

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

PT8.1 MOTIVACIÓN

Dada una función u que depende tanto de x como de y , la derivada parcial de u con respecto a x en un punto arbitrario (x, y) se define como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \quad (\text{PT8.1})$$

De manera similar, la derivada parcial con respecto a y se define como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \quad (\text{PT8.2})$$

Una ecuación que tiene derivadas parciales de una función desconocida, de dos o más variables independientes, se denomina *ecuación diferencial parcial*, o EDP. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1 \quad (\text{PT8.3})$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y \quad (\text{PT8.4})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x \quad (\text{PT8.5})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x \quad (\text{PT8.6})$$

El *orden* de una EDP es el de la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo, las ecuaciones (PT8.3) y (PT8.4) son de segundo y tercer orden, respectivamente.

Se dice que una ecuación diferencial parcial es *lineal*, si es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen sólo de las variables independientes. Por ejemplo, las ecuaciones (PT8.3) y (PT8.4) son lineales; mientras que las ecuaciones (PT8.5) y (PT8.6) no lo son.

Debido a su amplia aplicación en ingeniería, nuestro estudio de las EDP se concentrará en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para dos variables independientes, tales ecuaciones se pueden expresar de la forma general siguiente:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0 \quad (\text{PT8.7})$$

TABLA PT8.1 Categorías en las que se clasifican las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con dos variables.

$B^2 - 4AC$	Categoría	Ejemplo
< 0	Elíptica	Ecuación de Laplace (estado estacionario con dos dimensiones espaciales) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabólica	Ecuación de conducción del calor (variable de tiempo y una dimensión espacial) $\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
> 0	Hiperbólica	Ecuación de onda (variable de tiempo y una dimensión espacial) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

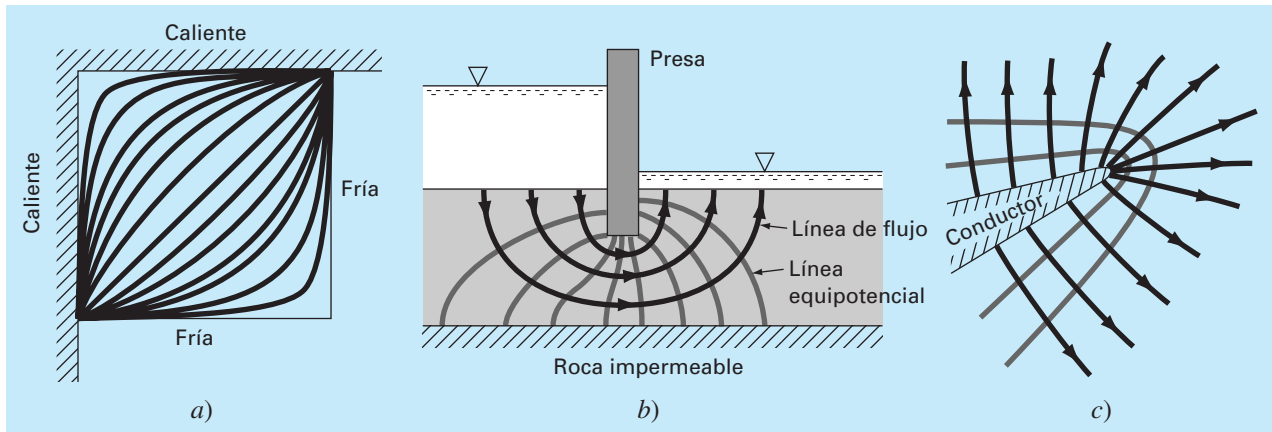
donde A , B y C son funciones de x y y , y D es una función de x , y , u , $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$. Dependiendo de los valores de los coeficientes de los términos de la segunda derivada (A , B y C), la ecuación (PT8.7) se clasifica en una de tres categorías (tabla PT8.1). Esta clasificación, que se basa en el método de las características (por ejemplo, véase Vichnevetsky, 1981, o Lapidus y Pinder, 1981), es útil debido a que cada categoría se relaciona con problemas de ingeniería específicos y distintos, que demandan técnicas de solución especiales. Deberá observarse que en los casos donde A , B y C dependen de x y y , la ecuación puede encontrarse en una categoría diferente, dependiendo de la ubicación en el dominio donde la ecuación se satisface. Por sencillez, limitaremos el presente análisis a las EDP que pertenecen exclusivamente a una de las categorías.

PT8.1.1 EDP y la práctica en ingeniería

Cada una de las categorías de ecuaciones diferenciales parciales en la tabla PT8.1 corresponde a una clase específica de problemas en ingeniería. Las secciones iniciales de los siguientes capítulos se dedicarán a obtener cada tipo de ecuación para un problema de ingeniería en particular. En principio, analizaremos sus propiedades generales y sus aplicaciones, y mostraremos cómo se emplean en diferentes contextos físicos.

Comúnmente, las *ecuaciones elípticas* se utilizan para caracterizar sistemas en *estado estacionario*. Como en la *ecuación de Laplace* de la tabla PT8.1, esto se indica por la ausencia de una derivada con respecto al tiempo. Así, estas ecuaciones se emplean para determinar la distribución en estado estacionario de una incógnita en dos dimensiones espaciales.

Un ejemplo sencillo es la placa calentada de la figura PT8.1a. En tal caso, los bordes de la placa se mantienen a temperaturas diferentes. Como el calor fluye de las regiones de alta temperatura a las de baja temperatura, las condiciones de frontera establecen un potencial que lleva el flujo de calor de la frontera caliente a la fría. Si transcurre suficiente tiempo, este sistema alcanzará al final la distribución de temperatura estable o en estado estacionario representada en la figura PT8.1a. La ecuación de Laplace, junto con

**FIGURA PT8.1**

Tres problemas de distribución en estado estacionario que pueden caracterizarse por EDP elípticas. a) Distribución de temperatura sobre una placa calentada; b) filtración de agua bajo una presa, y c) el campo eléctrico cerca del punto de un conductor.

las condiciones de frontera adecuadas, ofrece un medio para determinar esta distribución. Por analogía, se puede utilizar el mismo procedimiento para abordar otros problemas que implican potenciales, como la filtración de agua bajo una presa (figura PT8.1b) o la distribución de un campo eléctrico (figura PT8.1c).

A diferencia de la categoría elíptica, las *ecuaciones parabólicas* determinan cómo una incógnita varía tanto en el espacio como en el tiempo, lo cual se manifiesta por la presencia de las derivadas espacial y temporal, como la *ecuación de conducción de calor* considerada en la tabla PT8.1. Tales casos se conocen como *problemas de propagación*, puesto que la solución se “propaga”, o cambia, con el tiempo.

Un ejemplo sencillo es el de una barra larga y delgada aislada, excepto en sus extremos (figura PT8.2a). El aislamiento se emplea para evitar complicaciones debido a la pérdida de calor a lo largo de la barra. Como en el caso de la placa calentada de la figura PT8.1a, los extremos de la barra se encuentran a una temperatura fija. Sin embar-

FIGURA PT8.2

a) Barra larga y delgada que está aislada, excepto en sus extremos. La dinámica de la distribución unidimensional de temperatura a lo largo de la barra puede describirse mediante una EDP parabólica.
b) La solución, que consiste en distribuciones correspondientes al estado de la barra en diferentes momentos.

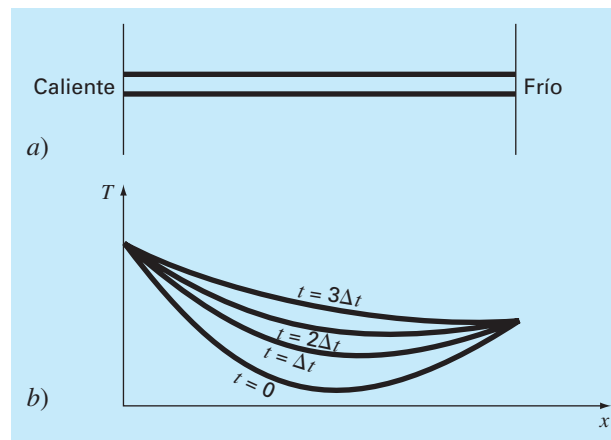
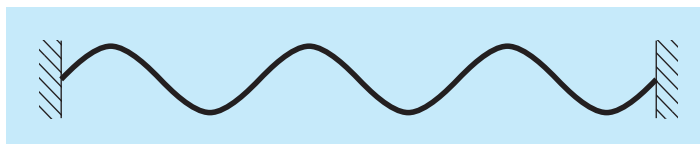


FIGURA PT8.3

Una cuerda tensa que vibra a baja amplitud es un sistema físico simple que puede caracterizarse por una EDP hiperbólica.



go, a diferencia de la figura PT8.1a, el espesor de la barra nos permite suponer que el calor se distribuye de manera uniforme sobre su sección transversal (es decir, lateralmente). En consecuencia, el flujo de calor lateral no es un problema, y el problema se reduce a estudiar la conducción del calor a lo largo del eje longitudinal de la barra. En lugar de concentrarse en la distribución en estado estacionario en dos dimensiones espaciales, el problema consiste en determinar cómo la distribución espacial en una dimensión cambia en función del tiempo (figura PT8.2b). Así, la solución consiste de una serie de distribuciones espaciales que corresponden al estado de la barra en diferentes momentos. Usando una analogía con la fotografía, la categoría elíptica da una imagen del sistema en estado estacionario; mientras que la categoría parabólica ofrece una película de cómo cambia de un estado a otro. Como con los demás tipos de EDP descritos aquí, las ecuaciones parabólicas son útiles para caracterizar, por analogía, una amplia variedad de otros problemas de ingeniería.

La clase final de EDP, la categoría *hiperbólica*, también tiene que ver con *problemas de propagación*. Sin embargo, una importante diferencia manifestada por la ecuación de onda, en la tabla PT8.1, es que la incógnita se caracteriza por una segunda derivada con respecto al tiempo. En consecuencia, la solución oscila.

La cuerda vibrante de la figura PT8.3 es un modelo físico sencillo que puede describirse por la ecuación de onda. La solución consiste de varios estados característicos en que la cuerda oscila. Varios sistemas de ingeniería (tales como las vibraciones de barras y vigas, los movimientos de ondas de fluido y la transmisión de señales acústicas y eléctricas) pueden caracterizarse con este modelo.

PT8.1.2 Métodos anteriores a la computadora para resolver EDP

Antes de la era de las computadoras digitales, los ingenieros dependían de las soluciones analíticas o exactas para las ecuaciones diferenciales parciales. Aparte de los casos más simples, dichas soluciones requerían de un gran esfuerzo y complejidad matemática. Además, muchos sistemas físicos no podían resolverse directamente; tenían que simplificarse utilizando linealizaciones, representaciones geométricas sencillas y otras idealizaciones. Aunque esas soluciones son elegantes y profundas, están limitadas con respecto a la fidelidad para representar sistemas reales (en especial, aquellos que son altamente no lineales y de forma irregular).

PT8.2 ORIENTACIÓN

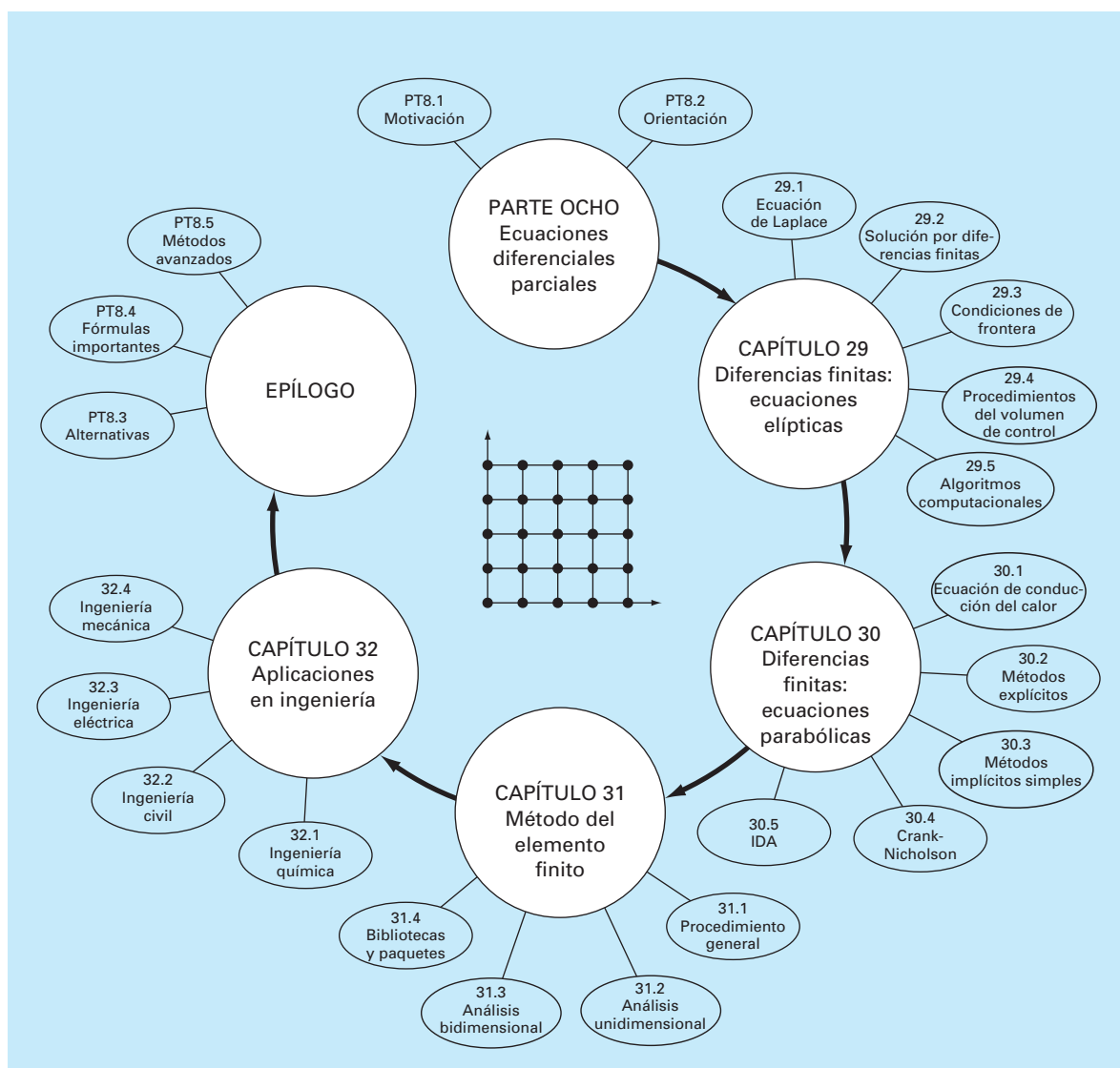
Antes de proceder con los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, alguna orientación resultará de utilidad. La siguiente información tiene el propósito de presentarle un panorama general del material analizado en la parte ocho. Además, hemos formulado objetivos para concentrar sus estudios en el tema.

PT8.2.1 Alcance y presentación preliminar

La figura PT8.4 muestra un panorama general de la parte ocho. En esta parte del libro se analizarán dos amplias categorías de métodos numéricos. Los procedimientos por diferencias finitas, que se cubrirán en los capítulos 29 y 30, se basan en la aproximación de la solución en un número finito de puntos. En cambio, los métodos por elementos finitos, que se estudiarán en el capítulo 31, aproximan la solución por partes o “elemen-

FIGURA PT8.4

Representación esquemática de la organización del material de la parte ocho: Ecuaciones diferenciales parciales.



tos”. Varios parámetros se ajustan hasta que las aproximaciones conformen la ecuación diferencial correspondiente en un sentido óptimo.

El capítulo 29 se dedica a soluciones por *diferencias finitas* de *ecuaciones elípticas*. Antes de poner en práctica los métodos, deducimos la ecuación de Laplace para el problema físico de la distribución de temperatura en una placa calentada. Después, se describe un procedimiento estándar de solución: el *método de Liebmann*. Ilustraremos cómo se utiliza dicho procedimiento para calcular la distribución de la variable escalar principal, la temperatura, así como la de una variable vectorial secundaria: el flujo de calor. La última sección del capítulo se ocupa de las *condiciones de frontera*. Este material comprende procedimientos para diferentes tipos de condiciones, así como para fronteras irregulares.

En el capítulo 30 se estudian las soluciones por *diferencias finitas* de *ecuaciones parabólicas*. Como en el análisis de ecuaciones elípticas, primero ofreceremos una introducción a un problema físico, la ecuación de conducción del calor en una barra unidimensional. Después presentamos algoritmos implícitos y explícitos para resolver esta ecuación. Luego se analiza un método implícito eficiente y confiable: la *técnica de Crank-Nicholson*. Por último, describimos un procedimiento particularmente efectivo para resolver ecuaciones parabólicas bidimensionales, el *método implícito de dirección alternante*, o *método IDA*.

Observe que hemos omitido las ecuaciones hiperbólicas por estar más allá del alcance de este libro. El epílogo de esta parte del libro contiene referencias relacionadas con este tipo de EDP.

En el capítulo 31 veremos otro procedimiento fundamental para resolver EDP: el *método del elemento finito*. Como es esencialmente diferente del procedimiento por diferencias finitas, hemos dedicado la sección inicial del capítulo a una visión general. Después mostramos cómo se utiliza el método del elemento finito para calcular la distribución de temperatura en estado estacionario de una barra calentada. Por último, ofrecemos una introducción a algunos de los problemas al extender este análisis a problemas bidimensionales.

El capítulo 32 se dedica a problemas en todos los campos de la ingeniería. Por último, se presenta una breve sección de repaso al final de la parte ocho. Este epílogo resume información importante relacionada con las EDP. Este material comprende un análisis de las ventajas y las desventajas esenciales para su implementación en la ingeniería. El epílogo también incluye referencias para temas avanzados.

PT8.2.2 Metas y objetivos

Objetivos de estudio. Al terminar la parte ocho, deberá haber incrementado su capacidad para enfrentar y resolver ecuaciones diferenciales parciales. Las metas de estudio generales deberán comprender el dominio de las técnicas, teniendo la capacidad de evaluar la confiabilidad de las respuestas, y de elegir el “mejor” método (o métodos) para cualquier problema particular. Además de estos objetivos generales, deberán dominarse los objetivos de estudio específicos de la tabla PT8.2.

Objetivos de cómputo. Se pueden desarrollar algoritmos computacionales para muchos de los métodos de la parte ocho. Por ejemplo, usted puede encontrar ilustrativo el desarrollo de un programa general, para simular la distribución de la temperatura en

estado estacionario sobre una placa calentada. Además, tal vez usted quiera desarrollar programas para implementar el sencillo método explícito y el de Crank-Nicholson, para resolver EDP parabólicas en una dimensión espacial.

TABLA PT8.2 Objetivos específicos de estudio de la parte ocho.

1. Reconocer la diferencia entre las EDP elípticas, parabólicas e hiperbólicas.
2. Comprender la diferencia fundamental entre los procedimientos de diferencias finitas y de elementos finitos.
3. Entender que el método de Liebmann es equivalente al método de Gauss-Seidel para resolver ecuaciones algebraicas lineales simultáneas.
4. Saber cómo determinar variables secundarias para problemas de campos bidimensionales.
5. Distinguir la diferencia entre las condiciones Dirichlet y las condiciones de la derivada en la frontera.
6. Saber cómo usar factores ponderados para incorporar fronteras irregulares en un esquema por diferencias finitas para las EDP.
7. Implementar la aproximación del volumen de control para las soluciones numéricas de las EDP.
8. Conocer la diferencia entre convergencia y estabilidad de EDP parabólicas.
9. Distinguir la diferencia entre esquemas explícitos y esquemas implícitos para resolver EDP parabólicas.
10. Reconocer cómo los criterios de estabilidad para métodos explícitos disminuyen en su utilidad para resolver EDP parabólicas.
11. Saber cómo interpretar moléculas computacionales.
12. Comprender cómo el procedimiento IDA tiene alta eficiencia en la solución de ecuaciones parabólicas en dos dimensiones espaciales.
13. Comprender la diferencia entre el método directo y el método de residuos ponderados para deducir elementos de ecuaciones.
14. Saber cómo implementar el método de Galerkin.
15. Entender los beneficios de la integración por partes durante la deducción de elementos de ecuaciones; en particular, reconocer las implicaciones que se tienen al disminuir la segunda derivada a una primera derivada.

Por último, una de sus metas más importantes deberá ser dominar varios de los paquetes de software de uso general ampliamente difundidos. En particular, usted deberá volverse un adepto al uso de esas herramientas para implementar métodos numéricos que resuelvan problemas de ingeniería.

CAPÍTULO 29

Diferencias finitas: ecuaciones elípticas

En ingeniería, las ecuaciones elípticas se usan comúnmente para caracterizar problemas en estado estacionario con valores en la frontera. Antes de mostrar la manera en que se resuelven, ilustraremos cómo se deduce en un caso simple (la ecuación de Laplace), a partir de un problema físico.

29.1 LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Como se mencionó en la introducción de esta parte del libro, la ecuación de Laplace se utiliza para modelar diversos problemas que tienen que ver con el potencial de una variable desconocida. Debido a su simplicidad y a su relevancia en la mayoría de las áreas de la ingeniería, usaremos una placa calentada para deducir y resolver esta EDP elíptica. Se emplearán problemas académicos y problemas de la ingeniería (capítulo 32) para ilustrar la aplicabilidad del modelo a otros problemas de ingeniería.

En la figura 29.1 se muestra un elemento sobre la cara de una placa rectangular delgada de espesor Δz . La placa está totalmente aislada excepto en sus extremos, donde la temperatura puede ajustarse a un nivel preestablecido. El aislamiento y el espesor de la placa permiten que la transferencia de calor esté limitada solamente a las dimensiones x y y . En estado estacionario, el flujo de calor hacia el elemento en una unidad de tiempo Δt debe ser igual al flujo de salida, es decir,

$$q(x) \Delta y \Delta z \Delta t + q(y) \Delta x \Delta z \Delta t = q(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \Delta t + q(y + \Delta y) \Delta x \Delta z \Delta t \quad (29.1)$$

donde $q(x)$ y $q(y)$ = los flujos de calor en x y y , respectivamente [$\text{cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$]. Dividiendo entre Δz y Δt , y reagrupando términos, se obtiene

$$[q(x) - q(x + \Delta x)] \Delta y + [q(y) - q(y + \Delta y)] \Delta x = 0$$

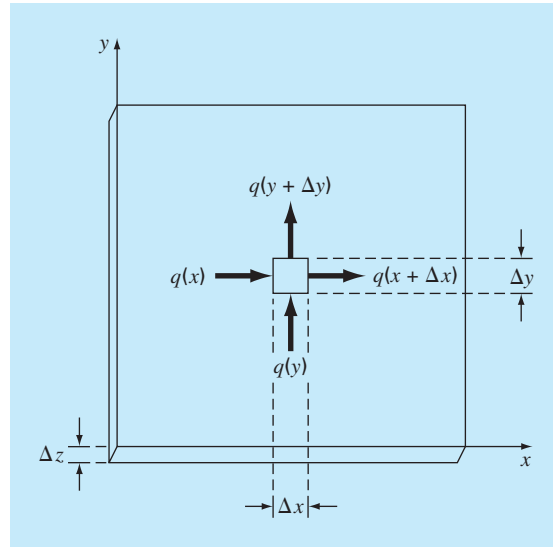
Multiplicando el primer término por $\Delta x/\Delta x$, y el segundo por $\Delta y/\Delta y$ se obtiene

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} \Delta y \Delta x = 0 \quad (29.2)$$

Dividiendo entre $\Delta x \Delta y$, y tomando el límite, se llega a

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (29.3)$$

donde las derivadas parciales resultan de las definiciones en las ecuaciones (PT7.1) y (PT7.2).

**FIGURA 29.1**

Placa delgada de espesor Δz . Se muestra un elemento, con el cual se hace el balance de calor.

La ecuación (29.3) es una ecuación diferencial parcial, que es una expresión de la conservación de la energía en la placa. Sin embargo, la ecuación no puede resolverse, a menos que se especifiquen los flujos de calor en los extremos de la placa. Debido a que se dan condiciones de frontera para la temperatura, la ecuación (29.3) debe reformularse en términos de la temperatura. La relación entre flujo y temperatura está dada por la *ley de Fourier de conducción del calor*, la cual se representa como

$$q_i = -k\rho C \frac{\partial T}{\partial i} \quad (29.4)$$

donde q_i = flujo de calor en la dirección de la dimensión i [$\text{cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$], k = coeficiente de *difusividad térmica* (cm^2/s), ρ = densidad del material (g/cm^3), C = capacidad calorífica del material [$\text{cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$] y T = temperatura ($^\circ\text{C}$), que se define como

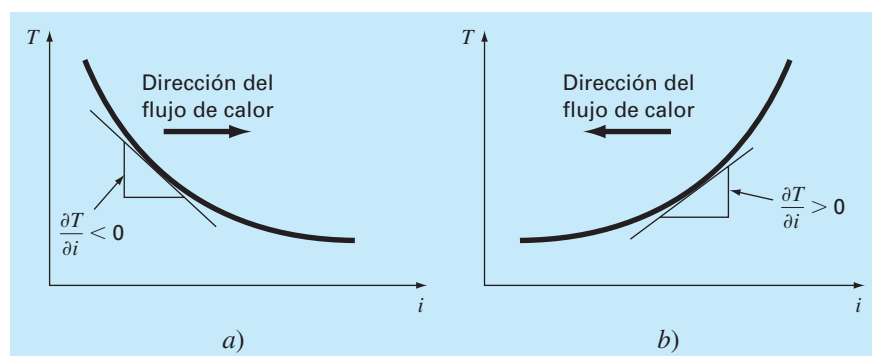
$$T = \frac{H}{\rho CV}$$

donde H = calor (cal) y V = volumen (cm^3). Algunas veces, el término que está multiplicando a la derivada parcial en la ecuación (29.4) se trata como un solo término,

$$k' = k\rho C \quad (29.5)$$

donde k' se conoce como el *coeficiente de conductividad térmica* [$\text{cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C})$]. En ambos casos, k y k' son parámetros que determinan qué tan bien conduce calor el material.

A la ley de Fourier algunas veces se le llama *ecuación constitutiva*. Esta connotación se le da porque proporciona un mecanismo que define las interacciones internas del

**FIGURA 29.2**

Representación gráfica de un gradiente de temperatura. Debido a que el calor se transfiere hacia abajo desde una temperatura alta a una baja, el flujo en a) va de izquierda a derecha en la dirección i positiva. Sin embargo, debido a la orientación de las coordenadas cartesianas, la pendiente es negativa en este caso. Es decir, un gradiente negativo se relaciona con un flujo positivo. Éste es el origen del signo menos en la ley de Fourier de conducción de calor. El caso inverso se ilustra en b), donde el gradiente positivo se relaciona con un flujo de calor negativo de derecha a izquierda.

sistema. Una inspección de la ecuación (29.4) indica que la ley de Fourier especifica que el flujo de calor perpendicular al eje i es proporcional al gradiente o pendiente de la temperatura en la dirección i . El signo negativo asegura que un flujo positivo en la dirección i resulta de una pendiente negativa de alta a baja temperatura (figura 29.2). Sustituyendo la ecuación (29.4) en la ecuación (29.3), se obtiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (29.6)$$

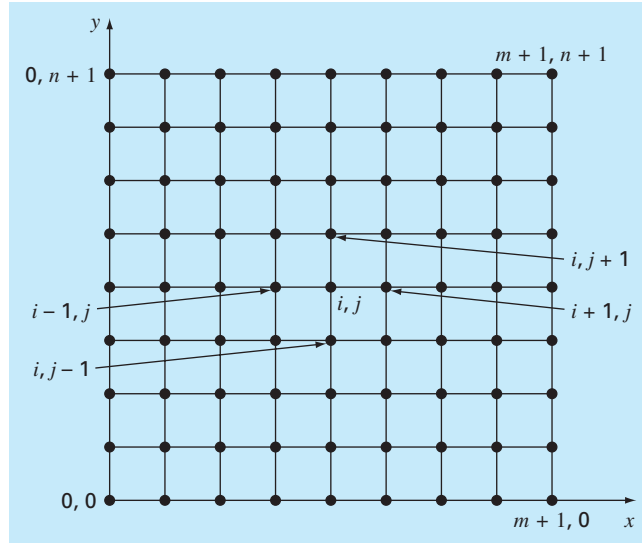
que es la *ecuación de Laplace*. Observe que en el caso donde hay fuentes o pérdidas de calor dentro del dominio bidimensional, la ecuación se puede representar como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (29.7)$$

donde $f(x, y)$ es una función que describe las fuentes o pérdidas de calor. La ecuación (29.7) se conoce como *ecuación de Poisson*.

29.2 TÉCNICA DE SOLUCIÓN

Para la solución numérica de las EDP elípticas, como la ecuación de Laplace, se procede en dirección contraria a como se dedujo la ecuación (29.6) en la sección anterior. Recuerde que la deducción de la ecuación (29.6) emplea un balance alrededor de un elemento discreto para obtener una ecuación algebraica en diferencias, que caracteriza el flujo de calor para una placa. Tomando el límite, esta ecuación en diferencias se convirtió en una ecuación diferencial [ecuación (29.3)].

**FIGURA 29.3**

Malla usada para la solución por diferencias finitas de las EDP elípticas en dos variables independientes, como la ecuación de Laplace.

En la solución numérica, las representaciones por diferencias finitas basadas en tratar la placa como una malla de puntos discretos (figura 29.3) se sustituyen por las derivadas parciales en la ecuación (29.6). Como se describe a continuación, la EDP se transforma en una ecuación algebraica en diferencias.

29.2.1 La ecuación laplaciana en diferencias

Las diferencias centrales basadas en el esquema de malla de la figura 29.3 son (véase figura 23.3)

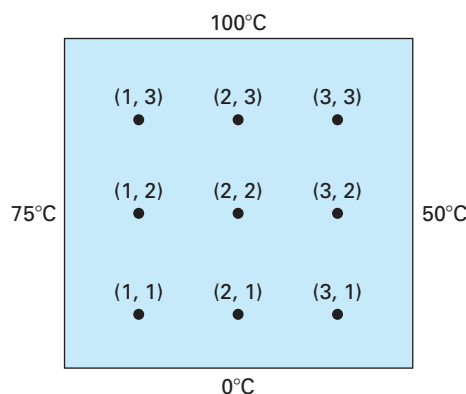
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

las cuales tienen errores de $O[\Delta(x)^2]$ y $O[\Delta(y)^2]$, respectivamente. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (29.6) se obtiene

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

**FIGURA 29.4**

Una placa calentada donde las temperaturas frontera se mantienen a niveles constantes. Este caso se denomina condición de frontera de Dirichlet.

En la malla cuadrada de la figura 29.3, $\Delta x = \Delta y$, y reagrupando términos, la ecuación se convierte en

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (29.8)$$

Esta relación, que se satisface por todos los puntos interiores de la placa, se conoce como *ecuación laplaciana en diferencias*.

Además, se deben especificar las condiciones de frontera en los extremos de la placa para obtener una solución única. El caso más simple es aquel donde la temperatura en la frontera es un valor fijo. Ésta se conoce como *condición de frontera de Dirichlet*. Tal es el caso de la figura 29.4, donde los extremos se mantienen a temperaturas constantes. En el caso ilustrado en la figura 29.4, un balance en el nodo (1, 1) es, de acuerdo con la ecuación (29.8),

$$T_{21} + T_{01} + T_{12} + T_{10} - 4T_{11} = 0 \quad (29.9)$$

Sin embargo, $T_{01} = 75$ y $T_{10} = 0$, y, por lo tanto, la ecuación (29.9) se expresa como

$$-4T_{11} + T_{12} + T_{21} = -75$$

Ecuaciones similares se pueden desarrollar para los otros puntos interiores. El resultado es el siguiente conjunto de nueve ecuaciones simultáneas con nueve incógnitas:

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 4T_{11} & -T_{21} & & -T_{12} & & & & & & & = 75 \\
 -T_{11} & +4T_{21} & -T_{31} & & -T_{22} & & & & & & = 0 \\
 & -T_{21} & +4T_{31} & & & -T_{32} & & & & & = 50 \\
 -T_{11} & & & +4T_{12} & -T_{22} & & -T_{13} & & & & = 75 \\
 & -T_{21} & & -T_{12} & +4T_{22} & -T_{32} & & -T_{23} & & & = 0 \\
 & & -T_{31} & & -T_{22} & +4T_{32} & & & -T_{33} & & = 50 \\
 & & & -T_{12} & & & +4T_{13} & -T_{23} & & & = 175 \\
 & & & & -T_{22} & & -T_{13} & +4T_{23} & -T_{33} & & = 100 \\
 & & & & & -T_{32} & & -T_{23} & +4T_{33} & & = 150
 \end{array} \quad (29.10)$$

29.2.2 El método de Liebmann

En la mayoría de las soluciones numéricas de la ecuación de Laplace se tienen sistemas que son mucho más grandes que la ecuación (29.10). Por ejemplo, para una malla de 10 por 10 se tienen 100 ecuaciones algebraicas lineales. En la parte tres se analizaron técnicas de solución para estos tipos de ecuaciones.

Observe que hay un máximo de cinco incógnitas por línea en la ecuación (29.10). Para mallas grandes se encuentra que un número significativo de los términos será igual a cero. Cuando se aplican los métodos de eliminación con toda la matriz a estos sistemas dispersos, se ocupa una gran cantidad de memoria de la computadora, almacenando ceros. Por esta razón, los métodos aproximados representan un mejor procedimiento para obtener soluciones de EDP elípticas. El método comúnmente empleado es el de *Gauss-Seidel*, el cual, cuando se aplica a las EDP, también se conoce como el *método de Liebmann*. Con esta técnica, la ecuación (29.8) se expresa como

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad (29.11)$$

y se resuelve de manera iterativa para $j = 1$ hasta n e $i = 1$ hasta m . Como la ecuación (29.8) es diagonalmente dominante, este procedimiento al final convergerá a una solución estable (recuerde la sección 11.2.1). Algunas veces se utiliza la sobrerrelajación para acelerar la velocidad de convergencia, aplicando la siguiente fórmula después de cada iteración:

$$T_{i,j}^{\text{nuevo}} = \lambda T_{i,j}^{\text{nuevo}} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{\text{anterior}} \quad (29.12)$$

donde $T_{i,j}^{\text{nuevo}}$ y $T_{i,j}^{\text{anterior}}$ son los valores de $T_{i,j}$ de la actual iteración y de la previa, respectivamente; λ es un factor de ponderación que está entre 1 y 2.

Como en el método convencional de Gauss-Seidel, las iteraciones se repiten hasta que los valores absolutos de todos los errores relativos porcentuales $(\varepsilon_a)_{i,j}$ están por debajo de un criterio preespecificado de terminación ε_s . Dichos errores relativos porcentuales se estiman mediante

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left| \frac{T_{i,j}^{\text{nuevo}} - T_{i,j}^{\text{anterior}}}{T_{i,j}^{\text{nuevo}}} \right| 100\% \quad (29.13)$$

EJEMPLO 29.1 Temperatura de una placa calentada con condiciones de frontera fijas

Planteamiento del problema. Con el método de Liebmann (Gauss-Seidel) calcule la temperatura de la placa calentada de la figura 29.4. Emplee la sobrerrelajación con un valor de 1.5 para el factor de ponderación, e itere hasta $\varepsilon_s = 1\%$.

Solución. La ecuación (29.11) en $i = 1, j = 1$ es

$$T_{11} = \frac{0 + 75 + 0 + 0}{4} = 18.75$$

y aplicando sobrerrelajación se obtiene

$$T_{11} = 1.5(18.75) + (1 - 1.5)0 = 28.125$$

Para $i = 2, j = 1$,

$$T_{21} = \frac{0 + 28.125 + 0 + 0}{4} = 7.03125$$

$$T_{21} = 1.5(7.03125) + (1 - 1.5)0 = 10.54688$$

Para $i = 3, j = 1$,

$$T_{31} = \frac{50 + 10.54688 + 0 + 0}{4} = 15.13672$$

$$T_{31} = 1.5(15.13672) + (1 - 1.5)0 = 22.70508$$

El cálculo se repite con los otros renglones:

$$T_{12} = 38.67188 \quad T_{22} = 18.45703 \quad T_{32} = 34.18579$$

$$T_{13} = 80.12696 \quad T_{23} = 74.46900 \quad T_{33} = 96.99554$$

Como todos los T_{ij} son inicialmente cero, entonces todos los ϵ_a para la primera iteración serán 100%.

En la segunda iteración, los resultados son:

$$T_{11} = 32.51953 \quad T_{21} = 22.35718 \quad T_{31} = 28.60108$$

$$T_{12} = 57.95288 \quad T_{22} = 61.63333 \quad T_{32} = 71.86833$$

$$T_{13} = 75.21973 \quad T_{23} = 87.95872 \quad T_{33} = 67.68736$$

El error para $T_{1,1}$ se estima como sigue [ecuación (29.13)]

$$|(\epsilon_a)_{1,1}| = \left| \frac{32.51953 - 28.12500}{32.51953} \right| 100\% = 13.5\%$$

Debido a que este valor está por arriba del criterio de terminación de 1%, se continúa el cálculo. La novena iteración da como resultado

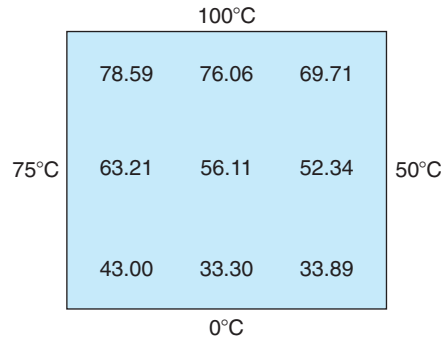
$$T_{11} = 43.00061 \quad T_{21} = 33.29755 \quad T_{31} = 33.88506$$

$$T_{12} = 63.21152 \quad T_{22} = 56.11238 \quad T_{32} = 52.33999$$

$$T_{13} = 78.58718 \quad T_{23} = 76.06402 \quad T_{33} = 69.71050$$

donde el error máximo es 0.71%.

En la figura 29.5 se muestran los resultados. Como se esperaba, se ha establecido un gradiente al fluir el calor de altas a bajas temperaturas.

**FIGURA 29.5**

Distribución de temperatura en una placa calentada, sujeta a condiciones de frontera fijas.

29.2.3 Variables secundarias

Como la distribución de temperatura está descrita por la ecuación de Laplace, ésta se considera la variable principal en el problema de la placa calentada. En este caso, así como en otros problemas donde se tengan EDP, las variables secundarias también pueden ser importantes.

En la placa calentada, una variable secundaria es el flujo de calor a través de la superficie de la placa. Esta cantidad se calcula a partir de la ley de Fourier. Las aproximaciones por diferencias finitas centradas para las primeras derivadas (recuerde la figura 23.3) se sustituyen en la ecuación (29.4) para obtener los siguientes valores del flujo de calor en las dimensiones x y y :

$$q_x = -k' \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad (29.14)$$

y

$$q_y = -k' \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2 \Delta y} \quad (29.15)$$

El flujo de calor resultante se calcula a partir de estas dos cantidades mediante

$$q_n = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \quad (29.16)$$

donde la dirección de q_n está dada por

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{q_y}{q_x} \right) \quad (29.17)$$

para $q_x > 0$ y

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{q_y}{q_x} \right) + \pi \quad (29.18)$$

para $q_x < 0$. Recuerde que el ángulo puede expresarse en grados multiplicándolo por $180^\circ/\pi$. Si $q_x = 0$, θ es $\pi/2$ (90°) o $3\pi/2$ (270°), según q_y sea positivo o negativo, respectivamente.

EJEMPLO 29.2 Distribución de flujo en una placa calentada

Planteamiento del problema. Empleando los resultados del ejemplo 29.1 determine la distribución del flujo de calor en la placa calentada de la figura 29.4. Suponga que la placa es de 40×40 cm y que está hecha de aluminio [$k' = 0.49$ cal/(s · cm · °C)].

Solución. Para $i = j = 1$, la ecuación (29.14) se utiliza para calcular

$$q_x = -0.49 \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}} \frac{(33.29755 - 75)^\circ\text{C}}{2(10 \text{ cm})} = 1.022 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$$

y [de la ecuación (29.15)]

$$q_y = -0.49 \frac{\text{cal}}{\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C}} \frac{(63.21152 - 0)^\circ\text{C}}{2(10 \text{ cm})} = -1.549 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$$

El flujo resultante se calcula con la ecuación (29.16):

$$q_n = \sqrt{(1.022)^2 + (-1.549)^2} = 1.856 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$$

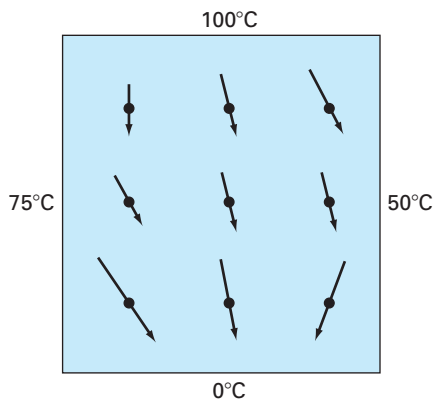
y el ángulo de su trayectoria mediante la ecuación (29.17)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1.549}{1.022}\right) = -0.98758 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -56.584^\circ$$

Así, en este punto, el flujo de calor está dirigido hacia abajo y a la derecha. Pueden calcularse los valores en otros puntos de la malla; los resultados se muestran en la figura 29.6.

FIGURA 29.6

Flujo de calor en una placa sujeta a temperaturas fijas en las fronteras. Observe que la longitud de las flechas es proporcional a la magnitud del flujo.



29.3 CONDICIONES EN LA FRONTERA

Debido a que está libre de complicaciones, la placa rectangular con condiciones de frontera fijas representa un ideal para mostrar cómo se resuelven numéricamente las EDP elípticas. Ahora veremos otro problema que ampliará nuestras habilidades para abordar problemas más realistas. Éste considera fronteras en donde se especifica la derivada, y fronteras que tienen forma irregular.

29.3.1 Condiciones con derivada en la frontera

La condición de frontera fija o de Dirichlet analizada hasta ahora es uno de los diferentes tipos usados en las ecuaciones diferenciales parciales. Una alternativa común es el caso donde se da la derivada, que se conoce comúnmente como una *condición de frontera de Neumann*. En el problema de la placa calentada, esto corresponde a especificar el flujo de calor, más que la temperatura en la frontera. Un ejemplo es la situación donde el extremo está aislado. En tal caso, referido como *condición de frontera natural*, la derivada es cero. Esta conclusión se obtiene directamente de la ecuación (29.4), ya que aislar una frontera significa que el flujo de calor (y, en consecuencia, el gradiente) debe ser cero. Otro ejemplo sería el caso donde se pierde calor a través del extremo por mecanismos predecibles, tales como radiación y conducción.

En la figura 29.7 se muestra un nodo $(0, j)$ en el extremo izquierdo de una placa calentada. Aplicando la ecuación (29.8) en este punto, se obtiene

$$T_{1,j} + T_{-1,j} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0 \quad (29.19)$$

Observe que para esta ecuación se necesita un punto imaginario $(-1, j)$ que esté fuera de la placa. Aunque este punto exterior ficticio podría parecer que representa un problema, realmente sirve para incorporar la derivada de la condición de frontera en el problema, lo cual se logra representando la primera derivada en la dimensión x en $(0, j)$ por la diferencia dividida finita

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T_{1,j} - T_{-1,j}}{2 \Delta x}$$

donde se puede despejar

$$T_{-1,j} = T_{1,j} - 2 \Delta x \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ahora se tiene una relación para $T_{-1,j}$ que incluye la derivada. Esta relación se sustituye en la ecuación (29.19) para obtener

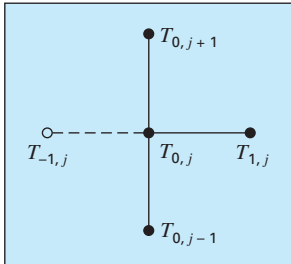
$$2T_{1,j} - 2 \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + T_{0,j+1} + T_{0,j-1} - 4T_{0,j} = 0 \quad (29.20)$$

Así, hemos incorporado la derivada en la ecuación.

Es posible desarrollar relaciones similares para las condiciones de frontera con derivadas en los otros extremos. El siguiente ejemplo muestra cómo llevarlo a cabo en la placa calentada.

FIGURA 29.7

Un nodo frontera $(0, j)$ en el extremo izquierdo de una placa calentada. Para aproximar la derivada normal al extremo (es decir, la derivada x), se localiza un punto imaginario $(-1, j)$ a una distancia Δx más allá del extremo.



EJEMPLO 29.3 Placa calentada con un extremo aislado

Planteamiento del problema. Repita el mismo problema del ejemplo 29.1, pero con el extremo inferior aislado.

Solución. La ecuación general que caracteriza una derivada en el extremo inferior (es decir, en $j = 0$) en una placa calentada es

$$T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + 2T_{i,1} - 2\Delta y \frac{\partial T}{\partial y} - 4T_{i,0} = 0$$

En el extremo aislado, la derivada es cero y la ecuación se convierte en

$$T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + 2T_{i,1} - 4T_{i,0} = 0$$

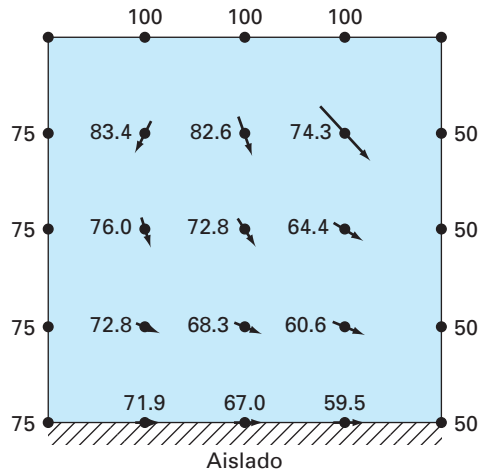
Las ecuaciones simultáneas para la distribución de temperatura en la placa de la figura 29.4 con un extremo inferior aislado se escribe en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & & & & & & \\ & -1 & 4 & & & & & & & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & & & & & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & & & & \\ & & & -1 & & 4 & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 & & & \\ & & & & & & -1 & & 4 & -1 & & \\ & & & & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{10} \\ T_{20} \\ T_{30} \\ T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Observe que, debido a las derivadas en las condiciones de frontera, la matriz aumentó de tamaño a 12×12 , a diferencia del sistema de 9×9 de la ecuación (29.10), para considerar las tres temperaturas desconocidas del extremo inferior de la placa. De estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{array}{lll} T_{10} = 71.91 & T_{20} = 67.01 & T_{30} = 59.54 \\ T_{11} = 72.81 & T_{21} = 68.31 & T_{31} = 60.57 \\ T_{12} = 76.01 & T_{22} = 72.84 & T_{32} = 64.42 \\ T_{13} = 83.41 & T_{23} = 82.63 & T_{33} = 74.26 \end{array}$$

Esos resultados y los flujos calculados (con los mismos parámetros que en el ejemplo 29.2) se muestran en la figura 29.8. Observe que, debido a que el extremo inferior está aislado, la temperatura de la placa es más alta que en la figura 29.5, donde la temperatura del extremo inferior se fijó en cero. Además, el flujo de calor (a diferencia de la figura 29.6) ahora está desviado a la derecha y se mueve paralelamente a la pared aislada.

**FIGURA 29.8**

Temperatura y distribución de flujo en una placa calentada sujeta a condiciones de frontera fijas, excepto en un extremo inferior aislado.

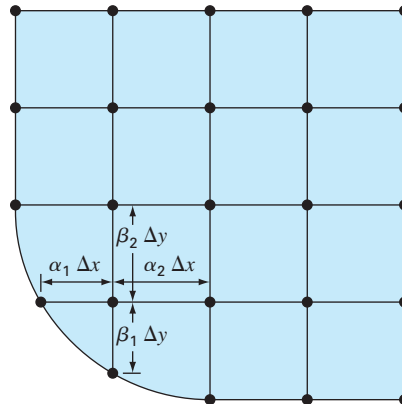
29.3.2 Fronteras irregulares

Aunque la placa rectangular de la figura 29.4 nos sirve para ilustrar los aspectos fundamentales en la solución de las EDP elípticas, muchos problemas de ingeniería no muestran esa geometría idealizada. Por ejemplo, muchos sistemas tienen fronteras irregulares (figura 29.9).

La figura 29.9 es un sistema útil para ilustrar cómo se pueden tratar las fronteras no rectangulares. Como se muestra, la frontera inferior izquierda de la placa es circular.

FIGURA 29.9

Malla de una placa calentada con una frontera en forma irregular. Observe cómo se utilizan los coeficientes ponderados al considerar el espaciamiento no uniforme en la cercanía de la frontera no rectangular.



Observe que tenemos parámetros adicionales ($\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$) en cada una de las longitudes que rodean al nodo. Por supuesto que, para la placa mostrada en la figura 29.9, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Conservaremos estos parámetros en la siguiente deducción, de tal modo que la ecuación resultante sea aplicable a cualquier frontera irregular (y no sólo a la esquina inferior izquierda de una placa calentada). Las primeras derivadas en la dimensión x se aproximan como sigue

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1,j} \cong \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\alpha_1 \Delta x} \quad (29.21)$$

y

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j+1} \cong \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 \Delta x} \quad (29.22)$$

Las segundas derivadas se obtienen a partir de estas primeras derivadas. Para la dimensión x , la segunda derivada es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j+1} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1,j}}{\frac{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x}{2}} \quad (29.23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (29.21) y (29.22) en la (29.23), obtenemos

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 \frac{\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\alpha_1 \Delta x} - \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2 \Delta x}}{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta x}$$

Agrupando términos,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2}{\Delta x^2} \left[\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right]$$

Es posible desarrollar una ecuación similar en la dimensión y :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2}{\Delta y^2} \left[\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\beta_1(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\beta_2(\beta_1 + \beta_2)} \right]$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación (29.6), obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta x^2} \left[\frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \\ & + \frac{2}{\Delta y^2} \left[\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j}}{\beta_1(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\beta_2(\beta_1 + \beta_2)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (29.24)$$

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, la ecuación (29.24) se aplica a cualquier nodo que sea adyacente a una frontera irregular de tipo Dirichlet.

EJEMPLO 29.4 Placa calentada con una frontera irregular

Planteamiento del problema. Repita el mismo problema del ejemplo 29.1, pero ahora el extremo inferior tendrá la forma que se ilustra en la figura 29.9.

Solución. En el caso de la figura 29.9, $\Delta x = \Delta y$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0.732$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (29.24), se obtiene la siguiente ecuación para el nodo (1, 1):

$$0.788675(T_{01} - T_{11}) + 0.57735(T_{21} - T_{11}) + 0.788675(T_{10} - T_{11}) + 0.57735(T_{12} - T_{11}) = 0$$

Agrupando términos, esta ecuación se expresa como

$$-4T_{11} + 0.8453T_{21} + 0.8453T_{12} = -1.1547T_{01} - 1.1547T_{10}$$

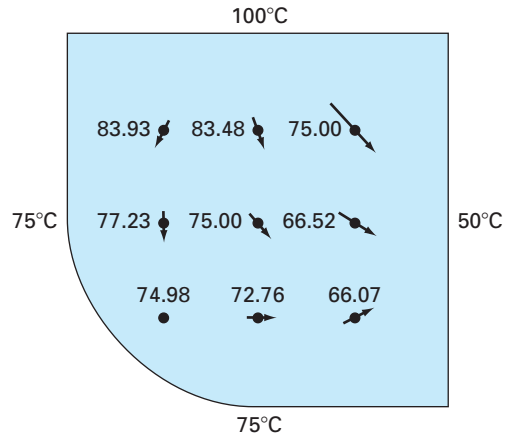
Las ecuaciones simultáneas de la distribución de temperatura sobre la placa de la figura 29.9 con una temperatura en la frontera inferior de 75, se escriben en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 4 & -0.845 & & -0.845 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & 4 & & -1 & & \\ -1 & & & 4 & -1 & -1 & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & & 4 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173.2 \\ 75 \\ 125 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

De estas ecuaciones se llega a

$$\begin{array}{lll} T_{11} = 74.98 & T_{21} = 72.76 & T_{31} = 66.07 \\ T_{12} = 77.23 & T_{22} = 75.00 & T_{32} = 66.52 \\ T_{13} = 83.93 & T_{23} = 83.48 & T_{33} = 75.00 \end{array}$$

Estos resultados, junto con los flujos calculados, se muestran en la figura 29.10. Observe que los flujos se calculan de la misma manera que en la sección 29.2.3, excepto que $(\alpha_1 + \alpha_2)$ y $(\beta_1 + \beta_2)$ se sustituyen por los 2 en los denominadores de las ecuaciones (29.14) y (29.15), respectivamente. En la sección 32.3 se ilustra cómo llevarlo a cabo.

**FIGURA 29.10**

Distribución de temperatura y flujo en una placa calentada con una frontera circular.

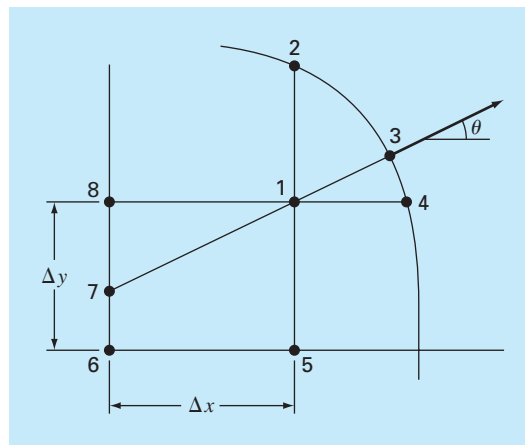
Las derivadas en las condiciones de frontera de forma irregular son más difíciles de formular. En la figura 29.11 se muestra un punto cercano a una frontera irregular donde se especifica la derivada normal.

La derivada normal en el nodo 3 se aproxima por el gradiente entre los nodos 1 y 7,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right|_3 = \frac{T_1 - T_7}{L_{17}} \quad (29.25)$$

FIGURA 29.11

Frontera curvada donde se especifica el gradiente normal.



Cuando θ es menor a 45° , como se muestra, la distancia del nodo 7 al 8 es $\Delta x \tan \theta$, y se utiliza la interpolación lineal para estimar

$$T_7 = T_8 + (T_6 - T_8) \frac{\Delta x \tan \theta}{\Delta y}$$

La longitud L_{17} es igual a $\Delta x / \cos \theta$. Esta longitud, junto con la aproximación para T_7 , puede sustituirse en la ecuación (29.25) para obtener

$$T_1 = \left(\frac{\Delta x}{\cos \theta} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} \bigg|_3 + T_6 \frac{\Delta x \tan \theta}{\Delta y} + T_8 \left(1 - \frac{\Delta x \tan \theta}{\Delta y} \right) \quad (29.26)$$

Tal ecuación proporciona un medio para incorporar el gradiente normal en el método de diferencias finitas. En los casos donde θ es mayor a 45° , deberá usarse una ecuación diferente. La determinación de esta fórmula se deja como ejercicio para el lector.

29.4 EL MÉTODO DEL VOLUMEN DE CONTROL

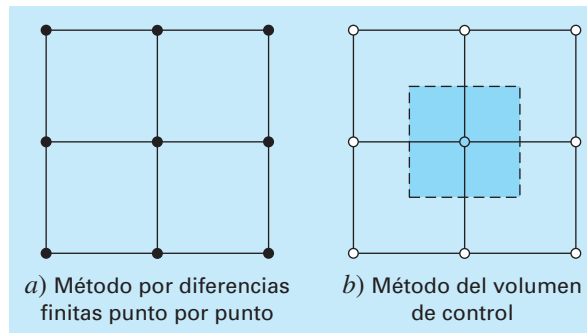
Para resumir, el método por diferencias finitas o series de Taylor divide al continuo en nodos (figura 29.12a). La ecuación diferencial parcial correspondiente se escribe para cada uno de estos nodos. Las aproximaciones por diferencias finitas, entonces, se sustituyen por las derivadas para llevar las ecuaciones a una forma algebraica.

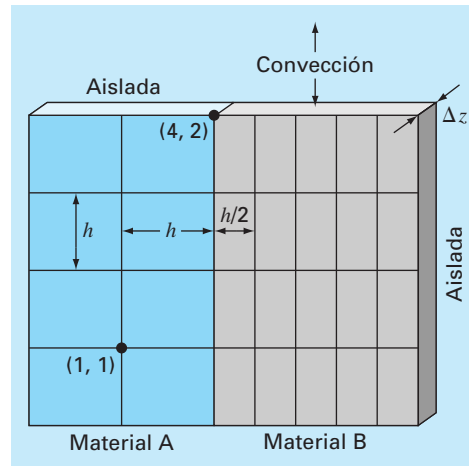
Un procedimiento de esto es bastante simple y directo con mallas ortogonales (es decir, rectangulares) y coeficientes constantes. Sin embargo, este procedimiento se vuelve un poco más complicado cuando se tiene derivadas como condiciones de fronteras con forma irregular.

En la figura 29.13 se muestra un ejemplo de un sistema donde se presentan dificultades adicionales. La placa está hecha de dos materiales diferentes y los espacios en la malla son diferentes. Además, la mitad de su extremo superior está sujeta a transferencia de calor convectivo; mientras que la otra mitad está aislada. Obtener las ecuaciones para el nodo (4, 2) requeriría algunas deducciones adicionales, que van más allá de los métodos desarrollados hasta este punto.

FIGURA 29.12

Dos perspectivas diferentes para obtener soluciones aproximadas de las EDP: a) diferencias finitas y b) volumen de control.



**FIGURA 29.13**

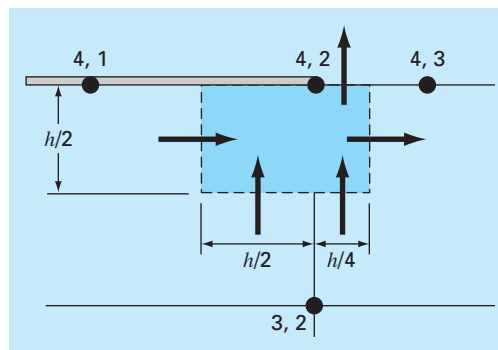
Placa calentada con una malla de espaciamientos diferentes, dos materiales y diversas condiciones de frontera.

El *método del volumen de control* (también conocido como *método del volumen integral*) ofrece un camino alternativo para la aproximación numérica de las EDP, que es útil en casos como el de la figura 29.13. En la figura 29.12b, el método se parece a la aproximación por puntos, donde los puntos se determinan a través del dominio. No obstante, en lugar de aproximar la EDP en un punto, la aproximación se aplica al volumen que rodea el punto. En una malla ortogonal, el volumen está formado por las rectas perpendiculares que pasan por el punto medio de cada línea que une nodos adyacentes. Un balance de calor se obtiene después para cada volumen de manera similar a la ecuación (29.1).

Como ejemplo, aplicaremos el método del volumen de control al nodo $(4, 2)$. Primero, se define el volumen bisecando las rectas que unen los nodos. Como en la figura 29.14, el volumen tiene transferencia de calor por conducción a través de sus fronteras

FIGURA 29.14

Volumen de control para el nodo $(4, 2)$; las flechas indican transferencia de calor a través de las fronteras.



izquierda, derecha e inferior, y la transferencia de calor por convección a través de la mitad de su frontera superior. Observe que la transferencia por la frontera inferior comprende a ambos materiales.

Un balance de calor en estado estacionario para el volumen puede escribirse en términos cualitativos como

$$0 = \left(\begin{array}{c} \text{conducción} \\ \text{lado izquierdo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{conducción} \\ \text{lado derecho} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{conducción} \\ \text{inferior material "a"} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{conducción} \\ \text{inferior material "b"} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{conducción} \\ \text{superior} \end{array} \right) \quad (29.27)$$

Ahora el flujo por conducción se representa por la versión en diferencias finitas de la ley de Fourier. Por ejemplo, para el incremento de conducción en el lado izquierdo, sería

$$q = -k'_a \frac{T_{42} - T_{41}}{h}$$

donde las unidades de q son cal/cm²/s. Este flujo se debe multiplicar después por el área transversal a través de la cual entra ($Dz \times h/2$), para dar el flujo de calor que entra al volumen por unidad de tiempo,

$$Q = -k'_a \frac{T_{42} - T_{41}}{h} \frac{h}{2} \Delta z$$

donde las unidades de Q son cal/s.

El flujo de calor debido a la convección se formula como sigue

$$q = h_c (T_a - T_{42})$$

donde h_c es un coeficiente por calor de convección [cal/(s · cm² · °C)] y T_a = temperatura del aire (°C). De nuevo, multiplicando por el área adecuada obtenemos la razón del flujo de calor por tiempo,

$$Q = h_c (T_a - T_{42}) \frac{h}{4} \Delta z$$

Las otras transferencias se obtienen de manera similar y se sustituyen en la ecuación (29.27) para dar

$$0 = -k'_a \frac{T_{42} - T_{41}}{h} \frac{h}{2} \Delta z + k'_b \frac{T_{43} - T_{42}}{h/2} \frac{h}{2} \Delta z$$

(conducción lado izquierdo) (conducción lado derecho)

$$-k'_a \frac{T_{42} - T_{32}}{h} \frac{h}{2} \Delta z - k'_b \frac{T_{42} - T_{32}}{h} \frac{h}{4} \Delta z + h_c (T_a - T_{42}) \frac{h}{4} \Delta z$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Conducción} \\ \text{inferior material "a"} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Conducción} \\ \text{inferior material "b"} \end{array} \right) (\text{Convección superior})$$

Al sustituir los valores de los parámetros, obtenemos la ecuación final del balance de calor. Por ejemplo, si $\Delta z = 0.5$ cm, $h = 10$ cm, $k'_a = 0.3$ cal/(s · cm · °C), $k'_b = 0.5$ cal/(s · cm · °C), y $h_c = 0.1$ cal/(s · cm² · °C), la ecuación se convierte en

$$0.5875T_{42} - 0.075T_{41} - 0.25T_{43} - 0.1375T_{32} = 2.5$$

Para hacer la ecuación comparable con el laplaciano estándar, ésta se multiplica por 4/0.5875, de modo que el coeficiente del nodo base tenga un coeficiente igual a 4,

$$4T_{42} - 0.510638T_{41} - 1.702128T_{43} - 0.93617T_{32} = 17.02128$$

En los casos estándar vistos hasta ahora, los métodos del volumen de control y de diferencias finitas punto por punto llegan a resultados idénticos. Por ejemplo, en el nodo (1, 1) de la figura 29.13, el balance sería

$$0 = -k'_a \frac{T_{11} - T_{01}}{h} h \Delta z + k'_a \frac{T_{21} - T_{11}}{h} h \Delta z - k'_a \frac{T_{11} - T_{10}}{h} h \Delta z + k'_a \frac{T_{12} - T_{11}}{h} h \Delta z$$

que se simplifica al laplaciano estándar,

$$0 = 4T_{11} - T_{01} - T_{21} - T_{12} - T_{10}$$

Veremos otros casos estándar (por ejemplo, la derivada en la condición de frontera) y exploraremos en detalle el método del volumen de control en los problemas del final de este capítulo.

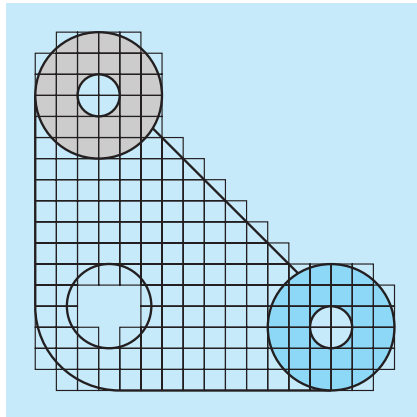
29.5 SOFTWARE PARA RESOLVER ECUACIONES ELÍPTICAS

Modificar un programa computacional para incluir las derivadas en las condiciones de frontera para sistemas rectangulares es una tarea relativamente sencilla. Únicamente consiste en asegurar que se generan ecuaciones adicionales para caracterizar a los nodos frontera donde se especifican las derivadas. Además, hay que modificar el código de tal forma que estas ecuaciones incorporen la derivada como se indica en la ecuación (29.20).

Desarrollar un software general que caracterice los sistemas con fronteras irregulares es mucho más difícil. Por ejemplo, se necesita un algoritmo bastante complicado para modelar la simple junta ilustrada en la figura 29.15. Esto significará dos grandes

FIGURA 29.15

Una malla de diferencias finitas sobrepuesta a una junta de forma irregular.



modificaciones. Primero, se tendrá que desarrollar un esquema para ingresar adecuadamente la configuración de los nodos e identificar los que estén en la frontera. Segundo, se necesitará un algoritmo para generar las ecuaciones simultáneas adecuadas, basándose en la información de entrada. El resultado final es que el software general para resolver las EDP elípticas (y, en general, todas) es relativamente complicado.

Un método utilizado para simplificar este trabajo es proponer una malla muy fina. En tales casos, es frecuente suponer que los nodos cercanos sirven como puntos frontera. De esta manera, el análisis no tiene que considerar los parámetros ponderados de la sección 29.3.2. Aunque esto introduce cierto error, el uso de una malla suficientemente fina puede hacer despreciable la discrepancia resultante. Sin embargo, esto ocasiona una desventaja debido a la carga computacional introducida al aumentar el número de ecuaciones simultáneas.

Como consecuencia de estas consideraciones, el análisis numérico ha desarrollado métodos alternativos que difieren radicalmente de los métodos por diferencias finitas, por ejemplo, el método del elemento finito. Aunque estos métodos son conceptualmente más difíciles, pueden implementarse con mayor facilidad para las fronteras irregulares. En el capítulo 31 volveremos a estos métodos. Antes de hacerlo, sin embargo, describiremos los métodos por diferencias finitas en otra categoría de EDP: las ecuaciones parabólicas.

PROBLEMAS

29.1 Use el método de Liebmann para resolver cuál sería la temperatura de la placa cuadrada calentada que se ilustra en la figura 29.4, pero con la condición de frontera superior incrementada a 120° y la frontera izquierda disminuida a 60°C . Utilice un factor de relajamiento de 1.2 para iterar a $\epsilon_s = 1\%$.

29.2 Calcule los flujos para el problema 29.1 con el uso de los parámetros del problema 29.3.

29.3 Repita el ejemplo 29.1, pero emplee 49 nodos interiores (es decir, $\Delta x = \Delta y = 5\text{ cm}$).

29.4 Vuelva a hacer el problema 29.3, pero para el caso en que el extremo inferior está aislada.

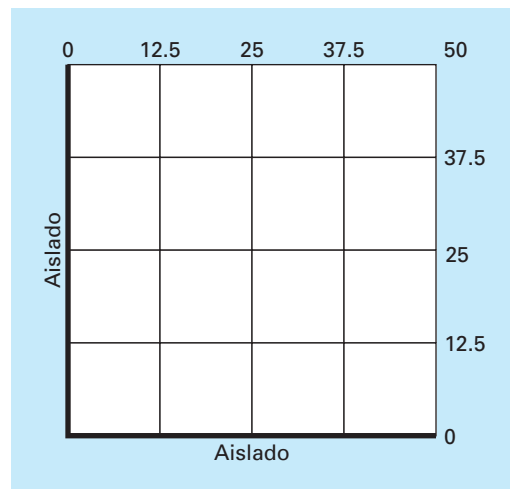
29.5 Repita los ejemplos 29.1 y 29.3, pero para el caso en que el flujo en el extremo inferior se dirige hacia abajo con un valor de $1\text{ cal/cm}^2 \cdot \text{s}$.

29.6 Repita el ejemplo 29.4 para el caso en que tanto las esquinas inferior izquierda y superior derecha están redondeadas en la misma forma que la esquina inferior izquierda de la figura 29.9. Observe que todas las temperaturas de la frontera en los lados superior y derecho están fijas a 100°C , y todas las de los lados inferior e izquierdo lo están a 50°C .

29.7 Con excepción de las condiciones de frontera, la placa de la figura 29.7 tiene las mismas características que la que se usó en los ejemplos 23.1 a 23.4. Para dicha placa, simule tanto las temperaturas como los flujos.

29.8 Escriba ecuaciones para los nodos resaltados en la malla que se ilustra en la figura P29.8. Observe que todas las unidades

Figura P29.7



son del sistema cgs. El coeficiente de conductividad térmica para la placa es de $0.75 \text{ cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ\text{C})$, el coeficiente de convección es $h_c = 0.015 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{C} \cdot \text{s})$, y el espesor de la placa es de 0.5 cm .

29.9 Escriba ecuaciones para los nodos resaltados en la malla que aparece en la figura P29.9. Observe que todas las unidades son del sistema cgs. El coeficiente de convección es $h_c = 0.015 \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{C} \cdot \text{s})$, y el espesor de la placa es de 1.5 cm .

29.10 Aplique el enfoque del volumen de control para desarrollar la ecuación para el nodo $(0, j)$ de la figura 29.7.

29.11 Deduzca una ecuación como la ecuación (29.26) en el caso donde es mayor a 45° para la figura 29.11.

29.12 Desarrolle un programa de computadora amigable para el usuario para implantar el método de Liebmann para una placa rectangular con condiciones de frontera de Dirichlet. Diseñe el programa de modo que calcule tanto la temperatura como el flujo. Pruebe el programa con la duplicación de los resultados de los ejemplos 29.1 y 29.2.

29.13 Emplee el programa del problema 29.12 para resolver los problemas 29.1 y 29.2.

29.14 Utilice el programa del problema 29.12 para resolver el problema 29.3.

29.15 Emplee el enfoque del volumen de control y obtenga la ecuación de nodo para el nodo $(2, 2)$ de la figura 29.13, e incluya una fuente de calor en este punto. Utilice los valores siguientes para las constantes: $\Delta z = 0.25 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $k_A = 0.25 \text{ W}/\text{cm} \cdot \text{C}$, y $k_B = 0.45 \text{ W}/\text{cm} \cdot \text{C}$. La fuente calorífica sólo proviene del material A a una tasa de $6 \text{ W}/\text{cm}^3$.

29.16 Calcule el flujo de calor (W/cm^2) en el nodo $(2, 2)$ de la figura 29.13, con aproximaciones por diferencias finitas para los gradientes de temperatura en dicho nodo. Calcule el flujo en dirección horizontal en los materiales A y B y determine si los dos flujos deben ser iguales. Asimismo, calcule el flujo vertical en los materiales A y B. ¿Deben ser iguales estos dos flujos? Utilice los valores siguientes para las constantes: $\Delta z = 0.5 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $k_A = 0.25 \text{ W}/\text{cm} \cdot \text{C}$, $k_B = 0.45 \text{ W}/\text{cm} \cdot \text{C}$, y temperaturas en los nodos: $T_{22} = 51.6^\circ\text{C}$, $T_{21} = 74.2^\circ\text{C}$, $T_{23} = 45.3^\circ\text{C}$, $T_{32} = 38.6^\circ\text{C}$ y $T_{12} = 87.4^\circ\text{C}$.

Figura P29.8

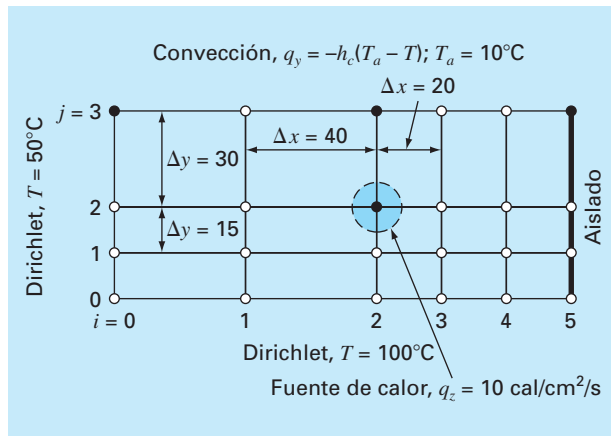


Figura P29.9

