

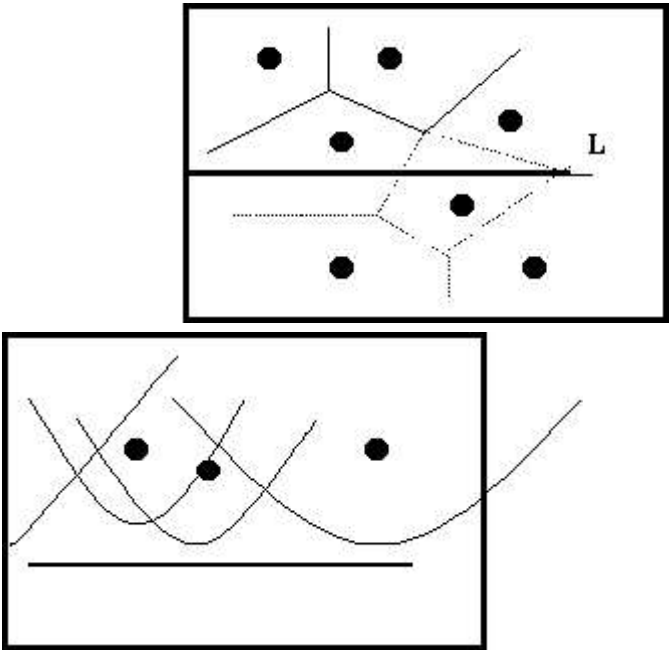
Sweep line 算法

 Sweep Line 算法是由Steve Fortune提出的，这个算法的平均复杂度是 $O(n)$ ，最坏复杂度是 $O(n \log n)$ 。

设新得到的点集是 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ；设水平扫描线为 L ，自上而下，逐点扫描；我们用 L^+ 表示 L 上半平面；用 L^- 表示 L 的下半平面；用 P^+ 表示 P 中在 L 上面的点的集合； P^- 表示 P 中在 L 下面的点的集合。 P^+, P^- 都是 P 的子集。如图1所示，当扫描线 L 在如图位置的时候， L^+ 的局部Voronoi图并不是仅仅由 P^+ 构成，而且受 P^- 的影响，所以并不能简单的求出在 L^+ 的Voronoi图；但是，我们注意到， L^+ 上的点到 L 的距离小于到 L^- 上的任意点的距离，从而也就小于 P^- 中的点。那么我们可以把 L^+ 这个半平面分成两部分，第一部分称之为 A ，它们中的每一个点到 P^+ 中每个点的距离的最小值小于或等于它们到 L 的距离；剩余的点构成另外一部分，称之为 B 。由Voronoi图的定义，我们可以得出，落在 A 部分的Voronoi图完全由 P^+ 上的点决定，因此它们不会随扫描线的下移而改变。那么如何得到 A 和 B 的边界呢？我们知道，到一个点和一条直线距离相等的点构成的集合是抛物线，那么，我们如果把所有关于 P^+ 上的点和扫描线 L 的抛物线得到，那么我们依次连接落在最低点的抛物线的曲线，就得到了这个边界（如图2所示），我们称这个边界为波浪线。

那么如何得到Voronoi图的局部呢？在扫描线依次扫描的时候，波浪线随着变化，波浪线只有在扫描线和一个在点集 P 中的节点相交的时候才会加入新的曲线（如图3所示），在一个新的曲线加入的同时，新的曲线和原

来的波浪线的两个交点就在Voronoi图的一条边上，两个交点在扫描线下移的时候沿两个相对的方向扩展，当扫描线到达某个特定位置的时候，其中一个交点就成了Voronoi图的一个顶点，新的Voronoi图的一条边也就完成了，同时波浪线相应的一段曲线也退化成了一个点。我们把扫描线与节点相交的事件称为Site Event，把得到一个Voronoi图的顶点的事件称为Circle Event。一个Site Event在扫描线和节点相交的时候发生，而Circle Event则比较复杂，首先可以证明，当L+中的三个节点共圆，这个圆与L相切，且圆中不包括其它的节点，则这时候Circle Event发生。



图

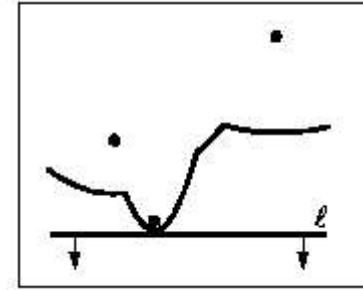
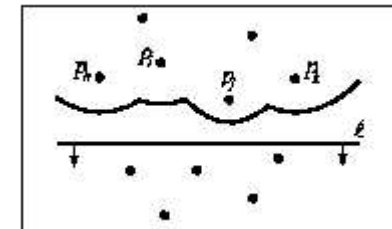
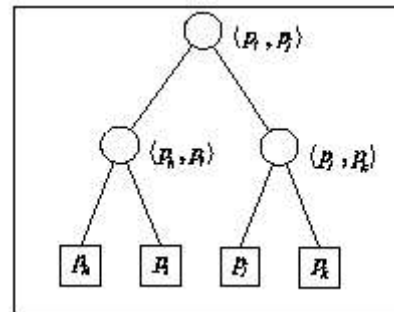


图3

数据结构可以用这样一个树结构来表示各个顶点以及它们的抛物线之间的关系，叶子节点是每个节点，在上一层是相邻的两个节点的抛物线的交点，可以证明这样的交点只有一个。那么增删交点都在这棵结构树来完成。



整个算法描述如下：

Algorithm VoronoiDiagram(P)

Input: 平面上的节点集。

Output: 用上面所说的树形结构表示的在某个边界的Voronoi图。

- ◆ 初始化事件栈Q, 加入所有Site Event。
- ◆ while Q is not empty
- ◆ 考虑在Q中y坐标值最大的事件
- ◆ 如果该事件是 p_i 的Site Event , 调用方法HandleSiteEvent(p_i);
- ◆ 否则调用方法HandleCircleEvent(p_l), 这里 p_l 是与这个事件相关的节点中坐标最小的一个;
- ◆ 从Q中删除该事件

由于Voronoi图里有射线, 因此扫描线在扫描完所有的节点后, 波浪线仍然在变化, 因此我们认为指定一个边界, 这个矩形边界包括Voronoi图的所有顶点。

Algorithm HandleSiteEvent(p_i):

1. 在波浪线的曲线集中查找在 p_i 上面的曲线 α , 删除在Q中涉及 α 所有的Circle Events;
2. 得到新的曲线, 将新产生的两个交点和周围曲线交点的关系表示在树形结构中;
3. 记录新产生的Voronoi图的边;
4. 检查是否出现新的Circle Event事件, 有则加入到Q。

Algorithm $\text{HandleCircleEvent}(p_1)$

1. 在波浪线的曲线集中查找在 p_1 上面的曲线 α ，删除在 Q 中涉及 α 所有的Circle Event;
2. 删除 α ，更新树形结构，并调整至左右子树平衡，把Circle的圆心加入Voronoi图结构中。



有关此站点的问题请向[\[lyq_ywj@keg.cs.tsinghua.edu.cn\]](mailto:lyq_ywj@keg.cs.tsinghua.edu.cn),

wpchen@cad.cs.tsinghua.edu.cn发邮件。

上次更新时间： 2001年01月12日。