FEM Programming on Surface Mesh

这一节主要讨论曲面有限元程序实现中的数学细节，这些数学细节是 fealpy 中进行正确高效程序实现的基础。

符号

Notation	Meaning
S	R^3 空间中的曲面
$K \subset \mathrm{R}^2$	二维空间中的标准单元
$\mathbf{u} = (u, v)^T$	二维空间中的坐标系
$\tau_h \subset R^3$	三维空间中的尺寸为 h 的平面三角形，假设它的三个顶点在曲面 S 上
$\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \tau_h$	τ_h 上的一个点
$\mathcal{P}_0$	S 邻近区域到 S 的投影
$\mathbf{x}_i, i = 1, \cdots, n_{dof}$	τ_h 上 p 次 Lagrangian 基函数对应的自由度坐标点, 假设 $x_i \in S$
$\tau_p \subset \mathrm{R}^3$	定义在 τ_h 上的 p 次多项式曲面三角形
$\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)^T \in \tau_p$	τ_p 上一个点的三维坐标
$\tau_S \subset \mathrm{R}^3$	把 τ_h 投影到曲面 S 上的曲面三角形
$\mathbf{x}_S = (x_S, y_S, z_S)^T \in \tau_S$	τ_S 上一个点的三维坐标
$\varphi_i(\mathbf{x})$	定义在 τ_h 上第 i 个 Lagrangian 基函数

τ_h, τ_p 和 τ_S 之间关系

对于 τ_p 上的任意一点 $\mathbf{x}_p$, 存在一点 $\mathbf{x} \in \tau_h$， 使得

$$\mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{x}_i \varphi_i(\mathbf{x})$$

进一步， 存在标准参考单元 K 中存在一点 $\mathbf{u} = (u, v)$， 可得

$$\mathbf{x}(u, v) = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

其中 $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 为τ_h 的三个顶点,

$$\lambda_0 = 1 - u - v\text{ ，}\quad \lambda_1 = u, \lambda_2 = v$$

对于 τ_S 上的任意一点 $\mathbf{x}_S$, 存在 τ_p 上的一点 $\mathbf{x}_p$， 使得

$$\mathbf{x}_S = \mathcal{P}_0(\mathbf{x}_p)$$

$\mathbf{x}$ 关于 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0]$$

$\mathbf{x}_p$ 关于 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \begin{bmatrix} x_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ y_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ z_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{x}_p$ 关于 $\mathbf{u}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} = [\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{u}}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{v}}] = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \begin{bmatrix} x_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ y_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ z_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0] \qquad (1)$$

记

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_p = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} \mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{u}} \mathrm{d}\boldsymbol{u} + \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

其中 $\mathrm{d}\mathbf{u} = [\mathrm{d}\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{v}]^{\boldsymbol{T}}$。

进一步可得曲面三角形 $\boldsymbol{\tau}_p$ 上的第一基本形式

$$\boldsymbol{I} =< \mathrm{d}\mathbf{x}_p, \mathrm{d}\mathbf{x}_p >= \mathrm{d}\mathbf{u}^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{11} & \boldsymbol{g}_{12} \\ \boldsymbol{g}_{12} & \boldsymbol{g}_{22} \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathbf{u}$$

其中

$$\boldsymbol{g}_{11} =< \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{u}}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{u}} > , \boldsymbol{g}_{12} =< \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{u}}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{v}} > , \boldsymbol{g}_{22} =< \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{v}}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \boldsymbol{v}} > ,$$

定义$\boldsymbol{\tau}_p$ 上的基函数如下

$$\boldsymbol{\varphi}_{p,i}(\mathbf{x}_p) = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{x}_i \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})$$

则 $\varphi_{p,i}(\mathbf{x}_p)$ 在 τ_p 上的切向导数定义如下：

$$\nabla_{S_p}\varphi_{p,i} = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \nabla_{S_h}\varphi_i(\mathbf{x})$$

S 上曲面三角形的面积计算公式

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - d(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$$

对于 $\mathbf{x}_p \in \tau_p$, 存在 $\mathbf{x}_S \in S$, 有

$$\mathbf{x}_S = \mathcal{P}_0(\mathbf{x}_p) = \mathbf{x}_p - d(\mathbf{x}_p)\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p} = I - d(\mathbf{x}_p)H(\mathbf{x}_p) - \mathbf{n}(\mathbf{x}_p)\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}$$

S 上的导数计算

考虑 τ_S 和 τ_p 的关系

则 $\mathbf{x}_S$ 关于 $\mathbf{u}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p} = I - d(\mathbf{x}_p)H(\mathbf{x}_p) - \mathbf{n}(\mathbf{x}_p)\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)^T$$

由于

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}\right] = \sum_{i=1}^{n_{dof}}\begin{bmatrix} x_i \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i(\mathbf{x})^T \\ y_i \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i(\mathbf{x})^T \\ z_i \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i(\mathbf{x})^T \end{bmatrix}[\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0]$$

即,很容易计算

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}$$

进一步可得到曲面 τ_S 上的第一基本形式

记

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_S = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{x}_S &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{u} \\
&= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{u} \\
&= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u} \\
\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}
\end{aligned}$$

$$I =< \mathrm{d}\mathbf{x}_S, \mathrm{d}\mathbf{x}_S >= \mathrm{d}\mathbf{u}^T \begin{bmatrix} g_{11}' & g_{12}' \\ g_{12}' & g_{22}' \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathbf{u}$$

其中

$$g_{11}' =< \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u} >, g_{12}' =< \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v} >, g_{22}' =< \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v} >,$$

定义τ_S 上的基函数如下

$$\varphi_{S,i}(\mathbf{x}_S) = \varphi_i(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x}_S = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{x}_i \varphi_i(\mathbf{x})$$

则 $\varphi_{S,i}(\mathbf{x}_S)$ 在 τ_S 上的导数定义如下：

$$\nabla_{S_S}\varphi_{S,i} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}\begin{bmatrix} g_{11}^{'} & g_{12}^{'} \\ g_{12}^{'} & g_{22}^{'} \end{bmatrix}^{-1}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^T\nabla_{S_h}\varphi_i(\mathbf{x})$$

设 $w(\mathbf{x}_S)$ 是定义在 S 上的函数， 利用投影可以定义 S_p 上函数

$$\hat{w}(\mathbf{x}_p) = w(\mathcal{P}_0(x_p))$$

下面讨论如何计算 $\nabla_{S_p} w$.

$$\nabla_{S_p}\hat{w}(\mathbf{x}_p) = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \hat{w}_u \\ \hat{w}_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{w}_u \\ \hat{w}_v \end{pmatrix} = (\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}})^T\nabla_{\mathbf{x}_S} w(x_S)$$

In [ ]:

```

```