Review of Some Literature

Contents

1 Mathematical Expression of the Problem

假定可观测量 X 有级数展开式 $X = \sum c_n Q^n$，记 k 阶截断误差为

$$\Delta_k \equiv \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n Q^n \tag{1}$$

欲求 $\mathrm{pr}(\Delta_k | c_0, c_1, \ldots, c_k)$.

2 Assumptions and Priors

i) c_n 可视为某个上界 $\bar{c}$ 给定后的随机变量，c_n 彼此独立，而且服从同一个概率分布 $\mathrm{pr}(c_n|\bar{c})$.

ii) 从不同的先验信息出发可导出 $\mathrm{pr}(c_n|\bar{c})$, $\mathrm{pr}(\bar{c})$. Table 1 已列出三种 (Set A, B, C) 用于讨论。

3 General Formula of the h-omitted-term Approximation

考虑 $\Delta \approx \Delta_k^{(h)} \equiv c_{k+1}Q^{k+1} + c_{k+2}Q^{k+2} + \cdots + c_{k+h}Q^{k+h}$ 的情形，从等式

$$\mathrm{pr}(\Delta | c_0, c_1, \ldots, c_k) = \int \mathrm{pr}(\Delta|\bar{c}, c_0, c_1, \ldots, c_k)\mathrm{pr}(\bar{c}|c_0, c_1, \ldots, c_k)\,\mathrm{d}\bar{c} \tag{2}$$

出发，分别计算积分式中的两项如下，

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}(\Delta|\bar{c}, c_0, c_1, \ldots, c_k) &= \int \mathrm{pr}(\Delta|\bar{c}, c_0, c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{k+h})\mathrm{pr}(c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{k+h}|\bar{c}, c_0, c_1, \ldots, c_k)\,\mathrm{d}c_{k+1}\,\mathrm{d}c_{k+2}\cdots\mathrm{d}c_{k+h} \\ &\approx \int \delta\left(\Delta - \Delta_k^{(h)}\right)\mathrm{pr}(c_0, c_1, \ldots, c_k|\bar{c})\,\mathrm{d}c_{k+1}\,\mathrm{d}c_{k+2}\cdots\mathrm{d}c_{k+h}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathrm{pr}(\bar{c}|c_0, c_1, \ldots, c_k) = \frac{\mathrm{pr}(c_0, c_1, \ldots, c_k|\bar{c})\mathrm{pr}(\bar{c})}{\mathrm{pr}(c_0, c_1, \ldots, c_k)}, \quad \text{where} \quad \mathrm{pr}(c_0, c_1, \ldots, c_k) = \int \mathrm{pr}(c_0, c_1, \ldots, c_k|\bar{c}')\mathrm{pr}(\bar{c})'\,\mathrm{d}\bar{c}' \tag{4}$$

表 1: Prior pdfs.

Set	$\mathrm{pr}(c_n\|\bar{c})$	$\mathrm{pr}(\bar{c})$
A	$\frac{1}{2\bar{c}}\theta(\bar{c}-\|c_n\|)$	$\frac{1}{\bar{c}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_<}\theta(\bar{c}-\bar{c}_<)\theta(\bar{c}_>-\bar{c})$
B	$\frac{1}{2\bar{c}}\theta(\bar{c}-\|c_n\|)$	$\frac{1}{\bar{c}\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(\ln\bar{c})^2}{2\sigma^2}]$
C	$\frac{1}{\bar{c}\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{c_n^2}{2\bar{c}^2})$	$\frac{1}{\bar{c}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_<}\theta(\bar{c}-\bar{c}_<)\theta(\bar{c}_>-\bar{c})$

Eq (3) 中 $\approx$ 的出现是因为使用了近似 $\Delta\approx\Delta_k^{(h)}$，所以由此算出来的结果 $\mathrm{pr}(\Delta|c_0,c_1,\dots,c_k),\mathrm{pr}(\Delta|\bar{c})$ 相应地标记为 $\mathrm{pr}_k(\Delta|c_0,c_1,\dots,c_k),\mathrm{pr}_k(\Delta|\bar{c})$。Eq (2), (3), (4) 中所有 $\bar{c}$ 的积分区间都是 $(0,+\infty)$，而 $c_{k+1},c_{k+2},\dots,c_{k+h}$ 的积分区间都是 $(-\infty,+\infty)$。有时会先将 $\bar{c}$ 的积分区间取为 $(\epsilon,1/\epsilon)$，计算完成后再令 $\epsilon\to0^+$.

当 $k=1,\Delta\approx\Delta_k^{(1)}$，即使用首项近似时，Eq (3), (4) 代入 Eq (2) 得

$$\mathrm{pr}_1(\Delta_k^{(1)}|c_0,c_1,\dots,c_k)=\frac{\int\mathrm{pr}(c_{k+1}=\Delta_k^{(1)}/Q^{k+1}|\bar{c})\mathrm{pr}(c_0,c_1,\dots,c_k|\bar{c})\mathrm{pr}(\bar{c})\,\mathrm{d}\bar{c}}{Q^{k+1}\int\mathrm{pr}(c_0,c_1,\dots,c_k|\bar{c})\mathrm{pr}(\bar{c})\,\mathrm{d}\bar{c}},\qquad \mathrm{pr}(c_0,c_1,\dots,c_k|\bar{c})=\prod_{n=0}^{k}\mathrm{pr}(c_n|\bar{c}) \tag{5}$$

连乘式 $\prod\mathrm{pr}(c_n|\bar{c})$ 中的项数可能少于 $k+1$，因为对于某些可观测量来说，部分系数可能自动等于零，不存在是随机变量的说法。当 $\mathrm{pr}(\Delta_k|c_0,c_1,\dots,c_k)$ 求出后，可以进一步算出 $p\%$ 置信区间 $(-d_k^{(p)},+d_k^{(p)})$,

$$p\%=\int_{-d_k^{(p)}}^{+d_k^{(p)}}\mathrm{pr}(\Delta_k|c_0,c_1,\dots,c_k)\,\mathrm{d}\Delta_k \tag{6}$$

4 Analytic Result for Set A

给定 Set A (See 1) 中的先验概率，$\mathrm{pr}(\Delta_k^{(1)}|c_0,c_1,\dots,c_k)$ 可由 Eq (5) 解析地求出，并且由于最后的函数形式非常简单，相应的 $d_k^{(p)}$ 也可以直接计算 Eq (6) 中的积分得出。

因为常值函数存在归一化的问题，此时 $\bar{c}$ 的积分区间实际上取不到 $(0,+\infty)$。Set A 选取的区间为 $(\bar{c}_<,\bar{c}_>)$ (表现为 $\mathrm{pr}(\bar{c})$ 中的 θ 函数)，并且假定它足够宽，

$$\bar{c}_<<\bar{c}_{(k)}<\bar{c}_>,\qquad \bar{c}_{(k)}\equiv\max\{|c_0|,|c_1|,\dots,|c_k|\} \tag{7}$$

这样，Eq (5) 中分母的积分就容易算出，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\mathrm{pr}(c_0,c_1,\dots,c_k|\bar{c})\mathrm{pr}(\bar{c})\,\mathrm{d}\bar{c}&=\int_{\bar{c}_<}^{\bar{c}_>}\frac{1}{\bar{c}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_<}\prod_{n=0}^{k}\frac{\theta(\bar{c}-|c_n|)}{2\bar{c}}\,\mathrm{d}\bar{c}\\&=\frac{1}{2^{k+1}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_>}\int_{\bar{c}_{(k)}}^{\bar{c}_>}\frac{\mathrm{d}\bar{c}}{\bar{c}^{k+2}}\\&=\frac{1}{k+1}\frac{1}{2^{k+1}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_>}\cdot\left(\frac{1}{\bar{c}^{k+1}}\right)\Bigg|_{\bar{c}_>}^{\bar{c}_{(k)}}\end{aligned} \tag{8}$$

类似地，Eq (5) 中分子的积分计算如下，

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{pr}(c_{k+1}=\Delta_k^{(1)}/Q^{k+1}|\bar{c})\mathrm{pr}(c_0,c_1,\dots,c_k|\bar{c})\mathrm{pr}(\bar{c})\,\mathrm{d}\bar{c} &= \int_{\bar{c}_<}^{\bar{c}_>}\frac{1}{\bar{c}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_<}\prod_{n=0}^{k+1}\frac{\theta(\bar{c}-|c_n|)}{2\bar{c}}\,\mathrm{d}\bar{c}\\
&= \frac{\theta(\bar{c}_>-\bar{c}_{(k+1)})}{2^{k+2}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_>}\int_{\max(\bar{c}_<,\bar{c}_{(k+1)})}^{\bar{c}_>}\frac{\mathrm{d}\bar{c}}{\bar{c}^{k+3}}\\
&= \frac{1}{k+2}\frac{\theta(\bar{c}_>-\bar{c}_{(k+1)})}{2^{k+2}\ln\bar{c}_>/\bar{c}_>}\cdot\left(\frac{1}{\bar{c}^{k+1}}\right)\Bigg|_{\bar{c}_>}^{\max(\bar{c}_<,\bar{c}_{(k+1)})}\\
&\bar{c}_{(k+1)}\equiv\max(\bar{c}_{(k)},|\Delta_k^{(1)}|/Q^{k+1})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

这里 $\theta(\bar{c}_>-\bar{c}_{(k+1)})$ 与 $\max(\bar{c}_<,\bar{c}_{(k+1)})$ 的出现是未曾像 Eq (7) 那样假设 $\bar{c}_<<\bar{c}_{(k+1)}<\bar{c}_>$ 的结果。最后，在将 Eq (8), (9) 代入 Eq (5) 前，还需将结果中的 $k+1$ 替换成 n_c，因为有时 $c_0,c_1,\dots,c_k$ 可能并不会全部出现，所以要用 n_c 来表示这 $k+1$ 个系数中不为零的个数。总之，Eq (5) 可以化为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pr}(\Delta_k^{(1)}|c_0,c_1,\dots,c_k) &= \frac{\theta(\bar{c}_>-\bar{c}_{(k+1)})}{2Q^{k+1}}\cdot\frac{n_c}{n_c+1}\cdot\frac{(1/\bar{c}^{n_c+1})\big|_{\bar{c}_>}^{\max(\bar{c}_<,\bar{c}_{(k+1)})}}{(1/\bar{c}^{n_c})\big|_{\bar{c}_>}^{\bar{c}_{(k)}}}\\
&= \frac{1}{2Q^{k+1}}\frac{n_c}{n_c+1}\times\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{\bar{c}^{n_c+1}}\Big|_{\bar{c}_>}^{\bar{c}_{(k)}}}{\frac{1}{\bar{c}^{n_c}}\Big|_{\bar{c}_>}^{\bar{c}_{(k)}}}, & |\Delta_k^{(1)}|\le\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}\\ \dfrac{\frac{1}{\bar{c}^{n_c+1}}\Big|_{\bar{c}_>}^{|\Delta_k^{(1)}|/Q^{k+1}}}{\frac{1}{\bar{c}^{n_c}}\Big|_{\bar{c}_>}^{\bar{c}_{(k)}}}, & \bar{c}_{(k)}Q^{k+1}<|\Delta_k^{(1)}|\le\bar{c}_>Q^{k+1}\\ 0, & |\Delta_k^{(1)}|>\bar{c}_>Q^{k+1}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

这表明 $\mathrm{pr}(\Delta_k^{(1)}|c_0,c_1,\dots,c_k)$ 与 $\Delta_k^{(1)}$ 的函数关系事实上非常简单：在区间 $(-\bar{c}_{(k)}Q^{k+1},+\bar{c}_{(k)}Q^{k+1})$ 里，取值为与 $\Delta_k^{(1)}$ 无关的常数；在区间 $(-\infty,-\bar{c}_>Q^{k+1})$ 和 $(+\bar{c}_>Q^{k+1},+\infty)$ 里，取值为零；在这两种区间之外，函数值与 $\Delta_k^{(1)}$ 的依赖关系也具有 $ax^{-n}+b$ 的简单形式。这使得直接计算 Eq (6) 中的积分变得简单，

$$
p\% = \begin{cases}\dfrac{d_k^{(p)}}{Q^{k+1}}\dfrac{n_c}{n_c+1}\dfrac{\frac{1}{\bar{c}^{n_c+1}}\Big|_{\bar{c}_{(k)}}^{\bar{c}_>}}{\frac{1}{\bar{c}^{n_c}}\Big|_{\bar{c}_{(k)}}^{\bar{c}_>}}, & d_k^{(p)}\le\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}\\ 1-\dfrac{1}{Q^{k+1}}\dfrac{n_c}{n_c+1}\dfrac{1}{\frac{1}{\bar{c}^{n_c}}\Big|_{\bar{c}_{(k)}}^{\bar{c}_>}}\left[\dfrac{Q^{(k+1)(n_c+1)}}{n_c}\left(\dfrac{1}{\Delta_k^{n_c}}\right)\Bigg|_{\bar{c}_>Q^{k+1}}^{d_k^{(p)}}-\dfrac{\bar{c}_>Q^{k+1}-d_k^{(p)}}{\bar{c}_>^{n_c+1}}\right], & \bar{c}_{(k)}Q^{k+1}<d_k^{(p)}\le\bar{c}_>Q^{k+1}\\ 1, & d_k^{(p)}>\bar{c}_>Q^{k+1}\end{cases}
\tag{11}
$$

有时判定条件 $d_k^{(p)}\le\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}$ 会换成

$$
p\%\le(p\%)_\mathrm{t},\qquad (p\%)_\mathrm{t}\equiv\frac{\frac{1}{\bar{c}^{n_c+1}}\Big|_{\bar{c}_{(k)}}^{\bar{c}_>}}{\frac{1}{\bar{c}^{n_c}}\Big|_{\bar{c}_{(k)}}^{\bar{c}_>}}\cdot\frac{n_c}{n_c+1}\bar{c}_{(k)}
\tag{12}
$$

在 $(\bar{c}_<,\bar{c}_>)\to(0,\infty)$ 的极限情形，Eq (10), (11) 相应地化简为

$$
\mathrm{pr}(\Delta_k^{(1)}|c_0,c_1,\dots,c_k)=\frac{1}{2Q^{k+1}}\frac{n_c}{n_c+1}\frac{1}{\bar{c}_{(k)}}\times\begin{cases}1, & |\Delta_k^{(1)}|\le\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}\\ \left(\frac{\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}}{|\Delta_k^{(1)}|}\right)^{n_c+1}, & \Delta_k^{(1)}>\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}\end{cases}
\tag{13}
$$

$$
d_k^{(p)}=\bar{c}_{(k)}Q^{k+1}\times\begin{cases}\frac{n_c+1}{n_c}p\%, & p\le\frac{n_c}{n_c+1}\\ \left[\frac{1}{(n_c+1)(1-p\%)}\right]^{1/n_c}, & p>\frac{n_c}{n_c+1}\end{cases}
\tag{14}
$$

表 2: PRC2015 TABLE. II 的结果复现。$\bar{c}_{(k)} = 1$.

	min/max	Q	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
68%	0.001/1000	0.20	0.312	0.0408	0.00725	0.00136	0.000261
	0.25/4.0		0.219	0.0389	0.00717	0.00136	0.000261
	0.50/2.0		0.181	0.035	0.00677	0.00132	0.000257
	0.001/1000	0.33	0.515	0.111	0.0326	0.0101	0.00319
	0.25/4.0		0.362	0.106	0.0322	0.0101	0.00319
	0.50/2.0		0.299	0.0952	0.0304	0.00976	0.00314
	0.001/1000	0.50	0.78	0.255	0.113	0.0531	0.0255
	0.25/4.0		0.549	0.243	0.112	0.053	0.0255
	0.50/2.0		0.453	0.219	0.106	0.0514	0.0251
95%	0.001/1000	0.20	1.96	0.103	0.0137	0.00226	0.000407
	0.25/4.0		0.466	0.0773	0.0129	0.00223	0.000406
	0.50/2.0		0.292	0.0558	0.0106	0.00203	0.000388
	0.001/1000	0.33	3.24	0.281	0.0615	0.0168	0.00498
	0.25/4.0		0.768	0.21	0.0578	0.0166	0.00497
	0.50/2.0		0.482	0.152	0.0478	0.015	0.00474
	0.001/1000	0.50	4.91	0.645	0.214	0.0884	0.0398
	0.25/4.0		1.16	0.483	0.201	0.0873	0.0397
	0.50/2.0		0.73	0.349	0.166	0.0792	0.0379

5 Numeric Examination for Set A and C

对于首项近似下的 Set A，应用 $d_k^{(p)}$ 的隐式表达式 Eq (11)，可以得到 PRC2015 TABLE. II 的结果。这里我们使用了函数 `scipy.optimize.root_scalar()` 来求得 $p\% > (p\%)_t$ 时的结果 (见 `tab2.py`).

对于首项近似下的 Set C，可以应用公式 Eq (5) 数值计算得到 $\mathrm{pr}(\Delta_k^{(1)}|c_0, c_1, \ldots, c_k)$，然后使用隐式表达式 Eq (6) 求出 $d_k^{(p)}$ (见 `tab3-1.py`).

如果 Table 2 中的小数四舍五入到和 PRC2015 TABLE. III 中相应精度，那么可以发现两张表的结果是完全一致的，没有任何不同。