Recherche opérationnelle

Mohamed Chahhou

Définition

- La recherche opérationnelle est une approche scientifique permettant de prendre les meilleurs décisions pour un problème donné.
- Aussi appelé : science de la gestion ou science de la décision.
- Elle inclut un ensemble de techniques ayant pour objectif:
  - Créer des modèles mathématiques décrivant des systèmes réels ou théoriques
  - Trouver des solutions optimales pour les modèles afin d’améliorer la performance des systèmes et aider à la prise de décision
- Elle tient compte des ressources limitées en imposant des contraintes (restrictions) à la solution optimale

Histoire

- Scientifiques anglais durant la 2ième guerre mondiale
- Allocation optimale des ressources pour les opérations militaires
  - Deploiment de radars
  - Gestion des convois militaires
  - Missions de bombardement
  - …
- Military Operations Research => Operations Research (Recherche Opérationnelles)

Exemple 1

- Une compagnie fabrique 2 produits (A et B) sur 3 machines.
- Les temps machines sont disponibles en quantités limitées.
- Les temps de traitement nécessaires par unité de chaque produit sont connus ainsi que les profits unitaires.

- Problème:
  - Déterminer le plan de production qui maximise le profit total sachant que :
    - Le profit pour le produit A est 3Dh et 5Dh pour le produit B.
    - Une unité du produit A nécessite une heure de traitement sur la machine 1, 0 heure sur la machine 2 et 3 heures sur la machine 3.
    - Une unité du produit B nécessite 0 heure de traitement sur la machine 1, 2 heures sur la machine 2 et 2 heures sur la machine 3.
    - La machine A est disponible pendant 4h, B pendant 12h et C pendant 18h

Modélisation

- La RO nécessite l'utilisation de modèles qui sont des représentations mathématiques du système étudié
- Modélisation : Description d'un système avec un niveau d'abstraction (simplification) élevé, qui ignore les détails non important à la résolution du problème

Modèle d’optimisation

- Un modèle d’optimisation a pour objectif de trouver les valeurs des variables de décision qui satisfont les contraintes du problème étudié et qui optimisent (maximisent ou minimisent) une ou plusieurs fonctions objectifs.
- **Variables de décision** : variables qu’on peut contrôler et qui influencent sur la performance du système
- **Fonction objectif** : appelée aussi fonction économique, est une fonction mathématique qu’on souhaite maximiser ou minimiser
- **Contraintes** : un ensemble de restrictions imposées aux variables de décision

Exemple 1 (suite)

Produits	Machine1	Machine2	Machine3	Profit
A	**1**	**0**	**3**	**3**
B	**0**	**2**	**2**	**5**
Disponibilité	**4**	**12**	**18**	

- Variables de décision:
  - x_1 : quantité du produit A à fabriquer
  - x_2 : quantité du produit B à fabriquer
- Fonction objectif:
  - $3x_1 + 5x_2$ (Profit total à maximiser en fonction des quantités produites)

Exemple 1 (Fin)

Produits	Machine1	Machine2	Machine3	Profit
A	**1**	**0**	**3**	**3**
B	**0**	**2**	**2**	**5**
Disponibilité	**4**	**12**	**18**	

- Contraintes:
  - $x_1 \leq 4$ (Machine 1)
  - $2x_2 \leq 12$ (Machine 2)
  - $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (Machine 3)
  - $x_1, x_2 \geq 0$

Fonctions linéaires

- $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est une fonction linéaire si et seulement si elle peut être écrite sous la forme: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ avec $c_1,c_2,\ldots,c_n$ des constantes
- Pour toute fonction linéaire $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et une quelconque constante b, les inégalités $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq b$ et $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq b$ sont des inégalités linéaires

exemples

- $-2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4$
- $2x_1x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2$
- $2x_1 + 3x_1 \leq 3-x_2$
- $e^a x_1+\ln(b)x_2 \leq x_3+c$, a,b,c sont des constantes
- $(x_1+2x_2)(x_2+x_3) \leq 4$
- $(x_1+2x_2)+(x_2+x_3) \leq 4$

Programmation linéaire

- Un problème de programmation linéaire est un problème d'optimisation pour lequel:
  - La fonction objectif doit être linéaire (combinaison linéaire des variables de décision)
  - Toute contrainte doit être une équation ou inégalité linéaire
  - Une contrainte de signe peut être associée à chaque variable de décision

Formulation du problème linéaire (Exemple)

Une usine fabrique deux types de produits, P1 et P2.
Maximiser le profit par jour

	Produits		Disponibilité
	P1	**P2**	
Cout de la matière première	2	2	
Cout de la main d'œuvre	5	4	
Temps par machine (en heure)	2	1	9 hr / jour
Temps d'emballage (heure)	1	2	9 hr / jour
Prix de vente	10	8	

Formulation du problème linéaire

- Variables de décision
  - x_1 = nombre d'unités P1 produites par jour
  - x_2 = nombre d'unités P2 produites par jour
- Fonction objectif
  - Maximiser le profit par jour (revenue - couts)
  - $Z = (10x_1+8x_2) – (2x_1+2x_2) – (5x_1+4x_2) = 3x_1 + 2x_2$
- Contraintes
  - Pas plus de 9hr/jour pour les machines : $\mathbf{2x_1+x_2 \leq 9}$
  - Pas plus de 9hr/jour pour l'emballage : $\mathbf{x_1+2x_2 \leq 9}$
  - Restrictions sur les signes : $\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$

Formulation du programme linéaire

Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2$

S.C

$$\mathbf{2x_1+x_2 \leq 9}$$

$$\mathbf{x_1+2x_2 \leq 9}$$

$$\mathbf{x_1 \geq 0}$$

$$\mathbf{x_2 \geq 0}$$

- S.C signifie : Sous Contrainte
- Toutes valeurs de x_1 et x_2 qui satisfont les 4 contraintes ci-dessus constituent une solution dite **solution réalisable**

Formulation du programme linéaire

- D'autres formes sont possibles et définissent aussi des modèles de programmation linéaire :
- les inégalités peuvent être remplacées par des égalités, ou être de sens contraire
- minimiser au lieu de maximiser :

$$
\begin{array}{ll}
\min z = 3x_1 - 8x_2 & \\
\text{S.C} & x_1 + 4x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max y = -z = -3x_1 + 8x_2 & \\
\text{S.C} & x_1 + 4x_2 \leq 10 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Exercice 1

- Considérons 3 magasins, A, B et C, ayant commandé 200 conteneurs chacun.
- 250 conteneurs sont disponibles au dépôt D1, 450 conteneurs sont disponibles au dépôt D2.
- minimiser le coût total de transport des conteneurs des dépôts vers les magasins sachant que les coûts de transport par conteneur sont :

magasin	A	B	C
dépôt D_1	3.4	2.2	2.9
dépôt D_2	3.4	2.4	2.5

Exercice 2

- Un agriculteur souhaite produire de la nourriture pour animaux en mélangeant du calcaire, du mais et du soja
- Pour chaque kg, le produit final doit contenir entre 0.008 et 0.012 kg de calcium, au moins 0.22kg de protéine et au maximum 0.05kg de fibres
- Un kg de calcaire contient 0.38kg de calcium et coute 0.1.
- Un kg de mais contient 0.001kg de calcium, 0.09kg de protéines et 0.02kg de fibres et coute 0.2.
- Un kg de soja contient 0.002kg de calcium, 0.5kg de protéines et 0.08 kg de fibres et coute 0.4
- Formuler le problème linéaire afin de trouver la combinaison optimale la moins chère.