

Estudio de transferencia de calor en una aleta disipadora con condiciones de frontera

Integrantes: Leandro Caloguerea(G3)

Erwin Gatica (G3)

Diego Rojas (G3)

Fabian Sanchez (G3)

Métodos Numéricos Bain 053

Junio - 2017

Índice

Introducción	3
Capítulo 1 Planteamiento del Problema de Valor de Frontera	4
Capítulo 2 Solución Analítica del PVF	5
Capítulo 3 Método de Diferencias Finitas	10
Capítulo 4 Resolución del PVF mediante el Método de Diferencias Finitas	11
Capítulo 5 Resultados y discusión	13
Capítulo 6 Conclusión	13
Bibliografía	13

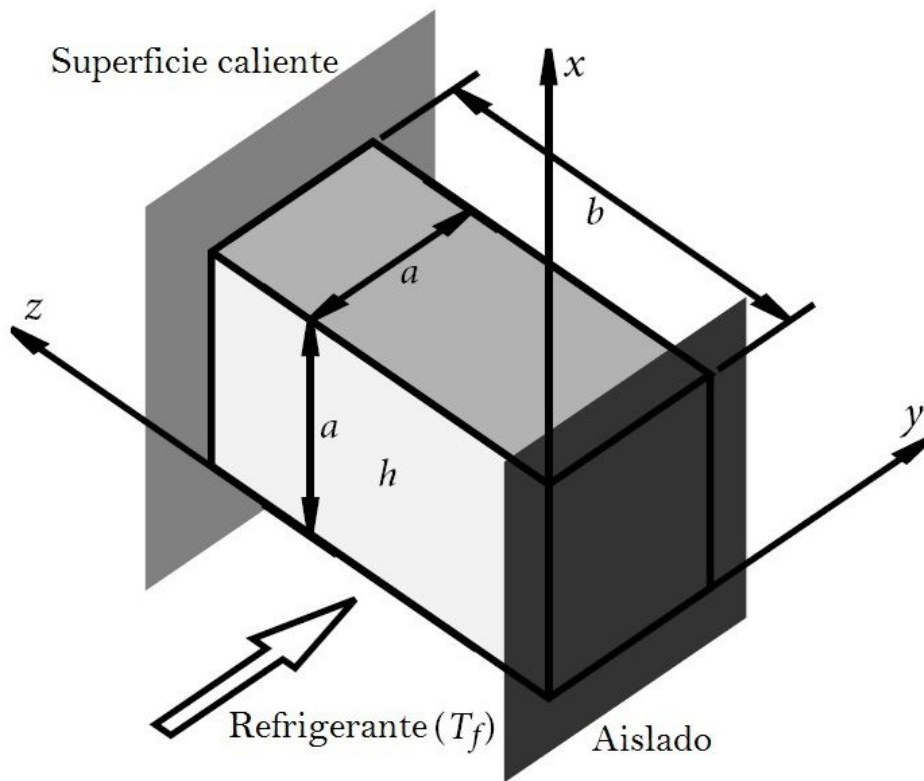
Introducción

Entre otras aplicaciones en Ingeniería, las aletas son utilizadas como un mecanismo que acelera el enfriamiento de una superficie, de forma que combinan el sistema de conducción y de convección en un área o superficie determinada, como por ejemplo en la pared interna de un motor. En el desarrollo de este documento seremos capaces aplicar las competencias entregadas por el curso en materias físicas de la ingeniería.

Se estudiará el fenómeno de transferencia de calor aplicando la ecuación de transferencia de temperatura en estado estacionario de Fourier con valores de frontera, aplicada a una superficie tridimensional. Tal estudio comprende desde su resolución analítica hasta su solución numérica utilizando el método de diferencias finitas. Además, nos apoyaremos de herramientas informáticas tales como Octave y el lenguaje de programación Python, con los que podremos ser capaces de representar gráficamente el comportamiento matemático mediante ambos métodos numéricos y hacer una comparación que nos demostrará cuál de estos puede ser más efectivo al momento de resolver dicho problema.

Capítulo 1 Planteamiento del Problema de Valor de Frontera

En la siguiente imagen, una aleta de longitud b con sección transversal cuadrada $a \times a$ está en contacto con una superficie caliente, mientras que el otro extremo de la aleta está aislado. El coeficiente de conductividad térmica de la aleta es k . Sea $T(x, y, z)$ la distribución de temperatura en la aleta disipadora de calor. La distribución de temperatura en la superficie caliente está dada por $T(x, y, b) = f(x, y)$. Un fluido refrigerante de temperatura T_f fluye a través de la aleta. El coeficiente de transferencia de calor entre la superficie de la aleta y el refrigerante es h . Se estudiará la distribución de temperatura en estado estacionario de la aleta disipadora de calor.



La ecuación de calor para el problema en estado estacionario tridimensional viene dada por la ecuación de Laplace tridimensional.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq b$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}x = 0 : k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_f), & x = a : -k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_f) \\y = 0 : k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_f), & y = a : -k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_f) \\z = 0 : k \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, & z = b : f(x, y)\end{aligned}$$

Caso especial $f(x, y) = T_0$ y $h \rightarrow \infty$.

Capítulo 2 Solución Analítica del PVF

Al tomar en cuenta estos casos especial, las condiciones de borde quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}T(0, y, z) &= T_f, & T(a, y, z) &= T_f, \\T(x, 0, z) &= T_f, & T(x, a, z) &= T_f, \\ \frac{T(x, y, 0)}{\partial z} &= 0, & T(x, y, b) &= T_0,\end{aligned}$$

Donde las seis condiciones son no homogéneas.

En orden de poder aplicar el método de separación de variables para poder resolver este problema de conducción de temperatura en estado estacionario, cinco de las seis condiciones de borde deben ser homogéneas, por lo tanto, definiendo una nueva variable $\hat{T}(x, y, z) = T(x, y, z) - T_f$, quedando el problema de la forma:

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} = 0,$$

con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned}\widehat{T}(0, y, z) &= 0, & \widehat{T}(a, y, z) &= T_f, \\ \widehat{T}(x, 0, z) &= 0, & \widehat{T}(x, a, z) &= T_f, \\ \frac{\widehat{T}(x, y, 0)}{\partial z} &= 0, & \widehat{T}(x, y, b) &= T_0 - T_f,\end{aligned}$$

Aplicando el método de separación de variables, nos lleva a

$$\widehat{T}(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z),$$

Luego, sustituyendo en la ecuación tridimensional de Laplace nos conduce a:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) Z(z) + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} Z(z) + X(x) Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0,$$

Procedemos a dividir la ecuación por $X(x)Y(y)Z(z)$ nos deja

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = - \left[\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \right] = -\omega^2,$$

(Acá podemos denotar que el primer término es una función que depende solo de x , mientras que el siguiente paréntesis depende solo de y y z).

En orden de que la función dependiente de x sea igual a la función que depende de y y z , cada una de estas funciones debe ser igual a la misma constante $-\omega^2$, es más, este proceso es aplicable a la expresión dentro del paréntesis donde la función que depende de y en orden de ser igual a la función que depende de z , estas deben estar igualadas a una misma constante $-\Omega^2$, como se muestra a continuación.

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \omega^2 - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\Omega^2$$

(Podemos apreciar 2 funciones, una en términos solamente de y , y otra solamente en términos de z)

Ahora podemos reescribir las ecuaciones de la siguiente forma.

Respecto a X

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \omega^2 X = 0, \quad \text{EDO de segundo orden}$$

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, donde $\lambda = \pm i\omega$. Su solución es:

$$X(x) = A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x).$$

Respecto a Y

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \Omega^2 Y = 0, \quad \text{EDO de segundo orden}$$

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 + \Omega^2 = 0$, donde $\lambda = \pm i\Omega$. Su solución es:

$$Y(y) = A_2 \cos(\Omega y) + B_2 \sin(\Omega y).$$

Respecto a Z

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (\omega^2 + \Omega^2) Z = 0, \quad \text{EDO de segundo orden}$$

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 - (\omega^2 + \Omega^2) = 0$, donde $\lambda = \pm v$, con $v = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}$. Su solución es:

$$Z(z) = A_3 \cosh(vz) + B_3 \sinh(vz).$$

La solución de la ecuación de tres dimensiones de Laplace es

$$\widehat{T}(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = (A_1 \cos(\omega x) + B_1 \sin(\omega x))(A_2 \cos(\Omega y) + B_2 \sin(\Omega y))(A_3 \cosh(vz) + B_3 \sinh(vz))$$

Donde las constantes $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$, $\omega > 0$, $\Omega > 0$ serán determinadas usando las condiciones de borde como se muestra a continuación.

- $\widehat{T}(0, y, z) = A_1(A_2 \cos(\Omega y) + B_2 \sin(\Omega y))(A_3 \cosh(vz) + B_3 \sinh(vz)) = 0 \Rightarrow A_1 = 0,$
- $\widehat{T}(x, 0, z) = (B_1 \sin(\omega x))(A_2)(A_3 \cosh(vz) + B_3 \sinh(vz)) = 0 \Rightarrow A_2 = 0,$
- $\frac{\partial \widehat{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} = (B_1 \sin(\omega x))(B_2 \sin(\Omega y))v(A_3 \cosh(vz) + B_3 \sinh(vz)) \Big|_{z=0} = (B_1 \sin(\omega x))(B_2 \sin(\Omega y))vB_3 = 0 \Rightarrow B_3 = 0$

Ordenando, la solución queda

$$\widehat{T}(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = B_1 \sin(\omega x) B_2 \sin(\Omega y) A_3 \cosh(vz)$$

Usando las condiciones de borde

- $\widehat{T}(a, y, z) = F \sin(\omega a) \cdot \sin(\Omega y) \cdot \cosh(vz) = 0 \Rightarrow \sin(\omega a) = 0,$
 $\therefore \omega a = m\pi, m = 1, 2, \dots \Rightarrow \omega_m = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, \dots$
- $\widehat{T}(x, a, z) = F \sin(\omega x) \cdot \sin(\Omega a) \cdot \cosh(vz) = 0 \Rightarrow \sin(\Omega a) = 0,$
 $\therefore \Omega a = n\pi, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \Omega_n = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, \dots$

Lo que nos da

$$\widehat{T}_{mn}(x, y, z) = F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \cdot \cosh \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \pi z}{a}$$

Dado que el problema de conducción de calor es lineal, cualquier combinación lineal de la solución es también solución, de este modo, la solución es

$$\widehat{T}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \cdot \cosh \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \pi z}{a}$$

Aplicando la condición de borde, tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{T}(x, y, b) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \cdot \cosh \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \pi b}{a} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cosh \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \pi b}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = T_0 - T_f, \text{ donde} \\ &\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cosh \frac{\sqrt{m^2 + n^2} \pi b}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} \right) \text{ se denota } G_m \end{aligned}$$

Lo que está expresado en serie de senos de Fourier en x con G_m , $m = 1, 2, \dots$ los coeficientes. Multiplicando la ecuación por $\frac{i\pi x}{a}$, $i = 1, 2, \dots$ e integrando respecto a x de cero hasta a nos deja

$$\begin{aligned} G_i \cdot \frac{a}{2} &= (T_0 - T_f) \cdot \frac{a}{i\pi} [1 - (-1)^i] \Rightarrow G_i = \frac{2(T_0 - T_f)}{i\pi} [1 - (-1)^i] \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_{in} \cosh \frac{\sqrt{i^2 + n^2} \pi b}{a} \right) \cdot \sin \frac{n\pi y}{a} &= G_p \end{aligned}$$

Lo que está expresado en series de seno de Fourier en y . Multiplicando la ecuación por $\frac{j\pi y}{a}$, $j = 1, 2, \dots$ e integrando respecto a y de cero hasta a nos deja

$$\begin{aligned} F_{ij} \cosh \frac{\sqrt{i^2 + j^2} \pi b}{a} \cdot \frac{a}{2} &= G_i \cdot \frac{a}{j\pi} [1 - (-1)^j], \\ \therefore F_{ij} &= \frac{4(T_0 - T_f)}{ij\pi^2 \cosh \frac{\sqrt{i^2 + j^2} \pi b}{a}} [1 - (-1)^i][1 - (-1)^j] \end{aligned}$$

De este modo, la distribución de la conducción de temperatura en estado estacionario está dada como sigue:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) &= T_f + \hat{T}(x, y, z) \\
 &= T_f + \frac{4(T_0 - T_f)}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^i][1 - (-1)^j]}{ij \cosh \frac{\sqrt{i^2 + j^2} \pi b}{a}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{a} \cosh \frac{\sqrt{i^2 + j^2} \pi z}{a} \\
 &= T_f + \frac{16(T_0 - T_f)}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2n-1) \cosh \frac{\sqrt{(2m-1)^2 + (2n-1)^2} \pi b}{a}} \\
 &\quad \times \sin \frac{(2m-1)\pi x}{a} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi y}{a} \cdot \cosh \frac{\sqrt{(2m-1)^2 + (2n-1)^2} \pi z}{a}
 \end{aligned}$$

El desarrollo de esta sección fue guiada por el texto Differential equations for Engineers[1].

Capítulo 3 Método de Diferencias Finitas

Las ecuaciones diferenciales parciales sirven para caracterizar sistemas de ingeniería en los que el comportamiento de una cantidad física se expresa en términos de su razón de cambio con respecto a dos o más variables independientes (Chapra, S. y Canale. P., 2006, Pág. 8)[2]. Entre los ejemplos tenemos la distribución de temperatura en estado estacionario sobre una placa caliente o en este caso sobre la aleta disipadora de calor. Para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) se emplean dos métodos bastante diferentes: diferencias finitas y elementos finitos, siendo el primero el método a utilizar en este informe, el cual transforma la diferencial en una diferencia de ΔX_i o diferencias finitas.

Se pueden generar fórmulas por diferencias divididas de alta exactitud tomando términos de expansión de la serie de Taylor. Por ejemplo, tenemos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)h^2}{2} + \dots$$

De la que podemos despejar:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{f''(x_i)h}{2} + O(h^2)$$

Siendo $O(h^2)$ el error de truncamiento.

Considerando esto, podemos utilizar series de Taylor para solucionar problemas ingenieriles más complejos, valiéndonos de uso de diferencias finitas y así aproximar las derivadas de orden superior de la ecuación de Laplace por medio de las condiciones de frontera.

Estas serán las derivadas a utilizar:

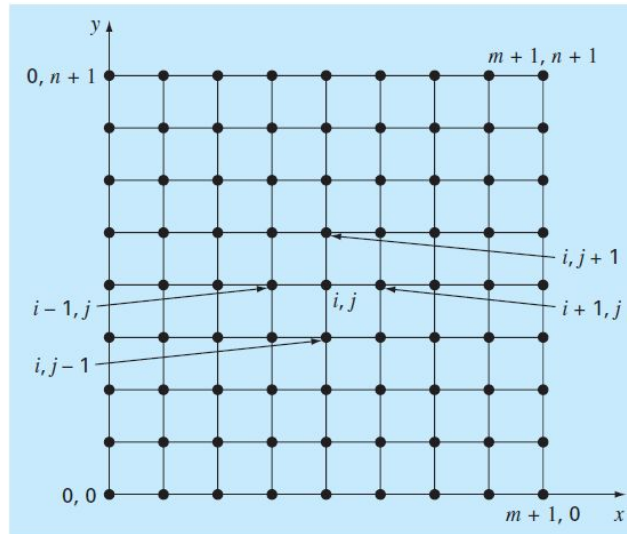
$$f'(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - 2f'(x_i) + f'(x_{i-1}))}{2h^2}$$

Fig. 0 Extraído de: Chapra, S. y Canale. P., 2006, Pág. 669 [2]

Capítulo 4 Resolución del PVF mediante el Método de Diferencias Finitas

Para la solución numérica de las EDP elípticas, como lo es la ecuación de Laplace, necesitamos representar las derivadas parciales por diferencias divididas finitas, y así tratar la placa de la cara axa de la aleta disipadora de calor como una malla de puntos discretos. Finalmente, la EDP se transforma en una ecuación algebraica de diferencias. Una representación de bidimensional de ella sería:



(Fig.1 Chapra, S. y Canale. P., 2006, Pág. 869)[2]

Así, extrapolando la a tres dimensiones la ecuación de Laplace nos queda:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (Y)$$

Así, con (Fig.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1,j,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i-1,j,z}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{T_{i,j+1,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j-1,z}}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \frac{T_{i,j,z+1} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j,z-1}}{\Delta z^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (Y), tenemos que:

$$\frac{T_{i+1,j,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i-1,j,z}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j-1,z}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,z+1} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j,z-1}}{\Delta z^2} = 0$$

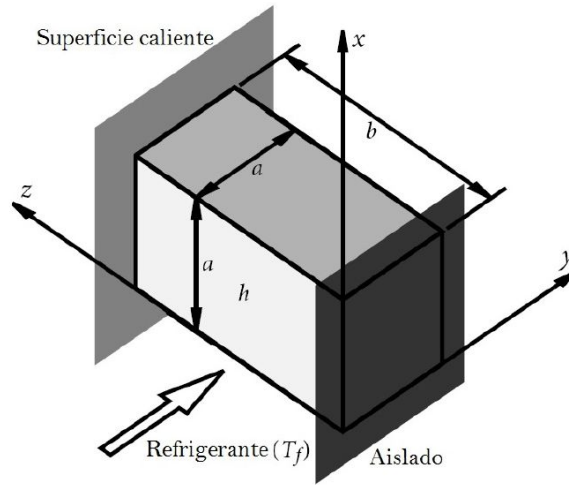
En el caso de que $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, la ecuación queda de la forma:

$$T_{i+1,j,z} - 6T_{i,j,z} + T_{i-1,j,z} + T_{i,j+1,z} + T_{i,j-1,z} + T_{i,j,z+1} + T_{i,j,z-1} = 0$$

Y si son distintos, entonces deberíamos considerar cada Δx_i en la ecuación aplicada a cada nodo.

Hay que recordar que esta relación se satisface solo para todos los nodos dentro de la aleta disipadora de calor, pero los puntos externos no están contemplados, por lo tanto, debemos analizar el momento en el que en la ecuación se introduce el valor de frontera. Al tener el valor de temperatura en las fronteras, algunos valores dentro de la ecuación de Laplace serán constantes y otras variables, formándose finalmente un sistema de ecuaciones con el conjunto de ecuaciones de Laplace de cada nodo.

En este caso tenemos:



Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 x=0: \quad k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_f) & x=a: \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_f) \\
 y=0: \quad k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_f) & y=b: \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_f) \\
 z=0: \quad \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 & z=b: \quad T &= f(x, y)
 \end{aligned}$$

Así, con

$$\frac{T_{i+1,j,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i-1,j,z}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j-1,z}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,z+1} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j,z-1}}{\Delta z^2} = 0$$

Tenemos que si $i=1, j=1, z=1$:

$$\frac{T_{2,1,1} - 2T_{1,1,1} + T_{0,1,1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{1,2,1} - 2T_{1,1,1} + T_{1,0,1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{1,1,2} - 2T_{1,1,1} + T_{1,1,0}}{\Delta z^2} = 0$$

La ecuación considera los valores en x, y y z en cero, por tanto, se reemplaza por los valores de contorno, considerando que la ecuación de primer orden de Taylor especifica qué:

$$f'(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_{i-1}))}{2h} .$$

De este modo, con $h \rightarrow \infty$ la nueva ecuación sería:

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{2,1,1} - 2T_{1,1,1} + (T_{2,1,1} - T_f)}{\Delta x^2} + \frac{T_{1,2,1} - 2T_{1,1,1} + (T_{1,2,1} - T_f)}{\Delta y^2} + \frac{T_{1,1,2} - 2T_{1,1,1} + (T_{1,1,2} - T_f)}{\Delta z^2} &= 0 \\
 \frac{2T_{2,1,1} - 2T_{1,1,1} - T_f}{\Delta x^2} + \frac{2T_{1,2,1} - 2T_{1,1,1} - T_f}{\Delta y^2} + \frac{2T_{1,1,2} - 2T_{1,1,1} - T_f}{\Delta z^2} &= 0
 \end{aligned}$$

Si $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, queda:

$$2T_{2,1,1} - 6T_{1,1,1} + 2T_{1,2,1} + 2T_{1,1,2} = 3T_f$$

Se procede de forma análoga para todos los nodos relacionados, quedando un sistema de

ecuaciones que se traspasa a un software de programación para así trabajar el sistema en forma de matriz.

Capítulo 5 Resultados y discusión

Según las siguientes tablas que dan razón a la cantidad de particiones en “z” por nodo, donde la temperatura del refrigerante asignada fue de 12°, del aislante 0° y de la zona caliente de 60°, nos entrega una solución aproximada que va desde la cara 10 (zona caliente) hasta la 2 (aislante), la cara 1 no la mostramos ya que poseía los mismos valores que la cara 2.

ans = cara 2	ans = cara 5	ans = cara 8
11.998 11.998 11.999 12.000	12.060 12.067 12.050 12.022	13.591 13.736 13.441 12.809
11.997 11.996 11.998 11.999	12.113 12.149 12.120 12.060	14.637 15.424 14.972 13.743
11.997 11.996 11.997 11.999	12.133 12.197 12.175 12.095	14.891 16.169 15.862 14.366
11.998 11.997 11.998 11.999	12.097 12.161 12.155 12.092	14.072 15.282 15.249 14.115
ans = cara 3	ans = cara 6	ans = cara 9
11.998 11.999 11.999 12.000	12.197 12.217 12.165 12.077	16.626 16.947 16.385 14.870
11.997 11.997 11.998 11.999	12.360 12.471 12.386 12.197	18.948 20.801 19.978 17.259
11.997 11.997 11.998 11.999	12.416 12.612 12.546 12.302	19.370 22.190 21.691 18.516
11.998 11.998 11.998 11.999	12.297 12.491 12.477 12.288	17.474 20.097 20.083 17.676
ans = cara 4	ans = cara 7	ans = cara 10
11.999 11.999 12.000 12.000	12.563 12.620 12.488 12.245	26.277 26.770 26.026 23.152
11.999 11.999 12.000 12.000	12.991 13.296 13.087 12.587	30.267 33.652 32.621 28.042
11.999 11.998 11.999 12.000	13.117 13.637 13.483 12.854	30.732 35.446 34.913 29.819
11.999 11.999 11.999 12.000	12.795 13.298 13.271 12.790	27.311 31.662 31.696 27.735

lado cuadrado 3, profundidad 5 , dx=dy=dz= 0.5

Segundo muestreo con diferentes lados y profundidades

ans = cara 7	ans = cara 10
11.993 11.992 11.994 11.996 11.998 11.999	13.809 14.125 14.108 13.923 13.527 12.841
11.986 11.983 11.985 11.990 11.995 11.998	15.192 16.390 16.498 16.142 15.323 13.885
11.981 11.974 11.976 11.983 11.990 11.996	16.068 18.092 18.543 18.113 16.944 14.854
11.979 11.969 11.969 11.977 11.986 11.994	16.411 18.979 19.803 19.442 18.090 15.575
11.981 11.970 11.969 11.975 11.984 11.993	16.068 18.752 19.815 19.631 18.360 15.822
11.989 11.981 11.979 11.982 11.988 11.994	14.687 16.750 17.708 17.726 16.899 15.062
ans = cara 8	ans = cara 11
11.997 11.996 11.997 11.998 11.999 12.000	16.933 17.520 17.504 17.223 16.518 14.922
11.993 11.992 11.993 11.995 11.997 11.999	19.745 22.212 22.418 21.898 20.520 17.493
11.991 11.987 11.988 11.992 11.995 11.998	21.190 25.114 25.938 25.331 23.451 19.365
11.990 11.985 11.985 11.989 11.993 11.997	21.661 26.413 27.821 27.341 25.224 20.530
11.991 11.985 11.985 11.988 11.992 11.997	20.997 25.873 27.616 27.392 25.416 20.773
11.995 11.991 11.990 11.991 11.994 11.997	18.288 22.097 23.650 23.702 22.404 19.027
ans = cara 9	ans = cara 12
12.617 12.745 12.735 12.650 12.484 12.240	26.529 27.285 27.278 27.007 26.139 23.199
13.159 13.625 13.666 13.498 13.144 12.598	30.959 34.914 35.162 34.679 33.116 28.271
13.545 14.360 14.545 14.336 13.815 12.982	32.570 38.303 39.319 38.778 36.762 30.795
13.714 14.780 15.133 14.952 14.337 13.300	32.975 39.521 41.132 40.737 38.530 32.021
13.581 14.713 15.181 15.084 14.501 13.436	32.106 38.717 40.622 40.456 38.403 32.039
13.024 13.890 14.316 14.319 13.940 13.166	27.952 33.321 35.011 35.079 33.696 28.911

valor cara = 4, valor profundidad = 6, dx=dy=dz=0.5

Discusión

Según los datos mostrados en las tablas anteriores pudimos ver el cómo descendía la temperatura desde el sector caliente (cara 12) y se estabiliza hasta quedar con la temperatura del refrigerante (cara 7). Cabe mencionar que los cálculos se hicieron desde la zona fría hasta la zona caliente, por lo que fue necesario cambiar el sentido multiplicando el vector resultante por -1, para que así los valores tuvieran un sentido físico.

Limitantes: Cabe señalar que presentamos problemas al momento de evaluar la solución analítica, puesto que los resultados entregados por la tabulación de datos nos entregó como resultado una gran cantidad de valores imaginarios.

También señalaremos que probamos con valores pequeños debido que el número de nodos a evaluar, aumentaba considerablemente en el método de diferencias finitas, generando matrices hasta 1764×1764 , con lados y deltas pequeños, lo que dificulta visualizar los datos para la hora de concluir.

Capítulo 6 Conclusión

Como conclusión de este trabajo podemos decir que gracias a una ardua investigación, hemos podido aplicar las Diferencias Finitas a un problema de transferencia de temperatura con las ecuaciones de Fourier estacionaria en tres dimensiones. Gracias al lenguaje de programación Python y la herramienta informática-matemática Octave, pudimos observar los resultados obtenidos por ambos métodos de modo que al contrastar la información obtenida descubrimos que el método de Diferencias Finitas puede perfectamente reemplazar una solución analítica de un problema dado, puesto que los resultados tienen una aproximación bastante más cercana con respecto a su medición en solución real.

Bibliografía

- [1] Wei-Chau Xie, Differential Equations for Engineers, 2010, pag 488-492.
- [2] Chapra, S. y Canale. P., 2006, Pág. 869