

K-PÁSKOVÝ TURINGŮV STROJ - Benková

Úkol 1

Zadání - vytvoření k-páskového TS ($k=2$), kde:

- $\Sigma = \{a, b, c, d\}$
- $\Gamma = \{\Sigma, 0, 1, \#\}$

Stroj má:

1. Smazat symboly $\{a, c\}$ na lichých pozicích
2. Zbylé znaky setřídít sestupně
3. Za slovo zapsat délku setříděného slova v binární soustavě oddělenou prázdným symbolem

Vstupní slovo: `###aabbccaaabccddacbad###`

Návrh algoritmu

FÁZE 1: Kopírování se smazáním $\{a,c\}$ na lichých pozicích

Postup:

1. Procházíme vstupní pásku T1 zleva doprava
2. Počítáme pozice znaků (1, 2, 3, ...) od prvního ne-blankového znaku
3. Na lichých pozicích (1, 3, 5, 7, ...) kopírujeme pouze symboly $\{b, d\}$
4. Symboly $\{a, c\}$ na lichých pozicích **NEkopírujeme** na T2
5. Na sudých pozicích (2, 4, 6, 8, ...) kopírujeme všechny symboly na T2

Analýza vstupu:

Index: 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Znak: a a b c c a a b c d d a c b a d

Pozice: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Lichá pozice (1,3,5,7,9,11,13,15): a, b, c, a, c, d, c, a

→ Smazat {a,c}: pozice 1,5,7,9,13,15 → symboly a,c,a,c,c,a

→ Ponechat {b,d}: pozice 3,11 → symboly b,d

Sudá pozice (2,4,6,8,10,12,14,16): a, c, a, b, d, a, b, d

→ Kopírovat vše

Zkopírováno na T2: a, b, c, a, b, d, d, a, b, d (10 znaků)

FÁZE 2: Třídění sestupně ($d > c > b > a$)

Použijeme **Selection Sort** na pásce T2:

1. Najít maximum v nezpracované části
2. Označit ho (např. změnit na X)
3. Zapsat na výstupní pozici T1
4. Opakovat, dokud nezpracujeme všechny znaky

Setříděno: d, d, d, c, b, b, b, a, a, a

FÁZE 3: Zápis výsledku na T1

1. **Vymazat původní data** na T1 (nahradit #)
2. **Zapsat setříděná data** z T2 na T1
3. **Přidat separátor** (#)
4. **Převést délku na binární** a zapsat
 - Délka = 10 znaků
 - $10_{10} = 1010_2$

Stavy a přechodové funkce

Definice stavů:

- **q_0** - počáteční stav, skip blanks
- **q_{odd}** - zpracování liché pozice

- **q_even** - zpracování sudé pozice
- **q_back** - návrat na začátek pásek
- **q_sort_init** - inicializace třídění
- **q_find_max** - hledání maxima
- **q_mark** - označení maxima
- **q_write** - zápis na T1
- **q_count** - počítání délky
- **q_binary** - převod na binární
- **q_acc** - akceptační stav

Příklady přechodových funkcí:

Formát: $\delta(\text{stav}, \text{symbol_T1}, \text{symbol_T2}) = (\text{nový_stav}, \text{zápis_T1}, \text{pohyb_T1}, \text{zápis_T2}, \text{pohyb_T2})$

// Skip blanks na začátku

$\delta(q_0, \#, \#) = (q_0, \#, R, \#, R)$

// Přejít na první znak (lichá pozice 1)

$\delta(q_0, a, \#) = (q_{\text{odd}}, a, R, \#, S)$ // a na liché → nesmazat

$\delta(q_0, b, \#) = (q_{\text{odd}}, b, R, b, R)$ // b na liché → kopírovat

$\delta(q_0, c, \#) = (q_{\text{odd}}, c, R, \#, S)$ // c na liché → nesmazat

$\delta(q_0, d, \#) = (q_{\text{odd}}, d, R, d, R)$ // d na liché → kopírovat

// Lichá pozice - smazat jen {a,c}

$\delta(q_{\text{odd}}, a, \#) = (q_{\text{even}}, a, R, \#, S)$

$\delta(q_{\text{odd}}, b, \#) = (q_{\text{even}}, b, R, b, R)$

$\delta(q_{\text{odd}}, c, \#) = (q_{\text{even}}, c, R, \#, S)$

$\delta(q_{\text{odd}}, d, \#) = (q_{\text{even}}, d, R, d, R)$

$\delta(q_{\text{odd}}, \#, _) = (q_{\text{back}}, \#, S, _, S)$

// Sudá pozice - kopírovat vše

$\delta(q_{\text{even}}, a, \#) = (q_{\text{odd}}, a, R, a, R)$

$\delta(q_{\text{even}}, b, \#) = (q_{\text{odd}}, b, R, b, R)$

$\delta(q_{\text{even}}, c, \#) = (q_{\text{odd}}, c, R, c, R)$

$\delta(q_{\text{even}}, d, \#) = (q_{\text{odd}}, d, R, d, R)$

$\delta(q_{\text{even}}, \#, _) = (q_{\text{back}}, \#, S, _, S)$

// Návrat na začátek T2

$\delta(q_{\text{back}}, _, a) = (q_{\text{back}}, _, S, a, L)$

$\delta(q_{\text{back}}, _, b) = (q_{\text{back}}, _, S, b, L)$

$\delta(q_{\text{back}}, _, c) = (q_{\text{back}}, _, S, c, L)$

$\delta(q_{\text{back}}, _, d) = (q_{\text{back}}, _, S, d, L)$

$\delta(q_{\text{back}}, _, \#) = (q_{\text{sort_init}}, _, L, \#, R)$

Počáteční a konečný stav pásek

Počáteční stav (k=2):

↓

T1: # # # a a b c c a a b c d d a c b a d # # #

↓

T2: #

Konečný stav (k=2):

↓

T1: # # # # # d d d c b b b a a a # 1 0 1 0 # # # # #

↓

T2: #

Vyhodnocení složitosti

Časová složitost

Fáze 1 - Kopírování s vynecháním:

- Procházení vstupu: $O(n) = O(19) \approx 19$ kroků
- Zápis na T2: $O(m) = O(10) \approx 10$ kroků
- Návrat na začátek: $O(n) \approx 19$ kroků
- **Mezisoučet: ≈ 48 kroků**

Fáze 2 - Třídění (Selection Sort):

- Pro každý prvek (m prvků):
 - Najít maximum: $O(m)$ kroků
 - Návrat na začátek: $O(m)$ kroků
- Celkem: $O(m^2) = O(10^2) \approx 200$ kroků

Fáze 3 - Kopírování výsledku:

- Vymazání původních dat na T1: $O(n) \approx 19$ kroků
- Kopírování setříděných dat: $O(m) \approx 10$ kroků
- Zápis binární délky: $O(\log m) \approx 4$ kroky
- **Mezisoučet: ≈ 33 kroků**

CELKOVÁ ČASOVÁ SLOŽITOST:

- **Pro konkrétní vstup: 281 kroků**
- **Asymptotická složitost: $T(n) = O(n^2)$**
 - kde n = délka vstupního slova
 - Dominantní člen: třídění $O(m^2)$, kde $m \leq n$

Prostorová složitost

Použité buňky:

- T1 (výstupní páska): 25 buněk
 - 5 blanks + 10 znaků + 1 blank + 4 binární číslice + 5 blanks
- T2 (pomocná páska): 20 buněk

- Pracovní prostor pro kopírování a třídění

Celková prostorová složitost

- Pro konkrétní vstup: 45 buněk
- Asymptotická složitost: $S(n) = O(n)$
 - Lineární závislost na délce vstupu

Shrnutí výsledků

Parametr	Hodnota
Vstup	###aabbccaaabccddacbad###
Výstup	#####dddcbbbaa#1010#####
Smazáno na lichých pozicích	a (poz. 1), c (poz. 5), a (poz. 7), c (poz. 9), c (poz. 13), a (poz. 15)
Setříděno sestupně	d, d, d, c, b, b, b, a, a, a
Délka v binární	$10_{10} = 1010_2$
Časová složitost	281 kroků ($O(n^2)$)
Prostorová složitost	45 buněk ($O(n)$)

Závěr

Navržený 2-páskový Turingův stroj úspěšně:

1. ✓ Smazal symboly {a, c} na lichých pozicích
2. ✓ Setřídil zbylé znaky sestupně ($d > c > b > a$)
3. ✓ Zapsal délku slova v binární soustavě (1010)

Stroj pracuje s kvadratickou časovou složitostí $O(n^2)$ kvůli selection sortu a lineární prostorovou složitostí $O(n)$, což je optimální pro tento typ úlohy na Turingově stroji.