



Temperatura de una aleta disipadora de Calor

Erwin Levi; Leandro Caloguerea; Diego Rojas; Fabián Sánchez

Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.

erwin.gmanz@Gmail.com; l.caloguerea@gmail.com; hackerter@gmail.com; fabian932u@gmail.com

Introducción

En el desarrollo de este trabajo se nos plantea como desafío estudiar numéricamente el comportamiento de una aleta disipadora de calor entorno a la temperatura que esta posee. Para ello haremos uso de las competencias entregadas por el curso *Métodos Numéricos para ingeniería BAIN053*.

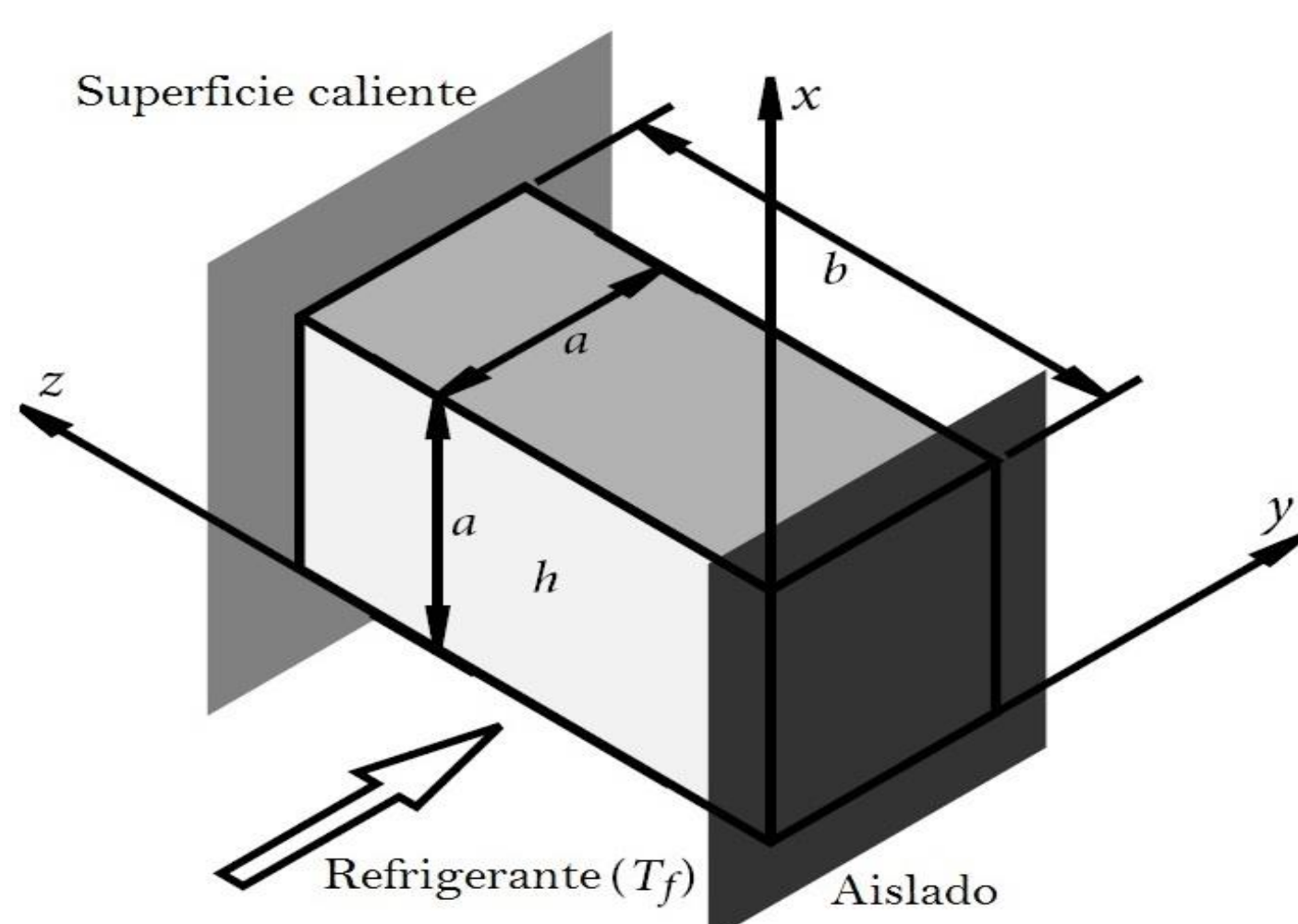


Figura 1: Aleta Disipadora de Calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$\begin{aligned} x=0: k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_f), & x=a: -k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T - T_f) \\ y=0: k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_f), & y=a: -k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T - T_f) \\ z=0: \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, & z=b: T &= f(x, y). \end{aligned}$$

Figura 2: EDP de Laplace y condiciones de frontera.

Objetivos

- Obtener la solución del problema de distribución de temperatura en una aleta disipadora de calor, mediante el estudio y desarrollo de:
 - Solución analítica.
 - Diferencias finitas aplicadas a ecuaciones en derivadas parciales elípticas.
- Graficar y realizar una comparación entre la solución analítica y las aproximaciones obtenidas por el método de diferencias finitas.

Metodología

Solución analítica: Para poder aplicar esta solución primero debemos considerar que cinco de las seis condiciones de borde deben ser homogéneas. Por lo tanto se define una nueva variable de tal forma que la ecuación cambia a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} &= 0, \\ \hat{T}(0, y, z) &= 0, & \hat{T}(a, y, z) &= T_f, \\ \hat{T}(x, 0, z) &= 0, & \hat{T}(x, a, z) &= T_f, \\ \frac{\partial \hat{T}(x, y, 0)}{\partial z} &= 0, & \hat{T}(x, y, b) &= T_0 - T_f, \end{aligned}$$

para luego aplicar el método de separación de variables:

$$\hat{T}(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Diferencias Finitas: Para el mismo problema se realizará el cálculo a través de diferencias finitas con EDP de Laplace. Para ello su resolución será de la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Aplicando diferencias finitas y sustituyendo tenemos:

$$\frac{T_{i+1,j,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i-1,j,z}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,z} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j-1,z}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,z+1} - 2T_{i,j,z} + T_{i,j,z-1}}{\Delta z^2} = 0$$

Resultados

Según los valores obtenidos con una T frontera de 12°C en los bordes, una placa aislante de 0°C y una superficie caliente de 60°C, obtenemos los valores aproximados por cara de cada nodo al interior de la aleta.

Tablas de resultados 1

ans = cara 2			
11.998	11.998	11.999	12.000
11.997	11.996	11.998	11.999
11.997	11.996	11.997	11.999
11.998	11.997	11.998	11.999
ans = cara 3			
11.998	11.999	11.999	12.000
11.997	11.997	11.998	11.999
11.997	11.997	11.998	11.999
11.998	11.998	11.998	11.999
ans = cara 4			
11.999	11.999	12.000	12.000
11.999	11.999	11.999	12.000
11.999	11.998	11.999	12.000
11.999	11.999	11.999	12.000
ans = cara 5			
12.060	12.067	12.050	12.022
12.113	12.149	12.120	12.060
12.133	12.197	12.175	12.095
12.097	12.161	12.155	12.092
ans = cara 6			
12.197	12.217	12.165	12.077
12.360	12.471	12.386	12.197
12.416	12.612	12.546	12.302
12.297	12.491	12.477	12.288
ans = cara 7			
12.563	12.620	12.488	12.245
12.991	13.296	13.087	12.587
13.117	13.637	13.483	12.854
12.795	13.298	13.271	12.790
ans = cara 8			
13.591	13.736	13.441	12.809
14.637	15.424	14.972	13.743
14.891	16.169	15.862	14.366
14.072	15.282	15.249	14.115
ans = cara 9			
16.626	16.947	16.385	14.870
18.948	20.801	19.978	17.259
19.370	22.190	21.691	18.516
17.474	20.097	20.083	17.676
ans = cara 10			
26.277	26.770	26.026	23.152
30.267	33.652	32.621	28.042
30.732	35.446	34.913	29.819
27.311	31.662	31.696	27.735

lado cuadrado 3, profundidad 5, dx=dy=dz= 0.5

Contrastando los resultados de la tabla anterior, los valores obtenidos con una T frontera de 12°C en los bordes, una placa aislante de 0°C y una superficie caliente de 60°C, son aproximados en cada cara.

Concluimos que el flujo de calor fluye desde la cara más alejada del aislante(cara 12) hasta el mismo aislante(cara 7) logrando una temperatura cercana a la del refrigerante.

Tablas de resultados 2

ans = cara 7					
11.993	11.992	11.994	11.996	11.998	11.999
11.986	11.983	11.985	11.990	11.995	11.998
11.981	11.974	11.976	11.983	11.990	11.996
11.979	11.969	11.969	11.977	11.986	11.994
11.981	11.970	11.969	11.975	11.984	11.993
11.989	11.981	11.979	11.982	11.988	11.994
ans = cara 8					
11.997	11.996	11.997	11.998	11.999	12.000
11.993	11.992	11.993	11.995	11.997	11.999
11.991	11.987	11.988	11.992	11.995	11.998
11.990	11.985	11.985	11.989	11.993	11.997
11.991	11.985	11.985	11.988	11.992	11.997
11.995	11.991	11.990	11.991	11.994	11.997
ans = cara 9					
12.617	12.745	12.735	12.650	12.484	12.240
13.159	13.625	13.666	13.498	13.144	12.598
13.545	14.360	14.545	14.336	13.815	12.982
13.714	14.780	15.133	14.952	14.337	13.300
13.581	14.713	15.181	15.084	14.501	13.436
13.024	13.890	14.316	14.319	13.940	13.166
ans = cara 10					
13.809	14.125	14.108	13.923	13.527	12.841
15.192	16.390	16.498	16.142	15.323	13.885
16.068	18.092	18.543	18.113	16.944	14.854
16.411	18.979	19.803	19.442	18.090	15.575
16.068	18.752	19.815	19.631	18.360	15.822
14.687	16.750	17.708	17.726	16.899	15.062
ans = cara 11					
16.933	17.520	17.504	17.223	16.518	14.922
19.745	22.212	22.418	21.898	20.520	17.493
21.190	25.114	25.938	25.331	23.451	19.365
21.661	26.413	27.821	27.341	25.224	20.530
20.997	25.873	27.616	27.392	25.416	20.773
18.288	22.097	23.650	23.702	22.404	19.027
ans = cara 12					
26.529	27.285	27.278	27.007	26.139	23.199
30.959	34.914	35.162	34.679	33.116	28.271
32.570	38.303	39.319	38.778	36.762	30.795
32.375	39.521	41.132	40.737	38.590	32.021
32.106	38.717	40.622	40.456	38.403	32.039
27.952	33.321	35.011	35.079	33.696	28.911
valor cara = 4, valor profundidad = 6, dx=dy=dz=0.5					

Conclusión

Como conclusión de este trabajo podemos decir que gracias a una ardua investigación, hemos podido aplicar las Diferencias Finitas a un problema de transferencia de temperatura con las ecuaciones de Laplace. Gracias al software MatlOctave y Python, pudimos observar los resultados obtenidos por ambos métodos. Descubrimos que el método de Elementos Finitos puede perfectamente reemplazar una solución analítica de un problema, puesto que los resultados tienen una aproximación bastante cercana debido a la región irregular.