第18卷 第3期
2013年6月

哈尔滨理工大学学报
JOURNAL OF HARBIN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 18 No. 3
Jun. 2013

解第一类算子方程的一种正则化方法

宋迎春， 藏丽珠， 潘状元
(哈尔滨理工大学 应用科学学院，黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 提出一种新的对算子及右端项都近似给定的第一类算子方程的正则化方法，且依据广义 Arcangeli 方法选取正则参数，证明正则解的收敛性，且与 Tikhonov 正则化方法比较，提高了正则解的渐近阶估计.

关键词: 第一类算子方程; 不适定问题; 正则化方法; 广义 Arcangeli 方法

中图分类号: O241.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2013)03-0083-03

A Study on a Regularization Method for the Operator Equation of the First Kind

SONG Ying-chun， *ZANG Li-zhu*， *PAN Zhuang-yuan*
(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: This paper presents a new regularization method for solving the operator equation of the first kind with approximate operator and the right-hand side, and by applying the generalized Arcangeli's criterion to choose the regularization parameter, the convergence of the regularization is proved and the asymptotic order of the regularized solution is improved.

Key words: operator equation of the first kind; Ill-posed problem; regularization method; generalized Arcangeli's criterion

1 预备知识

许多数学物理问题的研究可归结为求解第一类算子方程. 第一类算子方程通常是典型的不适定问题[1-5]，一般地，人们采用吉洪诺夫正则化方法来得到方程的稳定近似解. 对右端项为近似的第一类算子方程的稳定近似解的构造及其性质，有许多学者进行了研究，如 Tikhonov A N，Groetsch C W，杨宏奇，侯宗义等. 但往往实际问题中，算子及其右端项都是近似给定的.

收稿日期: 2012-09-10
基金项目: 国家自然科学基金(19971022); 黑龙江省自然科学基金(A201214).
作者简介: 宋迎春(1963—)，女，副教授;
藏丽珠(1987—)，女，硕士研究生，E-mail: zanglizhu_123@163.com;
潘状元(1954—)，男，教授，硕士生导师.

本文提出一种新的正则化方法用来对算子与右端项都为近似给定的第一类算子方程进行求解.

设 T 是实 Hilbert 空间 X 到实 Hilbert 空间 Y 的紧线性算子，考虑第一类算子方程:

$$Tx = y \tag{1}$$

因为在实际问题中，算子 T 和右端 y 通常是近似给定的，代替方程(1)，考虑方程

$$T_h x = y^\delta \tag{2}$$

其中 T_h 是紧线性算子，T_h 和 y^δ 满足下式:

$$\| T - T_h \| \leqslant h < h_0 \tag{3}$$

$$\| y - y^\delta \| \leqslant \delta < \delta_0 \tag{4}$$

这里h_0，δ_0都是正常数. 设$y\in R(T)$，用$T^{\dagger}$表示T的Moore-Penrose广义逆，有$T^{\dagger}y$为方程(1)的极小模最小二乘解[5].

首先，建立正则化算子，然后依据广义Arcangeli方法来选择正则化参数α，同时证明正则解的收敛性，在$T^{\dagger}y\in R(\tilde{T}^3)$的条件下，获得正则解的渐近阶估计为$O((h+\delta)^{\frac{6}{7}})$，而通常的Tikhonov正则化方法只能获得正则解的渐近阶估计为$O((h+\delta)^{\frac{2}{3}})$[8]，从而新的正则化方法与通常的Tikhonov正则化方法相比较，提高了正则解的渐近阶估计.

2 正则解的收敛性

用

$$x_{\delta,h}^{\alpha}=((T_h^* T_h)^3+\alpha I)^{-\frac{1}{3}}T_h^* y^{\delta} \tag{5}$$

表示方程(2)的近似解，用

$$x_{\delta}^{\alpha}=((T^* T)^3+\alpha I)^{-\frac{1}{3}}T^* y^{\delta} \tag{6}$$

来表示方程

$$Tx=y^{\delta} \tag{7}$$

的近似解，其中$\alpha>0$为参数. 为了方便，记：$\tilde{T}_h=T_h^* T_h$，$\hat{T}_h=T_hT_h^*$，$\tilde{T}=T^* T$，$\hat{T}=TT^*$. 本节的目的是通过选取适当的正则化参数α，证明当$\delta,h\to 0^+$时，有$x_{\delta,h}^{\alpha}\to T^{\dagger}y$.

根据文[5-9]易证下列引理成立.

引理1 设$T^{\dagger}y\in R(\tilde{T}^{v})$ $(0<v\leqslant 3)$，则有$\|x_{\delta}^{\alpha}-T^{\dagger}y\|\leqslant c_1\alpha^{\frac{v}{3}}+\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}$，其中$c_1$为正常数.

引理2 设T_h，y^{δ}满足(3)、(4)，则有$\|x_{\delta,h}^{\alpha}-x_{\delta}^{\alpha}\|\leqslant c_2\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}+c_3h\alpha^{-\frac{1}{6}}$，其中$c_2$，$c_3$是正常数.

由引理1，引理2可知，当$T^{\dagger}y\in R(\tilde{T}^{v})$ $(0<v\leqslant 3)$时，有

$$\|x_{\delta,h}^{\alpha}-T^{\dagger}y\|\leqslant c_1\alpha^{\frac{v}{3}}+c_2\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}+c_3h\alpha^{-\frac{1}{6}} \tag{8}$$

特别地，当$v=3$时，即$T^{\dagger}y\in R(\tilde{T}^3)$时，有

$$\|x_{\delta,h}^{\alpha}-T^{\dagger}y\|\leqslant c_1\alpha+c_2\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}+c_3h\alpha^{-\frac{1}{6}} \tag{9}$$

下面依据广义Arcangeli方法来选取正则参数α，即α要满足下式：

$$\rho(\alpha):=\|\tilde{T}_hx_{\delta,h}^{\alpha}-T_h^* y^{\delta}\|=(\delta^p+h^r)\alpha^{-q} \tag{10}$$

其中$p,r,q>0$.

引理3 下列结论成立：

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\rho(\alpha)=0$;

2) 式(11)的解$\alpha=\alpha(\delta,h)$存在唯一且$\alpha>0$;

3) $\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}\alpha(\delta,h)=0$.

引理4 设$\alpha=\alpha(\delta,h)$是式(10)的解，则

1) 当$q\geqslant\max\left\{\frac{1}{6}p,\frac{1}{6}r\right\}$时，$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}=\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}h\alpha^{-\frac{1}{6}}=0$;

2) 当$q\geqslant\max\{p,r\}$时，$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}\delta\alpha^{-1}=\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}h\alpha^{-1}=0$.

下面给出本节的主要结果，即正则解的收敛性定理.

定理1 设$\alpha=\alpha(\delta,h)$是(10)之解. 若$q\geqslant\frac{1}{6}\max\{p,r\}$，则$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}x_{\delta,h}^{\alpha}=T^{\dagger}y$.

证明：由式(8)有

$$\|x_{\delta,h}^{\alpha}-T^{\dagger}y\|\leqslant c_1\alpha^{\frac{v}{3}}+c_2\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}+c_3h\alpha^{-\frac{1}{6}}$$

及引理4中1)有$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}\delta\alpha^{-\frac{1}{6}}=\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}h\alpha^{-\frac{1}{6}}=0$，另外，由引理3知$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}\alpha=0$. 所以定理成立.

3 正则解的渐近阶估计

设$y\in R(T)$且$T^{\dagger}y\in R(\tilde{T}^3)$，则存在$w_0$使得$T^{\dagger}y=\tilde{T}^3w_0$，即$y=T\tilde{T}^3w_0$，又假设$\tilde{T}w_0\neq 0$.

记

$$A_{\delta,h}^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}[\tilde{T}_h(\tilde{T}_h^3+\alpha I)^{-\frac{1}{3}}-I]T_h^* y^{\delta} \tag{11}$$

$$A_{\delta}^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}[\tilde{T}(\tilde{T}^3+\alpha I)^{-\frac{1}{3}}-I]T^* y^{\delta} \tag{12}$$

$$A^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}[\tilde{T}(\tilde{T}^3+\alpha I)^{-\frac{1}{3}}-I]T^* y \tag{13}$$

有

$$\rho(\alpha):=\|\tilde{T}_hx_{\delta,h}^{\alpha}-T_h^* y^{\delta}\|=\alpha\|A_{\delta,h}^{\alpha}\| \tag{14}$$

引理5 设$\alpha=\alpha(\delta,h)$是(10)的解，当$q\geqslant\max\{p,r\}$时，有$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}A_{\delta,h}^{\alpha}=\frac{1}{3}\tilde{T}w_0$.

下面给出本节的主要结论.

定理2 设$\alpha=\alpha(\delta,h)$是(10)的解，若$T^{\dagger}y\in R(\tilde{T}^3)$，取$r=p>6$，$q=\frac{7}{6}p-1$时，则当$\delta,h\to 0^+$时

$$\|x_{\delta,h}^{\alpha}-T^{\dagger}y\|=O((\delta+h)^{\frac{6}{7}}) \tag{15}$$

成立.

证明：由于$r=p>6$，$q=\frac{7}{6}p-1$，所以符合引理5的条件，故有$\lim\limits_{\delta,h\to 0^+}A_{\delta,h}^{\alpha}=\frac{1}{3}\tilde{T}w_0$，由式(14)有$(\delta^p+h^r)\alpha^{-q-1}=\|A_{\delta,h}^{\alpha}\|$，所以

$$\lim_{\delta,h\to 0^+}(\delta^p + h^p)\alpha^{-\frac{7}{6}p} = \left\|\frac{1}{3}\tilde{T}w_0\right\| > 0$$

即得

$$\delta^p + h^p = O(\alpha^{\frac{7}{6}p}) \text{或} \alpha^{\frac{7}{6}p} = O(\delta^p + h^p), \quad \delta, h\to 0^+ \tag{16}$$

从估计式(9),此时有 $\| x_{\delta,h}^{\alpha} - T^{\dagger}y \| = O(\alpha)$,由此式及(16)式得出式(15)成立. 定理证毕.

4　更一般的情况

一般地,对于确定的正数 m,取 $x_{\delta,h}^{\alpha} = ((T_h^* T_h)^m + \alpha I)^{-\frac{1}{m}} T_h^* y^{\delta}$ 时,可类似前面所证,推出如下引理.

引理 6　设 $T^{\dagger}y \in R(\tilde{T}^{v})\ (0 < v \leqslant m)$,则有

$$\| x_{\delta,h}^{\alpha} - T^{\dagger}y \| \leqslant c_1\alpha^{\frac{v}{m}} + c_2\delta\alpha^{-\frac{1}{2m}} + c_3 h\alpha^{-\frac{1}{2m}}$$

当取 $\alpha = A(\delta + h)^{\frac{2m}{2v+1}}$ 时,有

$$\| x_{\delta,h}^{\alpha} - T^{\dagger}y \| = O((\delta + h)^{\frac{2v}{2v+1}})$$

当取 $v = m$ 时,有

$$\| x_{\delta,h}^{\alpha} - T^{\dagger}y \| = O((\delta + h)^{\frac{2m}{2m+1}})$$

且这时渐进阶是最优的.

此前的文献中,为得到较高的收敛率正则解,往往采用增加迭代次数[10-12],而本文建立的新的正则化方法,不依赖于迭代且正则解能取得最优的渐进收敛率.

参 考 文 献:

[1] TIKHONOV A N, ARSENIN V Ya. Solutions of Ill-Posed Problem [M]. New York: Wiley, 1977: 15-33.

[2] MOROZOV V A. Methods for Solving Incorrectly Posed Problem [M]. New York: Springer, 1984: 32-39.

[3] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 5-130.

[4] 韩波,李莉. 非线性不适定问题的求解方法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-118.

[5] GROETSCH C W. The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind [M]. Boston: Pitman, 1984: 25-51.

[6] 金其年, 侯宗义. 非线性不适定问题的 Tikhonov 正则化的参数选取方法 [J]. 数学年刊, 1997, 18A(4): 483-490.

[7] JIN QINIAN, HOU ZONGYI. On the Choice of the Regularization Parameter for Ordinary and Iterated Tikhonov Regularization of Nonlinear Ill-posed Problems [J]. Inverse Problems, 1997, (13): 815-825.

[8] 李荷农, 侯宗义. 算子和右端都近似给定的第一类算子方程的 Tikhonov 正则解的渐进阶的估计 [J]. 数学年刊, 1993, 14A(4): 458-463.

[9] 杨宏奇, 侯宗义. 解第一类算子方程的新的正则化方法 [J]. 数学学报, 1997, 40(3): 369-376.

[10] 罗兴均, 陈仲英. 第一类算子方程的一种新的迭代正则化方法 [J]. 高校应用数学学报, 2006, 21(2): 223-230.

[11] 李鹏飞. Tikhonov 正则法在解决不适定问题的应用 [D]. 山东大学, 2009: 5-9.

[12] 冯立新, 刘松树. 解第一类算子方程的一种迭代正则化方法 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(3): 413-427.

(编辑: 付长缨)