tau DF, \tag{1}$$

其中 C 和 D 均为 $(N-1)\times(N-1)$ 矩阵.

例如, 对于向前差分格式: $D = I$,

$$
\begin{aligned}
C = A_0 &= \begin{bmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)} \\
&= (1-2r)I + rS
\end{aligned}
$$

其中

$$
S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

类似有:

向后差分格式:

$$C = D = (A_1)^{-1} = [(1+2r)I - rS]^{-1}$$

六点对称格式:

$$C = (A_1)^{-1}A_0 = [(1+r)I - \frac{r}{2}S]^{-1}[(1-r)I + \frac{r}{2}S], \ D = (A_1)^{-1}$$

注意: 出现在上述不同格式中的矩阵 A_1 和 A_0 可以不一样.

对三层或多层格式, 总可通过引入适当的新变量 将其改写成 (1) 的形式.

以 Richardson 格式为例, 其矩阵形式可等价写为

$$\begin{cases} U^{k+1} = 2r(S-2I)U^k + U^{k-1} + 2\tau F \\ U^k = U^k \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$W^{k+1} = CW^k + \tau G$$

其中 $2(N-1)$ 阶矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 2r(S-2I) & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$2(N-1)$维向量

$$W^k = \begin{pmatrix} U^k \\ U^{k-1} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2F \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

由于公式 $W^{k+1} = CW^k + \tau G$ 与 (1) 同形, 所以下面仅针对格式 (1) 讨论稳定性.

按初值稳定

定义. 设任给两初值向量 W^0 和 V^0, 按公式 (1) 分别求得数值解序列 $\{W^k\}$ 和 $\{V^k\}$. 令 $E^k := W^k - V^k$, 若存在正常数 τ_0 和 K, 使得对一切的 $0 < \tau \leq \tau_0$ 和 $0 \leq k\tau \leq T$, 一致地有

$$\left\| E^k \right\| \leq K \left\| E^0 \right\| \tag{3}$$

则称 (1) 关于初值稳定.

注意

$$E^k := CE^{k-1}$$

$\Rightarrow$

$$E^k = C^k E^0$$

$\Rightarrow$

$$\left\|E^k\right\| \le \left\|C^k\right\| \cdot \left\|E^0\right\|$$

由此并利用 (3) 可知: 要求 (传递) 矩阵族 $\{C^k\}$ 一致有界, 即存在正常数 τ_0 和 K, 使得

$$\left\|C^k\right\| \le K,\ 0 < \tau \le \tau_0,\ 0 < k\tau \le T, \tag{4}$$

其中的矩阵范数为向量从属范数.

按右端稳定

定义. 设任给两右端向量 F_1 和 F_2, 从初值 U^0 出发，按公式 (1) 分别求得数值解序列 $\{W^k\}$ 和 $\{V^k\}$. 令 $E^k := W^k - V^k$ 和 $F := F_1 - F_2$, 若存在正常数 τ_0 和 $\bar{K}$, 使得对一切的 $0 < \tau \leq \tau_0$ 和 $0 \leq k\tau \leq T$，一致地有

$$\left\|E^k\right\| \leq \bar{K} \left\|F\right\|, \tag{5}$$

则称 (1) 关于右端稳定。

注意

$$W^k = CW^{k-1} + \tau DF_1$$

$$V^k = CV^{k-1} + \tau DF_2$$

两式相减，得

$$E^k = CE^{k-1} + \tau DF \tag{6}$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
E^k &= CE^{k-1} + \tau DF \\
&= C(CE^{k-2} + \tau DF) + \tau DF \\
&= C^2 E^{k-2} + \tau(C + I)DF \\
&= \cdots\cdots \\
&= C^k E^0 + \tau(C^{k-1} + C^{k-2} + \cdots + C + I)DF \\
&= \tau(C^{k-1} + C^{k-2} + \cdots + C + I)DF
\end{aligned} \tag{7}
$$

定理 1 设 $\|D\| \le K'$ (不依赖于 τ 的正常数), 如果 (4) 成立, 则 (1) 亦按右端稳定.

证明: 由 (7) 和 (4), 有

$$
\begin{aligned}
\|E^k\| &= \tau \left\|(C^{k-1} + \cdots + C + I)DF\right\| \\
&\le \tau \left(\|C^{k-1}\| + \cdots + \|C\| + 1\right) \cdot \|D\| \cdot \|F\| \\
&\le \tau k\tilde{K} \|D\| \cdot \|F\| \quad (\tilde{K} = \max\{K, 1\}) \\
&\le T\tilde{K} \|D\| \cdot \|F\| \le T\tilde{K}K' \cdot \|F\|
\end{aligned}
$$

取 $\bar{K} := T\tilde{K}K'$, 即证得格式 (1) 按右端稳定. □

下面仅需讨论差分格式是否满足 (4).

代数方法

下面设网比 r 为常数, 空间变量 $x \in [0,1]$.

一般情况, 直接验证条件 (4) 相当困难, 下面希望给出其它更容易验证的判别条件.

命题 1 (必要条件) 差分格式 (1) 稳定的必要条件是, 存在与 τ 无关的正常数 M, 使得

$$\rho(C) \leqslant 1 + M\tau, \ 0 < \tau \leqslant \tau_0 \tag{8}$$

这里, $\rho(C)$ 为矩阵 C 的谱半径。

证明：由 (4) 知

$$\rho^k(C) \leqslant \|C^k\| \leqslant K,\ 0 < k \leqslant \frac{T}{\tau},\ 0 < \tau \leqslant \tau_0 \tag{9}$$

不妨设 $K > 1$，且 T 可以被 τ 整除，在上式中取 $k = T/\tau$，则有

$$\rho(C) \leqslant K^{\frac{\tau}{T}} = e^{\frac{\tau}{T}\ln K} \tag{10}$$

又当 $\tau_0 \leq \frac{T}{\ln K}$ 时，对一切 $0 < \tau \leqslant \tau_0$，有 (注意 $e^x = 1 + xe^{\xi}$)，

$$\begin{aligned} e^{\frac{\tau}{T}\ln K} &= 1 + (\frac{\tau}{T}\ln K)e^{\xi} \leqslant 1 + \tau(\frac{1}{T}\ln K)e^{\frac{\tau_0}{T}\ln K} \\ &\leqslant 1 + (\frac{e}{T}\ln K)\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

由 (10) 和 (11) 知 ($M = \frac{e}{T}\ln K$)

$$\rho(C) \leqslant 1 + M\tau$$

条件 (8) 称为Von Neumann 条件, 下面考虑判断稳定性的充要条件.

定义 若 $A \in C^{n\times n}$ 满足 $A^H A = AA^H$ 则称 A 为正规矩阵，这里 A^H 表示 A 的共轭转置，即 $A^H = \bar{A}^T$.

例如酉矩阵, Hermite 矩阵, 实对称矩阵等均为正规矩阵.

命题 2 (充分条件) 若 $C(\tau)$ 是正规矩阵，则条件 (8) 也是差分格式 (1) 稳定的充分条件。

证明：此时取 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 2 范数，由 $C(\tau)$ 是正规矩阵知

$$\|C(\tau)\| = \rho(C)$$

由此并利用 (8) 可得 (注意 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \leq e,\ x \to 0^+$)

$$\begin{aligned} \|C^k(\tau)\| &\leq \|C(\tau)\|^k = \rho^k(C) \leq (1+M\tau)^k \\ &\leq (1+M\tau)^{\frac{T}{\tau}} \leq K \end{aligned}$$

其中正常数 $K := e^{MT}$.

□

推论 1 若 W 是 $N-1$ 阶实对称矩阵, $C(\tau)=R(W)$ 是矩阵 W 的实系数有理函数, 即

$$C(\tau)=R(W)=p(W)(I-q(W))^{-1}$$

其中 $p(W)$ 与 $q(W)$ 是 W 的多项式函数. 则差分格式 (1) 稳定的充要条件是

$$\max_j |R(\lambda_j^W)| \leq 1+M\tau,\ 0<\tau\leq\tau_0$$

其中 λ_j^W $(j=1,\cdots,N-1)$ 是 W 的第 j 个特征值.

事实上, 易知 $C(\tau)$ 也是实对称矩阵, 且其第 j 个特征值为 $R(\lambda_j^W)$, 从而由命题 2 可知

$$\rho(C)=\max_j |R(\lambda_j^W)| \leq 1+M\tau$$

下面，利用 Von Neumann 条件判定前面建立的四种差分格式的稳定性.

注意 (习题): 由 (2) 定义的矩阵 S 的特征值为

$$\lambda_j^S = 2\cos j\pi h, \quad j = 1, \cdots, N-1, \ h = \frac{1}{N}$$

相应特征向量

$$U^j = (u_1^j, \cdots, u_{N-1}^j)^T, \ u_k^j = \sin kj\pi h, \quad k = 1, \cdots, N-1$$

例 1 向前差分格式

该格式所对应的矩阵 $C=(1-2r)I+rS$ 是对称矩阵 S 的实系数有理函数，因此其特征值为

$$
\begin{aligned}
\lambda_j^C &= (1-2r)+r\lambda_j^S \\
&= 1-2r(1-\cos j\pi h) \\
&= 1-4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}, \quad j=1,\cdots,N-1
\end{aligned}
$$

因此，由推论 1 知：向前差分格式稳定的充要条件是 (对一切 $0 < \tau \leq \tau_0$)

$$
\begin{aligned}
& \left|1 - 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}\right| \leq 1 + M\tau,\ j = 1, \cdots, N-1 \\
\Leftrightarrow \quad & -1 - M\tau \leq 1 - 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \leq 1 + M\tau \\
\Leftrightarrow \quad & -M\tau \leq 4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \leq 2 + M\tau \\
\Leftrightarrow \quad & 2r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \leq 1 + \frac{M}{2}\tau \qquad (12) \\
\Leftrightarrow \quad & r \leq \frac{1}{2} \qquad \text{(证明见后)} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

关于 (12) $\Rightarrow$ (13) 的证明.

反证法, 设 $r=\frac{1}{2}+\varepsilon\ (\varepsilon>0)$, 代入 (12) 得

$$2\times(\frac{1}{2}+\varepsilon)\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1+\frac{M}{2}\tau,\ \ 0<\tau\le\tau_0,\ \ j=1,2,\cdots,N-1$$

即

$$(1+2\varepsilon)\sin^2\frac{j\pi h}{2}\le 1+\frac{M}{2}\tau,\ \ 0<\tau\le\tau_0,\ \ j=1,2,\cdots,N-1$$

在上式中取 $j=N-1$ (即 $jh=1-h$), 则其左端为

$$(1+2\varepsilon)(1+O(h))$$

而右端为

$$1+O(\tau)$$

所以当 $\tau\to 0$ 时 (等价 $h\to 0$), 产生矛盾. $\square$

例 2 向后差分格式

正规矩阵

$$C = [(1+2r)I - rS]^{-1},$$

其特征值

$$\lambda_j^C \le 1, \quad j = 1, \cdots, N-1$$

故向后差分格式对于任意 $r > 0$ 恒稳定 (习题).

例 3 六点对称格式

正规矩阵

$$C = [(1+r)I - \frac{r}{2}S]^{-1}[(1-r)I - \frac{r}{2}S],$$

其特征值

$$\lambda_j^C \le 1, \quad j = 1, \cdots, N-1$$

故六点对称格式对于任意 $r > 0$ 恒稳定 (习题).

例 4 Richardson 格式

正规矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 2r(S-2I) & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

设 μ 为 C 的特征值, $w = (w_1^T, w_2^T)^T$ 为相应的非平凡特征向量, 即 $Cw = \mu w$ 或

$$2r(S-2I)w_1 + w_2 = \mu w_1 \tag{14}$$

$$w_1 = \mu w_2 \tag{15}$$

$\Rightarrow$

$$2\mu r(S-2I)w_2 + w_2 = \mu^2 w_2$$

$\Leftrightarrow$

$$Sw_2 = (2 + \frac{\mu}{2r} - \frac{1}{2\mu r})w_2.$$

注意 S 的第 j 个特征值为

$$\lambda_j^S = 2\cos j\pi h, \quad j = 1, \cdots, N-1$$

所以 λ_j^S 所对应的矩阵 C 的特征值 μ_j 满足

$$2\cos j\pi h = 2 + \frac{\mu_j}{2r} - \frac{1}{2\mu_j r}$$

$\Rightarrow$

$$\mu_j^2 + 4\mu_j r(1 - \cos j\pi h) - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\mu_j^2 + 8\mu_j r \sin^2\frac{j\pi h}{2} - 1 = 0$$

由此可得 μ_j 的两个根为

$$\mu_j^m = -4r\sin^2\frac{j\pi h}{2} \pm \sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2}+1}, \quad m=1,2$$

这样就求得了矩阵 C 的所有特征值

$$\mu_j^m,\ j=1,\cdots,N-1;\ m=1,2$$

因此其谱半径 (对于任意 $r>0$)

$$\begin{aligned}\rho(C)=\max_j(|\mu_j^1|,|\mu_j^2|) &= \max_j\left|4r\sin^2\frac{j\pi h}{2}+\sqrt{16r^2\sin^4\frac{j\pi h}{2}+1}\right| \\ &> r+\sqrt{1+r^2}>1+r\end{aligned}$$

所以 Richardson 格式恒不稳定.

Fourier 方法

- 二层格式

第 $k+1$ 个时间层上关于空间节点 x_j $(j=1,\cdots,N-1)$ 的差分格式

$$a_1 u_{j+1}^{k+1} + a_0 u_j^{k+1} + a_{-1} u_{j-1}^{k+1} = b_1 u_{j+1}^k + b_0 u_j^k + b_{-1} u_{j-1}^k + \tau f_j \quad (16)$$

其中

1. $u_0^{k+1} = u_N^{k+1} = 0 = u_0^k = u_N^k$ (齐次边值条件).
2. a_m 和 b_m $(m=0,\pm 1)$ 不依赖 j 但与 τ (或 h) 有关.

向前差分格式

$$u_j^{k+1} = ru_{j-1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j+1}^k + \tau f_j$$

$$a_1 = a_{-1} = 0,\ \ a_0 = 1;\ \ b_1 = b_{-1} = r,\ \ b_0 = 1-2r$$

向后差分格式

$$-ru_{j+1^{k+1}} + (1+2r)u_j^{k+1} - ru_{j-1}^{k+1} = u_j^k + \tau f_j$$

$$a_1 = a_{-1} = -r,\ \ a_0 = 1+2r;\ \ b_1 = b_{-1} = 0,\ \ b_0 = 1$$

六点对称格式

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1} + (1+r)u_j^{k+1} - \frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{j+1}^k + (1-r)u_j^k + \frac{r}{2}u_{j-1}^k + \tau f_j$$

$$a_1 = a_{-1} = -\frac{r}{2},\ \ a_0 = 1+r;\ \ b_1 = b_{-1} = \frac{r}{2},\ \ b_0 = 1-r$$

按初值稳定的条件为 (K 为正常数)

$$\left\|U^k\right\|_{R^{N-1}} \leq K\left\|U^0\right\|_{R^{N-1}} \tag{17}$$

下面利用 Fourier (级数) 方法, 给出 (17) 的若干等价条件.

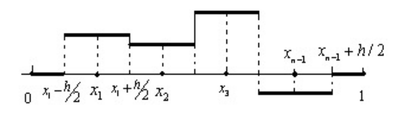
等价条件一

通过将第 k 个时间层的差分解向量 U^k 在 $I=[0,1]$ 上延拓，得到 (17) 的一个等价条件.

将 U^k 延拓成 I 上的阶梯函数

$$u_k(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le x_1-\frac{h}{2} \\ u_1^k, & x_1-\frac{h}{2}\le x\le x_1+\frac{h}{2} \\ \vdots & \\ u_j^k, & x_j-\frac{h}{2}\le x\le x_j+\frac{h}{2} \\ \vdots & \\ u_{N-1}^k, & x_{N-1}-\frac{h}{2}\le x\le x_{N-1}+\frac{h}{2} \\ 0, & x_{N-1}+\frac{h}{2}\le x\le 1 \end{cases} \tag{18}$$

其图像如下:



由 (18) 式, 有

$$\|u_k\|^2_{L^2(I)} = \int_0^1 u_k^2(x)dx = h\sum_{j=1}^{N-1}(u_j^k)^2 = h\left\|U^k\right\|^2_{R^{N-1}}$$

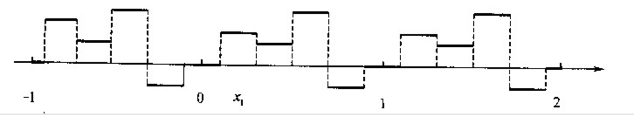
由此知: (17) 等价于

$$\|u_k\|^2_{L^2} \le K^2\|u_0\|^2_{L^2} \tag{19}$$

等价条件二

通过将函数 u_k 在 $(-\infty, \infty)$ 上周期延拓，得到 (19) 的一个等价条件.

由于$u_k(0) = 0 = u_k(1)$, 所以可将 $u_k(x)$ 周期延拓到整个实轴.



将 $u_k(x)$ 在 $x \in [0,1]$ 上展开成 Fourier 级数 (这里周期为 1):

$$u_k(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_k(p) e^{i2p\pi x}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{20}$$

其中

$$v_k(p) = \int_0^1 u_k(x) e^{-i2p\pi x} dx, \;\; p = 0, \pm 1, \cdots$$

利用 Parseval 等式 (函数 $u_k(x)$ 在区间 $I=[0,1]$ 上的 L^2 范数与相应的 Fourier 系数序列 $\{v_k(p)\}_{p=-\infty}^{\infty}$ 的 l^2 范数的等价性):

$$\|u_k\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |v_k(p)|^2 \tag{21}$$

和 (19), 按初值稳定的条件又可转化为

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |v_k(p)|^2 \le K^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |v_0(p)|^2 \tag{22}$$

等价条件三

直接验证可知：当 $x \in [h/2, 1-h/2]$ 时，有差分方程

$$a_1 u_{k+1}(x+h)+a_0 u_{k+1}(x)+a_{-1} u_{k+1}(x-h) = b_1 u_k(x+h)+b_0 u_k(x)+b_{-1} u_k(x-h) \tag{23}$$

(23) 的等价形式

$$\sum_{m=-1}^{1} a_m u_{k+1}(x+mh) = \sum_{m=-1}^{1} b_m u_k(x+mh)$$

将 (20) 代入上式，可得

$$\sum_{m=-1}^{1} a_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_{k+1}(p) e^{i2p\pi(x+mh)} = \sum_{m=-1}^{1} b_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_k(p) e^{i2p\pi(x+mh)}$$

即 (注意 $x_m = mh$)

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} v_{k+1}(p) \left(\sum_{m=-1}^{1} a_m e^{i2p\pi x_m} \right) e^{i2p\pi x} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} v_k(p) \left(\sum_{m=-1}^{1} b_m e^{i2p\pi x_m} \right) e^{i2p\pi x}$$

$\Rightarrow$

$$v_{k+1}(p) \sum_{m=-1}^{1} a_m e^{i2p\pi x_m} = v_k(p) \sum_{m=-1}^{1} b_m e^{i2p\pi x_m} \tag{24}$$

记

$$G(ph,\tau)=(\sum_{m=-1}^{1}a_m e^{i2p\pi x_m})^{-1}(\sum_{m=-1}^{1}b_m e^{i2p\pi x_m})$$

则由 (24) 有

$$v_{k+1}(p)=G(ph,\tau)v_k(p)$$

此时 (22) 式

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}|v_k(p)|^2\le K^2\sum_{p=-\infty}^{\infty}|v_0(p)|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|G^k(ph,\tau)v_0(p)\right|^2\le K^2\sum_{p=-\infty}^{\infty}|v_0(p)|^2$$

由 $\{v_0(p)\}$ 的任意性知，上式又等价于

$$\left|G^k(ph,\tau)\right|\le K$$

$\Leftrightarrow$

$$|G(ph,\tau)|\le 1+M\tau \tag{25}$$

称 $G(ph,\tau)$ 为增长因子. (25) 也称 Von Neumann 条件.

命题 1 差分格式 (16) 稳定 $\Leftrightarrow G^k(ph,\tau)$ 一致有界 $\Leftrightarrow$ Von Neumann 条件 (25) 成立.

注: 为了计算两层格式

$$a_1 u_{j+1}^{k+1} + a_0 u_j^{k+1} + a_{-1} u_{j-1}^{k+1} = b_1 u_{j+1}^k + b_0 u_j^k + b_{-1} u_{j-1}^k \tag{26}$$

的增长因子, 只需将通项 (分离变量):

$$u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q} e^{i2\pi p(x_{j+m})} = v_{k+q} e^{i2\pi p(x_j+mh)}, \;\; q = 0, 1; \;\; m = -1, 0, 1$$

或

$$u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q} e^{i\alpha(x_j+mh)}, \;\; \alpha = 2p\pi$$

代入格式 (26) 中，再消去 $e^{i\alpha x_j}$ 即可求得增长因子。

试证明(习题)：若

$$r \leq \frac{1}{2}$$

则向前差分格式按初值稳定.

例 2 向后差分格式

$$-ru_{j-1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j+1}^{k+1}=u_j^k \tag{27}$$

令

$$u_{j+m}^{k+q}=v_{k+q}e^{i\alpha(x_j+mh)},\ q=0,1;\ m=-1,0,1$$

将上式代入 (27)，可得

$$v_{k+1}(-re^{i\alpha(x_j-h)}+(1+2r)e^{i\alpha x_j}-re^{i\alpha(x_j+h)})=v_ke^{i\alpha x_j}$$

两边约去因子 $e^{i\alpha x_j}$，得

$$v_{k+1}\left[-re^{-i\alpha h}+(1+2r)-re^{i\alpha h}\right]=v_k$$

由上式知，增长因子为

$$
\begin{aligned}
G(ph,\tau) &= \frac{1}{1+2r-r(e^{-i\alpha h}+e^{i\alpha h})} = \frac{1}{1+2r(1-\cos\alpha h)} \\
&= \frac{1}{1+4r\sin^2\frac{\alpha h}{2}} = \frac{1}{1+4r\sin^2 ph\pi}
\end{aligned}
$$

由 Von Neumann 条件知

$$
\frac{1}{1+4r\sin^2 ph\pi} \leq 1+M\tau
$$

上式对任意的 $\tau>0$ 均成立，因此，向后差分格式无条件稳定(绝对稳定).

试证明 (习题): Grank-Nicholson格式无条件稳定 (绝对稳定).

- 判定方程组 (或多层格式) 稳定性的 Fourier 方法

设方程组的阶为 $s \geq 2$, 即每个点有 s 个自由度。此时, 前面标量型抛物方程的二层格式 (设 r 为常数, 且不妨设右端函数为零)

$$a_{-1}u_{j-1}^{k+1} + a_0 u_j^{k+1} + a_1 u_{j+1}^{k+1} = b_{-1}u_{j-1}^{k} + b_0 u_j^{k} + b_1 u_{j+1}^{k}$$

就变为

$$A_{-1}U_{j-1}^{k+1} + A_0 U_j^{k+1} + A_1 U_{j+1}^{k+1} = B_{-1}U_{j-1}^{k} + B_0 U_j^{k} + B_1 U_{j+1}^{k} \quad (28)$$

其中 A_m, B_m 为 s 阶方阵, U_m 为 s 维向量 $(m = -1, 0, 1)$.

例 4 Richarson格式

$$u_j^{k+1} - 2r(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) - u_j^{k-1} = 0$$

它等价于差分方程组 (阶 $s = 2$):

$$\begin{cases} u_j^{k+1} = 2r(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) + w_j^k \\ w_j^{k+1} = u_j^k \end{cases} \tag{29}$$

$\Leftrightarrow$

$$U_j^{k+1} = B_{-1}U_{j-1}^k + B_0 U_j^k + B_1 U_{j+1}^k$$

其中

$$U_j^{k+q} = (u_j^{k+q}, w_j^{k+q})^T, \; q = 0, 1$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} -4r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $(\alpha = 2p\pi)$

$$U_{j+m}^{k+q} = V_{k+q} e^{i\alpha(x_j+mh)}, \quad q = 0, 1; \quad m = -1, 0, 1 \tag{30}$$

其中

$$V_{k+q} = (v_{k+q}^1, \cdots, v_{k+q}^s)^T, q = 0, 1$$

特别对 Richarson 格式, 上式等价于

$$\begin{cases} u_{j+m}^{k+q} = v_{k+q}^1 e^{i\alpha(x_j+mh)}, \\ w_{j+m}^{k+q} = v_{k+q}^2 e^{i\alpha(x_j+mh)}, \end{cases} \quad q = 0, 1; \quad m = -1, 0, 1 \tag{31}$$

将 (30) 代入 (28) 可求得相应的 s 阶增长矩阵: $G(ph, \tau)$.

例如对于 Richarson 格式, 将 (31) 代入 (29), 可得

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 e^{i\alpha x_j} = 2r\left[v_k^1 e^{i\alpha(x_j-h)} - 2v_k^1 e^{i\alpha x_j} + v_k^1 e^{i\alpha(x_j+h)}\right] + v_k^2 e^{i\alpha x_j} \\ v_{k+1}^2 e^{i\alpha x_j} = v_k^1 e^{i\alpha x_j} \end{cases}$$

约去因子 $e^{i\alpha x_j}$, 得

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 = 2r \cdot v_k^1(e^{-i\alpha h} - 2 + e^{i\alpha h}) + v_k^2 \\ v_{k+1}^2 = v_k^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 = 4rv_k^1(\cos\alpha h - 1) + v_k^2 \\ v_{k+1}^2 = v_k^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_{k+1}^1 = -8r\sin^2 ph\pi \cdot v_k^1 + v_k^2 \\ v_{k+1}^2 = v_k^1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$V_{k+1} = G(ph,\tau)V_k$$

其中，2 阶增长矩阵

$$G(ph,\tau) = \begin{pmatrix} -8\sin^2 ph\pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

命题 2 差分格式 (28) 稳定的充要条件是: s 阶增长矩阵族

$$\{G^k(x_p,\tau) = G^k(ph,\tau):\ 0<\tau\le\tau_0, 0<k\tau\le T, p=0,\cdots,N-1\} \quad (32)$$

一致有界.

命题 3 矩阵族 (32) 一致有界的必要条件是 $G(x_p,\tau)$ 的谱半径

$$\rho(G)\le 1+M\tau$$

即 Von Neumann 条件成立. 若 $G(x_p,\tau)$ 是正规矩阵, 则 Von Neumann 条件也是稳定的充分条件.

特别当 $s=2$ 时, 有

命题 4 设 $G(x_p,\tau)=(g_{ij})_{2\times 2}$, λ_1 和 λ_2 是 $G(x_p,\tau)$ 的特征值, 则差分格式 (28) 稳定的充要条件是:

$$(1)\quad |\lambda_i(x,\tau)|\le 1+M\tau,\ i=1,2 \tag{33}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad &\|G(x,\tau)-\frac{1}{2}(g_{11}(x,\tau)+g_{22}(x,\tau))\mathrm{I}\| \\ &\le M(\tau+|1-|\lambda_1(x,\tau)||+|\lambda_1(x,\tau)-\lambda_2(x,\tau)|)\end{aligned} \tag{34}$$

其中 I 是二阶单位矩阵.

推论 特别若 $G(x_p,\tau)$ 与 τ 无关, 则差分格式 (28) 稳定的充要条件是:

$$(1)\quad |\lambda_i(x)|\le 1,\ i=1,2 \tag{35}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad &\|G(x)-\frac{1}{2}(g_{11}(x)+g_{22}(x))\mathrm{I}\| \\ &\le M(|1-|\lambda_1(x)||+|\lambda_1(x)-\lambda_2(x)|),\ 0\le x\le 1\end{aligned} \tag{36}$$

例如对于 Richarson 格式，其相应的增长矩阵

$$G(ph,\tau)=\begin{pmatrix} -8\sin^2 ph\pi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $G(ph,\tau)$ 是对称矩阵，则由命题 3 可知：该差分格式稳定的充要条件是

$$\rho(G)\leq 1+O(\tau)$$

注意 $G(ph,\tau)$ 的特征根满足：

$$\lambda^2+(8r\sin^2 ph\pi)\lambda-1=0 \tag{37}$$

下面介绍几种利用上述二次多项式方程，判定 $G(ph,\tau)$ 是否满足 Von Neumann 条件的方法.

方法一：直接利用求根公式

(37) 的两个根分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4r\sin^2 ph\pi + \sqrt{16r^2\sin^4 ph\pi + 1} \\ \lambda_2 = -4r\sin^2 ph\pi - \sqrt{16r^2\sin^4 ph\pi + 1} \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \rho(G) &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max_p \left| 4r\sin^2 ph\pi + \sqrt{16r^2\sin^4 ph\pi + 1} \right| \\ &> r + \sqrt{1+r^2} > 1 + r, \quad \forall r > 0 \end{aligned}$$

即对任意给定的网格比 r，均不满足 Von Neumann 条件，故 Richarson 格式绝对不稳定。

方法二:

引理 2 实系数二次方程 $\lambda^2 - b\lambda - c = 0$ 的根按模不大于 1 的充要条件是

$$|b| \le 1 - c \le 2. \tag{38}$$

对二次多项式方程 (37), 注意相应的 $c = 1$, 所以对任意给定的网格比 r, $\exists\ p = 0, \pm 1, \cdots$, 使得

$$|b| = |-8r\sin^2 ph\pi| > 0 = 1 - c$$

$\Rightarrow$

方程 (37)的根不大于 1, 故 Richarson 格式绝对不稳定.

例 5 考虑逼近热传导方程的 Dufort Frankel 格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}=\alpha\frac{u_{j+1}^k-u_j^{k+1}-u_j^{k-1}+u_{j-1}^k}{h^2} \tag{39}$$

引进新变量 $w_j^{k+1}=u_j^k$, 将它化为一阶方程组 $(r=\alpha\tau/h^2)$:

$$\begin{cases} u_j^{k+1}=\frac{2r}{1+2r}(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+\frac{1-2r}{1+2r}w_j^k \\ w_j^{k+1}=u_j^k, \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} u_j^{k+1} \\ w_j^{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2r}{1+2r}(\delta_1+\delta_{-1}), & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j^k \\ w_j^k \end{pmatrix}$$

其中 $\delta_{\pm 1}u_j=u_{j\pm 1}$.

用 Fourier 方法可知增长矩阵

$$G(\alpha h)=\begin{pmatrix} \frac{2r}{1+2r}(e^{i\alpha h}+e^{-i\alpha h}), & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1, & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4r}{1+2r}\cos\alpha h, & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

注意 $G(\alpha h)$ 不是正规矩阵和不显含 τ, 所以下面利用命题 4 的推论, 给出 Dufort Frankel 格式稳定的充要条件.

易知矩阵 $G(\alpha h)$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{4r\cos\theta}{1+2r}\lambda - \frac{1-2r}{1+2r} = 0,\ \theta = \alpha h = 2\pi ph \in [0, 2\pi] \tag{41}$$

由于二次方程 (41) 的系数显然满足 (38)，故 $G(\alpha h)$ 的特征值按模 $\leqslant 1$，即满足命题 4 的推论 的第一个条件.

其次，注意 (41) 的二根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{4r\cos\theta}{1+2r} \pm \frac{2}{1+2r}\sqrt{4r^2\cos^2\theta + (1-2r)^2}$$

二根之差

$$\lambda_1-\lambda_2=\frac{4}{1+2r}\sqrt{4r^2\cos^2\theta+(1-2r)^2}$$

而

$$1-|\lambda_1|=1-(\frac{4r\left|\cos\theta\right|}{1+2r}+\frac{2}{1+2r}\sqrt{4r^2\cos^2\theta+(1-2r)^2})$$

令 $\Lambda(\theta)=|1-|\lambda_1||+|\lambda_1-\lambda_2|$，显然

$$\Lambda(\theta)=1+\left|\cos\theta\right|,\quad \text{当 } r=\tfrac{1}{2}$$

$$\Lambda(\theta)\geq|\lambda_1-\lambda_2|\geqslant\frac{4\left|1-2r\right|}{1+2r}>0,\quad \text{当 } r\neq\tfrac{1}{2}$$

可见函数 $\Lambda(\theta)$ 对 $\forall r>0$ 于 $[0,2\pi]$ 有正的下界 $m>0$.

另一方面,

$$G(x)-\frac{1}{2}(g_{11}+g_{22})\mathrm{I}=\begin{pmatrix} \frac{2r}{1+2r}\cos\theta & \frac{1-2r}{1+2r} \\ 1 & -\frac{2r}{1+2r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

其 F−模显然有上界 $K>0$.

这样就证明了命题 4 的推论的第二个条件成立. 从而证得 (39) 格式对 $\forall r>0$ 均稳定. $\square$

习题 证明差分格式

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=\frac{a}{h^2}\left[\theta\left(u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}\right)+(1-\theta)\left(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k\right)\right]$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1$ 恒稳定，当 $0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$ 时，稳定的充要条件是

$$r\leqslant\frac{1}{2(1-2\theta)}$$

收敛性

相容性+稳定性 $\Rightarrow$ 收敛性

从而有如下结论:

1. 当网比 $r \leq \frac{1}{2}$ 时，向前差分格式的解收敛，且收敛阶为 $O(\tau + h^2)$;
2. 对于任何网比 $r > 0$，向后差分格式的解收敛，且收敛阶为 $O(\tau + h^2)$;
3. 对于任何网比 $r > 0$，六点对称格式的解收敛，且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^2)$.

附加页：其它边界条件的处理

对于第二或第三类边界条件，因涉及导数，处理起来困难些，且可能会出现如下所谓的与内部处理的不协调问题：

这时在边界节点处，要从第二或第三类边界条件提供的微分方程出发，进行离散.

可能会导致：降阶现象，破坏对称性等；

今后介绍的广义差分法或有限元法，可以很好地解决这些问题.